

ATTI
DELLA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLVI
1959

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XXVII
(2° semestre 1959)



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1959

Matematica. — *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables.* Nota I (*) di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata dal Socio M. PICONE.

I. INTRODUCTION. — Comme nous l'avons prévu, le calcul opérationnel établi dans nos articles [5] et [6] (1) s'applique aux opérateurs différentiels linéaires d'ordre $n \leq 2$, à coefficients variables, sous des conditions très générales. Il est encore probable que ces résultats se généralisent à d'autres types d'opérateurs, inverses à gauche d'opérateurs de Volterra, en particulier à des opérateurs différentiels d'ordre plus élevé: on trouverait ainsi le développement naturel de la théorie de la composition de Volterra [8].

Un trait essentiel de ces recherches est la nécessité de considérer des extensions formelles de l'espace des fonctions (localement sommables), pour rendre inversibles les opérateurs en question. Dans le cas des opérateurs différentiels, il suffit que leurs coefficients ne soient pas indéfiniment dérivables (ce qui arrive couramment dans les applications), pour que les distributions ne soient plus utilisables: il faut alors envisager d'autres généralisations du concept de fonction. Nous avons convenu d'appeler *para-distributions associées à un opérateur donné* les nouvelles entités abstraites imposées par le calcul symbolique de cet opérateur. Pour ces extensions, notre méthode générale d'extension algébrique et topologique exposée dans [3] est naturellement indiquée, la méthode de dualité n'étant plus applicable (il existe des espaces de para-distributions qui sont isomorphes à des espaces de distributions, tout en étant *distincts* de ceux-ci). On pourrait aussi songer à utiliser ici les espaces de produits considérés par H. König dans ses théories de la multiplication [1]); mais ce n'est pas là l'outil adapté à notre étude.

D'autres formes de calcul opérationnel, que nous signalerons ici, exigent encore des extensions de l'espace de toutes les fonctions localement sommables sur la droite \mathbf{R} , ou même sur \mathbf{R}^n .

Parmi les applications possibles de ces calculs symboliques, nous pouvons citer le problème de Cauchy pour des équations à coefficients variables (par exemple, l'équation des ondes pour un milieu dont l'indice de réfraction varie suivant une direction), les problèmes mixtes pour les équations du type très général

$$\left[-\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(t) \frac{\partial}{\partial t} + s(t) \right] u = f \quad (\Delta, \text{opérateur elliptique positif})$$

étudié par J. Lions, suivant la méthode, pas très facile, des opérateurs de Delsarte (cfr. [2]), etc. Cependant, nous n'avons pas pu examiner en détail

(*) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1959.

(1) Les numéros entre crochets se rapportent à la Bibliographie qui suivra la deuxième partie de cette Note.

ces applications, dont la seconde exige encore l'extension de notre calcul opérationnel aux cas de fonctions vectorielles, d'après des recherches en cours au « Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa ».

Dans un article prochain, nous nous occuperons d'autres formes de calcul opérationnel, concernant des opérateurs à *spectre non borné*.

2. RAPPELS SUR LE CALCUL OPÉRATIONNEL RELATIF À L'ESPACE \mathfrak{A}_ω . — Pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$ nous désignons par \mathfrak{A}_k l'espace des fonctions complexes $\varphi(z)$ de la variable complexe telles que $\varphi(z)/z^k$ est continue et bornée dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq k$ et holomorphe pour $\operatorname{Re} z > k$. On peut évidemment considérer $\mathfrak{A}_k \subset \mathfrak{A}_{k+1}$ pour tout k ; la réunion de tous les \mathfrak{A}_k est l'espace \mathfrak{A}_ω des fonctions holomorphes à croissance lente dans des demi-plans droits, que nous considérons muni d'une topologie convenable (cfr. [5] et [6]). Le calcul opérationnel relatif à l'espace \mathfrak{A}_ω est basé sur la formule

$$(2.1) \quad \varphi(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - \infty i}^{\alpha + \infty i} \frac{\varphi(\lambda)}{\mathbf{a} - \lambda} d\lambda,$$

où φ est un élément de \mathfrak{A}_ω , α un nombre réel dépendant de φ et \mathbf{a} un opérateur ou, plus en abstrait, un élément d'une algèbre complexe \mathbf{A} munie d'élément unité $\mathbf{1}$ et d'une topologie d'espace localement convexe, par rapport à laquelle le produit $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ est séparément continu (pour simplifier nous posons $\lambda \mathbf{1} = \lambda$ pour tout scalaire λ). Dans la formule (2.1) l'intégrale aura le sens usuel si $\varphi(z)$ est bornée sur la verticale $\operatorname{Re} z = \alpha$; autrement, il s'agit d'une intégrale généralisée, dont la valeur peut être calculée tout simplement de la façon suivante: soit k un entier tel que la fonction $\psi(z) = \varphi(z)/z^k$, multipliée par z , soit bornée sur $\operatorname{Re} z \geq \alpha$; alors on a *au sens usuel*:

$$(2.2) \quad \varphi(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \mathbf{a}^k \int_{\alpha - \infty i}^{\alpha + \infty i} \frac{\psi(\lambda)}{\mathbf{a} - \lambda} d\lambda.$$

Pour que cette formule soit applicable, il faut et il suffit que: 1) l'élément $\mathbf{a} - \lambda$ de \mathbf{A} soit inversible pour tout nombre complexe λ ; 2) la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ soit bornée sur tout demi-plan gauche. Dans ces conditions, la formule (2.1) définit un homomorphisme continu $\varphi \rightarrow \varphi(\mathbf{a})$ de l'algèbre \mathfrak{A}_ω dans l'algèbre \mathbf{A} , le seul qui fasse correspondre à la fonction $\varphi(z) \equiv z$ l'élément \mathbf{a} de \mathbf{A} et à la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ l'élément unité de \mathbf{A} .

3. LES PARA-DISTRIBUTIONS ASSOCIÉES AUX OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DU 1^{er} ORDRE. — Désignons par L_0 l'espace vectoriel des fonctions complexes $f(x)$ de la variable réelle x , localement sommables sur \mathbf{R} et nulles pour $x < 0$, deux telles fonctions étant considérées identiques si elles coïncident presque partout. Soit d'autre part C_0^* le sous-espace de L_0 constitué par les fonctions absolument continues sur \mathbf{R} et nulles pour $x < 0$. Si alors

$a(x)$ et $b(x)$ sont deux fonctions localement sommables, $1/a(x)$ étant localement bornée, l'opérateur différentiel \mathfrak{D} donné par l'expression

$$(3.1) \quad \mathfrak{D}[u(x)] \equiv a(x) D u(x) + b(x) u(x)$$

où D est l'opérateur usuel de dérivation, définit une application linéaire biunivoque de C_0^* sur L_0 . Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, pour toute $f \in L_0$, l'équation différentielle en u

$$a(x) u' + b(x) u = f(x)$$

admet une (et une seule) solution dans C_0^* , donnée par

$$(3.2) \quad u(x) = \int_0^x e^{r(x)-r(\xi)} \frac{1}{a(\xi)} f(\xi) d\xi = \mathfrak{D}^{-1} f,$$

où

$$r(x) = - \int [b(x)/a(x)] dx.$$

Dans ces conditions, la méthode d'extension algébrique, que nous avons indiquée pour le cas le plus simple considéré dans [3], n°. 1, est immédiatement applicable ici. *Il est donc possible de construire une extension \tilde{L}_0 de l'espace vectoriel L_0 , de façon que l'on puisse prolonger l'application \mathfrak{D} de C_0^* sur L_0 , en une application linéaire $\tilde{\mathfrak{D}}$ de \tilde{L}_0 sur \tilde{L}_0 ayant le même noyau que \mathfrak{D} , c'est-à-dire, telle que, si $\tilde{\mathfrak{D}}F = 0$, avec $F \in \tilde{L}_0$, alors $F = 0$ (puisque \mathfrak{D} est une application biunivoque). D'ailleurs, cette extension \tilde{L}_0 sera unique, à un isomorphisme près, conservant $\tilde{\mathfrak{D}}$ et les éléments de L_0 , s'il on impose à \tilde{L}_0 la condition supplémentaire suivante, que nous supposons vérifiée: tout élément F de \tilde{L}_0 est de la forme $F = \mathfrak{D}^m f$, où $f \in L_0$ et m est un entier ≥ 0 .*

Les règles de calcul dans \tilde{L}_0 sont tout à fait simples. Dorénavant, nous désignerons $\tilde{\mathfrak{D}}$ simplement par \mathfrak{D} . Deux éléments $F = \mathfrak{D}^m f$, $G = \mathfrak{D}^n g$ de \tilde{L}_0 , avec $f, g \in L_0$, peuvent toujours se mettre sous la forme d'indice commun de dérivation: $F = \mathfrak{D}^p \bar{f}$, $G = \mathfrak{D}^p \bar{g}$; en effet, si, par exemple, on avait $m > n$, il suffirait de prendre $p = m$, $\bar{f} = f$ et $\bar{g} = (\mathfrak{D}^{-1})^{m-n} g$, où \mathfrak{D}^{-1} est l'opérateur inverse de \mathfrak{D} , défini dans L_0 par (3.2). Cela étant, le critère de l'égalité dans \tilde{L}_0 se réduit à la forme suivante:

On aura $\mathfrak{D}^m f = \mathfrak{D}^m g$, si et seulement si $f = g$.

D'autre part, la somme de $\mathfrak{D}^m f$ et $\mathfrak{D}^m g$ sera simplement

$$\mathfrak{D}^m f + \mathfrak{D}^m g = \mathfrak{D}^m (f + g),$$

tandis que le produit de $\mathfrak{D}^m f$ par un scalaire α et l'image de $\mathfrak{D}^m f$ par \mathfrak{D} sont donnés par

$$\alpha (\mathfrak{D}^m f) = \mathfrak{D}^m (\alpha f) \quad , \quad \mathfrak{D} (\mathfrak{D}^m f) = \mathfrak{D}^{m+1} f.$$

Les éléments $\mathfrak{D}^m f$ de cet espace $\tilde{\mathbb{L}}_0$ seront appelés les *para-distributions* (nulles à gauche de zéro) associées à l'opérateur \mathfrak{D} . Évidemment, si $a(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 0$, on a $\mathfrak{D} = D$ et les para-distributions considérées deviennent les distributions (d'ordre fini) nulles à gauche de zéro.

4. TOPOLOGIE DE $\tilde{\mathbb{L}}_0$ ⁽²⁾. — Pour définir une structure topologique dans $\tilde{\mathbb{L}}_0$ d'après les méthodes indiquées dans [3], § 2, on doit considérer d'abord des espaces plus simples, liés à $\tilde{\mathbb{L}}_0$.

Pour tout $k = 1, 2, \dots$, soit $L_{0,k}$ l'espace des fonctions définies et sommables dans l'intervalle $[-\infty, k]$, nulles pour $x < 0$, avec la définition usuelle de norme:

$$\|f\| = \int_0^k |f(x)| dx.$$

On définit une extension $\tilde{L}_{0,k}$ de $L_{0,k}$ d'une façon analogue à celle de $\tilde{\mathbb{L}}_0$ et on appelle *restriction* d'un élément $F = \mathfrak{D}^p f$ de $\tilde{\mathbb{L}}_0$ à $[-\infty, k]$ l'élément $F^* = \mathfrak{D}^p f^*$ de $\tilde{L}_{0,k}$, où f^* est la restriction de la fonction f à cet intervalle, au sens usuel: on voit aussitôt que cette opération $F \rightarrow F^*$ est une application linéaire de $\tilde{\mathbb{L}}_0$ sur $\tilde{L}_{0,k}$: nous la désignerons par ρ_k . D'autre part, si l'on désigne par $\mathfrak{D}^p L_{0,k}$ l'ensemble des éléments de la forme $F = \mathfrak{D}^p f$, avec $f \in L_{0,k}$, il est évident que $\tilde{L}_{0,k}$ est la réunion des espaces $\mathfrak{D}^p L_{0,k}$, pour $p = 0, 1, \dots$.

À l'espace $\tilde{L}_{0,k}$ nous donnerons, d'après le critère général considéré dans [3], th. 6, la plus fine topologie qui rende continu l'opérateur \mathfrak{D} , induisant dans $L_{0,k}$ une topologie moins fine que celle de cet espace. Alors $\tilde{L}_{0,k}$ sera la limite inductive des espaces normés $\mathfrak{D}^p L_{0,k}$, images de $L_{0,k}$ par \mathfrak{D}^p , $p = 0, 1, \dots$. On démontre aisément, comme dans le cas où $\mathfrak{D} = D$, que $\tilde{L}_{0,k}$ est un espace du type (\mathfrak{S}_2) , ce qui fournit aussitôt plusieurs critères simples ⁽³⁾. Par exemple, *une suite (F_n) converge vers un élément G dans cet espace, si et seulement s'il existe un entier p , une suite (f_n) de fonctions et une fonction g , tels que: $F_n = \mathfrak{D}^p f_n$, pour tout n , $G = \mathfrak{D}^p g$ et $f_n \rightarrow g$ dans l'espace $L_{0,k}$ (convergence en moyenne dans l'intervalle $[0, k]$)*.

Enfin, à l'espace $\tilde{\mathbb{L}}_0$ on donne la topologie la moins fine qui rende continus les opérateurs ρ_k (topologie de la limite projective par rapport aux ρ_k). Cet espace n'est pas complet, mais son complété (analogue à celui des distributions d'ordre quelconque nulles à gauche de 0) n'est pas indispensable pour notre étude. Pour la suite, il suffira de retenir le critère suivant, que l'on déduit des propriétés générales des limites projectives d'espaces (\mathfrak{S}_2) :

Pour qu'un ensemble $H \subset \tilde{\mathbb{L}}_0$ soit borné, il faut et il suffit que, pour tout entier k , il existe un entier p et un nombre μ , tels que la restriction de tout

(2) Le lecteur moins familiarisé avec la théorie des espaces localement convexes peut se borner, dans une première lecture, au critère énoncé à la fin de ce numéro.

(3) Nous appelons maintenant espaces du type (\mathfrak{S}_2) les espaces que, dans [4], nous avons désignés par «espaces du type $(\mathfrak{L}\mathfrak{N}^*)$ », lesquels s'identifient aux duals forts des espaces de Schwartz métrisables complets.

élément F de H à l'intervalle $] -\infty, k]$ soit de la forme $\mathfrak{D}^p f$, où f est une fonction sommable, nulle pour $x < 0$ et telle que $|f(x)| < \mu$ pour tout $x < k$.

5. LE CALCUL SYMBOLIQUE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES DU 1^{er} ORDE. — Il s'agit maintenant d'appliquer la formule (2.1) au cas où α est l'opérateur différentiel \mathfrak{D} défini par (3.1), \mathbf{A} étant l'algèbre $\mathfrak{L}(\tilde{L}_0)$ des applications linéaires continues de \tilde{L}_0 dans lui-même, munie de la topologie de la convergence simple ou de celle de la convergence bornée (les résultats sont équivalents). Or l'opérateur $\mathfrak{D} - \lambda$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. En effet, considérons, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $F \in \tilde{L}_0$, l'équation différentielle en $U \in \tilde{L}_0$:

$$(5.1) \quad \mathfrak{D}U - \lambda U = F.$$

Si l'on a $F = \mathfrak{D}^p f$, $U = \mathfrak{D}^p u$, avec $f, u \in L_0$, cette équation est équivalente à $\mathfrak{D}u - \lambda u = f$ et on voit aussitôt que (5.1) admet la solution unique

$$U = \frac{1}{\mathfrak{D} - \lambda} F = \mathfrak{D}^p \int_0^x e^{r(x)-r(\xi)} e^{\lambda[s(x)-s(\xi)]} \frac{1}{a(\xi)} f(\xi) d\xi$$

où

$$r(x) = - \int [b(x)/a(x)] dx, \quad s(x) = \int [1/a(x)] dx.$$

En posant

$$(5.2) \quad R(x, \xi; \lambda) = \begin{cases} e^{r(x)-r(\xi)} e^{\lambda[s(x)-s(\xi)]} \frac{1}{a(\xi)}, & \text{pour } x \geq \xi, \\ 0, & \text{pour } x < \xi \end{cases}$$

noyau de l'opérateur $(\mathfrak{D} - \lambda)^{-1}$ de Volterra, ce résultat peut s'écrire encore:

$$(\mathfrak{D} - \lambda)^{-1} F = \int_0^x R(x, \xi; \lambda) d\xi = \int_0^{+\infty} R(x, \xi; \lambda) F(\xi) d\xi,$$

en adoptant une généralisation convenable du concept d'intégrale. Il reste à prouver que cette fonction $(\mathfrak{D} - \lambda)^{-1}$ de λ est bornée sur les demi-plans gauches. Pour s'en convaincre il suffit d'observer que, pour tout $k = 1, 2, \dots$, la fonction $a e^{\lambda[s(x)-s(\xi)]}$ de λ , à valeurs dans l'espace des fonctions de x, ξ , sommables dans le triangle $0 \leq x \leq k, 0 \leq \xi \leq x$ (noyaux de Volterra), est bornée sur les demi-plans $\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha$, pourvu que $s(x)$ soit une fonction réelle non-négative de x .

Donc, si cette condition est vérifiée (en particulier si $a(x)$ est réelle positive), on peut appliquer la formule (2.1) au cas considéré. En posant, pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_k$, $k = 0, 1, \dots$,

$$(5.3) \quad \varphi[R](x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-\infty i}^{k+\infty i} R(x, \xi; \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda$$

on aura donc, pour toute para-distribution $F \in \tilde{\mathcal{L}}_0$:

$$(5.4) \quad \varphi(\mathfrak{D}) F = \int_0^x \varphi[R](x, \xi) F(\xi) d\xi.$$

Si d'ailleurs on a $F = \mathfrak{D}^k f$, avec $f \in \mathcal{L}_0$ et si l'on pose $\psi(z) = \varphi(z)/z^{k+1}$ on aura $\varphi[R](x, \xi) = \mathfrak{D}_x^{k+1} \psi[R](x, \xi)$ et la formule (5.4) peut s'écrire, *au sens usuel*,

$$(5.5) \quad \varphi(\mathfrak{D}) F = \mathfrak{D}^{k+1} \int_0^x \psi[R](x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Compte tenu de (5.3) et de l'expression (5.2) de $R(x, \xi; \lambda)$, si l'on désigne par Ψ l'image inverse de Laplace, $\mathfrak{L}^{-1} \psi$, de la fonction ψ , on peut donner à (5.5) la forme plus explicite

$$(5.6) \quad \varphi(\mathfrak{D}) F = \mathfrak{D}_x^{k+1} \int_0^x e^{r(x)-r(\xi)} \Psi[s(x) - s(\xi)] \frac{1}{a(\xi)} f(\xi) d\xi.$$

En particulier, pour $\varphi(z) \equiv 1$, en posant

$$\delta_{\mathfrak{D}}(x, \xi) = \mathfrak{D}_x \left\{ e^{r(x)-r(\xi)} H[s(x) - s(\xi)] \frac{1}{a(\xi)} \right\}$$

où H est la fonction de Heaviside, on trouve l'analogue de la formule de Dirac pour les para-distributions considérées:

$$F = \int_0^{+\infty} \delta_{\mathfrak{D}}(\hat{x}, \xi) F(\xi) d\xi, \quad \text{pour toute } F \in \tilde{\mathcal{L}}_0,$$

d'où l'on peut déduire l'expression générale des applications linéaires continues de $\tilde{\mathcal{L}}_0$ dans un espace localement convexe semi-complet; en particulier on trouve ainsi le dual de $\tilde{\mathcal{L}}_0$ et l'expression générale des opérateurs linéaires continus permutables avec \mathfrak{D} .

REMARQUE. — Si $b(x) = 0$, on a $\mathfrak{D} = a(x) D$, $r(x) = 0$ et la formule (5.6) se simplifie. D'ailleurs on a

$$a(x) D_x u[s(x)] \equiv D_x u(x), \quad \text{pour toute fonction } u \in C_0^*,$$

ce qui montre aussitôt que, dans ce cas, $\tilde{\mathcal{L}}_0$ n'est que l'image de l'espace correspondant de distributions, par le changement de variable $x \rightarrow s(x)$. On voit ainsi que: 1) *un changement de variable, qui est en général défendu dans le cadre strict des distributions, devient permis avec le passage aux para-distributions*; 2) *l'espace vectoriel topologique $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est, dans ce cas, isomorphe à l'espace correspondant de distributions, tout en étant distinct*. Cela confirme ce que nous avons annoncé dans l'introduction.