

ATTI  
DELLA  
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLVI  
1959

---

SERIE OTTAVA

---

RENDICONTI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

VOLUME XXVII  
(2° semestre 1959)



ROMA  
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
1959

**Matematica.** — *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables.* Nota II (\*) di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata dal Socio M. PICONE.

6. LES PARA-DISTRIBUTIONS ASSOCIÉES AUX OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DU 2<sup>d</sup> ORDRE. — Soit  $C_o^{**}$  l'espace des fonctions  $u(x)$  nulles pour  $x < 0$ , admettant dérivée seconde localement sommable sur  $\mathbf{R}$ . Nous désignerons maintenant par le symbole  $\mathfrak{D}$  tout opérateur du type

$$(6.1) \quad \mathfrak{D}u \equiv a(x)D^2u + b(x)Du + c(x)u, \quad \text{pour } u \in C_o^{**},$$

où  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  sont des fonctions localement sommables sur  $\mathbf{R}$ , la fonction  $1/a(x)$  étant supposée localement sommable et localement bornée. Chaque opérateur de ce type définit une application linéaire biunivoque de  $C_o^{**}$  sur  $L_o$ . En effet, l'équation différentielle en  $u$

$$a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x)$$

admet, pour toute  $f \in L_o$ , une solution unique dans  $C_o^{**}$ , donnée par l'expression

$$u(x) = \int_0^x R(x, \xi) f(\xi) d\xi = \mathfrak{D}^{-1}f,$$

où la « fonction de Green »  $R(x, \xi)$  est, pour tout  $\xi \leq x$ , une solution de l'équation homogène  $a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = 0$ , telle que  $R(\xi, \xi) = 0$ ,  $R'_x(\xi, \xi) = 1$  pour tout  $\xi$ ; nous supposons en outre  $R(x, \xi) = 0$ , pour  $x < \xi$ .

On peut donc concevoir une extension  $\tilde{L}_o$  de  $L_o$ , comme nous l'avons fait pour les opérateurs différentiels du 1<sup>er</sup> ordre: les entités formelles du type  $\mathfrak{D}^m f$ , avec  $f \in L_o$  et  $m$  entier seront appelées *para-distributions* (nulles à gauche de 0) associées à l'opérateur  $\mathfrak{D}$ , défini par (6.1).

7. NOUVELLE FORME DU CALCUL OPÉRATIONNEL. — La formule (2.1) n'est pas directement applicable aux opérateurs différentiels du 2<sup>d</sup> ordre. Au lieu de l'espace  $\mathfrak{A}_\omega$ , il faut considérer son image (vectoriel-topologique) par le changement de variable  $\varphi(z) \rightarrow \varphi(\sqrt{z})$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$ , où l'on prend  $\sqrt{z}$  positive sur le demi-axe réel positif. Nous désignerons par  $\mathfrak{A}_\omega^{(2)}$  cet espace image. Soit  $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega^{(2)}$  et  $\psi(z) = \varphi(z^2)$ . Alors  $\psi \in \mathfrak{A}_\omega$  et, puisque

$$\frac{1}{z-\lambda} - \frac{1}{z+\lambda} = \frac{2\lambda}{z^2-\lambda^2}, \quad \text{pour } z \neq \pm\lambda, z \neq \mp\lambda,$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1959.

on démontre que l'on a, en un sens généralisé, par rapport à la topologie de  $\mathfrak{A}_\omega^{(2)}$ :

$$\varphi = \frac{1}{i\pi} \int_{\alpha - \infty i}^{\alpha + \infty i} \frac{\lambda \varphi(\lambda^2)}{\hat{z} - \lambda^2} d\lambda,$$

avec  $\alpha > 0$ , dépendant de  $\varphi$ . On en déduit la formule

$$(7.1) \quad \varphi(\mathbf{a}) = \frac{1}{i\pi} \int_{\alpha - \infty i}^{\alpha + \infty i} \frac{\lambda \varphi(\lambda^2)}{\mathbf{a} - \lambda^2} d\lambda,$$

où  $\mathbf{a}$  est encore un élément d'une algèbre  $\mathbf{A}$  vérifiant les conditions indiquées au n° 2. On démontre que, pour que cette formule soit applicable, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:

I) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , l'élément  $\mathbf{a} - \lambda^2$  de  $\mathbf{A}$  est inversible.

II) Il existe une fonction  $f(\lambda)$ , à valeurs dans  $\mathbf{A}$ , bornée sur tout demi-plan gauche, telle que

$$\frac{1}{\mathbf{a} - \lambda^2} \equiv \frac{f(\lambda) - f(-\lambda)}{2\lambda}.$$

[On vérifie après que  $f(\lambda) = (\sqrt{\mathbf{a} - \lambda})^{-1}$ ].

Cela étant, la formule (7.1) définit un homomorphisme continu  $\varphi \rightarrow \varphi(\mathbf{a})$  de  $\mathfrak{A}_\omega^{(2)}$  dans  $\mathbf{A}$ , faisant correspondre à la fonction  $\varphi(z) \equiv z$  l'élément  $\mathbf{a}$  et à la fonction  $\varphi(z) \equiv 1$  l'élément unité de  $\mathbf{A}$ .

8. LE CALCUL SYMBOLIQUE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DU 2<sup>d</sup> ORDRE. — Soit maintenant  $\mathfrak{a}$  l'opérateur différentiel du 2<sup>d</sup> ordre  $\mathfrak{D}$  défini par (6.1) et  $\mathbf{A} = \mathfrak{L}(\tilde{\mathbf{L}}_0)$  où  $\tilde{\mathbf{L}}_0$  est l'espace des para-distributions associées à  $\mathfrak{D}$  (nulles à gauche de 0). L'élément  $\mathfrak{D} - \lambda$  de  $\mathbf{A}$  est évidemment inversible pour tout  $\lambda$ , puisque l'équation

$$a(x)u'' + b(x)u' + [c(x) - \lambda^2]u = f,$$

admet, pour toute  $f \in L_0$ , une solution unique dans  $C_0^{**}$ :

$$u = \int_0^x R(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mathfrak{D} - \lambda^2} f.$$

Il reste à voir si la condition II du n° précédent est vérifiée par cet opérateur  $\mathfrak{D}$ , à la place de  $\mathbf{a}$ . A cet effet nous avons divisé notre étude en trois étapes successives:

1<sup>o</sup>) Supposons  $b(x) = c(x) = 0$ , donc  $\mathfrak{D} = a(x)D^2$ . On trouve alors le résultat suivant:

*La condition II sera vérifiée, si  $\log a(x)$  est une fonction réelle de  $x$  à variation localement bornée.*

La démonstration, plutôt longue, que nous avons obtenue, découle des considérations heuristiques suivantes: 1) si  $1/a(x)$  est une fonction positive *en escalier*, le noyau de  $(\mathfrak{D} - \lambda)^{-1}$ , nul pour  $x < \xi$ , est de la forme

$$R(x, \xi; \lambda) \equiv \frac{1}{\lambda} \left[ A_{\xi}(\lambda) e^{\lambda x \sqrt{1/a(x)}} + B_{\xi}(\lambda) e^{-\lambda x \sqrt{1/a(x)}} \right]$$

dans chaque intervalle à droite de  $\xi$  où  $1/a(x)$  est constante, les coefficients  $A_{\xi}(\lambda)$ ,  $B_{\xi}(\lambda)$  étant de forme semblable en  $\lambda$  dans l'intervalle précédent et ainsi de suite jusqu'au premier intervalle à droite de  $\xi$  où ils ne dépendent pas de  $\lambda$ ; 2) on en déduit que, dans ce cas, la condition II est vérifiée; 3) dans le cas général, la fonction  $\log a(x)$  peut être approchée par des fonctions en escalier et on voit alors, compte tenu de l'hypothèse, que la condition II est encore vérifiée.

2°) Supposons seulement  $b(x) \equiv 0$ . Ce cas est plus compliqué: la condition II sera vérifiée, si, non seulement  $\log a(x)$  est une fonction réelle à variation localement bornée, mais aussi la fonction  $\log |\lambda^2 - c(x)|$  de  $x$  est localement à variation bornée, uniformément par rapport à  $\lambda$  avec  $|\operatorname{Re} \lambda|$  borné. Cela se vérifie, en particulier, si, pour tout  $k$ , l'intervalle  $[0, k]$  se décompose en un nombre fini d'intervalles où  $a(x)$  et  $c(x)$  sont des fonctions positives et monotones.

3°) Le cas général peut se réduire à l'antérieur par le changement classique d'inconnue  $u = v \exp \left[ -\frac{1}{2} \int (b/a) dx \right]$ ; mais cela exige que  $a(x)$  et  $b(x)$  soient absolument continues. Il serait intéressant de faire, dans ce cas, une étude directe, qui évite cette restriction.

9. LE CALCUL OPÉRATIONNEL DE BASE EXPONENTIELLE. — Le calcul opérationnel relatif à  $\mathfrak{A}_{\omega}$  nous permet en particulier de définir l'exponentielle symbolique,  $e^{-t\mathbf{a}}$  ou  $\exp(-t\mathbf{a})$ , où  $t$  est un paramètre réel  $\geq 0$  (cfr. [6], n° 8). On peut alors définir  $\varphi(\mathbf{a})$ , pour toute  $\varphi \in \mathfrak{A}_{\omega}$ , en partant de l'exponentielle symbolique, par la formule d'intégration réelle:

$$(9.1) \quad \varphi(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t\mathbf{a}) \Phi(t) dt, \quad \text{où } \Phi = \mathfrak{L}^{-1} \varphi,$$

l'extrême inférieur  $-\infty$  pouvant être remplacé par 0 pour toute  $\varphi \in \mathfrak{A}_{\omega}$ . Or la formule (9.1) peut être appliquée à d'autres espaces au lieu de  $\mathfrak{A}_{\omega}$ . Dans [6] nous avons considéré le cas de l'espace  $\mathfrak{A}_{\omega}$ , des fonctions  $\varphi(z) = e^{\alpha z} \psi(z)$ , avec  $\psi \in \mathfrak{A}_{\omega}$  et  $\alpha \geq 0$ , muni d'une topologie convenable; alors les images inverses de Laplace,  $\mathfrak{L}^{-1} \varphi$ , de  $\varphi$ , sont les distributions de support borné à gauche. Mais il y a encore d'autres cas qui ont beaucoup d'intérêt, *surtout pour la résolution de problèmes de Cauchy*. Il en est ainsi, par exemple, de l'espace (que nous désignerons par  $\mathfrak{D}^i$ ) des fonctions  $\varphi(z)$  définies sur l'axe imaginaire,  $\operatorname{Re} z = 0$ , indéfiniment dérivables et à décroissance lente sur cet axe;  $\mathfrak{D}^i$  est donc l'image, par la rotation  $z \rightarrow iz$ , de l'espace  $\mathfrak{D}$  des

fonctions qui ont les mêmes propriétés sur l'axe réel: nous lui donnerons la topologie image de celle de  $\mathfrak{D}$ , par cette rotation. La transformation de Laplace  $\mathfrak{L}$  coïncide alors avec la transformation de Fourier  $\mathfrak{F}$  suivie de la rotation  $z \rightarrow iz$  (cfr. [7], n° 8) et la formule (9.1) sera applicable à un élément  $\mathbf{a}$  de  $\mathbf{A}$ , si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées:

I) L'équation  $\mathbf{v}'(t) = -\mathbf{a} \mathbf{v}(t)$  admet, pour  $t$  réel quelconque, une solution  $\mathbf{v}(t)$ , que l'on désigne par  $\exp(-t\mathbf{a})$ , telle que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{1}$ .

II) Pour tout  $t$  réel,  $\exp(-t\mathbf{a})$  est un élément inversible de  $\mathbf{A}$  commutant avec  $\mathbf{a}$ .

III) La fonction  $\exp(-t\mathbf{a})$  de  $t$ , à valeurs dans  $\mathbf{A}$ , est à décroissance lente sur  $\mathbf{R}$ .

On peut encore considérer d'autres espaces fonctionnels (algèbres topologiques, comme  $\mathfrak{U}_\omega$  et  $\mathfrak{D}^i$ ), que nous désignerons en général par  $\mathfrak{H}$ . La condition III) varie avec  $\mathfrak{H}$ ; dans le cas où  $\mathfrak{H}$  est l'espace des fonctions entières de type exponentiel sur les horizontales et à croissance lente sur les verticales (exemples:  $e^z$ ,  $\sinh z$ , etc.), la condition III sera simplement supprimée, la distribution  $\Phi$  étant toujours à support borné.

Pour appliquer utilement ces résultats au cas des opérateurs différentiels  $\mathfrak{D}$  du 1<sup>er</sup> ordre définis au n° 3, il convient de considérer l'espace, que nous désignerons par  $\mathbf{L}$ , de toutes les fonctions  $f(x)$  localement sommables sur  $\mathbf{R}$ , et d'envisager une extension formelle,  $\tilde{\mathbf{L}}$ , de  $\mathbf{L}$  qui permette de prolonger  $\mathfrak{D}$  en une application linéaire de  $\mathbf{L}$  sur  $\tilde{\mathbf{L}}$ . Il y a maintenant une différence, par rapport à  $\mathbf{L}_0$ : l'application  $\mathfrak{D}$  n'est plus biunivoque, son noyau étant formé par les fonctions  $C \exp r(x)$ ,  $C$  constante arbitraire. Mais notre méthode générale d'extension algébrique et topologique est encore applicable à ce cas. Les éléments de  $\tilde{\mathbf{L}}$  seront dits les *para-distributions* associées à  $\mathfrak{D}$ .

Simplement, si l'on veut employer la formule (9.1) avec  $\varphi$  appartenant à l'espace  $\mathfrak{D}^i$ , il faudra se borner à un sous-espace de  $\tilde{\mathbf{L}}$  formé par les *para-distributions à croissance lente*, c'est-à-dire, de la forme  $\mathfrak{D}^p f$ , où  $f$  est une fonction  $\in \mathbf{L}$  à croissance lente, cet espace étant muni d'une topologie semblable à celle de l'espace des distributions tempérées, qui en est un cas particulier.

L'exponentielle symbolique  $\exp(-t\mathfrak{D})$  peut être évaluée de deux manières différentes: ou bien directement, en résolvant le problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{D}_x v = 0, \quad \text{avec } v(x, 0) \equiv v_0(x), v_0 \in \mathbf{L}$$

[on aura alors  $v = \exp(-t\mathfrak{D}) v_0$ ]; ou bien *indirectement*, en employant l'antérieur calcul opérationnel au cas des espaces  $\mathfrak{U}_\omega$  et  $\mathbf{L}_0$ , en décomposant chaque élément  $F$  de  $\tilde{\mathbf{L}}$  en une somme  $F(x) = F_1(x) + F_2(-x)$ , avec  $F_1, F_2 \in \tilde{\mathbf{L}}$  (ce qui est toujours possible) et en posant  $\exp(-t\mathfrak{D}_x) F(x) = \exp(-t\mathfrak{D}_x) F_1(x) + \exp(-t\mathfrak{D}_x) F_2(x)$ ,  $\exp(t\mathfrak{D}) = 1/\exp(-t\mathfrak{D})$ , pour tout  $t$  réel.

REMARQUE. — Le calcul opérationnel de base exponentielle pourra encore s'appliquer au cas des opérateurs différentiels du 2<sup>d</sup> ordre, mais cela exige des détours qu'il ne serait pas facile de résumer ici.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. KÖNIG, *Multiplikation von Distributionen I*, «Mathematische Annalen», 128, pp. 420-452 (1954).
- [2] J. LIONS, *Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes*. «Bull. Soc. Math. France», 84, pp. 9-95 (1956).
- [3] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*, «Rev. Fac. Ciências Lisboa», 2<sup>a</sup> serie A, 4, pp. 79-186 (1954-55).
- [4] —, *Su certe classi di spazi localmente convessi, importanti per le applicazioni*, «Rend. Mat. Univ. Roma», serie V, pp. 388-410 (1955).
- [5] —, *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*, «Portugaliae Math.», 14, pp. 105-132 (1955).
- [6] —, *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. «Port. Math.», 17, pp. 1-17 (1958).
- [7] —, *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*, «Math. Annalen», 136, pp. 58-96 (1959).
- [8] V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*. Paris, Gauthier-Villars (1924).