

UNIVERSIDADE DE LISBOA

---

REVISTA  
DA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS

2.<sup>a</sup> SÉRIE  
A — CIÊNCIAS MATEMÁTICAS  
VOL. IV



1954-1955  
BIBLIOTECA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS  
Rua da Escola Politécnica  
LISBOA

# SUR UNE CONSTRUCTION AXIOMATIQUE DE LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS (\*)

PAR

J. SEBASTIÃO E SILVA

## Introduction

«[...] ce n'est qu'en donnant droit de cité à des éléments formels que plusieurs branches de l'Analyse ont pu avancer».

(VOLTERRA, *Leçons sur la composition*)

Le fait que toutes les fonctions ne soient pas dérivables est à l'origine d'une grande partie des complications que l'on trouve dans l'analyse réelle. La critique des fondements, entreprise surtout vers la fin du siècle XIX, a conduit à une délimitation précise entre ce qui est *permis* et ce qui est *défendu*. Mais le perfectionnement logique a entravé en quelque sorte l'imagination créatrice, et ce sont les «esprits indisciplinés» — surtout des physiciens, insoucieux de la rigueur mathématique et orientés plutôt vers la nature des questions concrètes — qui ont contribué, d'une façon plus efficace, à l'élargissement des cadres. Le calcul symbolique des électriciens, la mécanique ondulatoire, etc. ont introduit des êtres bizarres (comme la fonction  $\delta$  de DIRAC et ses dérivées), dont la définition mathématique était dénuée de sens, mais qui, tout de même, servaient de base à des méthodes fructueuses. «Quand une telle situation contradictoire se présente» dit M. L. SCHWARTZ dans l'introduction de son ouvrage [17](\*\*) «il est bien rare qu'il n'en résulte une

---

(\*) Reçu le 2 octobre 1954.

(\*\*) Les numéros entre crochets se rapportent à la Bibliographie, qui se trouve à la fin de ce mémoire.

théorie mathématique nouvelle qui justifie, sous une forme modifiée, le langage des physiciens; il y a même là une source importante de progrès des mathématiques et de la physique».

La théorie des distributions de SCHWARTZ n'a pas permis seulement de donner une justification complète à ces procédés audacieux: elle englobe et précise, en même temps, des conceptions hétérogènes qui poussaient, d'une façon plus ou moins affirmée, souvent incorrecte, dans plusieurs domaines des mathématiques: théorie des équations aux dérivées partielles, théorie de la série et de l'intégrale de FOURIER, topologie algébrique, etc. (voir [17], introduction). Elle s'impose donc comme une nécessité historique, et c'est ce qui explique, en partie, son rapide succès, surtout parmi la jeune génération.

La notion de distribution généralise la notion de fonction, comme, par exemple, la notion de nombre complexe généralise celle de nombre réel. Il s'agit là de phénomènes très semblables. Lorsqu'une opération est impossible en certains cas, il y a une tendance naturelle à enfreindre l'ordre établi, en continuant à opérer formellement, suivant des règles de calcul qui sont valables (parfois avec des restrictions) dans le domaine classique. Cela peut ne conduire à rien d'autre qu'à des erreurs ou des contradictions; mais, quelques fois, on parvient de cette manière à un ordre nouveau — plus riche et plus harmonieux.

Pour construire une théorie des nombres réels ou des nombres complexes, on peut suivre plusieurs orientations: il y a pour cela des méthodes synthétiques, des méthodes analytiques et des méthodes axiomatiques.

Pour construire sa théorie des distributions, M. SCHWARTZ a choisi le point de vue fonctionnel (que l'on pourrait aussi nommer synthétique): il présente les distributions comme fonctionnelles linéaires continues dans certains espaces de fonctions indéfiniment dérivables. Mais,

en vérité, les premières tentatives pour créer une théorie des distributions suivent l'orientation formelle ou axiomatique, d'une façon plus ou moins consciente. A propos des méthodes de BOCHNER dans l'étude de l'intégrale de FOURIER, où «l'introduction des distributions est inévitable, sous une forme directe ou camouflée», SCHWARTZ observe (loc. cit.): «Les «distributions» de BOCHNER sont, au fond, définies comme dérivées de fonctions continues n'ayant pas nécessairement de dérivée usuelle; notre théorème XXI du chapitre III exprime justement qu'une distribution est, localement, une dérivée d'une fonction continue. Il nous paraît bien préférable d'avoir cette propriété plutôt comme théorème que comme définition (à cause de l'indétermination de l'ordre de dérivation et de la fonction continue, surtout pour plusieurs variables)».

Eh bien, nous nous proposons de donner ici une définition du concept de distribution, au moyen d'un système d'axiomes, qui revient à concevoir une distribution, au point de vue local, précisément comme une «dérivée formelle» d'une fonction continue. On verra par la suite comment il est possible d'obvier à l'inconvénient de l'indétermination, signalé par M. SCHWARTZ. On réussit alors, il nous semble, à rendre plus accessibles les fondements de la théorie et on obtient une méthode plus directe pour s'attaquer à plusieurs problèmes.

Il faut remarquer que la possibilité d'une construction directe, purement formelle, de la théorie des distributions avait déjà été indiquée par M. H. KÖNIG dans sa Thèse, [14]. Toutefois ce travail, tout en étant décisif, n'est pas encore définitif, dans cette ligne de recherches qu'il a ouverte d'une façon remarquable. En effet, M. KÖNIG ne donne pas une vraie axiomatique des espaces de distributions (c'est-à-dire, un ensemble d'axiomes définissant ces espaces à moins d'un isomorphisme), bien qu'il ait déjà tous les éléments pour le faire: il construit, pour chaque ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , une structure formelle munie de

notions de «somme», «dérivées» et «limites de suites» et il démontre que cette structure est isomorphe à l'espace des distributions dans  $\Omega$ . D'autre part, l'étude topologique de ces espaces n'est pas encore approfondie dans [14], ce qui ne permet pas de voir la possibilité de refaire entièrement la théorie des distributions, d'après ce point de vue.

Notre idée initiale a été indépendante de celle de KÖNIG, mais il faut bien dire que la lecture de son travail nous a influencé en plusieurs points; d'ailleurs, bien que nos méthodes soient différentes, la source en est la même: elles sont directement suggérées par l'œuvre de M. SCHWARTZ. En vérité, on ne fait que renverser l'ordre logique établi dans [17], en choisissant pour points de départ certaines propositions qui, dans cet ouvrage, se présentent comme des théorèmes, des résultats: M. KÖNIG s'est inspiré au th. XXX, tandis que nous avons choisi le th. XXI (déjà cité) et le principe du recollement des morceaux (th. IV).

Le principe heuristique qui nous a guidé dans les recherches est celui de la conservation des règles de calcul. Soient  $f, g, \dots$  des symboles de fonctions continues de  $n$  variables réelles, définies dans un intervalle  $Q$  de  $\mathbf{R}^n$ ; si l'on se tient à la définition habituelle de dérivée, les expressions  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots$  n'auront pas de sens en général. Mais on trouve une situation analogue à propos de l'expression  $\sqrt{a}$ , qui n'a pas de sens, dans le domaine réel, pour  $a < 0$ ; et on sait que, si l'on opère sur les expressions de ce type suivant les règles usuelles (avec quelques modifications en ce qui concerne les radicaux), on n'arrive jamais à une contradiction: c'est là l'origine du concept de nombre complexe.

De même, on peut opérer sur les dérivées formelles suivant certaines règles («la dérivée d'une somme est la

somme des dérivées», «il est permis d'intervertir l'ordre des dérivations», etc.), sans jamais se heurter à une contradiction. Seulement, pour que ce calcul puisse être utile, il faut choisir une définition convenable d'égalité pour les dérivées formelles (ou mieux, d'équivalence, pour les expressions considérées). D'abord, on doit rappeler que, pour chaque fonction continue  $f$  et chaque indice  $i$ , il existe une infinité de fonctions  $F$  telles  $f = D_{x_i} F$  (au sens usuel), deux d'entre elles différant toujours d'une fonction indépendante de  $x_i$ . Alors, si l'on a, par exemple, deux symboles de dérivation  $D_{x_i}, D_{x_k}$ , avec  $i \neq k$ , et deux fonctions continues  $f, g$ , il sera toujours possible de trouver deux fonctions  $F, G$ , telles que l'on puisse écrire, formellement,  $D_{x_i} f = D_{x_i} D_{x_k} F$ ,  $D_{x_k} g = D_{x_i} D_{x_k} G$ . En raisonnant de la sorte, on s'aperçoit que, en général, deux dérivées formelles peuvent toujours être ramenées à la forme de dérivées avec un même symbole composé de dérivation. (On observe un fait semblable avec les fractions numériques: deux nombres rationnels peuvent toujours être représentés par des fractions avec un dénominateur commun. Cette analogie n'est pas accidentale: elle nous a fourni les premières intuitions décisives; nous avons pris pour modèle la théorie analytique des nombres rationnels). Considérons le symbole composé de dérivation  $D^p = D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \dots D_{x_n}^{p_n}$ . Si l'on veut que les règles usuelles soient conservées, on devra considérer  $D^p f = D^p g$ , si (et seulement si)  $D^p (f - g) = 0$ . On est donc ramené à fixer, pour chaque  $n$ -uple  $p$  d'entiers, l'ensemble des fonctions continues  $\theta$  vérifiant  $D^p \theta = 0$ . Il n'est pas difficile de voir que cet ensemble [que nous désignons par  $\widehat{N}(D^p)$ ] doit contenir toutes les fonctions de la forme (1.1) (§ 1, n.º 1); d'autre part, il est naturel de se borner à ces fonctions. Avec le choix des ensembles  $\widehat{N}(D^p)$ , le critère d'égalité pour les dérivées formelles reste fixé et on obtient les premières distributions dans l'intervalle

$Q$  de  $\mathbb{R}^n$ , sous la forme de classes d'équivalence d'expressions du type considéré <sup>(1)</sup>.

Mais il faut que les distributions ressemblent le plus possible aux fonctions — spécialement aux fonctions indéfiniment dérivables. On définit une fonction dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , en faisant correspondre un nombre à chaque point  $x$  de  $\Omega$ . Cela n'est plus possible, en général, pour les distributions. Mais on peut se demander ce que doit devenir une distribution  $T$  dans un voisinage  $V_x$  de chaque point  $x$  de son domaine  $Q$  — c'est-à-dire, ce que l'on doit entendre par *restriction* de  $T$  à un intervalle  $Q^* \subset Q$ . Or, il est déjà possible de définir, d'une façon assez naturelle, un concept de restriction d'une distribution, en exigeant que certaines règles soient conservées, spécialement celle-ci : «La restriction d'une dérivée  $D^p$  est la dérivée  $D^p$  de la restriction». Et finalement, pour rapprocher le concept de distribution de celui de fonction, on est porté à introduire la règle suivante, que M. SCHWARTZ a nommé suggestivement le *principe du recollement des morceaux* : «On définit une distribution  $T$  dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , lorsqu'on fait correspondre, à chaque point  $x$  de  $\Omega$ , une distribution  $T_x$  définie dans un voisinage  $V_x$  de  $x$ , de façon que ces distributions coïncident dans les parties communes de leurs domaines ; la restriction de  $T$  à  $V_x$  sera  $T_x$  pour tout  $x \in \Omega$ ». Mais alors une distribution dans  $\Omega$  ne sera plus, en général, une dérivée d'une fonction continue dans  $\Omega$  ! Seulement dans un voisinage convenable de chaque point de  $\Omega$  on laissera subsister cette propriété.

Voilà, en peu de lignes, la genèse de l'axiomatique que nous présentons au n.º 14 et que l'on pourra lire tout

---

(1) Cette définition d'égalité ne figure pas d'une façon explicite, dans l'ouvrage de SCHWARTZ. Mais les ensembles de fonctions que nous désignons ici par la notation  $\hat{N}(D^p)$  jouent déjà un rôle essentiel dans la Thèse de KÖNIG.

de suite, sans préparation. Il est à souligner que, dans cette axiomatique, on n'a employé aucune structure topologique des espaces de distributions. Pour définir le concept de distribution on n'a besoin que de considérations algébriques.

Il s'agit là, tout d'abord, d'un problème d'extension algébrique, que l'on est induit à poser et à résoudre sous une forme très générale, suivant les méthodes de l'algèbre abstraite. Cela explique l'orientation que nous avons choisie, le caractère abstrait des considérations des n.<sup>os</sup> 1, 2, 5 et 7. Nous aurions pu rendre beaucoup plus brève la rédaction du § 1 (et d'une partie du § 2), si nous avions renoncé à cette généralité. Mais nous avons préféré cette orientation, d'une part, parce que nous l'avons suivie effectivement dans nos recherches, et d'autre part, parce qu'on ne sait jamais si d'autres applications ne seront pas possibles.

Le résultat central est le théorème 1, qui, en particulier, sert à justifier le calcul des dérivées formelles que nous avons esquissé ci-dessus (distributions d'ordre fini). Ensuite, le besoin de définir la notion de restriction nous a conduit, dans le même ordre d'idées, au théorème général d'homomorphisme (th. 2). La notion de limite projective algébrique de groupes (n.<sup>o</sup> 7) a été introduite pour définir la notion de distribution d'ordre arbitraire (fini ou infini), dans un ouvert quelconque de  $\mathbf{R}^n$ . Enfin, la notion de produit multiplicatif est définie au n.<sup>o</sup> 9 d'une façon formelle, d'après les idées de KÖNIG dans [14].

Dans le § 2 nous étudions le problème de l'introduction de topologies convenables dans les espaces de distributions et nous obtenons des résultats qui nous semblent essentiellement nouveaux. M. SCHWARTZ avait introduit, dans l'espace  $(\mathcal{D})$  des distributions dans  $\mathbf{R}^n$ , la topologie forte par rapport à l'espace  $(\mathcal{D})$ , des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, dont  $(\mathcal{D})$  est

le dual; il ne s'est pas préoccupé de définir cette topologie *directement*, sans recourir à l'espace  $(\mathcal{D})$ . Mais dans [17] il donne des critères directs pour les limites des suites et une caractérisation des ensembles bornés dans  $(\mathcal{D})'$ . Avec ces ressources et quelques résultats contenus dans le mémoire [10] de DIEUDONNÉ-SCHWARTZ (prop. 14 et th. 5) il ne manquait plus rien pour la définition directe de cette topologie, si ce n'est le concept général de limite inductive d'espaces localement convexes, qui a été considéré seulement plus tard.

Pour introduire et étudier la topologie des espaces de distributions, nous utilisons un résultat (th. 7) que nous avons déjà signalé dans [20], à propos de certains espaces fonctionnels analytiques, très semblables aux espaces de distributions  $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$  ici considérés. Le th. 7, avec le théorème de ASCOLI sur les familles de fonctions équi-continues, nous donne la clef de la question topologique dans les espaces de distributions.

En particulier, nous montrons (n.º 20) que la considération des limites de suites est suffisante pour déterminer la topologie de ces espaces (prop. 18 et son corollaire). Cette remarque nous semble assez importante, puisque, pour les applications, on pourra se borner à la notion de limite d'une suite, plus accessible aux techniciens que celle d'un filtre convergent quelconque, employée par M. SCHWARTZ.

Enfin, dans le § 3, nous cherchons les espaces duals topologiques des espaces de distributions et nous retrouvons les espaces de fonctions indéfiniment dérivables d'où M. SCHWARTZ est parti pour construire sa théorie. À cet effet, nous employons des méthodes parfaitement analogues à celles que nous avons déjà suivies dans notre systématisation de la théorie des fonctionnelles analytiques (voir [19]) et qui peuvent également servir pour la recherche des applications linéaires continues

d'un espace de distributions dans un espace localement convexe quelconque. Cette recherche est en rapport direct avec l'étude des *noyaux distributions* (voir [18]) et, en particulier, avec le concept de *produit de composition*. Nous indiquons aux n.<sup>os</sup> 21, 22 et 25 les premiers résultats dans cette direction. Il s'agit là essentiellement de caractériser certaines fonctions indéfiniment dérivables, à valeurs dans un espace fonctionnel donné. Avec cette orientation, l'analogie entre la théorie des distributions et la théorie des fonctionnelles analytiques se révèle très étroite, plus encore que l'on pourrait l'imaginer après les travaux [15], [16], [13], [22] et [23], de KÖTHE, GROTHENDIECK, SILVA DIAS et TILLMANN.

Mais il y a plusieurs classes importantes de distributions (distributions à support compact, distributions bornées, distributions tempérées, etc.), comme il y a plusieurs classes de fonctions (fonctions continues, fonctions à carré sommable, etc.). Et, pour chacune de ces classes de distributions (comme pour chacune de ces classes de fonctions), il existe une structure topologique, spécialement indiquée. Il s'agirait donc, maintenant, de faire l'étude *directe* de ces espaces particuliers de distributions, dont M. SCHWARTZ a fait des applications profondes. Nous nous bornons à esquisser cette étude pour les espaces de distributions à support compact (n.<sup>o</sup> 26).

Il reste aussi à examiner le cas des distributions dans une variété indéfiniment différentiable quelconque. Nous croyons que, dans ce cas, on devra faire un usage plus étendu du principe du recollement des morceaux, avec les méthodes de la topologie algébrique.

Nous tenons à remercier ici vivement Monsieur G. KÖTHE de l'aide précieuse qu'il a bien voulu nous prêter, soit en nous faisant connaître la Thèse de KÖNIG après que nous avons obtenu nos premiers résultats, soit en nous renseignant sur plusieurs points de la théorie des

espaces localement convexes, soit encore en acceptant de faire la revision critique de notre manuscrit, qui a pu être amélioré en plusieurs points après ses remarques, surtout dans l'analyse logique du n.º 14.

Nous tenons aussi à remercier vivement Monsieur L. SCHWARTZ des renseignements et des conseils éclairés qu'il a été bien aimable de nous donner. C'est lui qui, dans une lettre, nous a suggéré le «recollement des morceaux» comme moyen pour gagner les distributions d'ordre infini en partant des distributions d'ordre fini. Nous avons essayé de le faire par complétion topologique, ce qui est possible, mais moins naturel.

## § 1 — L'extension algébrique

1. Préliminaires — D'une façon générale nous adoptons ici la terminologie et les notations de l'école BOURBAKI (cf. [2], [3], [4], [5], [6] et [7]). Mais nous avons essayé de réduire l'étendue des connaissances nécessaires au préalable. D'ailleurs, la nature spéciale de ce travail exige quelques considérations préparatoires.

a) Soit  $\Phi$  une application d'un ensemble  $A$  sur un ensemble  $B$  et soit  $v$  un élément de  $B$ . Nous désignerons par  $\Phi^{(-1)}(v)$  l'image réciproque de  $v$  par  $\Phi$ , c'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments  $u$  de  $A$  tels que  $\Phi(u) = v$ . Analoguement, si  $C$  est une partie de  $B$ , nous désignerons par  $\Phi^{(-1)}(C)$  l'image réciproque de  $C$  par  $\Phi$ , c'est-à-dire, la réunion de tous les ensembles  $\Phi^{(-1)}(v)$ , avec  $v \in C$ .

b) Soit  $E$  un ensemble quelconque et soit  $\Lambda$  un ensemble d'applications de *parties* de  $E$  sur  $E$ . Pour tout élément  $\Phi$  de  $\Lambda$ , nous poserons  $E_\Phi = \Phi^{(-1)}(E)$  et nous dirons que  $E_\Phi$  est le *domaine* de  $\Phi$ .

Étant donnés  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ , l'expression  $\Phi(\Psi(u))$  n'aura de sens que si  $u \in E_\Psi$  et  $\Psi(u) \in E_\Phi$ . Nous désignerons par  $E_{\Phi\Psi}$  l'ensemble des éléments  $u \in E$  vérifiant ces deux conditions, c'est-à-dire, nous poserons

$$E_{\Phi\Psi} = \Psi^{(-1)}(E_\Phi),$$

et, cet ensemble n'étant pas vide, nous appellerons *produit de  $\Phi$  par  $\Psi$*  l'application  $u \rightarrow \Phi(\Psi(u))$  de  $E_{\Phi\Psi}$  sur  $E$ , que nous noterons  $\Phi\Psi$ . Il s'agit donc ici d'un cas spécial de la notion de produit de deux applications, où il faut faire attention. Ce produit est encore associatif:  $(\Phi\Psi)\Theta = \Phi(\Psi\Theta)$ , quels que soient  $\Phi, \Psi, \Theta \in \Lambda$ . Deux applications  $\Phi, \Psi \in \Lambda$  seront dites *permutables* si l'on a  $\Phi\Psi = \Psi\Phi$ , ce qui exige en particulier  $E_{\Phi\Psi} = E_{\Psi\Phi}$ .

c) Il est nécessaire aussi de préciser la notion de prolongement d'une application. Considérons deux ensembles  $E, F$  tels que  $E \subset F$  et soit  $\Phi$  une application d'une partie  $E_\Phi$  de  $E$  sur  $E$ . Alors:

DÉFINITION 1. Nous disons qu'une application  $\tilde{\Phi}$  de  $F$  dans  $F$  est un *prolongement* de  $\Phi$  à  $F$ , si l'on a  $\tilde{\Phi}(u) = \Phi(u)$ , pour chaque  $u \in E_\Phi$ .

DÉFINITION 2. Nous disons qu'une application  $\tilde{\Phi}$  de  $F$  dans  $F$  est un *prolongement strict* de  $\Phi$  à  $F$ , si l'égalité  $v = \tilde{\Phi}(u)$ , pour  $u, v \in E$ , est équivalente à l'égalité  $v = \Phi(u)$ .

Naturellement, un prolongement  $\tilde{\Phi}$  de  $\Phi$  à  $F$  ne sera pas un prolongement strict, si (et seulement si), il existe au moins un élément  $u$  de  $E$  tel que  $\tilde{\Phi}(u) \in E$ , avec  $u \notin E_\Phi$ .

d) Nous aborderons, maintenant, sous un angle particulier, le problème que nous étudierons en détail au n° suivant. Soit  $E$  un *groupe abélien, noté additivement* et soit  $\Lambda$  un ensemble de *homomorphismes de sous-groupes*

de  $E$  sur  $E$ . (Dans la suite nous désignons par le symbole  $0$  l'élément nul dans tous les groupes additifs que l'on aura à considérer). Le domaine  $E_\Phi$  de chaque opérateur  $\Phi \in \Lambda$  sera donc un sous-groupe de  $E$  et on aura

$$\Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v), \text{ quels que soient } u, v \in E_\Phi.$$

Il est évident que le produit de deux opérateurs  $\Phi, \Psi \in \Lambda$  sera encore un homomorphisme d'un sous-groupe de  $E$  sur  $E$ .

Pour tout  $\Phi \in \Lambda$  nous poserons

$$N(\Phi) = \Phi^{-1}(0) \quad (\text{noyau de } \Phi).$$

Supposons en outre que, pour tout  $\Phi \in \Lambda$  et tout  $\Psi \in \Lambda$ , on a encore  $\Phi\Psi \in \Lambda$  (c. a. d., que  $\Lambda$  est un *semi-groupe*) et  $\Phi\Psi = \Psi\Phi$  (c. a. d., que le semi-groupe  $\Lambda$  est *abélien*). Supposons enfin que  $\Lambda$  contient l'opérateur identique,  $I$ . Dans ces conditions, nous nous poserons le problème suivant:

*Construire un sur-groupe  $\tilde{E}$  de  $E$  dans lequel on puisse définir, pour chaque application  $\Phi \in \Lambda$ , un prolongement  $\tilde{\Phi}$  de  $\Phi$  à  $\tilde{E}$ , de façon que: 1)  $\tilde{\Phi}$  soit encore un homomorphisme (donc, un endomorphisme de  $\tilde{E}$ ); 2)  $\Phi\Psi = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}$ , quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ .*

Le problème admet une infinité de solutions; mais il deviendra déterminé, à moins d'un isomorphisme opératoire <sup>(2)</sup>, s'il on y adjoint les conditions suivantes: 3) *pour tout élément  $\tilde{u}$  de  $\tilde{E}$  il existe un  $u \in E$  et un  $\Phi \in \Lambda$ , tels que  $\tilde{u} = \tilde{\Phi}(u)$ ; 4) si  $\tilde{\Phi}(u) = 0$ , avec  $u \in E$ , alors  $\Phi(u) = 0$ ; c'est-à-dire,  $E \cap N(\tilde{\Phi}) = N(\Phi)$ . La condition 4) est équivalente à celle-ci:*

---

<sup>(2)</sup> Étant donnés deux groupes  $E_1, E_2$ , munis d'un système commun  $\Lambda$  d'opérateurs  $\Phi, \Psi, \dots$ , on appelle isomorphisme opératoire de  $E_1$  sur  $E_2$  toute application biunivoque  $h$  de  $E_1$  sur  $E_2$  tel que  $h(u+v) = h(u) + h(v)$ ,  $h(\Phi u) = \Phi(hu)$ , quels que soient  $u, v \in E_1, \Phi \in \Lambda$ .

4') Pour tout  $\Phi \in \Lambda$ ,  $\tilde{\Phi}$  est un prolongement strict de  $\Phi$ .

D'ailleurs, si ces conditions sont vérifiées, on pourra démontrer que l'on a précisément  $N(\tilde{\Phi}) = N(\Phi)$ .

Nous indiquerons ici une manière de construire le groupe  $E$  à partir de  $\tilde{E}$  et  $\Lambda$ , de façon que les conditions 1)-4) soient vérifiées. Mais nous n'entrerons pas dans les détails, parce que cela devient superflu après l'analyse qui sera développée au n° suivant.

Considérons l'ensemble  $\Lambda \times E$  de tous les couples  $(\Phi, u)$ , avec  $\Phi \in \Lambda$  et  $u \in E$ . Nous définirons dans cet ensemble une relation  $\sim$  de la façon suivante:

$$(\Phi, u) \sim (\Psi, v) \text{ si, et seulement si, } \Psi^{(-1)}(u) - \Phi^{(-1)}(v) \in N(\Psi\Phi)^{(3)}.$$

On voit sans peine que cette relation est réflexive, symétrique et transitive — donc une *relation d'équivalence*. Notre ensemble  $\tilde{E}$  sera précisément l'ensemble quotient de  $\Lambda \times E$  par cette relation d'équivalence; nous désignerons par  $[\Phi, u]$  l'élément de  $\tilde{E}$  déterminé par le couple  $(\Phi, u)$ , c'est-à-dire, la classe de tous les éléments de  $\Lambda \times E$  équivalents à  $(\Phi, u)$ . Mais, pour que la condition  $E \subset \tilde{E}$  soit vérifiée, il faut encore identifier chaque élément  $u$  de  $E$  avec l'élément  $[I, u]$  de  $\tilde{E}$ .

Dans l'ensemble  $\tilde{E}$  nous définissons une addition de la manière suivante:

$$[\Phi, u] + [\Psi, v] = [\Phi\Psi, u^* + v^*], \text{ avec } u^* \in \Psi^{(-1)}(u), v^* \in \Phi^{(-1)}(v).$$

On démontre sans peine que l'ensemble  $\tilde{E}$  est un groupe abélien, qui admet  $E$  comme sous-groupe.

---

(3) Étant donnés deux parties  $A, B$  d'un groupe additif  $E$  nous désignons par  $A + B$  (resp.  $A - B$ ) l'ensemble des éléments  $u + v$  (resp.  $u - v$ ) de  $E$ , avec  $u \in A$ ,  $v \in B$ . Étant donnés deux ensembles  $M, N$  quelconques, nous désignons par  $M \sim N$  le *complémentaire de  $N$  par rapport à  $M$* , c.a.d., l'ensemble des éléments de  $M$  n'appartenant pas à  $N$ .

Enfin, nous définissons pour chaque  $\Phi \in \Lambda$ , une application  $\tilde{\Phi}$  de  $\tilde{E}$  dans  $\tilde{E}$ , par la formule

$$\tilde{\Phi}[\Psi, u] = [\Phi\Psi, u]$$

et il est aisé de voir que les conditions 1), 2), 3), 4) de notre problème sont toutes vérifiées avec cette définition.

e) Le résultat précédent s'applique, par exemple, au cas où  $E$  est le groupe additif des fonctions  $f(x)$ , réelles ou complexes, continues dans  $\mathbf{R}^1$ , et  $\Lambda$  le semi-groupe multiplicatif des puissances  $D^0, D^1, \dots, D^m, \dots$  de l'opérateur  $D$  de dérivation. Le domaine de  $D^m$  est constitué par les fonctions  $m$  fois continûment dérivables, tandis que le noyau  $N(D^m)$  est l'ensemble des polynômes en  $x$  de degré inférieur à  $m$ . Dans ce cas on obtient, par extension de  $E$ , à moins d'un isomorphisme opératoire, le groupe des distributions d'ordre fini sur  $\mathbf{R}^1$ .

Soit maintenant  $E$  le groupe des fonctions  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , réelles ou complexes, continues dans  $\mathbf{R}^n$ , avec  $n > 1$ , et soit  $\Lambda$  le semi-groupe engendré par les opérateurs de dérivation partielle

$$D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_n}.$$

Ces opérateurs ne sont pas permutables, deux à deux, puisque, par exemple, si  $f(\mathbf{x})$  se réduit à une fonction de la seule variable  $x_1$ , qui n'admette pas de dérivée au sens usuel, on aura  $D_{x_1} D_{x_2} f(\mathbf{x}) = 0$ , tandis que  $D_{x_2} D_{x_1} f(\mathbf{x})$  n'existe pas. Le résultat précédent n'est donc plus applicable tel quel et, si l'on veut le généraliser de façon que les opérateurs prolongés deviennent permutables deux à deux, on doit renoncer à la condition que les prolongements des opérateurs donnés soient tous des prolongements stricts.

Mais remarquons que, pour chaque opérateur  $D_{x_i}$ , on peut choisir un inverse à droite  $\mathfrak{D}_{x_i}$ , donné par

$$\mathfrak{D}_{x_i} f(\mathbf{x}) = \int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi_i$$

et que l'on a

$$\mathfrak{D}_{x_i} \mathfrak{D}_{x_j} = \mathfrak{D}_{x_j} \mathfrak{D}_{x_i}, \text{ quels que soient } i, j = 1, \dots, r.$$

Plus généralement, chaque opérateur différentiel

$$D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \dots D_{x_n}^{p_n}$$

où  $p_1, \dots, p_n$  sont des nombres entiers, admet l'inverse à droite

$$\mathfrak{D}_{x_1}^{p_1} \mathfrak{D}_{x_2}^{p_2} \dots \mathfrak{D}_{x_n}^{p_n}$$

et il est évident que les opérateurs intégraux de cette forme sont permutables deux à deux. D'autre part, l'opérateur différentiel ci-dessus considéré a son noyau *contenu* dans la classe des fonctions  $\theta$  du type

$$(1.1) \quad \theta(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=0}^{p_1-1} x_1^\nu \gamma_{1,\nu}(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=0}^{p_2-1} x_2^\nu \gamma_{2,\nu}(\mathbf{x}) + \dots + \sum_{\nu=0}^{p_n-1} x_n^\nu \gamma_{n,\nu}(\mathbf{x}),$$

où  $\gamma_{i,\nu}(\mathbf{x})$  est une fonction continue dans  $\mathbf{R}^n$ , indépendante de  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\nu = 0, 1, \dots, p_i - 1$ ).

Voilà les données concrètes qui nous ont guidé dans les recherches, dont les résultats sont exposés par la suite.

2. Le théorème général d'extension algébrique — Soit de nouveau  $E$  un groupe additif abélien et soit  $\Lambda$  un semi-groupe multiplicatif (mais non nécessairement abélien !) de homomorphismes de sous-groupes de  $E$  sur  $E$ .

Reprenons le problème de l'extension algébrique sous la forme suivante :

*Plonger le groupe  $E$  dans un groupe  $\tilde{E}$ , dans lequel on puisse définir, pour chaque  $\Phi \in \Lambda$ , un prolongement  $\tilde{\Phi}$  de  $\Phi$*

à  $\tilde{E}$ , de façon que  $\tilde{\Phi}$  soit un endomorphisme de  $\tilde{E}$  et que l'on ait  $\Phi\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}\tilde{\Phi}$ , quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ .

Supposons d'abord le problème résolu et posons, pour tout  $\Phi \in \Lambda$ :

$$(2.1) \quad \hat{N}(\Phi) = E \cap N(\tilde{\Phi}),$$

où  $N(\tilde{\Phi})$  est le noyau de  $\tilde{\Phi}$ . Alors, on doit avoir

$$(2.2) \quad \hat{N}(\Phi\Psi) = \hat{N}(\Psi\Phi) \supset \Phi^{(-1)}(\hat{N}(\Psi)) + \Psi^{(-1)}(\hat{N}(\Phi)) + \hat{N}(\Phi) + \hat{N}(\Psi).$$

$$(2.3) \quad \text{Si } v = \Phi(u) \text{ et } u \in \hat{N}(\Phi\Psi), \text{ alors } v \in \hat{N}(\Psi).$$

Pour établir (2.2) il suffit d'employer la permutabilité des opérateurs  $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$  et d'appliquer  $\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}$  à la dernière expression, en tenant compte de (2.1). Quant à (2.3), il suffit de remarquer que  $\tilde{\Psi}(v) = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}(u)$ , si  $v = \Phi(u)$ .

Les conditions (2.2) et (2.3) sont donc nécessaires pour que le problème soit possible. Il s'agirait maintenant de chercher d'autres conditions, jusqu'à trouver un ensemble de conditions suffisantes.

Nous renoncerons à résoudre la question en toute généralité et considérerons d'abord quelques circonstances particulières qui peuvent se présenter dans l'étude du groupe  $E$ , muni du semi-groupe  $\Lambda$  d'opérateurs (homomorphismes de sous-groupes de  $E$  sur  $E$ ).

Étant donnée une famille  $\{B_i\}_{i \in I}$  d'éléments de  $\Lambda$ , nous dirons que ces éléments *engendrent* ou sont des *générateurs* de  $\Lambda$ , si tout  $\Phi \in \Lambda$  est égal à un produit dont tous les facteurs (en nombre fini) soient des éléments de cette famille, éventuellement répétés. D'autre part, nous dirons que les  $B_i$  sont *indépendants*, si les semi-groupes engendrés par deux sous-familles disjointes quelconques de  $\{B_i\}$  sont aussi disjoints.

PROPOSITION 1. *Supposons que  $\Lambda$  admet un système fini <sup>(4)</sup> de générateurs  $B_1, B_2, \dots, B_n$  indépendants, tel que l'on puisse faire correspondre à chacun des  $B_i$  un endomorphisme  $Y_i$  de  $E$  qui soit un inverse à droite de  $B_i$ , de façon que  $Y_i Y_j = Y_j Y_i$  quels que soient  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , et que  $B_i Y_j u = Y_j B_i u$ , pour  $i \neq j, u \in B_i^{(-1)}(E)$ . Dans ces conditions, on peut associer à chaque opérateur  $\Phi \in \Lambda$  un (et un seul) inverse à droite  $\Phi_d^{-1}$  de  $\Phi$  de telle sorte que l'on ait:*

$$I_1) \quad (\Phi\Psi)_d^{-1} = \Psi_d^{-1} \Phi_d^{-1} = \Phi_d^{-1} \Psi_d^{-1}, \text{ quels que soient } \Phi, \Psi \in \Lambda.$$

$$I_2) \quad \text{Si } \Phi = B_i \text{ alors } \Phi_d^{-1} = Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

*Chaque opérateur  $\Phi_d^{-1}$  admet alors une représentation unique du type*

$$\Phi_d^{-1} = Y_1^{p_1} Y_2^{p_2} \dots Y_n^{p_n}.$$

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que, si  $\Phi$  s'exprime en fonction des  $B_i$  par un produit  $P(B_1, \dots, B_n)$ , dont  $p_1$  facteurs soient égaux à  $B_1$ ,  $p_2$  facteurs égaux à  $B_2$ ,  $\dots$ ,  $p_n$  facteurs à  $B_n$ , on doit avoir  $\Phi_d^{-1} = Y_1^{p_1} Y_2^{p_2} \dots Y_n^{p_n}$ , d'après  $I_1)$  et  $I_2)$ . En employant la définition de «inverse à droite» et la permutabilité des  $Y_i$ , on reconnaît aussitôt que  $\Phi\Phi_d^{-1} = I$ . Supposons maintenant que l'on a aussi

$$\Phi_d^{-1} = Y_1^{q_1} Y_2^{q_2} \dots Y_n^{q_n}.$$

---

<sup>(4)</sup> Les propositions que nous démontrerons relativement à des systèmes finis de générateurs peuvent se généraliser immédiatement au cas des systèmes infinis. Il va sans dire que, dans le seul cas concret considéré par la suite, les  $B_i$  deviendront les opérateurs  $D_{x_i}$  de dérivation, tandis que les  $Y_i$  deviendront les opérateurs  $\mathfrak{D}_{x_i}$  d'intégration (sur  $\mathbb{R}^n$ ). Mais, comme nous l'avons déjà observé dans l'introduction, nous ne savons pas encore si d'autres applications ne seront pas possibles; et il se peut que l'hypothèse d'une infinité de générateurs indépendants ne soit pas dépourvue d'intérêt (cas des distributions sur un groupe topologique quelconque).

Alors on aura

$$B_1^{p_1} \dots B_n^{p_n} Y_1^{q_1} \dots Y_n^{q_n} = I$$

et, si l'on pose  $\Psi = \Pi_i B_i^{p_i - q_i}$  pour  $p_i \geq q_i$ ,  $\Theta = \Pi_i B_i^{q_i - p_i}$  pour  $p_i \leq q_i$ , on en déduit, compte tenu de l'hypothèse, que  $\Psi u = \Theta u$ , pour chaque  $u \in E_\Psi$ . D'autre part,  $\Phi_d^{-1}$  étant inverse à droite de  $B_1^{q_1} \dots B_n^{q_n}$ , on voit de même que  $\Theta u = \Psi u$  pour chaque  $u \in E_\Theta$ . Donc, s'il n'était pas  $p_i = q_i$  pour tout  $i$ , les  $B_i$  ne seraient pas indépendants. (On exclut le cas trivial où l'un de ces  $B_i$  est  $I$ ).

**PROPOSITION 2.** *Si les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées, on peut faire correspondre à chaque opérateur  $\Phi \in \Lambda$  un (et un seul) sous-groupe  $\hat{N}(\Phi)$  de  $E$  de telle façon que l'on ait:*

$$N_1) \quad \hat{N}(\Phi\Psi) = \Phi_d^{-1}(\hat{N}(\Psi)) + \Psi_d^{-1}(\hat{N}(\Phi)) + \hat{N}(\Phi) + \hat{N}(\Psi), (\Phi, \Psi \in \Lambda).$$

$$N_2) \quad \text{Si } \Phi = B_i, \text{ alors } \hat{N}(\Phi) = N(\Phi) = \Phi^{(-1)}(0) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

*Dans ces conditions, si  $\Phi_d^{(-1)} = Y_1^{p_1} Y_2^{p_2} \dots Y_n^{p_n}$ , le groupe  $\hat{N}(\Phi)$  sera constitué par tous les éléments  $u$  de  $E$  tels que*

$$(2.4) \quad u = \sum_{v=0}^{p_1-1} Y_1^v(e_{1,v}) + \sum_{v=0}^{p_2-1} Y_2^v(e_{2,v}) + \dots + \sum_{v=0}^{p_n-1} Y_n^v(e_{n,v})$$

*avec  $e_{i,v} \in N(B_i) \quad (i=1, \dots, n; v=0, \dots, p_i-1)$ .*

*D'ailleurs on aura  $N(\Phi) \subset \hat{N}(\Phi)$  pour chaque  $\Phi \in \Lambda$ .*

**Démonstration.** Supposons donnés les groupes  $\hat{N}(\Phi)$  vérifiant les conditions  $N_1)$  et  $N_2)$  et désignons par  $K(p_1, \dots, p_n)$  l'ensemble des éléments  $u$  de  $E$  de la forme (2.4) pour chaque détermination des exposantes  $p_1, \dots, p_n$ . Pour montrer que, si  $\Phi_d^{-1} = Y_1^{p_1} \dots Y_n^{p_n}$ , on doit avoir

$\hat{N}(\Phi) = K(p_1, \dots, p_n)$ , il suffit de montrer que l'égalité  $\hat{N}(\Phi) = K(p_1, \dots, p_n)$  implique

$$\hat{N}(B_i\Phi) = (p_1, \dots, p_{i-1}, 1 + p_i, p_{i+1}, \dots, p_n),$$

quel que soit  $i = 1, \dots, n$  (voir la note qui suit cette démonstration). Supposons donc  $\hat{N}(\Phi) = K(p_1, \dots, p_n)$ . D'après  $N_1$ ) et  $N_2$ ), les éléments de  $\hat{N}(B_i\Phi)$  doivent être tous ceux de la forme

$$Y_i u + \Phi_d^{-1} e_i + u' + e'_i, \text{ avec } u, u' \in \hat{N}(\Phi), e_i, e'_i \in N(B_i).$$

En employant l'expression (2.4), on a

$$Y_i u = \sum_{v=0}^{p_i-1} Y_1^v (Y_i e_{1,v}) + \dots + \sum_{v=0}^{p_i-1} Y_i^{v+1} (e_{i,v}) + \dots + \sum_{v=0}^{p_n-1} Y_n^v (Y_i e_{n,v})$$

et, en tenant compte de l'hypothèse formulée dans la prop. 1, on voit que

$$B_k(Y_i e_{k,v}) = Y_i(B_k e_{k,v}) = 0 \quad \text{pour } i \neq k.$$

D'autre part, on a

$$\Phi_d^{-1} e_i = Y_i^{p_i} e_i^*, \text{ avec } e_i^* = Y_1^{p_1} \dots Y_{i-1}^{p_{i-1}} Y_{i+1}^{p_{i+1}} \dots Y_n^{p_n} e_i$$

et on reconnaît aussitôt que  $B_i e_i^* = 0$ .

Maintenant il est aisé de voir que tous les éléments de  $\hat{N}(B_i\Phi)$  appartiennent à  $K(p_1, \dots, p_{i-1}, 1 + p_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$  et, si l'on tient compte de l'arbitrarité de  $u, u', e_i, e'_i$ , on voit de même que, réciproquement, tous les éléments de ce dernier ensemble appartiennent à  $\hat{N}(B_i\Phi)$ .

Par conséquent, si les conditions  $N_1$ ) et  $N_2$ ) sont remplies, le groupe  $\hat{N}(\Phi)$  ne peut être que l'ensemble

$K(p_1 \dots, p_n)$ . Réciproquement, il est immédiat que, si l'on construit de cette façon les groupes  $\hat{N}(\Phi)$ , les conditions  $N_1)$  et  $N_2)$  sont vérifiées.

La dernière partie de la thèse s'établit sans difficulté.

NOTE. Le semi-groupe  $\Lambda$ , dans l'hypothèse considérée, possède un *principe d'induction finie* qui peut s'énoncer comme il suit: Si une propriété  $\mathfrak{P}(\Phi)$  est vraie pour  $\Phi = B_i$ , quel que soit  $i = 1, \dots, n$  et si, d'autre part,  $\mathfrak{P}(\Phi)$  implique  $\mathfrak{P}(B_i\Phi)$  pour tout  $i$ , alors  $\mathfrak{P}(\Phi)$  est vraie quel que soit  $\Phi \in \Lambda$ .

Observons encore que, dans la condition  $N_1)$ , les opérateurs  $\Phi_d^{-1}, \Psi_d^{-1}$  peuvent être remplacés par les opérateurs plurivoques  $\Phi^{(-1)}, \Psi^{(-1)}$ , puisque l'on a  $\Phi^{(-1)}(u) = \Phi_d^{-1}(u) + \Phi^{(-1)}(0) \subset \Phi_d^{-1}(u) + \hat{N}(\Phi)$ , pour tout  $u \in E$ , et de même pour  $\Psi$ .

Maintenant nous pouvons établir notre théorème fondamental:

THÉORÈME I. Soit  $E$  un groupe additif abélien et soit  $\Lambda$  un semi-groupe d'homomorphismes  $\Phi, \Psi, \dots$  de sous-groupes de  $E$  sur  $E$ . On suppose vérifiées les conditions suivantes:

$H_1)$   $\Lambda$  contient l'identité,  $I$ .

$H_2)$  Pour chaque opérateur  $\Phi \in \Lambda$ , on peut choisir un inverse à droite  $\Phi_d^{-1}$  de  $\Phi$  qui soit un endomorphisme de  $E$  et tel que  $(\Phi\Psi)_d^{-1} = \Phi_d^{-1}\Psi_d^{-1} = \Psi_d^{-1}\Phi_d^{-1}$ , quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ .

$H_3)$  À chaque opérateur  $\Phi \in \Lambda$ , on a fait correspondre un sous-groupe  $\hat{N}(\Phi)$  de façon que

$H_3)$   $\hat{N}(I) = \{0\}$ .

$H_3')$   $\hat{N}(\Phi\Psi) = \Phi^{(-1)}(\hat{N}(\Psi)) + \Psi^{(-1)}(\hat{N}(\Phi)) + \hat{N}(\Phi) + \hat{N}(\Psi)$ .

$H_3'')$  Si  $v = \Phi u$  et  $u \in \hat{N}(\Phi\Psi)$ , alors  $v \in \hat{N}(\Psi)$ .

Dans ces conditions, il est toujours possible (et d'une seule façon, à moins d'un isomorphisme opératoire laissant fixes les éléments de  $E$ ), de construire un sur-groupe  $\tilde{E}$  de  $E$  et de définir, pour chaque  $\Phi \in \Lambda$ , une application  $\tilde{\Phi}$  de  $\tilde{E}$  sur  $\tilde{E}$ , de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

P<sub>1</sub>)  $\tilde{\Phi}$  est un prolongement de  $\Phi$ , pour tout  $\Phi \in \Lambda$ .

P<sub>2</sub>)  $\tilde{\Phi}(u+v) = \tilde{\Phi}(u) + \tilde{\Phi}(v)$ , quels que soient  $u, v \in E, \Phi \in \Lambda$ ;

P<sub>3</sub>)  $\tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}\tilde{\Phi}$ , quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ ;

P<sub>4</sub>)  $E \cap N(\tilde{\Phi}) = \hat{N}(\Phi)$ , c'est-à-dire, on aura  $\tilde{\Phi}u = 0$  avec  $u \in E$ , si et seulement si  $u \in \hat{N}(\Phi)$ ;

P<sub>5</sub>)  $\tilde{E}$  est la fermeture de  $E$  par rapport aux opérateurs prolongés  $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \dots$ , c'est-à-dire, pour chaque  $\tilde{u} \in \tilde{E}$  il existe un  $u \in E$  et un  $\Phi \in \Lambda$  tels que  $\tilde{u} = \tilde{\Phi}u$ .

Démonstration. a) En premier lieu montrons que la construction d'un groupe  $\tilde{E}$  avec les opérateurs  $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \dots$ , vérifiant les conditions indiquées ci-dessus, ne sera possible que d'une seule manière, à moins d'un isomorphisme opératoire laissant fixes les éléments de  $E$ . Supposons que l'on a réussi à faire une telle construction. D'après P<sub>5</sub>), chaque élément  $\tilde{u}$  de  $\tilde{E}$  peut se représenter sous la forme

$$\tilde{u} = \tilde{\Phi}u, \text{ avec } u \in E, \Phi \in \Lambda.$$

Soient alors  $\tilde{u} = \tilde{\Phi}u, \tilde{v} = \tilde{\Psi}v$  deux éléments de  $\tilde{E}$ , avec  $u, v \in E, \Phi, \Psi \in \Lambda$ . Puisque  $\tilde{E}$  est un groupe on aura

$$\tilde{\Phi}(u) = \tilde{\Psi}(v) \text{ si et seulement si } \tilde{\Phi}(u) - \tilde{\Psi}(v) = 0.$$

Mais, à cause de H<sub>2</sub>), on a

$$\tilde{\Phi}(u) - \tilde{\Psi}(v) = \tilde{\Phi}\Psi\Psi_d^{-1}(u) - \tilde{\Psi}\Phi\Phi_d^{-1}(v),$$

ou, en employant  $P_1), P_2), P_3)$ :

$$\tilde{\Phi}(u) - \tilde{\Psi}(v) = \Phi\tilde{\Psi}[\Psi_d^{-1}(u) - \Phi_d^{-1}(v)].$$

Par conséquent, d'après  $P_4)$ , on aura

$$(2.5) \quad \tilde{\Phi}(u) = \tilde{\Psi}(v) \text{ si et seulement si } \Psi_d^{-1}(u) - \Phi_d^{-1}(v) \in \hat{N}(\Phi\Psi).$$

On a donc ici *un critère d'égalité* entre les éléments de  $\tilde{E}$ , qui est parfaitement déterminé par la seule donnée du groupe  $E$  avec les opérateurs  $\Lambda$ . Donc, si l'on se donne un autre groupe  $\tilde{E}'$  à opérateurs  $\tilde{\Phi}', \tilde{\Psi}', \dots$  vérifiant les mêmes conditions, on obtient une application biunivoque  $h$  de  $\tilde{E}$  sur  $\tilde{E}'$  en faisant correspondre à chaque élément  $\tilde{\Phi}u$  de  $\tilde{E}$  l'élément  $\tilde{\Phi}'u$  de  $\tilde{E}'$ , où  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Phi}'$  désignent les prolongements de  $\Phi$  respectivement à  $\tilde{E}$  et  $\tilde{E}'$ ; et il est évident que  $h$  laisse fixes les éléments de  $E$ . On voit d'autre part, en tenant compte de  $P_1), P_2)$  et  $P_3)$ , que

$$(2.6) \quad \tilde{\Phi}(u) + \tilde{\Psi}(v) = \Phi\tilde{\Psi}[\Psi_d^{-1}(u) + \Phi_d^{-1}(v)]$$

$$(2.7) \quad \tilde{\Phi}(\tilde{\Psi}(u)) = \Phi\tilde{\Psi}(u)$$

et cela montre que *les règles formelles pour effectuer l'addition et les opérations  $\tilde{\Phi}$  sur des éléments de  $\tilde{E}$  sont déjà fixées d'avance par la donnée du groupe  $E$  avec les opérateurs  $\Lambda$* . Il en découle que l'application  $h$  de  $\tilde{E}$  sur  $\tilde{E}'$ , dont il est question plus haut, sera nécessairement un isomorphisme opératoire <sup>(5)</sup> (le seul existant), c'est-à-dire, on aura, quels que soient  $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{E}$ :

$$h(\tilde{u} + \tilde{v}) = h(\tilde{u}) + h(\tilde{v}), \quad h(\tilde{\Phi}(\tilde{u})) = \tilde{\Phi}'(h(\tilde{u})).$$

---

<sup>(5)</sup> Il est essentiel à la démonstration de désigner par des symboles différents,  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Phi}'$ , les prolongements de  $\Phi$  à  $\tilde{E}$  et  $\tilde{E}'$ , ce qui exige un concept de «isomorphisme opératoire» un peu plus général que le concept usuel [cf. <sup>(1)</sup>].

b) Montrons maintenant qu'il existe au moins un groupe  $\tilde{E}$  à opérateurs  $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \dots$ , vérifiant les conditions indiquées. Les considérations développées dans a) nous indiquent une manière de trouver une solution (la seule possible, à un isomorphisme près). Nous pourrions prendre comme éléments de  $\tilde{E}$  les classes d'équivalence déterminées parmi les expressions " $\Phi(u)$ " par la relation d'égalité définie dans (2.5) et adopter (2.6) et (2.7) comme les règles de l'addition et des opérations  $\tilde{\Phi}$  dans  $\tilde{E}$ . Mais il est préférable de raisonner avec les couples  $(\Phi, u)$  au lieu des expressions " $\tilde{\Phi}(u)$ ", comme nous l'avons déjà fait au n° 1 (au fond c'est la même chose sous une forme plus nette et plus commode).

Considérons donc l'ensemble  $\Lambda \times E$  de tous les couples  $(\Phi, u)$  et introduisons dans  $\Lambda \times E$  une relation  $\sim$  d'après la définition suivante :

$$(\Phi, u) \sim (\Psi, v) \text{ si et seulement si } \Psi_d^{-1} u - \Phi_d^{-1} v \in \hat{N}(\Phi\Psi).$$

On doit démontrer que cette relation est une relation d'équivalence. La réflexivité et la symétrie sont des conséquences immédiates du fait que  $\hat{N}(\Phi)$  est un groupe, pour tout  $\Phi \in \Lambda$ , et que  $\hat{N}(\Phi\Psi) = \hat{N}(\Psi\Phi)$ . Quant à la transitivité, supposons que  $(\Phi, u) \sim (\Psi, v)$  et  $(\Psi, v) \sim (\Theta, w)$ ; cela veut dire que

$$\Psi_d^{-1} u - \Phi_d^{-1} v \in \hat{N}(\Phi\Psi) \text{ et } \Theta_d^{-1} v - \Psi_d^{-1} w \in \hat{N}(\Psi\Theta);$$

on aura donc

$$\Theta_d^{-1} (\Psi_d^{-1} u - \Phi_d^{-1} v) + \Phi_d^{-1} (\Theta_d^{-1} v - \Psi_d^{-1} w) \in \Theta_d^{-1} \hat{N}(\Phi\Psi) + \Phi_d^{-1} \hat{N}(\Psi\Theta)$$

et par suite, en vertu de  $H_2$ ,

$$\Psi_d^{-1} (\Theta_d^{-1} u - \Phi_d^{-1} w) \in \Theta_d^{-1} \hat{N}(\Phi\Psi) + \Phi_d^{-1} \hat{N}(\Psi\Theta),$$

d'où, en tenant compte de  $H_3''$ ):  $\Psi_d^{-1} (\Theta_d^{-1} u - \Phi_d^{-1} w) \in \hat{N}(\Phi\Psi\Theta)$

et, à cause de  $H_3''$ ):  $\Theta_a^{-1}u - \Phi_a^{-1}w \in \hat{N}(\Phi\Theta)$ , c'est-à-dire,  $(\Phi, u) \sim (\Theta, w)$ .

Cela étant, nous désignerons par  $[\Phi, u]$  la classe de tous les éléments de  $\Lambda \times E$  équivalents à  $(\Phi, u)$  et par  $\tilde{E}$  l'ensemble de toutes les classes d'équivalence  $[\Phi, u]$ . Dans  $\tilde{E}$  nous définissons une addition d'après la règle suivante:

$$[\Phi, u] + [\Psi, v] = [\Phi\Psi, \Psi_a^{-1}u + \Phi_a^{-1}v].$$

On doit démontrer d'abord que c'est là une opération univoque, c'est-à-dire, que, si  $(\Phi, u) \sim (\Phi', u')$  et  $(\Psi, v) \sim (\Psi', v')$ , alors

$$(\Phi\Psi, \Psi_a^{-1}u + \Phi_a^{-1}v) \sim (\Phi'\Psi', \Phi'^{-1}_a u' + \Phi'^{-1}_a v');$$

mais cela est une conséquence immédiate de  $H_2$ ) et de  $H_3''$ ). Ensuite, on voit aussitôt que cette addition est une opération associative et commutative. Et comme, pour tout  $\Phi \in \Lambda$ , on a

$$[\Phi, u] + [I, 0] = [\Phi, u], \quad [\Phi, u] + [-\Phi, u] = [\Phi^2, 0] = [I, 0],$$

on voit de même que cette opération est inversible. Donc,  $\tilde{E}$  est un groupe additif abélien.

D'autre part on définit, pour tout  $\Theta \in \Lambda$ , une application  $\tilde{\Theta}$  de  $\tilde{E}$  dans  $\tilde{E}$ , d'après la règle

$$\tilde{\Theta}[\Phi, u] = [\Phi\Theta, u].$$

Voyons d'abord que  $\tilde{\Theta}$  est une opération univoque. Supposons que  $(\Phi, u) \sim (\Psi, v)$ , c.a.d. que  $\Psi_a^{-1}u - \Phi_a^{-1}v \in \hat{N}(\Phi\Psi)$ . Puisque, selon  $H_3''$ ),  $\Theta_a^{-1}(\hat{N}(\Phi\Psi)) \subset \hat{N}(\Phi\Psi\Theta)$ , on aura:

$$(\Psi\Theta)_a^{-1}u - (\Phi\Theta)_a^{-1}v \in \hat{N}(\Phi\Psi\Theta), \text{ c'est-à-dire } (\Phi\Theta, u) \sim (\Psi\Theta, v).$$

Maintenant, si l'on observe que deux couples  $(\Phi, u)$  et

$(\Psi, u)$  peuvent toujours être remplacés par des couples,  $(\Phi\Psi, \Psi_d^{-1}u)$  et  $(\Phi\Psi, \Phi_d^{-1}v)$ , avec le premier élément commun, il est immédiat que l'application  $\tilde{\Theta}$  est un homomorphisme (endomorphisme du groupe  $\tilde{E}$ ). On voit de même que  $\tilde{\Phi}\Psi = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}\tilde{\Phi}$ , quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ .

Mais nous devons encore montrer que  $\tilde{E}$  peut être considéré comme un sur-groupe de  $E$  et que l'opérateur  $\tilde{\Phi}$  est un prolongement de  $\Phi$ , quel que soit  $\Phi \in \Lambda$ . À cet effet observons que l'application  $u \rightarrow [I, u]$  de  $E$  dans  $\tilde{E}$  est biunivoque, puisque  $[I, u] = [I, v]$  implique  $u = v$ ; et on voit tout de suite que cette application est un isomorphisme. On peut donc identifier  $u$  avec  $[I, u]$ , ce qui rend  $E$  un sous-groupe de  $\tilde{E}$ . D'autre part, si l'on a  $v = \Phi u$  dans  $E$ , on aura  $\tilde{\Phi}u = \tilde{\Phi}[I, u] = [\Phi, u] = [I, v]$ ;  $\tilde{\Phi}$  est donc un prolongement de  $\Phi$ <sup>(6)</sup>. On voit en même temps que  $[\Phi, u] = \tilde{\Phi}u$  c'est-à-dire, que chaque élément de  $\tilde{E}$  est de la forme  $\tilde{\Phi}u$  avec  $u \in E$ ,  $\Phi \in \Lambda$ : la condition  $P_3$ ) est donc vérifiée.

Il reste à montrer que la condition  $P_4$ ) est vérifiée. Soit alors  $\tilde{\Phi}u = 0$  avec  $u \in E$ ; c'est-à-dire, supposons que  $[\Phi, u] = [I, 0]$ ; mais cela équivaut précisément à la condition  $u \in \hat{N}(\Phi)$ . —

Nous désignerons par  $\tilde{\Lambda}$  l'ensemble des opérateurs  $\tilde{\Phi}$  dont il s'agit dans cette démonstration. Nous pouvons compléter le th. 1 avec la

**PROPOSITION 3.** *Tout opérateur  $\tilde{\Phi} \in \tilde{\Lambda}$  est une application de  $\tilde{E}$  sur  $\tilde{E}$ , c'est-à-dire, pour tout  $\tilde{v} \in \tilde{E}$ , l'équation  $\tilde{\Phi}\tilde{u} = \tilde{v}$  admet au moins une solution  $\tilde{u}_0 \in \tilde{E}$ . Les solutions de cette équation sont alors précisément les éléments de l'ensemble*

<sup>(6)</sup> Mais on ne peut plus garantir que ce soit un prolongement strict.

$\tilde{u}_0 + N(\tilde{\Phi})$ . À leur tour, les éléments de  $N(\tilde{\Phi})$ , solutions de l'équation homogène  $\tilde{\Phi}\tilde{u}=0$ , sont tous les éléments  $\tilde{u}$  de  $\tilde{E}$  de la forme  $\tilde{u}=\tilde{\Theta}u$ , où  $\Theta$  est un élément arbitraire de  $\Lambda$  et  $u$  un élément arbitraire de  $\hat{N}(\Phi\Theta)$ .

Soit en effet  $\tilde{v}=\tilde{\Psi}v$ , avec  $v \in E$ ,  $\Psi \in \Lambda$ . Alors une solution de  $\tilde{\Phi}\tilde{u}=\tilde{v}$  sera  $\tilde{u}_0=\tilde{\Psi}\Phi_d^{-1}v$ . Il est maintenant immédiat que l'ensemble des solutions de cette équation est  $\tilde{u}_0 + N(\tilde{\Phi})$ . Pour la dernière partie de la proposition, on peut raisonner de la façon suivante: soit  $\tilde{u}=\tilde{\Theta}u$  une solution de  $\tilde{\Phi}\tilde{u}=0$ , avec  $u \in E$ ,  $\Theta \in \Lambda$ ; alors on a  $\tilde{\Phi}\tilde{\Theta}u=0$  et par suite  $u \in \hat{N}(\Phi\Theta)$ , ce qui achève la démonstration.

**PROPOSITION 4.** *Supposons que les hypothèses de la prop. 1 sont vérifiées et qu'il en est de même pour les hypothèses du théorème 1, les groupes  $\hat{N}(\Phi)$  ayant été construits d'après les conditions  $N_1$ ) et  $N_2$ ) de la prop. 2. Alors, on peut affirmer que :*

(2.8) *Si l'on a  $\tilde{B}_i(\tilde{\Phi}u)=0$ , avec  $u \in E$ ,  $\Phi=B_1^{p_1} \dots B_n^{p_n}$ , il existe un élément  $e_i$  de  $E$  tel que  $B_i e_i=0$ ,  $\tilde{\Phi}u=\tilde{\Phi}(Y_i^{p_i} e_i)$  ( $i=1, \dots, n$ ).*

En effet, si l'on a  $\tilde{B}_i(\tilde{\Phi}u)=0$ , avec  $u \in E$ , on aura  $u \in \hat{N}(\Phi B_i)$ , et, si  $\Phi=B_1^{p_1} \dots B_n^{p_n}$ , l'ensemble  $\hat{N}(\Phi B_i)$  sera constitué par les éléments  $u$  de  $E$  de la forme

$$u = \left( \sum_{\nu=0}^{p_1-1} Y_1^\nu e_{1\nu} + \dots + \sum_{\nu=0}^{p_n-1} Y_n^\nu e_{n\nu} \right) + Y_i^{p_i} e_i,$$

avec  $B_i e_i=0$   $B_k e_{k\nu}=0$ , ( $k=1, \dots, n$ ;  $\nu=0, \dots, p_k-1$ ).

En appliquant  $\tilde{\Phi}$  à cette expression, on obtient tout de suite  $\tilde{\Phi}u=\tilde{\Phi}(Y_i^{p_i} e_i)$ . —

Nous établirons maintenant une proposition qui joue d'une certaine façon le rôle de réciproque de la précédente et dont nous aurons besoin pour présenter l'axiomatique des distributions d'une façon plus naturelle :

PROPOSITION 5. Soit  $E$  un groupe additif abélien, muni d'un semi-groupe  $\Lambda$  d'opérateurs, vérifiant les hypothèses de la prop. 1, et soit  $\tilde{E}$  un sur-groupe de  $E$ , auquel on ait prolongé chaque opérateur  $\Phi \in \Lambda$  comme endomorphisme  $\tilde{\Phi}$  de  $\tilde{E}$ , de façon que  $\tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}\tilde{\Phi}$ . Alors, si la condition (2.8) est vérifiée et que l'on ait construit les groupes  $\hat{N}(\Phi)$  d'après les conditions  $N_1)$  et  $N_2)$  de la prop. 2, on aura  $E \cap N(\tilde{\Phi}) = \hat{N}(\Phi)$  pour tout  $\Phi \in \Lambda$ .

On peut raisonner par induction sur  $\Phi$ . La thèse est vérifiée pour  $\Phi = I$ . Supposons maintenant qu'elle est vérifiée pour un opérateur  $\Phi$  donné; nous montrerons qu'elle est vérifiée encore pour l'opérateur  $B_i\Phi$ , quels que soient  $\Phi$  et  $i$ . En effet, soit  $(B_i\tilde{\Phi})u = 0$ , avec  $u \in E$ ,  $\Phi = B_1^{p_1} \dots B_n^{p_n}$ ; alors, d'après (2.8), on aura  $\tilde{\Phi}u = \tilde{\Phi}(Y_i^{p_i} e_i)$ , avec  $B_i e_i = 0$ , et, par suite, d'après l'hypothèse d'induction,  $u \in Y_i^{p_i} e_i + \hat{N}(\Phi)$ , ce qui veut dire que  $E \cap N(B_i\tilde{\Phi}) \subset \hat{N}(B_i\Phi)$ . D'autre part, il est immédiat que  $\hat{N}(B_i\Phi) \subset E \cap N(B_i\tilde{\Phi})$ , même sans (2.8) [cf. (2.1), (2.2)]. —

Nous avons vu que, si les hypothèses de la prop. 1 sont vérifiées et si les groupes  $\hat{N}(\Phi)$  sont construits d'après les conditions  $N_1)$  et  $N_2)$  de la prop. 2, les hypothèses du th. 1 sont aussi vérifiées, exception faite, éventuellement, de  $H_1)$ ,  $H_3)$  et  $H_3''')$ . Le critère que nous allons établir, relativement à la condition  $H_3''')$ , nous sera utile dans la suite.

On appelle *projecteur* défini dans le groupe  $E$  tout endomorphisme  $P$  de  $E$  tel que  $P^2 = P$ . Le contredomaine d'un projecteur  $P$  dans  $E$  est évidemment le sous-groupe de  $E$  constitué par les éléments  $u$  tels que  $(I - P)u = 0$ .

PROPOSITION 6. Supposons que les hypothèses de la prop. 1 sont vérifiées et que l'on a construit les groupes  $\hat{N}(\Phi)$  d'après les conditions  $N_1)$  et  $N_2)$  de la prop. 2. Supposons en outre

que, pour chaque indice  $i=1, \dots, n$ , et pour chaque exposant  $p=1, 2, \dots$ , il existe un projecteur  $P_i^{(p)}$  de  $E$  sur  $\hat{N}(B_i^{(p)})$ , de telle façon que tous ces opérateurs soient permutables deux à deux et que  $P_i^{(p)}$  soit permutable avec  $B_k$  pour  $i \neq k$ . Alors, quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$  et  $u, v \in E$ , si  $v = \Psi(u)$  et  $u \in \hat{N}(\Phi\Psi)$ , on aura  $v \in \hat{N}(\Phi)$ .

Il suffit évidemment de faire la démonstration pour le cas où  $\Psi$  est un des générateurs  $B_1, \dots, B_n$ . Pour fixer les idées, nous supposons  $i=1$ ; dans le cas général, la démonstration est tout à fait analogue. Soit  $\Phi = B_1^{p_1} \dots B_n^{p_n}$  et posons  $P^{(p)} = I - (I - P_1^{(p_1)}) \dots (I - P_n^{(p_n)})$ ; il est aisé de voir que  $P^{(p)}$  est un projecteur de  $E$  sur  $\hat{N}(\Phi) = \hat{N}(B_1^{p_1}) + \dots + \hat{N}(B_n^{p_n})$ . Soit maintenant  $u$  un élément de  $\hat{N}(B_1\Phi)$  appartenant au domaine de  $B_1$  et posons  $v = B_1 u$ . On aura, d'une part,  $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , avec  $u_1 \in \hat{N}(B_1^{p_1+1})$ ,  $u_i \in \hat{N}(B_i^{p_i})$  pour  $i \neq 1$ . D'autre part, en vertu de l'hypothèse on a

$$\begin{aligned} (I - P^{(p)}) B_1 u &= (I - P_1^{(p_1)}) B_1 (I - P_2^{(p_2)}) \dots (I - P_n^{(p_n)}) u = \\ &= (I - P^{(p)}) B_1 u_1 = 0, \end{aligned}$$

et cela veut dire que  $v \in \hat{N}(\Phi)$ ,

c. q. f. d.

3. Les distributions d'ordre fini sur un intervalle de  $\mathbb{R}^n$  — Étant donnés deux points  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $\mathbf{x}$  précède  $\mathbf{y}$  et on écrit  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ , si les conditions  $x_i \leq y_i$  sont vérifiées pour  $i=1, \dots, n$ . Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux points de  $\mathbb{R}^n$ ; nous appelons *intervalle fermé* d'extrêmes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et nous désignons par  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  l'ensemble des points  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ; nous appelons *intervalle ouvert* d'extrêmes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et nous désignons par  $] \mathbf{a}, \mathbf{b} [$ , l'intérieur de  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . On peut considérer encore des intervalles à un extrême infini ou même à deux extrêmes

infinis (par exemple, l'espace  $\mathbf{R}^n$ ); alors, les intervalles du premier type seront les *intervalles bornés (d'adhérence compacte)*.

Soit  $Q$  un intervalle quelconque de  $\mathbf{R}^n$ . Nous représenterons par  $\mathfrak{E}(Q)$  la classe des *fonctions complexes* <sup>(7)</sup>  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , définies et continues dans l'intervalle  $Q$ . Dans  $\mathfrak{E}(Q)$  nous considérons d'abord seulement la structure de *groupe additif abélien* déterminée par l'addition usuelle.

Si  $Q$  est ouvert, nous désignerons par  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  ou par  $D_{x_i}$

l'opérateur usuel de dérivation partielle par rapport à la variable  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Naturellement, l'opérateur  $D_{x_i}$  définit un homomorphisme d'un sous-groupe de  $\mathfrak{E}(Q)$  sur  $\mathfrak{E}(Q)$ .

Si  $Q$  est fermé, nous considérons l'opérateur  $D_{x_i}$  défini dans le sous-groupe de  $\mathfrak{E}(Q)$  constitué par les fonctions qui admettent à l'intérieur de  $Q$  dérivée partielle continue par rapport à  $x_i$ , prolongeable comme fonction continue à  $Q$ . Donc, à chaque fonction  $f \in \mathfrak{E}(Q)$  vérifiant ces conditions,  $D_{x_i}$  fait correspondre la fonction  $g \in \mathfrak{E}(Q)$ , qui, à l'intérieur de  $Q$ , est la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$ ; et nous écrirons encore  $g = D_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

Soit  $Q$  un intervalle quelconque de  $\mathbf{R}^n$  (ouvert ou fermé). Choisissons, pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , un hyperplan  $x_i = c_i$  de  $\mathbf{R}^n$  coupant  $Q$  et posons

$$\mathfrak{I}_{x_i} f(\mathbf{x}) = \int_{c_i}^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, x_n) d\xi_i, \quad \text{pour } f \in \mathfrak{E}(Q).$$

L'opérateur  $\mathfrak{I}_{x_i}$  est évidemment un inverse à droite de  $D_{x_i}$  et on a, suivant des théorèmes classiques :

---

(7) Pour fixer les idées nous considérons ici le cas des fonctions à valeurs complexes. Mais tout ce qui sera établi par la suite est immédiatement applicable au cas des fonctions réelles.

$$(3.1) \quad \mathfrak{D}_{x_i} \mathfrak{D}_{x_k} = \mathfrak{D}_{x_k} \mathfrak{D}_{x_i}, \text{ quels que soient } i, k = 1, \dots, n.$$

$$(3.2) \quad \mathfrak{D}_{x_i} D_{x_k} f = D_{x_k} \mathfrak{D}_{x_i} f, \text{ pour } i \neq k \text{ et s'il existe } D_{x_k} f \in \mathfrak{E}(Q).$$

Nous adopterons encore les notations de L. SCHWARTZ. Étant donnée une  $n$ -uple  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  de nombres entiers non négatifs, nous poserons

$$D^{\mathbf{p}} = D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \dots D_{x_n}^{p_n} = \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}.$$

Pour toutes les déterminations possibles de  $\mathbf{p}$ , les opérateurs  $D^{\mathbf{p}}$  constituent un semi-groupe multiplicatif d'homomorphismes de sous-groupes de  $\mathfrak{E}(Q)$  sur  $\mathfrak{E}(Q)$ , qui admet un système fini de générateurs *indépendants* <sup>(8)</sup>, constitué par les dérivations partielles  $D_{x_1}, \dots, D_{x_n}$  et par l'opérateur identique [correspondant à  $\mathbf{p} = (0, \dots, 0)$ ]. On voit aussitôt que ce semi-groupe vérifie les hypothèses de la prop. 1. Construisons alors les groupes  $\hat{N}(D^{\mathbf{p}})$  d'après les conditions  $N_1), N_2)$  de la prop. 6; en particulier on aura  $\hat{N}(I) = I^{(-1)}(0) = \{0\}$ . Pour pouvoir appliquer le th. 1 il reste donc à montrer que l'hypothèse  $H_3''$ ) est vérifiée.

À cet effet nous employerons la prop. 7. Pour chaque indice  $i$  et chaque exposant  $p_i$ , nous définissons l'opérateur  $P_i^{(p_i)}$  de façon suivante: Soient  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  et  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  les extrêmes de l'intervalle  $Q$ ; choisissons dans l'intervalle  $[a_i, b_i]$ , arbitrairement,  $p_i$  points distincts  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ip_i}$ ; alors, pour chaque fonction  $f \in \mathfrak{E}(Q)$  il existe une, et seulement une, fonction  $\theta_i(\mathbf{x}) = \sum_{v=1}^{p_i-1} x_i^v \gamma_{iv}(\mathbf{x})$ , avec les coefficients  $\gamma_{iv}(\mathbf{x})$  indépendants de  $x_i$  et tels que

---

(8) Cela résulte de la théorie des équations différentielles.

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_{ik}, x_{i+1}, \dots, x_n) \equiv \sum_{v=0}^{p_i-1} \alpha_{ik}^v \gamma_{iv}(\mathbf{x}),$$

pour  $k = 1, 2, \dots, p_i$ .

En effet, si l'on pose

$$f_{ik}(\mathbf{x}) \equiv f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_{ik}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

on aura, d'après la formule d'interpolation de LAGRANGE :

$$(3.3) \quad \theta_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{p_i} \frac{(x_i - \alpha_{i1}) \dots (x_i - \alpha_{i,k-1})(x_i - \alpha_{i,k+1}) \dots (x_i - \alpha_{ip_i})}{(\alpha_{ik} - \alpha_{i1}) \dots (\alpha_{ik} - \alpha_{i,k-1})(\alpha_{ik} - \alpha_{i,k+1}) \dots (\alpha_{ik} - \alpha_{ip_i})} f_{ik}(\mathbf{x}).$$

Nous désignons par  $P_i^{(p_i)}$  précisément l'application  $f \rightarrow \theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), de  $\mathfrak{E}(Q)$  sur  $\hat{N}(D^{p_i})$ . On voit aussitôt que ces applications sont des projecteurs. Montrons qu'elles sont permutables deux à deux; nous le ferons seulement pour le cas de deux variables, la démonstration dans le cas général étant essentiellement la même.

Soit donc  $n = 2$  et posons  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $\alpha_{1k} = \alpha_k$ ,  $\alpha_{2j} = \beta_j$ ,  $p_1 = p$ ,  $p_2 = q$  ( $k = 1, \dots, p$ ;  $j = 1, \dots, q$ ). Si l'on pose  $P_1^{(p)} f(x, y) \equiv \sum_{v=0}^{p-1} x^v \gamma_v(y)$ , cela veut dire que

$$(3.4) \quad f(\alpha_k, y) \equiv \gamma_0(y) + \alpha_k \gamma_1(y) + \dots + \alpha_k^{p-1} \gamma_{p-1}(y),$$

$k = 1, 2, \dots, p$ .

D'autre part, la fonction  $P_2^{(q)} P_1^{(p)} f$  sera un polynôme

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} \sum_{v=0}^{q-1} c_{\mu v} x^\mu y^v$$

à coefficients  $c_{\mu v}$  constants (indépendants de  $x, y$ ), tel que

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} \sum_{v=0}^{q-1} c_{\mu v} \beta_j^v x^\mu \equiv \sum_{v=0}^{p-1} x^v \gamma_v(\beta_j), \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

On aura donc, à cause de (3.4):

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{q-1} c_{\mu\nu} \alpha_k^\mu \beta_j^\nu = f(\alpha_k, \beta_j), \quad k=1, \dots, p; \quad j=1, \dots, q.$$

On a ici un système de  $pq$  équations linéaires qui permet de calculer les inconnues  $c_{\mu\nu}$  à partir des valeurs  $f(\alpha_k, \beta_j)$ , et il est évident que l'on parviendrait au même système pour déterminer les coefficients  $c'_{\mu\nu}$  du polynôme  $P_1^{(p)} P_2^{(q)} f$ . On a donc bien  $P_1^{(p)} P_2^{(q)} = P_2^{(q)} P_1^{(p)}$ .

Il reste à montrer que  $P_i^{(p_i)}$  est permutable avec  $D_{x_k}$  pour  $i \neq k$ . Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, pour tout  $\nu$ , le coefficient  $\gamma_{i\nu}(\mathbf{x})$  de  $x^\nu$  dans la fonction  $\theta_i = P_i^{(p_i)} f$  est, d'après (3.3), une combinaison linéaire à coefficients constants des fonctions que l'on obtient en remplaçant  $x_i$  dans  $f(\mathbf{x})$  successivement par  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ip_i}$ .

On peut donc affirmer :

*Toutes les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées si l'on interprète  $E$  comme  $\mathfrak{E}(Q)$  et  $\Lambda$  comme le semi-groupe des opérateurs de dérivation,  $D^p$ , avec  $\hat{N}(D_{x_i}) = N(D_{x_i})$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

Cela étant, nous désignerons par  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  le sur-groupe de  $\mathfrak{E}(Q)$  vérifiant les conditions indiquées dans la thèse du th. 1 et construit suivant la méthode employée dans la démonstration de ce théorème. Chaque opérateur de dérivation  $D^p$ , considéré comme application d'une partie de  $\mathfrak{E}(Q)$  sur  $\mathfrak{E}(Q)$ , aura donc un prolongement  $\tilde{D}^p$  à  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ , qui sera un endomorphisme de  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ . Quand il n'y aura pas danger de confusion, nous employerons simplement la notation  $D^p$  au lieu de  $\tilde{D}^p$  (en particulier  $D_{x_i}$  au lieu de  $\tilde{D}_{x_i}$  ou  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  au lieu de  $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}$ ) pour les opérateurs de dérivation prolongés à  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ .

Nous appellerons *distributions d'ordre fini dans  $Q$*  les éléments de  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ ; si  $Q$  est compact, on pourra dire sim-

plement «distributions dans  $Q$ », en omettant le restrictif «d'ordre fini» qui devient superflue dans ce cas, comme on pourra le comprendre par la suite. D'autre part, si l'on a  $T = D^p U$ , avec  $U, T \in \mathfrak{E}_\omega(Q)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , on dira encore que  $T$  est *une dérivée d'ordre  $p_1 + \dots + p_n$  de la distribution  $U$*  (au sens étendu); en particulier, si  $T = D_{x_i} U$ , on dira que  $T$  est *la dérivée partielle (première) de  $U$  par rapport à  $x_i$* .

Par la suite nous désignerons par  $D$  l'opérateur  $D_{x_1} D_{x_2} \dots D_{x_n}$ , c'est-à-dire, nous posons

$$D = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

D'autre part, pour chaque  $p = 1, 2, \dots$ , nous désignons par  $\mathfrak{E}_p(Q)$  l'ensemble des distributions  $T$  telles que  $T = D^p f$ , avec  $f \in \mathfrak{E}(Q)$ . On aura évidemment

$$\mathfrak{E}_\omega(Q) = \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathfrak{E}_p(Q).$$

Enfin, puisque, d'après ce qui précède, on aura  $D^p f = D^p g$ , avec  $f, g \in \mathfrak{E}(Q)$ , si, et seulement si,  $f - g \in \hat{N}(D^p)$ , on voit aussitôt que l'homomorphisme  $f \rightarrow D^p f$  de  $\mathfrak{E}(Q)$  sur  $\mathfrak{E}_p(Q)$  détermine un isomorphisme

$$f + \hat{N}(D^p) \leftrightarrow D^p f$$

de  $\mathfrak{E}(Q)/\hat{N}(D^p)$  sur  $\mathfrak{E}_p(Q)$ .

4. Les distributions d'ordre fini comme dérivées de fonctions localement sommables — Soit encore  $Q$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Nous désignerons par  $L^1(Q)$  l'ensemble des fonctions localement sommables dans  $Q$ , en considérant comme identiques deux fonctions qui soient égales

presque partout (c. a. d., différant au plus sur un ensemble de mesure nulle) <sup>(9)</sup>.

Dans  $L^1(Q)$  nous envisageons d'abord seulement la structure de groupe qui dérive de la notion usuelle d'addition de deux fonctions.

Soit  $f$  un élément de  $L^1(Q)$ ; alors, si l'on fixe un point  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$  dans  $Q$ , la fonction

$$(4.1) \quad f^*(\mathbf{x}) = \int_{c_1}^{x_1} \int_{c_2}^{x_2} \dots \int_{c_n}^{x_n} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

sera un élément de  $\mathfrak{E}(Q)$ ; plus précisément,  $f^*$  sera une *fonction absolument continue* sur  $Q$ . D'ailleurs on aura

$$f = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f^* = \mathbf{D} f^*$$

au sens de la théorie des fonctions.

D'après les conventions du n.º précédent, nous désignons par  $\mathfrak{E}_1(Q)$  le groupe des distributions  $T$  tels que  $T = \tilde{\mathbf{D}}f$  avec  $f \in \mathfrak{E}(Q)$ . Or, on a la

PROPOSITION 7. *Il existe un isomorphisme  $\mathbf{x}$ , et un seul, de  $L^1(Q)$  sur un sous-groupe de  $\mathfrak{E}_1(Q)$ , tel que  $\mathbf{x}\mathbf{D}f^* = \tilde{\mathbf{D}}f^*$ , pour toute fonction absolument continue  $f^*$ .*

En effet, pour que la condition  $\mathbf{x}\mathbf{D}f^* = \tilde{\mathbf{D}}f^*$  soit vérifiée, l'application  $\mathbf{x}$  doit faire correspondre à chaque fonction  $f \in L^1(Q)$  une distribution  $T$  telle que  $T = \tilde{\mathbf{D}}f^*$ , où  $f^*$  est une fonction absolument continue telle que  $f = \mathbf{D}f^*$  (au sens usuel). Mais, pour chaque  $f$ , il existe une seule distribution  $T$  vérifiant cette condition. En effet, si l'on

---

<sup>(9)</sup> Plus précisément, si l'on appelle *équivalentes* deux fonctions qui coïncident presque partout,  $L^1(Q)$  sera l'ensemble quotient de l'ensemble des fonctions localement sommables dans  $Q$ , par cette relation d'équivalence.

a  $f = \mathbf{D}f_1^* = \mathbf{D}f_2^*$ , la différence  $f_1^* - f_2^*$  sera une fonction continue de la forme  $\sum_{i=1}^n \gamma_i(\mathbf{x})$  où  $\gamma_i(\mathbf{x})$  est une fonction indépendante de  $x_i$  appartenant à  $L^1(Q)$ . Alors, si l'on désigne par  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$  un point de  $Q$  et si l'on pose

$$\theta_0 = f_1^* - f_2^*, \quad \theta_k(\mathbf{x}) = \theta_{k-1}(\mathbf{x}) - \theta_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, c_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ \text{pour } k = 1, \dots, n,$$

on voit par induction que  $\theta_k(\mathbf{x})$  est une fonction continue de la forme  $\sum_{i=k+1}^n \gamma_{ik}(\mathbf{x})$ , avec  $\gamma_{ik}(\mathbf{x})$  indépendante de  $x_i$  et appartenant à  $L^1(Q)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $i = k+1, \dots, n$ ). Il en résulte que  $\theta_n(\mathbf{x})$  est identiquement nulle. D'ailleurs, il est évident que  $\theta_{k-1}(\mathbf{x}) - \theta_k(\mathbf{x})$  est une fonction continue indépendante de  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Alors, puisque l'on a

$$f_1^* - f_2^* = (\theta_0 - \theta_1) + (\theta_1 - \theta_2) + \dots + (\theta_{n-1} - \theta_n) + \theta_n,$$

il s'en suit que  $f_1^* - f_2^* \in \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D})$  et, par suite,  $\tilde{\mathbf{D}}f_1^* = \tilde{\mathbf{D}}f_2^*$ . Le reste de la thèse est trivial. —

*Cela étant, nous pouvons identifier chaque fonction  $f \in L^1(Q)$  avec la distribution  $\tilde{\mathbf{D}}f^*$  où  $f^*$  est une fonction absolument continue telle que  $f = \mathbf{D}f^*$  (au sens usuel).*

Observons alors que,  $\mathfrak{E}(Q)$  étant une partie de  $L^1(Q)$ , les éléments de  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  sont les dérivées (au sens étendu) des fonctions localement sommables dans  $Q$ . On voit d'ailleurs que, pour chaque  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , l'opérateur  $\tilde{\mathbf{D}}^{\mathbf{p}}$  est encore un prolongement de l'opération  $\mathbf{D}^{\mathbf{p}}$  de dérivation, en considérant  $\mathbf{D}^{\mathbf{p}}$  comme application d'une partie de  $L^1(Q)$  sur  $L^1(Q)$ , définie de la façon usuelle.

Considérons par exemple la fonction de HEAVISIDE

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Il est évident que si  $\mathbf{c}$  est un point de  $Q$ , la fonction  $H(\mathbf{x} - \mathbf{c})$  représente un élément de  $L^1(Q)$  (nommé la *fonction de HEAVISIDE relative au point  $\mathbf{c}$* ). La distribution

$$\mathbf{D}H = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} H$$

est appelée la *fonction de DIRAC*; on la représente par  $\delta$ . Plus généralement, on nomme *fonction de DIRAC relative au point  $\mathbf{c}$*  la distribution  $\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x} - \mathbf{c})$ ; on la représente par  $\delta_{(\mathbf{c})}$  ou même par  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{c})$ , s'il n'y a pas danger de confusion (car il s'agit d'une distribution qui n'est plus une fonction).

5. Le théorème général d'homomorphisme — Pour établir ce théorème, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. Soit  $E$  un groupe additif abélien et soit  $\Lambda$  un semi-groupe multiplicatif d'homomorphismes de sous-groupes de  $E$  sur  $E$ . Si les hypothèses  $H_3)$ ,  $H_3')$  du théorème 1 sont vérifiées, pour que l'on ait  $\Psi^{(-1)}(u) - \Phi^{(-1)}(v) \in \hat{N}(\Phi\Psi)$  avec  $u, v \in E$  et  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ , il suffit qu'il existe au moins un élément  $u^* \in \Psi^{(-1)}(u)$  et un élément  $v^* \in \Phi^{(-1)}(v)$ , tels que  $u^* - v^* \in \hat{N}(\Phi\Psi)$ .

En effet, si l'on a  $\Phi(u^*) = u$ ,  $\Psi(v^*) = v$ , avec  $u^* - v^* \in \hat{N}(\Phi\Psi)$ , alors  $\Phi^{(-1)}(u) = u^* + \Phi^{(-1)}(0)$ ,  $\Psi^{(-1)}(v) = v^* + \Psi^{(-1)}(0)$  et, par conséquent

$$\Phi^{(-1)}(u) - \Psi^{(-1)}(v) = u^* - v^* + \Phi^{(-1)}(0) + \Psi^{(-1)}(0) \in \hat{N}(\Phi\Psi).$$

THÉORÈME 2. Soient  $E, E^*$  deux groupes additifs abéliens et  $\Lambda, \Lambda^*$  deux semi-groupes multiplicatifs, constitués, respectivement, par des homomorphismes de sous-groupes de  $E$  sur  $E$  et par des homomorphismes de sous-groupes de  $E^*$  sur  $E^*$ , tels que :

H<sub>1</sub>) *Le semi-groupe  $\Lambda$  sur  $E$  et le semi-groupe  $\Lambda^*$  sur  $E^*$  vérifient les hypothèses du théorème 1.*

H<sub>2</sub>) *Il existe un isomorphisme  $\Phi \leftrightarrow \Phi^*$  entre les semi-groupes  $\Lambda$  et  $\Lambda^*$ .*

H<sub>3</sub>) *On se donne un homomorphisme  $h$  de  $E$  dans  $E^*$ , tel que*

$$H_3) \quad h(\Phi u) = \Phi^*(hu) \text{ quels que soient } u \in E, \Phi \in \Lambda.$$

$$H_3') \quad h(\hat{N}(\Phi)) \subset \hat{N}(\Phi^*), \text{ pour tout } \Phi \in \Lambda.$$

*Alors, si l'on construit le groupe  $\tilde{E}$  avec les opérateurs  $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \dots$  et le groupe  $\tilde{E}^*$  avec les opérateurs  $\tilde{\Phi}^*, \tilde{\Psi}^*, \dots$  d'après les conditions indiquées dans le théorème 1, il est toujours possible (et d'une seule manière), de prolonger  $h$  en un homomorphisme  $\tilde{h}$  de  $\tilde{E}$  dans  $\tilde{E}^*$  tel que*

$$\tilde{h}(\tilde{\Phi}\tilde{u}) = \tilde{\Phi}^*(\tilde{h}\tilde{u}), \text{ quels que soient } \tilde{u} \in \tilde{E}, \tilde{\Phi} \in \tilde{\Lambda}.$$

**Démonstration.** Remarquons d'abord que, s'il existe un tel homomorphisme  $\tilde{h}$ , il est nécessairement donné par la formule

$$(5.1) \quad \tilde{h}(\tilde{\Phi}u) = \tilde{\Phi}^*(hu) \text{ pour } u \in E, \Phi \in \Lambda.$$

Maintenant, il faut montrer, en premier lieu, que l'opérateur  $\tilde{h}$  ainsi défini est univoque, c'est-à-dire, que l'égalité  $\tilde{\Phi}u = \tilde{\Psi}v$ , avec  $u, v \in E$ , implique  $\tilde{h}\tilde{\Phi}u = \tilde{h}\tilde{\Psi}v$ . Supposons donc  $\tilde{\Phi}u = \tilde{\Psi}v$ ; alors on aura

$$\Psi^{(-1)}(u) - \Phi^{(-1)}(v) \subset \hat{N}(\Phi\Psi).$$

D'autre part on a  $h(\hat{N}(\Phi\Psi)) \subset \hat{N}(\Phi^*\Psi^*)$ , en vertu de H<sub>3</sub>'). Donc, si  $u' \in \Psi^{(-1)}(u)$ ,  $v' \in \Phi^{(-1)}(v)$ , on doit avoir  $h(u') - h(v') \in \hat{N}(\Phi^*\Psi^*)$ . Et comme, en vertu de H<sub>3</sub>),  $hu' \in \Psi^{*(-1)}(hu)$ ,  $hv' \in \Phi^{*(-1)}(hv)$ , on aura, d'après le lemme,

$$\Psi^{*(-1)}(hu) - \Phi^{*(-1)}(hv) \subset \hat{N}(\Phi^* \Psi^*),$$

ce qui veut dire, d'après (5.1), que  $\tilde{h}\tilde{\Phi}u = \tilde{h}\tilde{\Psi}v$ .

Le reste de la thèse est trivial.

PROPOSITION 8. *La condition  $H_3^{\text{II}}$  du théorème 2 est impliquée par les autres hypothèses du même théorème, si le semi-groupe  $\Lambda$  admet un système de générateurs indépendants  $B_1, \dots, B_n$  et que l'on ait  $\hat{N}(B_i) = B_i^{(-1)}(0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

Il suffit d'employer le principe d'induction de  $\Lambda$ , en observant que  $h(\Phi^{(-1)}u) \subset \Phi^{*(-1)}(hu)$ , quels que soient  $u \in E, \Phi \in \Lambda$ .

PROPOSITION 9. *Supposons que, les hypothèses du théorème 1 étant vérifiées, on a construit le groupe  $\tilde{E}$  d'après les conditions indiquées dans ce théorème. Alors, si l'on se donne un anneau  $A$  d'endomorphismes  $\alpha, \beta, \dots$  de  $E$ , permutables avec les éléments de  $\Lambda$  et tels que  $\alpha\hat{N}(\Phi) \subset \hat{N}(\Phi)$  pour tout  $\alpha \in A$  et tout  $\Phi \in \Lambda$ , il est toujours possible (et d'une seule manière) de prolonger chaque  $\alpha \in A$  en un endomorphisme  $\tilde{\alpha}$  de  $\tilde{E}$  permutable avec le prolongement  $\tilde{\Phi}$  de chaque  $\Phi \in \Lambda$ . On aura en outre :*

$$\widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \quad \widetilde{\alpha+\beta} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}.$$

Cette proposition est essentiellement un corollaire du th. 2; dans ce cas particulier on a  $E^* = E, \Lambda^* = \Lambda$ . La dernière partie de la proposition est triviale.

NOTES—I. D'après la prop. 8, la condition « $\alpha\hat{N}(\Phi) \subset \hat{N}(\Phi)$  pour tout  $\alpha \in A$ » sera vérifiée, si le semi-groupe  $\Lambda$  admet un système fini de générateurs indépendants  $B_1, \dots, B_n$  et que l'on ait  $\hat{N}(B_i) = B_i^{(-1)}(0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

II. La prop. 9 nous intéresse en particulier dans le cas où  $A$  est un corps. Alors  $E$  peut être considéré comme

un espace vectoriel sur  $A$ , tandis que  $\Lambda$  sera un semi-groupe multiplicatif d'applications linéaires de sous-espaces vectoriels de  $E$  sur  $E$ ; si, en outre, on identifie chaque  $\tilde{\alpha}$  avec  $\alpha$ ,  $\tilde{E}$  sera encore un espace vectoriel sur  $A$  et  $\tilde{\Lambda}$  un semi-groupe multiplicatif de applications linéaires de l'espace  $\tilde{E}$  sur lui-même. Tous les résultats précédents restent donc valables, en remplaçant partout «groupe additif abélien» par «espace vectoriel», «homomorphisme» par «application linéaire», «sous-groupe» par «sous-espace linéaire». En particulier, s'il on effectue ces substitutions dans le th. 2, on doit préciser que  $E$  et  $E^*$  sont des espaces vectoriels sur un même corps  $A$  de scalaires.

6. La notion de restriction pour les distributions d'ordre fini dans un intervalle — Pour introduire cette notion, nous employerons le th. 2. Soient  $Q_1, Q_2$  deux intervalles quelconques de  $\mathbb{R}^n$  et supposons que  $Q_1 \subset Q_2$ . Nous désignerons par  $\varphi_{Q_1, Q_2}$  l'opération qui, à chaque fonction  $f(\mathbf{x})$  définie et continue dans  $Q_2$ , fait correspondre la restriction  $f^*(\mathbf{x})$  de  $f(\mathbf{x})$  à  $Q_1$ . Il est évident que  $\varphi_{Q_1, Q_2}$  est un homomorphisme du groupe  $\mathcal{C}(Q_2)$  sur le groupe  $\mathcal{C}(Q_1)$ , permutant avec les opérateurs de dérivation, c'est-à-dire, tel que

$$\varphi_{Q_1, Q_2}(D_{x_i} f) = D_{x_i}(\varphi_{Q_1, Q_2} f),$$

pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}(Q_2)$  dérivable par rapport à  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). (Suivant l'usage, nous représenterons chaque opérateur de dérivation par un même symbole, quel que soit le domaine fonctionnel considéré).

Cela étant, nous pouvons appliquer ici le th. 2 avec la prop. 8: l'homomorphisme  $\varphi_{Q_1, Q_2}$  de  $\mathcal{C}(Q_2)$  sur  $\mathcal{C}(Q_1)$  est prolongeable en un homomorphisme  $\tilde{\varphi}_{Q_1, Q_2}$  de  $\mathcal{C}_\omega(Q_2)$  sur  $\mathcal{C}_\omega(Q_1)$ , qui permute encore avec les opérateurs de dérivation (prolongés). Nous écrirons simplement  $\varphi_{Q_1, Q_2}$  au lieu de  $\tilde{\varphi}_{Q_1, Q_2}$  puisque il n'y a pas danger de confu-

sion. Donc, à chaque distribution  $T \in \mathcal{E}_\omega(Q_2)$ , l'opérateur  $\rho_{Q_2, Q_1}$  fait correspondre une distribution  $T^* \in \mathcal{E}_\omega(Q_1)$ , que nous nommerons la *restriction* de  $T$  à  $Q_1$ . En tenant compte du th. 2, on voit que, si  $T = D^p f$ , avec  $f \in \mathcal{E}(Q)$ , on aura  $T^* = D^p f^*$  où  $f^*$  est la restriction de  $f$  à  $Q_1$ . En conclusion :

*Dans le cas considéré, la notion de restriction pour les distributions est définie (univoquement), de tel façon que la restriction d'une dérivée de  $T$  est toujours égale à la dérivée de la restriction de  $T$ .*

Si l'on tien compte des notes précédentes, on voit que les opérateurs de restriction sont même des applications linéaires.

7. Limites projectives de groupes (sans topologie) — Nous avons ici besoin d'un concept de «limite projective» un peu différent de celui généralement adopté (cf. [24], pp. 24). Soit  $\mathcal{J}$  un ensemble ordonné<sup>(10)</sup> par une relation  $\prec$  (on exige pas que  $\mathcal{J}$  soit filtrant, et c'est ici qui se trouve la différence par rapport à [24]). Supposons que l'on ait fait correspondre, à tout  $i \in \mathcal{J}$ , un groupe (additif)  $E_i$  et à tout couple  $i, j$  tel que  $i \prec j$ , un homomorphisme  $h_{ij}$  de  $E_j$  dans  $E_i$  de façon que

$$h_{ik} = h_{ij} h_{jk} \quad \text{pour } i \prec j \prec k;$$

on dit alors que les groupes  $E_i$  forment un *spectre projectif par rapport aux applications*  $h_{ij}$ .

(10) On dit qu'un ensemble  $A$  est *ordonné*, si l'on a défini pour certains couples d'éléments  $x, y$  de  $A$  une relation  $x \prec y$ , telle que: I) si  $x \prec y$  et  $y \prec z$ , on a  $x \prec z$ ; II) si  $x \prec y$  et  $y \prec x$ , on a  $x = y$  et réciproquement. On dit que l'ensemble ordonné  $A$  est *filtrant à droite* (resp. à *gauche*), si, quels que soient  $x, y \in A$ , il existe  $z \in A$ , tel que  $x \prec z$  et  $y \prec z$  (resp.  $z \prec x$  et  $z \prec y$ ). Un sous-ensemble  $A'$  de l'ensemble ordonné  $A$  est dit *co-final* dans  $A$ , si, pour tout  $x \prec A$  il existe un  $x' \prec A'$  tel que  $x \prec x'$ .

Dans cette hypothèse, désignons par  $E$  l'ensemble des éléments  $u = \{u_i\}$  du produit  $\prod_{i \in \mathcal{I}} E_i$  qui vérifient la condition :

$$u_i = h_{ij}(u_j) \quad \text{lorsque} \quad i \prec j.$$

En tenant compte du fait que les  $h_{ij}$  sont des homomorphismes, il est aisé de voir que  $E$  est un groupe par rapport à l'addition définie dans le produit des  $E_i$  :

$$u + v = \{u_i + v_i\}, \quad \text{si} \quad u = \{u_i\} \quad \text{et} \quad v = \{v_i\}.$$

Le groupe  $E$  est appelé la *limite projective algébrique* ou le *groupe composé des groupes*  $E_i$  par rapport aux applications  $h_{ij}$ . Nous désignerons par  $h_i$  l'homomorphisme de  $E$  dans  $E_i$  qui fait correspondre à chaque élément  $u = \{u_i\}$  de  $E$  la coordonnée  $i$  de  $x$ , c'est-à-dire, nous poserons  $x_i = h_i(x)$ ; et nous dirons que  $h_i$  est la *i-projection* de  $E$ . On aura évidemment  $h_i = h_{ij} h_j$  pour  $i \prec j$ .

**THÉORÈME 3.** *Considérons deux spectres projectifs de groupes  $\{E_i, h_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ ,  $\{E_\lambda, h_{\lambda\mu}\}_{\lambda,\mu \in \mathcal{J}}$  et soient  $E, E^*$ , respectivement, leurs groupes composés. Soit d'autre part  $\theta$  une application biunivoque de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{J}^*$  telle que  $\theta(i) \prec \theta(j)$ , si (et seulement si)  $i \prec j$ , et soit  $\Theta_i$  pour chaque  $i \in \mathcal{I}$ , un homomorphisme de  $E_i$  dans  $E_{\theta(i)}$  tel que*

$$(5.1) \quad \Theta_i h_{ij} = h_{\lambda\mu} \Theta_j, \quad \text{pour} \quad \lambda = \theta(i), \mu = \theta(j).$$

*Alors, il est toujours possible (et d'une seule manière) de définir un homomorphisme  $\Theta$  de  $E$  dans  $E^*$  de façon que  $h_\lambda \Theta = \Theta_i h_i$  pour  $\lambda = \theta(i)$ .*

**Démonstration.** Si l'on veut que la dernière condition soit vérifiée, on doit avoir  $h_\lambda(\Theta u) = \Theta_i(h_i u)$ , pour  $\lambda = \theta(i)$ , quel que soit  $u \in E$ , et l'application  $\Theta$  de  $E$  dans  $E^*$  reste déterminée, puisque l'on connaît, pour tout  $\lambda \in \mathcal{J}^*$ , la projection de  $\Theta u$  sur  $E_\lambda$  ( $\theta$  est une application de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{J}^*$ ). Réciproquement, posons :

$$u_\lambda = \Theta_i(u_i), \text{ pour chaque } u \in E \text{ et chaque } i \in \mathcal{I}, \\ \text{avec } \lambda = \theta(i).$$

Alors, si l'on a  $\lambda \prec \mu$ , avec  $\mu = \theta(j)$ , on aura aussi :

$$h_{\lambda\mu} u_\mu = h_{\lambda\mu}(\Theta_j u_j) = \Theta_i(h_{ij} u_j) = \Theta_i(u_i) = u_\lambda$$

ce qui veut dire que  $\{u_\lambda\}$  est un élément  $u^*$  de  $E^*$ . Désignons par  $\Theta$  l'application  $u \rightarrow u^*$ , c'est-à-dire, posons

$$\Theta u = \{\Theta_i u_i\};$$

on voit tout de suite que  $\Theta$  est un homomorphisme de  $E$  dans  $E^*$  tel que  $h_\lambda \Theta = \Theta_i h_i$ , pour  $\lambda = \theta(i)$ .

NOTES — I. Ce théorème peut être généralisé immédiatement au cas où  $\theta$  est une application (pas nécessairement biunivoque) d'une partie  $\mathcal{I}_0$  de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{I}^*$ . Mais alors on doit supposer en plus que : 1)  $\Theta_i h_i = \Theta_j h_j$ , pour  $\theta(i) = \theta(j)$ ; 2) si  $\lambda \prec \mu$ , il existe  $i, j \in \mathcal{I}_0$  avec  $i \prec j$ ,  $\lambda = \theta(i)$ ,  $\mu = \theta(j)$ .

II. En particulier, les deux spectres peuvent coïncider ( $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$ ). Supposons, dans cette hypothèse, que l'on se donne deux applications permutables  $\theta, \theta'$  de  $\mathcal{I}$  sur  $\mathcal{I}$ , et, pour chaque  $i \in \mathcal{I}$ , un homomorphisme  $\Theta_i$  de  $E_i$  dans  $E_{\theta(i)}$  et un homomorphisme  $\Theta'_i$  de  $E_i$  dans  $E_{\theta'(i)}$  de façon que la condition (5.1) soit vérifiée dans les deux cas et que  $\Theta'_{\theta(i)} \Theta_i = \Theta_{\theta'(i)} \Theta'_i$  quel que soit  $i \in \mathcal{I}$ . Alors, il est aisé de voir que les opérateurs  $\Theta, \Theta'$ , qui prolongent  $\Theta_i$  et  $\Theta'_i$  à  $E$  sont aussi permutables.

III. Le cas le plus simple est celui où l'application  $\theta$  se réduit à l'identité. Alors, l'égalité  $v = \Theta u$ , avec  $u = \{u_i\}$ ,  $v = \{v_i\}$ , signifie simplement que  $v_i = \Theta_i u_i$ , pour chaque  $i \in \mathcal{I}$ .

IV. Dans quelques cas concrets que nous aurons à considérer, les opérateurs  $\Theta_i$  d'un même système sont représentés par un symbole commun  $\Theta$  et il en sera de

même pour leur prolongement à  $E$ . C'est ce qu'il arrive, par exemple, si tous les  $E_i$  sont des espaces vectoriels sur un même corps  $K$  et que tous les  $h_{ij}$  soient des applications linéaires; alors on voit, dans cet ordre d'idées, que le groupe  $E$  devient lui-même un espace vectoriel sur  $K$ . On le nomme la *limite projective algébrique des espaces  $E_i$  par rapport aux  $h_{ij}$* . La multiplication scalaire est tout simplement définie par la formule:

$$\alpha u = \{\alpha u_i\} \quad \text{en supposant} \quad u = \{u_i\}.$$

8. Les distributions définies dans un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . La notion de mesure comme distribution. Notion de translatée—Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque, non vide, de  $\mathbf{R}^n$  (en particulier on peut avoir  $\Omega = \mathbf{R}^n$ ). Par la suite, nous désignerons par  $\mathcal{Q}(\Omega)$  l'ensemble des intervalles compacts  $Q$  de  $\mathbf{R}^n$  contenus dans  $\Omega$ . L'ensemble  $\mathcal{Q}(\Omega)$  est ordonné par la relation  $Q_1 \subset Q_2$ . D'autre part, pour tout  $Q \in \mathcal{Q}(\Omega)$ , on a défini au n. 3 le groupe  $\mathcal{E}_\omega(Q)$  des distributions dans  $Q$ , et, pour tout couple d'intervalles  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}(\Omega)$  tels que  $Q_1 \subset Q_2$ , on a défini (n. 4) l'opérateur de restriction  $\rho_{Q_1, Q_2}$ . D'ailleurs il est immédiat que

$$\rho_{Q_1, Q_3} = \rho_{Q_1, Q_2} \cdot \rho_{Q_2, Q_3}, \quad \text{si} \quad Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3.$$

On voit donc que les groupes  $\mathcal{E}_\omega(Q)$ , avec  $Q \in \mathcal{Q}(\Omega)$ , forment un spectre projectif par rapport aux opérateurs  $\rho_{Q_1, Q_2}$ . Nous désignerons par  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$  le groupe composé de ce spectre et nous appellerons *distributions dans  $\Omega$*  les éléments de  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ ; l'ensemble  $\Omega$  sera dit le *domaine* de ces distributions. Donc:

*On définit une distribution  $T$  dans  $\Omega$ , lorsque on se donne, sur chaque intervalle compact  $Q$  contenu dans  $\Omega$ , une distribution  $T_Q$  (dérivée d'une fonction continue) de façon que, si  $Q_1 \subset Q_2$ , la restriction de  $T_{Q_2}$  à  $Q_1$  soit précisément  $T_{Q_1}$ . On posera  $T_Q = \rho_Q(T)$  et on dira encore que  $T_Q$  est la restriction de  $T$  à  $Q$ .*

Quant aux opérateurs de dérivation  $D^p$ , on les définit tout de suite dans  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ , en appliquant les théorèmes 2 et 3 (voir n.º 6 et notes III et IV au th. 3). La définition est donnée de façon que *la restriction d'une dérivée soit encore la dérivée de la restriction* ou, plus précisément:

$$\rho_Q(D^p T) = D^p(\rho_Q T) \text{ pour tout } T \in \mathcal{E}_\pi(\Omega) \text{ et tout } Q \in \mathcal{Q}(\Omega).$$

D'ailleurs, ces opérateurs resteront encore permutables deux à deux (voir note II au th. 3).

On voit de même que, les groupes  $\mathcal{E}_\omega(Q)$  étant des espaces vectoriels sur le corps complexe,  $\mathbb{C}$ , le groupe composé  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$  devient lui aussi un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , tandis que les opérateurs de dérivation deviennent des applications linéaires de cet espace sur lui-même.

Enfin, soit  $\Omega^*$  un ouvert contenu dans  $\Omega$ . Étant donnée une distribution  $T$  dans  $\Omega$ , on appelle *restriction* de  $T$  à  $\Omega^*$  la distribution  $T^*$ , dont la restriction à chaque intervalle  $Q \in \mathcal{Q}(\Omega^*)$  coïncide avec la restriction de  $T$  à  $Q$ . Nous désignerons par  $\rho_{\Omega^*}$  (ou par  $\rho_{\Omega^* \Omega}$ , s'il est nécessaire d'indiquer le premier domaine,  $\Omega$ ) l'application  $T \rightarrow T^*$  de  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$  dans  $\mathcal{E}_\pi(\Omega^*)$ ; on voit aisément qu'il s'agit d'une *application linéaire, permutant avec les opérateurs de dérivation*.

Nous dirons que deux distributions  $T_1, T_2$  dans  $\Omega$  sont *égales ou coïncident dans un ouvert*  $\Omega^* \subset \Omega$  si la restriction de  $T_1 - T_2$  à  $\Omega^*$  est zéro <sup>(11)</sup> [définition analogue pour un intervalle  $Q \in \mathcal{Q}(\Omega)$ ].

En particulier, les *fonctions complexes*  $f(x)$  *définies et localement sommables dans*  $\Omega$ , peuvent toujours être considérées comme distributions dans  $\Omega$ , d'après l'identification effectuée au n.º 4. On appelle *mesure dans*  $\Omega$  toute distribution  $T$  de la forme

---

<sup>(11)</sup> Il faut rappeler que, pour chaque ouvert  $\Omega$ , l'élément nul du groupe  $\mathcal{C}_\pi(\Omega)$  est la *fonction identiquement nulle de domaine*  $\Omega$ ; nous la désignons par 0 quel que soit  $\Omega$ .

$$T = DF = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} F,$$

où  $F$  est une fonction à variation bornée dans toute partie compacte de  $\Omega$ . La justification de cette désignation se trouvera au n.º 25. La «fonction»  $\delta_{(c)}$  de DIRAC (n.º 4) est une mesure dans  $\mathbb{R}^n$ , nulle partout au dehors de  $c$  (masse 1 placée au point  $c$ ).

Enfin, nous pouvons introduire la notion de *translatée d'une distribution*. Soit  $h$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^n$  et  $Q$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}^n$  [resp.  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ]. En employant les théorèmes 2 et 3, on voit qu'il est possible, d'une façon unique, de définir une application linéaire  $\tau_h$  de  $\mathcal{E}_\omega(Q)$  sur  $\mathcal{E}_\omega(Q+h)$  [resp. de  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$  sur  $\mathcal{E}_\pi(\Omega+h)$ ] telle que

- $T_1)$   $\tau_h f(x) = f(x-h)$  pour toute fonction continue  $f$   
 $T_2)$   $\tau_h D_{x_i} T = D_{x_i} \tau_h T$ , quels que soient la distribution  $T$  et l'indice  $i$ .

Eh bien, on appelle  $\tau_h T$  la *translatée de la distribution  $T$  par  $h$* . De  $T_1$ ) et  $T_2$ ) on déduit tout de suite la propriété

$$(8.1) \quad \tau_h D^p f(x) = D^p f(x-h),$$

qui fournit une définition constructive de translaté  $\tau_h$  pour le cas des distributions dans  $Q$ . Quant au cas des distributions dans  $\Omega$ , on aura, d'après le th. 3 :

*La translatée  $\tau_h$  d'une distribution  $T \in \mathcal{E}_\pi(\Omega)$  est la distribution dont la restriction à chaque intervalle compact  $Q^* \subset \Omega + h$  est la translaté  $\tau_h$  de la restriction de  $T$  à  $Q = Q^* - h$ .*

Quand il n'y aura pas danger de confusion, on pourra écrire une distribution  $T$  avec la notation d'une fonction,  $T(x)$ , et sa translaté  $\tau_h$  avec la notation correspondante  $T(x-h)$ . Cette écriture est assez commode, mais elle

manque de cohérence, puisque, en général,  $T(\mathbf{x})$  n'a pas de sens pour une valeur particulière de  $\mathbf{x}$ . Par exemple, la «fonction» de DIRAC  $\delta_{(\mathbf{c})}$  est la translaté  $\tau_{\mathbf{c}}$  de  $\delta$ ; nous l'avons déjà écrite au n.º 4 avec la notation d'une fonction:

$$\delta_{(\mathbf{c})}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{c}).$$

9. La notion de produit multiplicatif, pour les distributions—L. SCHWARTZ a montré qu'il n'est pas possible de définir, dans le cas général, une notion de produit de deux distributions qui prolonge, d'une façon naturelle, la notion de produit de deux fonctions. On peut au plus définir «produit d'une fonction par une distribution» et cela même, en imposant à cette fonction des conditions assez restrictives; nous nous bornerons au cas où la fonction est indéfiniment dérivable.

Le concept de produit multiplicatif sera ici introduit d'une façon formelle, comme l'a fait déjà KÖNIG dans [14], suivant l'esprit du *principe de la conservation des règles de calcul*. Dans le cas présent, nous chercherons à conserver *la règle de dérivation du produit*; comme conséquence, autres règles usuelles seront alors conservées.

Soit encore  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $Q$  un intervalle compact contenu dans  $\Omega$ . Nous désignerons par  $\mathcal{E}(\Omega)$  l'anneau des fonctions indéfiniment dérivables dans  $\Omega$  et par  $\mathcal{E}(Q)$  l'anneau des fonctions  $\varphi \in \mathcal{E}(Q)$  pour lesquelles il existe  $D^{\mathbf{p}}\varphi \in \mathcal{E}(Q)$  quel que soit le  $n$ -uplet  $\mathbf{p}$  d'entiers (c'est-à-dire, l'anneau des fonctions  $\varphi$  qui sont la restriction à  $Q$  des fonctions indéfiniment dérivables dans un ouvert quelconque contenant  $Q$ ).

THÉORÈME 4. a) *Il est possible (et d'une seule manière) de définir une application univoque  $(\alpha, T) \rightarrow \alpha T$  de  $\mathcal{E}(Q) \times \times \mathcal{E}_{\omega}(Q)$  dans  $\mathcal{E}_{\omega}(Q)$ , de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:*

P<sub>1</sub>) Si  $T$  est une fonction  $f \in \mathcal{E}(Q)$ ,  $\alpha T$  est le produit  $\alpha f$  au sens usuel.

P<sub>2</sub>) Pour tout  $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$  et tout  $T \in \mathcal{E}_\omega(Q)$  on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha T) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T + \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Alors, le groupe additif  $\mathcal{E}_\omega(Q)$  devient un module sur  $\mathcal{E}(Q)$  par rapport à cette application  $(\alpha, T) \rightarrow \alpha T$ .

b) Tout ce que l'on affirme dans a) reste vrai, si l'on remplace partout  $Q$  par  $\Omega$ ,  $\mathcal{E}(Q)$  par  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}_\omega(Q)$  par  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ .

Démonstration. a) Supposons d'abord qu'il existe une application  $(\alpha, T) \rightarrow \alpha T$  de  $\mathcal{E}(Q) \times \mathcal{E}_\omega(Q)$  dans  $\mathcal{E}_\omega(Q)$  vérifiant les conditions P<sub>1</sub>) et P<sub>2</sub>). Alors, cette application reste automatiquement déterminée par le schéma de récurrence suivant :

$$\begin{cases} \alpha T = \alpha f \text{ (au sens usuel) si } T = f \in \mathcal{E}(Q), \\ \alpha(D_{x_i} T) = D_{x_i}(\alpha T) - (D_{x_i} \alpha) T, \text{ pour tout } T \in \mathcal{E}_\omega(Q), i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Réciproquement, employons ce schéma pour définir la fonction  $\alpha T$ ; cela revient à définir, pour chaque  $\alpha \in \mathcal{E}(Q)$  et chaque  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , un opérateur différentiel linéaire  $\alpha D^{\mathbf{p}} = \alpha D_{x_1}^{p_1} \dots D_{x_n}^{p_n}$ , de façon que

$$(9.1) \quad \begin{cases} \alpha D^{\mathbf{p}} = \alpha, & \text{si } \mathbf{p} = (0, \dots, 0), \\ (\alpha D_{x_i} D^{\mathbf{p}}) f = D_{x_i}(\alpha D^{\mathbf{p}} \cdot f) - (D_{x_i} \alpha) D^{\mathbf{p}} \cdot f, & \text{pour tout } f \in \mathcal{E}(Q), i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

En utilisant ce procédé de récurrence, on trouve

$$(9.2) \quad \begin{aligned} & (\alpha D^{\mathbf{p}}) f = \\ & = \sum_{k_1=0}^{p_1} \sum_{k_n=0}^{p_n} (-1)^{p_1-k_1+\dots+p_n-k_n} \binom{p_1}{k_1} \dots \binom{p_n}{k_n} D^{(k_1, \dots, k_n)} [\alpha^{(p_1-k_1, \dots, p_n-k_n)} f], \end{aligned}$$

où

$$\alpha^{(p_1-k_1, \dots, p_n-k_n)} = D_{x_1}^{p_1-k_1} \dots D_{x_n}^{p_n-k_n} \alpha.$$

La linéarité de l'opérateur  $\alpha D^{\mathbf{p}}$  est bien visible dans la formule (9.2) <sup>(12)</sup>.

Posons, par définition :

$$(9.3) \quad \alpha T = (\alpha D^{\mathbf{p}})f, \quad \text{quand } T = D^{\mathbf{p}}f.$$

On voit aussitôt que, pour  $T \in \mathfrak{C}(Q)$ , le produit  $\alpha T$ , que nous venons de définir, coïncide avec le produit des *fonctions*  $\alpha, T$  au sens usuel : la condition  $P_1$  est donc vérifiée. Mais nous devons encore démontrer que, dans le cas général,  $\alpha T$  est, pour tout  $\alpha$ , une fonction univoque de  $T$ . À cet effet montrons d'abord que, si  $f = D^{\mathbf{q}}\bar{f}$ , avec  $f, \bar{f} \in \mathfrak{C}(Q)$ , on a  $(\alpha D^{\mathbf{p}})D^{\mathbf{q}}\bar{f} = \alpha D^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\bar{f}$ . Cela peut se faire par induction : cette formule est valable pour  $\mathbf{p} = (0, \dots, 0)$ ; supposons qu'elle est valable pour  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ; alors, on déduit de (9.1) :

$$(\alpha D_{x_i} D^{\mathbf{p}}) D^{\mathbf{q}}\bar{f} = D_{x_i} (\alpha D^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\bar{f}) - (D_{x_i} \alpha) D^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\bar{f} = (\alpha D_{x_i} D^{\mathbf{p}+\mathbf{q}})\bar{f};$$

la formule est donc valable pour  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{i-1}, 1 + p_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$  et, par suite, pour une valeur quelconque de  $\mathbf{p}$ .

Supposons maintenant que l'on a  $T = D^{\mathbf{p}}f = D^{\mathbf{q}}g$ , avec  $f, g \in \mathfrak{C}(Q)$ ; cela veut dire qu'il existe deux fonctions  $\bar{f}, \bar{h} \in \mathfrak{C}(Q)$  telles que  $f = D^{\mathbf{q}}\bar{f}, g = D^{\mathbf{p}}(\bar{f} + \bar{h}), \bar{h} \in \hat{N}(D^{\mathbf{p}+\mathbf{q}})$ ; alors on a, d'après (9.3), en tenant compte de la linéarité de  $\alpha D^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$  et de la remarque précédente :

$$\alpha(D^{\mathbf{p}}f) = \alpha(D^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\bar{f}) = \alpha(D^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\bar{f} + \bar{h})) = \alpha(D^{\mathbf{q}}g),$$

ce qui montre l'unicité du produit  $\alpha T$ .

---

<sup>(12)</sup> Cette formule est donnée par KÖNIG dans [14]; on l'établit aisément par induction sur  $\mathbf{p}$ .

La condition  $P_2$ ) est aussi vérifiée, à cause de (9.3) et de la deuxième des conditions (9.1).

Il reste à montrer que  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  devient un module sur  $\mathfrak{E}(Q)$ , c'est-à-dire, que l'on a toujours, pour  $\alpha, \beta \in \mathfrak{E}(Q)$  et  $T, T^* \in \mathfrak{E}_\omega(Q)$ :

- I)  $\alpha(T + T^*) = \alpha T + \alpha T^*$  (distributivité à droite).
- II)  $(\alpha + \beta)T = \alpha T + \beta T$  (distributivité à gauche).
- III)  $(\alpha\beta)T = \alpha(\beta T)$  (associativité).
- IV)  $1 \cdot T = T$ .

Les propriétés II) et IV) découlent immédiatement de (9.2). Pour démontrer I), il suffit d'employer la linéarité de  $\alpha D^p$ , en observant que l'on peut représenter  $T$  et  $T^*$  sous la forme  $T = D^p f$ ,  $T^* = D^p f^*$ , avec  $f, f^* \in \mathfrak{E}(Q)$ .

Quant à la propriété III), elle est vraie, évidemment, pour  $T \in \mathfrak{E}(Q)$ . Supposons maintenant qu'elle est vérifiée pour une distribution  $T$  (avec  $\alpha, \beta$  quelconques); nous montrerons qu'elle est vérifiée aussi pour la distribution  $D_{x_i}T$ , quel que soit  $i = 1, \dots, n$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) D_{x_i}T &= \frac{\partial}{\partial x_i} [\alpha(\beta T)] - \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial x_i} T \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta T) + \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} (\beta T) - \left( \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \beta \right) T - \left( \alpha \frac{\partial\beta}{\partial x_i} \right) T \\ &= \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta T) - \frac{\partial\beta}{\partial x_i} T \right] = \alpha(\beta D_{x_i}T). \end{aligned}$$

La propriété III) est donc vraie quel que soit  $T \in \mathfrak{E}_\omega(Q)$ , puisque  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  est la fermeture de  $\mathfrak{E}(Q)$  par rapport aux opérateurs  $D_{x_i}$ . Et la démonstration de a) est achevée.

b) Supposons donnée une application  $(\alpha, T) \rightarrow \alpha T$  de  $\mathfrak{E}(\Omega) \times \mathfrak{E}_\omega(\Omega)$  dans  $\mathfrak{E}_\omega(\Omega)$ , vérifiant  $P_1$ ) et  $P_2$ ). Alors, en tenant compte des considérations du n° 4, on voit que les restrictions  $\alpha_Q, T_Q, (\alpha T)_Q$  à chaque intervalle  $Q \in \Omega(\Omega)$  vérifient encore  $P_1$ ) et  $P_2$ ) et que, par suite, on a nécessairement:

$$(\alpha T)_Q = \alpha_Q T_Q.$$

Réciproquement, il est aisé de voir, en tenant compte du th. 3, que cette formule définit dans  $\Omega$  une distribution  $\alpha T$ , fonction univoque de  $\alpha$  et de  $T$  vérifiant  $P_1$  et  $P_2$ , et que  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  devient un module sur  $\mathfrak{E}(Q)$  par rapport à cette fonction. —

Il est donc naturel de poser la définition suivante : On appelle *produit multiplicatif de la fonction indéfiniment différentiable  $\alpha$  par la distribution  $T$*  la distribution  $\alpha T$ , dont l'existence univoque est affirmée par le th. 4.

10. Le passage du «local» au «global». Support d'une distribution — Le concept de distribution dans un ouvert  $\Omega$  quelconque de  $\mathbb{R}^n$  est éclairci et simplifié par la proposition suivante, que M. SCHWARTZ a nommé le *principe du recollement des morceaux* :

**THÉORÈME 5.** *Soit  $\{\Omega_i\}$  une famille quelconque d'ouverts de réunion  $\Omega$  ( $i \in \mathcal{I}$ ). Supposons donnée, dans chaque ouvert  $\Omega_i$ , une distribution  $T_i$ , de façon que, si  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , ont une intersection non vide,  $T_i$  et  $T_j$  coïncident dans cette intersection; alors il existe une distribution, et une seule,  $T \in \mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ , qui coïncide avec  $T_i$  dans chaque ouvert  $\Omega_i$ .*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de traduire dans le nouveau langage la démonstration donnée par M. SCHWARTZ dans [17] :

D'après le lemme de HEINE-BOREL, on pourra toujours choisir un nouveau recouvrement  $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$  de  $\Omega$ , localement fini<sup>(13)</sup>, constitué par des *intervalles ouverts et bornés* de  $\mathbb{R}^n$ , tels que chaque  $Q_\lambda$  ait l'adhérence contenue dans un ouvert  $\Omega_i$  du premier recouvrement. Dans cette

<sup>(13)</sup> On dit qu'un recouvrement de  $\Omega$  par des ouverts est *localement fini*, si tout compact contenu dans  $\Omega$  est rencontré par un nombre fini seulement de ces ensembles (cf. [17], p. 23).

hypothèse  $(\bar{Q}_\lambda \subset \Omega_i)$ , désignons par  $T_\lambda$  la restriction de  $T_i$  à  $Q_\lambda$ .

Appliquons maintenant le théorème de la «partition de l'unité» (cf. [17], p. 23): à chaque  $\lambda \in \mathcal{L}$  on peut faire correspondre une fonction  $\alpha_\lambda \in \mathfrak{E}(\Omega)$ , de façon que :

- a)  $\alpha_\lambda(\mathbf{x}) \geq 0$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\alpha_\lambda(\mathbf{x}) = 0$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega \sim \Omega_\lambda$ ;
- b)  $\sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \alpha_\lambda(\mathbf{x}) = 1$ , pour  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Choisissons, pour chaque  $\lambda \in \mathcal{L}$ , un *prolongement*  $\bar{T}_\lambda$  de  $T_\lambda$  à  $\Omega$ <sup>(14)</sup> et posons

$$T = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \alpha_\lambda \bar{T}_\lambda,$$

c'est-à-dire, désignons par  $T$  la distribution sur  $\Omega$  qui, dans chaque intervalle  $Q \in \mathfrak{Q}(\Omega)$ , est égale à la somme des distributions  $\alpha_\lambda \bar{T}_\lambda$  qui sont différentes de zéro dans  $Q$  (comme ces distributions sont en nombre fini pour tout  $Q$ , il s'agit là d'une notion purement algébrique). Il est aisé de voir que  $T$  est en effet une distribution dans  $\Omega$ , au sens de la définition du n° 6. On doit maintenant montrer que la restriction de  $T$  à chaque ouvert  $\Omega_i$  est  $T_i$ .

Prenons arbitrairement  $Q^{(i)} \in \mathfrak{Q}(\Omega_i)$ . En vertu de l'hypothèse,  $T_i$  et  $T_\lambda$  coïncident dans  $Q^{(i)} \cap Q_\lambda$  (si cette intersection n'est pas vide), quel que soit  $\lambda \in \mathcal{L}$ . Il s'ensuit que  $T = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \alpha_\lambda \bar{T}_\lambda$  coïncide dans  $Q^{(i)}$  avec  $\sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \alpha_\lambda T_i = (\sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \alpha_\lambda) T_i = T_i$ , puisque, d'après (9.2), on doit avoir  $\alpha_\lambda \bar{T}_\lambda = \alpha_\lambda T_i$  dans  $Q^{(i)}$ , pour tout  $\lambda \in \mathcal{L}$ , la fonction  $\alpha_\lambda$  étant nulle au dehors de  $Q_\lambda$ .

---

(14) Toute distribution dans un intervalle compact  $Q$  est prolongeable à  $\mathbb{R}^n$ . Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que toute fonction continue sur  $Q$  est prolongeable à  $\mathbb{R}^n$  comme fonction continue.

Réciproquement, soit  $T^*$  une distribution égale à  $T_i$  dans  $\Omega_i$ , pour tout  $i \in \mathcal{J}$ . Alors on aura nécessairement  $T^* = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \alpha_\lambda T^* = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \alpha_\lambda \bar{T}_\lambda = T$ . —

Ce théorème (ou, plus précisément, la proposition d'unicité qu'il contient) permet d'introduire la notion de «support d'une distribution» (cf. [17], pp. 27-28):

Si  $T$  est une distribution de domaine  $\Omega$ , la réunion de tous les ouverts  $\Omega^* \subset \Omega$  dans lesquels on a  $T=0$  est encore, nécessairement, un ouvert  $\Omega_0$  où  $T=0$ : *c'est le plus grand ensemble ouvert où  $T$  est nulle*. On appelle *support* de  $T$  le complémentaire de cet ensemble dans  $\Omega$ , c'est-à-dire, l'ensemble  $\Omega \sim \Omega_0$ . En particulier, le support d'une fonction continue  $f(x)$  sera l'adhérence des points où  $f(x) \neq 0$ .

11. Distributions dans l'adhérence d'un ouvert borné — Considérons maintenant un ensemble  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  qui soit l'adhérence d'un ouvert borné, c'est-à-dire, un ensemble compact  $\Delta$  tel que  $\Delta = \overline{\text{int } \Delta}$ . Nous désignerons par  $\mathfrak{C}(\Delta)$  l'espace des fonctions complexes  $f(x)$  définies et continues sur  $\Delta$ .

Soit  $f$  un élément quelconque de  $\mathfrak{C}(\Delta)$ . S'il existe un élément de  $\mathfrak{C}(\Delta)$  qui, à l'intérieur de  $\Delta$ , soit la dérivée partielle de  $f(x)$  par rapport à  $x_i$ , au sens usuel, nous représenterons encore cet élément par  $D_{x_i} f$  ( $i=1, \dots, n$ ). Avec cette convention, le symbole  $D_{x_i}$  acquiert une nouvelle interprétation: il désigne une application linéaire d'un sous-espace de  $\mathfrak{C}(\Delta)$  sur  $\mathfrak{C}(\Delta)$ .

PROPOSITION 10. *Pour toute valeur de  $i$ , on peut fixer un inverse à droite,  $\mathfrak{D}_{x_i}$ , de l'opérateur  $D_{x_i}$ , interprété comme application d'une partie de  $\mathfrak{C}(\Delta)$  sur  $\mathfrak{C}(\Delta)$ , et on aura encore  $\mathfrak{D}_{x_i} \mathfrak{D}_{x_k} = \mathfrak{D}_{x_k} \mathfrak{D}_{x_i}$  quels que soient  $i, k = 1, \dots, n$ .*

En effet, posons, pour toute fonction  $f \in \mathfrak{E}(\Delta)$ :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x} \in \Delta \\ 0 & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \sim \Delta. \end{cases}$$

Il est évident que  $\tilde{f}$  sera localement sommable dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors, si l'on pose

$$(11.1) \quad \mathfrak{D}_{x_i} f(\mathbf{x}) = \int_0^{x_i} \tilde{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi_i,$$

on voit tout de suite que  $D_{x_i} \mathfrak{D}_{x_i} f = f$ ,  $\mathfrak{D}_{x_i} \mathfrak{D}_{x_k} = \mathfrak{D}_{x_k} \mathfrak{D}_{x_i}$ , quels que soient  $i, k = 1, 2, \dots, n$ .

**PROPOSITION 11.** *Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Dans chaque ouvert borné  $\Omega^*$  tel que  $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$ , toute distribution  $T \in \mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  est une dérivée d'une fonction continue dans  $\overline{\Omega^*}$ , c'est-à-dire, il existe une fonction  $f \in \mathfrak{E}(\overline{\Omega^*})$  et une  $n$ -uple  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  (dépendantes de  $T$  et de  $\Omega^*$ ) telles que  $T = D^{\mathbf{p}} f$  dans  $\Omega^*$ .*

**Démonstration.** Soit  $T$  une distribution sur  $\Omega$  et soit  $\Omega^*$  un ouvert d'adhérence compacte contenue dans  $\Omega$ . Considérons un recouvrement fini de  $\overline{\Omega^*}$  constitué par des intervalles ouverts bornés  $Q_i$  tels que  $\overline{Q_i} \subset \Omega$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ). Il est alors possible de choisir pour chaque  $i$  une fonction indéfiniment dérivable  $\alpha_i(\mathbf{x})$ , à support contenu dans  $Q_i$ , de façon que  $\sum_1^\mu \alpha_i(\mathbf{x}) = 1$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega^*$ . On a donc  $T = \sum_1^\mu \alpha_i T$  dans  $\Omega^*$ . Mais, quel que soit  $i$ , la distribution  $T$  coïncide, dans l'intervalle  $\overline{Q_i}$ , avec une dérivée d'une fonction  $f_i(\mathbf{x})$  continue dans  $\overline{Q_i}$ , qui est prolongeable comme fonction continue à  $\overline{\Omega^*}$ . Alors, en tenant compte de la formule (9.2), on voit que  $T$  admet dans  $\Omega^*$  une décomposition du type

$$T_{\Omega^*} = \sum_{k=1}^m D^{\mathbf{p}_k} g_k,$$

où  $g_k \in \mathcal{E}(\bar{\Omega}^*)$  et  $\mathbf{p}_k$  est une  $n$ -uple d'entiers. Mais, en appliquant, à chaque fonction  $g_k$ , des puissances convenables des opérateurs  $\mathfrak{D}_{x_i}$  définis d'après (11.1) (pour  $\Delta = \bar{\Omega}^*$ ), on réussit à mettre  $T_{\Omega^*}$  sous la forme d'une dérivée d'une seule fonction  $g \in \mathcal{E}(\bar{\Omega}^*)$ .

**COROLLAIRE.** *Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbf{R}^n$  et soit  $\Omega^*$  un ouvert borné d'adhérence contenue dans  $\Omega$ . Pour toute distribution  $T$  dans  $\Omega$ , il existe une distribution  $\hat{T}$  dans  $\mathbf{R}^n$  qui coïncide avec  $T$  dans  $\Omega^*$ .*

Pour s'en convaincre il suffit de rappeler que toute fonction définie et continue sur  $\bar{\Omega}^*$  est prolongeable comme fonction continue à  $\mathbf{R}^n$ . —

Cela étant, considérons de nouveau dans  $\mathbf{R}^n$  un compact  $\Delta$  qui soit l'adhérence d'un ouvert et désignons par  $\overset{\circ}{\Delta}$  son intérieur. Nous conviendrons de désigner par  $\mathcal{E}_{\omega}(\Delta)$  l'ensemble des distributions dans  $\overset{\circ}{\Delta}$  qui sont prolongeables à  $\mathbf{R}^n$ . Il est aisé de voir que  $\mathcal{E}_{\omega}(\Delta)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}_{\pi}(\overset{\circ}{\Delta})$  et, si l'on désigne par  $\mathcal{E}(\Delta)$  l'ensemble des fonctions  $\alpha \in \mathcal{E}(\overset{\circ}{\Delta})$  qui sont prolongeables comme fonctions indéfiniment dérivables à  $\mathbf{R}^n$ , on voit de même que  $\mathcal{E}_{\omega}(\Delta)$  est un sous-module de  $\mathcal{E}_{\pi}(\overset{\circ}{\Delta})$  sur l'anneau  $\mathcal{E}(\Delta)$ . Mais la prop. 11 nous permet d'identifier les éléments de  $\mathcal{E}_{\omega}(\Delta)$  avec les dérivées des fonctions continues sur  $\Delta$ : *considérés de ce point de vue, les éléments de  $\mathcal{E}_{\omega}(\Delta)$  seront nommés distributions dans  $\Delta$* . Mais il ne faut pas confondre «distribution dans  $\Delta$ » avec «distribution dans  $\overset{\circ}{\Delta}$ »: on a  $\mathcal{E}_{\omega}(\Delta) \subset \mathcal{E}_{\pi}(\overset{\circ}{\Delta})$ , mais non  $\mathcal{E}_{\pi}(\overset{\circ}{\Delta}) \subset \mathcal{E}_{\omega}(\Delta)$ .

En particulier, dans les cas où  $\Delta$  est un intervalle compact, on retrouve les espaces  $\mathcal{E}_{\omega}(Q)$  d'où nous sommes partis. *Nous pouvons également identifier les éléments de  $\mathcal{E}_{\omega}(\Delta)$  aux dérivées des fonctions  $f \in L^1(\Delta)$  (fonctions*

sommables sur  $\Delta$ ), comme nous l'avons fait pour  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  au n° 4.

En appliquant la prop. 11 et son corollaire, on voit aussitôt, que, *pour tout ouvert  $\Omega$ , l'espace vectoriel  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  est isomorphe à la limite projective algébrique des espaces  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ , avec  $\Delta \in \Omega$ , par rapport aux opérateurs de restriction.* Une distribution  $T \in \mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  est dit *d'ordre fini*, si  $T$  est une dérivé d'une fonction continue dans  $\Omega$ ; autrement, on dira que  $T$  est *d'ordre infini*. (Sur le concept d'ordre, voir NOTES FINALES, IV).

Il est encore utile d'étudier la nature du noyau restreint  $\hat{N}(D^p) = N(\tilde{D}^p) \cap \mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ , c'est-à-dire, *l'ensemble des fonctions  $f \in \mathfrak{E}(\Delta)$  dont la dérivée  $\tilde{D}^p f$  est nulle* ( $p$  étant une  $n$ -uple quelconque d'entiers non négatifs). On reconnaît aussitôt que, *dans tout intervalle  $Q \in \Delta$ , chacune de ces fonctions est de la forme (1.1) déjà considérée, et réciproquement* (compte tenu du th. 5). En particulier, si l'on a  $D_x f = 0$  avec  $f \in \mathfrak{E}(\Delta)$ ,  $f$  sera une fonction *localement indépendante de  $x_i$* .

13. Distributions à support compact— Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Nous appellerons *distribution sur  $K$*  [resp. *mesure sur  $K$* ] toute distribution [resp. mesure] dans  $\mathbb{R}^n$ , dont le support soit contenu dans  $K$ , et nous désignerons par  $\dot{\mathfrak{E}}_\omega(K)$  l'espace des distributions sur  $K$ . Si  $K$  est l'adhérence d'un ouvert, il ne faut pas confondre  $\dot{\mathfrak{E}}_\omega(K)$  avec  $\mathfrak{E}_\omega(K)$  — c'est-à-dire, il ne faut pas confondre «distribution *sur*  $K$ » avec «distribution *dans*  $K$ ». En effet on trouve immédiatement le résultat suivant:

PROPOSITION 12. *Soit  $\Delta$  l'adhérence d'un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\Gamma$  la frontière de  $\Delta$ . Alors on a l'isomorphie*

$$\mathfrak{E}_\omega(\Delta) \cong \dot{\mathfrak{E}}_\omega(\Delta) / \dot{\mathfrak{E}}_\omega(\Gamma).$$

Par exemple, la distribution nulle dans l'intervalle  $[0, 1]$  est la restriction à l'intervalle  $]0, 1[$  de toutes les

distributions (mesures) sur  $[0,1]$  de la forme  $aH^{(p)}(x) + bH^{(q)}(x-1)$  ( $p, q = 0, 1, \dots$ ;  $a, b \in \mathbf{C}$ ;  $H =$  fonction de HEAVISIDE).

D'autre part, si  $\Omega$  est un ouvert quelconque de  $\mathbf{R}^n$ , nous désignerons par  $\mathfrak{E}_\omega(\Omega)$  l'ensemble des distributions à support compact contenu dans  $\Omega$ . Il est immédiat que  $\mathfrak{E}_\omega(\Omega)$  forme un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  [et même un sous-module de  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  par rapport à l'anneau  $\mathfrak{E}(\Omega)$ ].

Nous pourrions pousser plus loin l'étude de la structure des distributions à support compact, mais cela nous éloignerait de l'objet essentiel de ce travail.

14. Définition axiomatique du concept de distribution dans un ouvert — Nous sommes parvenus au point de pouvoir formuler une axiomatique des distributions, en termes de «fonctions continues», «domaine d'existence», «restriction», «addition» et «dérivations». L'univers logique, pour cette axiomatique, sera l'ensemble de toutes les distributions définies dans des ouverts  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ . Notre axiomatique se compose des 8 axiomes suivants :

AXIOME 1. *Chaque fonction complexe  $f(\mathbf{x})$ , définie et continue dans un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , est une distribution.*

AXIOME 2. *À chaque distribution  $T$  correspond un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ , nommé le **domaine d'existence** (ou seulement le **domaine**) de  $T$ , de façon que, si  $T$  est une fonction continue, le domaine de  $T$  est le domaine d'existence de cette fonction au sens usuel.*

AXIOME 3. *Il existe une opération, nommée addition, qui, à chaque couple de distributions  $T_1, T_2$ , à domaine  $\Omega$  commun, fait correspondre une distribution de domaine  $\Omega$ , nommée la **somme** de  $T_1$  avec  $T_2$  et notée  $T_1 + T_2$ , de façon que, si  $T_1$  et  $T_2$  sont des fonctions continues,  $T_1 + T_2$  est la somme de ces fonctions au sens usuel.*

AXIOME 4. À chaque distribution  $T$  de domaine  $\Omega$  et à chaque indice  $i=1, \dots, n$ , correspond une distribution de domaine  $\Omega$ , nommée la **dérivée partielle de  $T$  par rapport à  $x_i$**  et notée  $D_{x_i}T$ , de façon que: I) si  $T$  est une fonction qui admet dérivée partielle par rapport à  $x_i$ , continue dans  $\Omega$  (au sens usuel),  $D_{x_i}T$  coïncide avec cette dérivée; II) si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux distributions à domaine commun, on a  $D_{x_i}(T_1+T_2)=D_{x_i}T_1+D_{x_i}T_2$ , pour  $i=1, \dots, n$ ; III)  $D_{x_i}D_{x_k}T = D_{x_k}D_{x_i}T$ , quels que soient la distribution  $T$  et les indices  $i, k$ .

AXIOME 5. À chaque distribution  $T$  de domaine  $\Omega$  et à chaque ouvert  $\Omega^* \subset \Omega$ , correspond une distribution  $T_{\Omega^*}$  de domaine  $\Omega^*$ , nommée la **restriction de  $T$  à  $\Omega^*$**  de façon que: I) si  $T$  est une fonction continue,  $T_{\Omega^*}$  est la restriction de cette fonction à  $\Omega^*$ , au sens usuel; II) si  $\Omega^{**}$  est une partie ouverte de  $\Omega^*$ , on a  $(T_{\Omega^*})_{\Omega^{**}} = T_{\Omega^{**}}$  pour toute distribution  $T$  de domaine  $\Omega$ ; III)  $(T+U)_{\Omega^*} = T_{\Omega^*} + U_{\Omega^*}$ , pour tout couple de distributions  $T, U$  de domaine  $\Omega$ ; IV)  $(D_{x_i}T)_{\Omega^*} = D_{x_i}T_{\Omega^*}$ , quels que soient la distribution  $T$  dans  $\Omega$  et l'indice  $i$ .<sup>(15)</sup>

AXIOME 6. (Principe du recollement des morceaux). Si, étant donné un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , on fait correspondre à chaque  $\mathbf{x} \in \Omega$ , un voisinage ouvert  $\Omega_{\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{x}$  et une distribution  $T_{\mathbf{x}}$  de domaine  $\Omega_{\mathbf{x}}$ , de façon que, si les voisinages  $\Omega_{\mathbf{x}}, \Omega_{\mathbf{y}}$  de deux points  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de  $\Omega$  ont une intersection non vide, les restrictions de  $T_{\mathbf{x}}$  et  $T_{\mathbf{y}}$  à  $\Omega_{\mathbf{x}} \cap \Omega_{\mathbf{y}}$  coïncident, alors il existe une (et une seule) distribution  $T$  de domaine  $\Omega$ , dont la restriction à  $\Omega_{\mathbf{x}}$  est  $T_{\mathbf{x}}$ , quel que soit  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

CONVENTIONS. Si  $\mathbf{p}$  est une  $n$ -uple quelconque  $(p_1, \dots, p_n)$  de nombres entiers non négatifs, nous posons  $D^{\mathbf{p}} = D_{x_1}^{p_1} \dots D_{x_n}^{p_n}$  où  $D_{x_i}^{p_i}$  désigne la  $p_i$ -ième puissance de l'opérateur  $D_{x_i}$  ( $i=1, \dots, n$ ). Étant données  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  et  $\mathbf{q} =$

<sup>(15)</sup> M. KÖNIG a été bien aimable de nous signaler la condition II) qui manquait dans notre manuscrit.

$= (q_1, \dots, q_n)$ , on écrit  $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$  comme abréviation de  $p_1 \leq q_1, \dots, p_n \leq q_n$ . Nous disons qu'une distribution  $T$  est indépendante<sup>(16)</sup> de  $x_i$ , si sa dérivée  $D_{x_i}T$  est nulle ( $i = 1, \dots, n$ ).

AXIOME 7. *Pour toute distribution  $T$  et tout intervalle  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  ouvert et borné, dont l'adhérence est contenue dans le domaine de  $T$ , il existe une fonction  $f(\mathbf{x})$  définie et continue dans  $Q$  et une  $n$ -uple  $\mathbf{p}$ , tels que  $T_Q = D^{\mathbf{p}}f$ .*

AXIOME 8. *Si  $T$  est une distribution indépendante de  $x_i$  ayant pour domaine un intervalle  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  et si l'on a  $T = D^{\mathbf{p}}f$ ,  $f$  étant une fonction définie et continue dans  $Q$  et  $\mathbf{p}$  une  $n$ -uple d'entiers, il existe une autre  $n$ -uple  $\dot{\mathbf{p}} \leq \mathbf{p}$  et une fonction  $\dot{f}$  continue dans  $Q$ , indépendante de  $x_i$  au sens usuel, telles que  $T = D^{\dot{\mathbf{p}}}\dot{f}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).*

L'analyse développée dans tous les nos précédents nous permet d'établir que cette axiomatique est compatible et catégorique; c'est-à-dire: a) elle admet au moins une réalisation; b) deux réalisations de cette axiomatique sont nécessairement isomorphes. L'axiome 8 est peut-être le plus délicat et le plus décisif dans cette axiomatique — la vraie clef de toute la théorie; il se relie aux propositions 4 et 5.

Une réalisation de cette axiomatique est précisément l'ensemble

$$\bigcup_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} \mathfrak{E}_{\pi}(\Omega),$$

muni des notions, que nous y avons introduites, de «somme», de «restriction» et de «dérivation»: nous le désignerons par  $\mathfrak{E}_{\pi}^{[n]}$ . Il n'y a plus de difficulté à voir que cette structure formelle vérifie les axiomes 1-7. Quant à

<sup>(16)</sup> Ici indépendante de  $x_i$  doit s'interpréter en général comme localement indépendante de  $x_i$ , lorsque  $T$  est une fonction continue.

l'axiome 8, il suffit d'employer la prop. 4. Si  $Q$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et si l'on a  $D_{x_i} D^p f(\mathbf{x}) = 0$ , avec  $f \in \mathcal{E}(Q)$  et  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , on aura  $D^p f(\mathbf{x}) = D^p [x_i^{p_i} \gamma_i(\mathbf{x})] = D^{\dot{\mathbf{p}}} \dot{f}(\mathbf{x})$ , où  $\dot{f} = p_i! \gamma_i$  est une fonction continue indépendante de  $x_i$  et  $\dot{\mathbf{p}} = (p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_n)$ .

Montrons maintenant que l'axiomatique est catégorique. Soit  $\mathbf{T}^{[n]}$  une de ses réalisations. Désignons par  $Q$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}^n$ , par  $\overset{\circ}{Q}$  l'intérieur de  $Q$  et par  $\mathbf{T}[Q]$  l'ensemble des éléments de  $\mathbf{T}^{[n]}$  qui sont les restrictions à  $\overset{\circ}{Q}$  d'éléments de  $\mathbf{T}^{[n]}$  dont les domaines  $\Omega$  contiennent  $Q$ . Les axiomes 1-5 et 7 nous permettent d'affirmer que  $\mathbf{T}[Q]$  est un surgroupe abélien de  $\mathcal{E}(Q)$ , auquel se trouvent prolongés les opérateurs de dérivation, devenus permutables deux à deux; et que, en outre,  $\mathbf{T}[Q]$  est la fermeture de  $\mathcal{E}(Q)$  par rapport à ces opérateurs. Désignons par  $\bar{D}^p$  l'opérateur  $D^p$  prolongé à  $\mathbf{T}[Q]$ , pour toute  $n$ -uplet  $\mathbf{p}$ . L'axiome 8 nous permet de conclure que, si  $T$  est un élément de  $\mathbf{T}[Q]$  indépendant de  $x_i$  et tel que  $T = \bar{D}^p f$ , avec  $f \in \mathcal{E}(Q)$  et  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , on aura  $T = \bar{D}^p [x_i^{p_i} \gamma_i(\mathbf{x})]$ , où  $\gamma_i$  est une fonction indépendante de  $x_i$ . Mais cela implique, d'après la prop. 5, que l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{E}(Q)$  telles que  $\bar{D}^p f = 0$  est précisément l'ensemble  $\hat{N}(D^p)$  des fonctions de la forme (1.1), restreintes à  $Q$ . Alors, si l'on applique le théorème d'unicité contenu dans le th. 1, en tenant compte des considérations du n° 3, on reconnaît qu'il existe un (et seulement un) isomorphisme  $\sigma_Q$  du groupe  $\mathbf{T}[Q]$  sur le groupe  $\mathcal{E}_\omega(Q)$ , laissant fixes les éléments de  $\mathcal{E}(Q)$  et permutant avec les opérateurs de dérivation. D'ailleurs, si  $Q^*$  est un intervalle fermé contenu dans  $Q$ , et que l'on désigne par  $T_{Q^*}$  la restriction de  $T$  à l'intérieur de  $Q^*$ , on aura  $\sigma_{Q^*}(T_{Q^*}) = (\sigma_Q T)_{Q^*}$ , quel que soit  $T \in \mathbf{T}[Q]$ , puisque cela est déjà vrai pour  $T \in \mathcal{E}(Q)$  et que  $\sigma_Q$  est permutable avec les dérivations.

Cela étant, désignons par  $\mathbf{T}(\Omega)$  l'ensemble des éléments de  $\mathbf{T}^{[n]}$  de domaine  $\Omega$ , avec sa structure additive. Les axiomes 5 et 6 nous portent à conclure que les isomorphismes  $\sigma_Q$  (avec  $Q \subset \Omega$ ) déterminent un isomorphisme opératoire  $\sigma_\Omega$  de  $\mathbf{T}(\Omega)$  sur le groupe  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ , c'est-à-dire, sur la limite projective des groupes  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ , par rapport aux opérateurs  $\rho_{Q_1, Q_2}$  ( $Q_1 \subset Q_2 \subset \Omega$ ). D'ailleurs, on aura encore

$$\sigma_{\Omega^*}(\mathbf{T}_{\Omega^*}) = (\sigma_\Omega \mathbf{T})_{\Omega^*},$$

pour tout élément  $\mathbf{T}$  de  $\mathbf{T}(\Omega)$  et tout ouvert  $\Omega^* \subset \Omega$ . Mais alors on peut affirmer que la correspondance

$$\mathbf{T} \leftrightarrow \sigma_\Omega \mathbf{T} \quad (\Omega = \text{domaine de } \mathbf{T}),$$

avec  $\Omega$  variable, est un isomorphisme entre les deux ensembles  $\mathbf{T}^{[n]}$  et  $\mathfrak{E}_\pi^{[n]}$ , par rapport aux notions primitives de l'axiomatique considérées, c. q. f. d.

Il resterait à examiner le problème de l'indépendance de ces axiomes. Quoiqu'il en soit, ce qui intéresserait plutôt serait de rendre cette axiomatique plus naturelle, plus intuitive encore, si cela est possible (cf. NOTES FINALES, III).

Remarquons, en terminant ce paragraphe, que la notion de «produit d'une distribution par un scalaire» et, plus généralement, celle de «produit multiplicatif» ne sont pas vraiment des notions primitives dans l'univers des distributions, tel que nous venons de le construire: elles se définissent logiquement d'une façon univoque, en termes de «fonctions continues», «somme», «restriction» et «dérivations». Il en sera de même pour les notions topologiques que nous introduirons dans le paragraphe suivant.

## § 2 — Le prolongement topologique

15. Le théorème général de prolongement topologique — Considérons deux ensembles  $E$  et  $\tilde{E}$  tels que  $E \subset \tilde{E}$ . Il est naturel de poser les deux définitions suivantes (cf. définitions 1 et 2, n.º 1):

DÉFINITION 3. On dit qu'une topologie  $\tilde{\mathfrak{T}}$  sur  $\tilde{E}$  *prolonge* ou est un *prolongement* d'une topologie  $\mathfrak{T}$  sur  $E$ , si tout point adhérent à un ensemble  $X$ , par rapport à  $\mathfrak{T}$  est encore adhérent à  $X$  par rapport à  $\tilde{\mathfrak{T}}$ , quel que soit  $X \subset E$ ; ou, ce qui revient au même, si  $\tilde{\mathfrak{T}}$  induit dans  $E$  une topologie moins fine que  $\mathfrak{T}$ .

DÉFINITION 4. On dit qu'une topologie  $\tilde{\mathfrak{T}}$  sur  $\tilde{E}$  *prolonge strictement* ou est un *prolongement strict* d'une topologie  $\mathfrak{T}$  sur  $E$  si  $\tilde{\mathfrak{T}}$  induit dans  $E$  la topologie  $\mathfrak{T}$ .

Soit maintenant  $E$  un espace vectoriel complexe muni d'un semi-groupe multiplicatif  $\Lambda$  d'applications linéaires de sous-espaces de  $E$  sur  $E$  et soit  $\tilde{E}$  un sur-espace de  $E$ , dans lequel on ait défini, pour tout  $\Phi \in \Lambda$ , un prolongement  $\tilde{\Phi}$  de  $\Phi$  comme application linéaire de  $\tilde{E}$  sur  $\tilde{E}$  de façon que  $\tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}\tilde{\Phi}$ . Désignons par  $\tilde{\Lambda}$  l'ensemble des opérateurs prolongés  $\tilde{\Phi}$  et supposons que  $\tilde{E}$  est la fermeture de  $E$  par rapport aux opérateurs  $\tilde{\Phi} \in \tilde{\Lambda}$ , c'est-à-dire que

$$\tilde{E} = \bigcup_{\Phi \in \Lambda} \tilde{\Phi}(E).$$

Alors, si l'on pose  $\hat{N}(\Phi) = E \cap N(\tilde{\Phi})$  pour tout  $\Phi \in \Lambda$ , l'application  $u + \hat{N}(\Phi) \leftrightarrow \tilde{\Phi}(u)$  de  $E/\hat{N}(\Phi)$  sur  $\tilde{\Phi}(E)$  sera un isomorphisme (application biunivoque linéaire).

Toutes ces notions sont de nature algébrique. Si, d'autre part, on suppose définie dans  $E$  une topologie  $\mathfrak{T}$ , nous aurons à considérer le problème suivant: *Prolonger*  $\mathfrak{T}$  à  $E$ ,

de façon que les opérateurs  $\tilde{\Phi} \in \tilde{\Lambda}$  deviennent continus. Nous nous bornerons au cas où  $\mathfrak{T}$  est une topologie d'espace localement convexe<sup>(17)</sup>, en exigeant qu'il en soit de même pour la topologie prolongée. La réponse précise à notre problème est donné par le

**THÉOREME 6.** *Soit  $\mathfrak{T}$  une topologie d'espace localement convexe sur  $E$ . Supposons que, pour tout  $\Phi \in \Lambda$ , l'ensemble  $\hat{N}(\Phi)$  est fermé, par rapport à  $\mathfrak{T}$  et désignons par  $\mathfrak{T}_\Phi$  la topologie sur  $\tilde{\Phi}(E)$  qui rend bicontinue l'application  $u + \hat{N}(\Phi) \leftrightarrow \tilde{\Phi}(u)$  de l'espace quotient  $E/\hat{N}(\Phi)$  ( $E$  étant muni de  $\mathfrak{T}$ ) sur l'espace  $\tilde{\Phi}(E)$ . Alors, parmi les topologies d'espace localement convexe sur  $E$  qui prolongent  $\mathfrak{T}$  et rendent continus les opérateurs  $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \dots$ , il en existe une  $\tilde{\mathfrak{T}}$ , plus fine que toutes les autres: c'est la borne supérieure de toutes les topologies d'espace localement convexe qui induisent sur chaque espace  $\tilde{\Phi}(E)$  une topologie moins fine que  $\mathfrak{T}_\Phi$  pour tout  $\Phi \in \Lambda$ .*

**Démonstration.** Considérons d'abord  $\Phi \in \Lambda$ ,  $u \in E$ ,  $X \subset E$  et supposons que  $u$  est adhérent à  $X$  par rapport à  $\mathfrak{T}$ . Alors, si  $\mathfrak{T}'$  est un prolongement de  $\mathfrak{T}$  à  $\tilde{E}$  rendant continue l'application  $\tilde{\Phi}$ , on aura encore

$$\tilde{\Phi}(u) \text{ adhérent à } \tilde{\Phi}(X) \text{ par rapport à } \mathfrak{T}',$$

---

<sup>(17)</sup> On dit que l'espace vectoriel  $E$ , muni de la topologie  $\mathfrak{T}$ , est un espace localement convexe, si les applications  $(u, v) \rightarrow u + v$ ,  $(\alpha, u) \rightarrow \alpha u$ , resp. de  $E \times E$  sur  $E$  et de  $\mathbf{C} \times E$  sur  $E$ , sont continues par rapport  $\mathfrak{T}$  et si, en outre, il existe un système fondamental de voisinages de 0 constitué par des ensembles convexes (pour les détails voir [7]). On pourrait aussi poser le problème du prolongement topologique dans le domaine, plus général, des groupes topologiques; les raisonnements seraient tout à fait analogues.

c'est-à-dire, l'application  $\tilde{\Phi}$  de  $E[\mathfrak{T}]^{(18)}$  dans  $\tilde{E}[\mathfrak{T}']$  sera continue. Mais l'application  $u \rightarrow \tilde{\Phi}(u)$  de  $E$  sur  $\tilde{\Phi}(E)$  se décompose en un produit  $\tilde{\Phi} \circ \alpha$ , où  $\alpha$  est l'application canonique de  $E$  sur  $E/\hat{N}(\Phi)$  et  $\tilde{\Phi}$  l'application biunivoque  $u + \hat{N}(\Phi) \leftrightarrow \tilde{\Phi}(u)$ . La plus fine topologie sur  $\tilde{\Phi}(E)$  qui rend continue l'application  $\tilde{\Phi}$  de  $E[\mathfrak{T}]$  sur  $\tilde{\Phi}(E)$  est donc la topologie  $\mathfrak{T}_\Phi$  qui rend bicontinue l'application  $\tilde{\Phi}$  de  $E[\mathfrak{T}]/\hat{N}(\Phi)$  sur  $\tilde{\Phi}(E)$ .

On voit alors que, si  $\mathfrak{T}'$  est une topologie d'espace localement convexe sur  $\tilde{E}$  prolongeant  $\mathfrak{T}$  et rendant continues les applications  $\tilde{\Phi} \in \tilde{\Lambda}$ ,  $\mathfrak{T}'$  doit induire dans chaque sous-espace  $\tilde{\Phi}(E)$  de  $\tilde{E}$  une topologie moins fine que  $\mathfrak{T}_\Phi$ . Soit  $\tilde{\mathfrak{T}}$  la borne supérieure (c. a. d. la plus fine) des topologies d'espace localement convexe sur  $E$  qui induisent dans  $\tilde{\Phi}(E)$  une topologie moins fine que  $\mathfrak{T}_\Phi$ , pour tout  $\Phi \in \Lambda$ ; si l'on réussit à montrer que toute application  $\tilde{\Theta} \in \tilde{\Lambda}$  est continue par rapport à  $\tilde{\mathfrak{T}}$ , le théorème est démontré.

D'après une propriété connue (voir [7], pp. 59-63), une application linéaire  $L$  de  $\tilde{E}[\tilde{\mathfrak{T}}]$  dans un autre espace localement convexe sera continue si (et seulement si) la restriction de  $L$  à  $\tilde{\Phi}(E)$  est continue dans  $\tilde{\Phi}(E)[\mathfrak{T}_\Phi]$  pour tout  $\Phi \in \Lambda$ . Nous pouvons appliquer ce critère aux éléments de  $\tilde{\Lambda}$  (applications linéaires de  $\tilde{E}$  sur  $\tilde{E}$ ). Soient  $\Phi, \Theta$  deux éléments quelconques de  $\Lambda$  et soit  $\tilde{u} \in \tilde{\Phi}(E)$ ,  $\tilde{X} \subset \tilde{\Phi}(E)$ ,  $\tilde{u}$  étant adhérent à  $\tilde{X}$  par rapport à  $\mathfrak{T}_\Phi$ ; cela veut dire, d'après la définition de  $\mathfrak{T}_\Phi$ , qu'il existe un  $u \in E$  et un  $X \subset E$  tels que  $\tilde{u} = \tilde{\Phi}(u)$ ,  $\tilde{X} = \tilde{\Phi}(X)$ ,  $u$  étant adhérent à  $X$  par rapport à  $\mathfrak{T}$ . Mais, puisque  $\tilde{\Theta}\tilde{\Phi}$  est une application continue de  $E[\mathfrak{T}]$  sur  $\tilde{\Theta}\tilde{\Phi}(E)[\mathfrak{T}_{\Theta\Phi}]$  il s'ensuit que  $\tilde{\Theta}(\tilde{u})$

(18) Nous désignons par  $E[\mathfrak{T}]$  l'espace vectoriel  $E$  muni de la topologie  $\mathfrak{T}$ .

est adhérent à  $\tilde{\Theta}(\tilde{X})$  par rapport à  $\mathfrak{I}_{\Theta\Phi}$ , donc par rapport à  $\tilde{\mathfrak{I}}$ . Comme  $\Phi$  est arbitraire, cela signifie que l'opérateur  $\tilde{\Theta}$  est continu, c. q. f. d..

NOTE. Il est aisé de voir que, si les opérateurs  $\Phi \in \Lambda$  ne sont pas tous continus par rapport à  $\mathfrak{I}$ , la topologie  $\tilde{\mathfrak{I}}$  ne sera pas un prolongement strict de  $\mathfrak{I}$ . La réciproque est vraie dans certains cas particuliers, mais elle ne l'est peut-être plus dans le cas général.

PROPOSITION 13. *Si, les hypothèses du théorème 6 étant vérifiées<sup>(19)</sup>, tout opérateur  $\Phi \in \Lambda$  admet un inverse à droite  $\Phi_d^{-1}$  continu par rapport à  $\mathfrak{I}$ , la topologie  $\mathfrak{I}_{\Phi\Psi}$  de  $\widehat{\Phi\Psi}(E)$  est un prolongement de la topologie  $\mathfrak{I}_\Psi$  de  $\tilde{\Psi}(E)$ , quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ .*

En effet, supposons vérifiée l'hypothèse et soient  $\tilde{u} \in \tilde{\Psi}(E)$ ,  $\tilde{X} \subset \tilde{\Psi}(E)$ ,  $\tilde{u}$  étant adhérent à  $\tilde{X}$  par rapport à  $\mathfrak{I}_\Psi$ . Cela veut dire qu'il existe un  $u \in E$  et un  $X \subset E$ , tels que  $\tilde{u} = \tilde{\Psi}(u)$ ,  $\tilde{X} = \tilde{\Psi}(X)$ ,  $u$  étant adhérent à  $X$  par rapport à  $\mathfrak{I}$ . Alors  $\Phi_d^{-1}(u)$  sera encore adhérent à  $\Phi_d^{-1}(X)$  par rapport à  $\mathfrak{I}$  et, par suite, l'élément  $\widehat{\Phi\Psi}(\Phi_d^{-1}u) = \tilde{u}$  sera adhérent à  $\widehat{\Phi\Psi}(\Phi_d^{-1}(X)) = \tilde{X}$ , par rapport à  $\mathfrak{I}_{\Phi\Psi}$ .

NOTE. Dans le cas où la topologie  $\mathfrak{I}_{\Phi\Psi}$  est un prolongement de la topologie  $\mathfrak{I}_\Psi$ , quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ , on peut dire que  $\tilde{E}[\tilde{\mathfrak{I}}]$  est la *limite inductive* des espaces  $\tilde{\Phi}(E)[\mathfrak{I}_\Phi]$  (voir [7], pp. 61-63).

PROPOSITION 14. *Supposons que les hypothèses du théorème 6 sont vérifiées et qu'il existe un système fini de générateurs  $B_1, \dots, B_n$  de  $\Lambda$ , tels que  $B_i$  admet un inverse à*

(19) Il ne faut pas oublier que les hypothèses sur  $E$  et  $\Lambda$  ont été formulées avant d'énoncer le th. 6.

droite  $Y_i$  continu par rapport à  $\mathfrak{I}$ , pour  $i=1, \dots, n$ . Alors, l'espace localement convexe  $\tilde{E}[\tilde{\mathfrak{I}}]$  est la limite inductive de la suite des espaces  $\tilde{B}^p(E)[\mathfrak{I}_{B^p}]$ ,  $p=1, 2, \dots$ , où  $B=B_1 \dots B_n$ .

Il suffit d'employer la proposition précédente et la définition de limite inductive.

16. Limites inductives de suites d'espaces normés vérifiant certaines conditions — Pour appliquer les résultats précédents à la théorie axiomatique des distributions, nous utiliserons un théorème dont nous avons esquissé la démonstration dans un travail précédent (voir [20], pp. 43-44) et qui a donné origine au travail [21].

**THÉORÈME 7.** *Soit  $S$  un espace localement convexe qui s'exprime comme limite inductive d'une suite  $(S_n)$  d'espaces normés, tels que :*

$H_1)$  *La topologie  $\mathfrak{I}_{n+1}$  de  $S_{n+1}$  induit dans  $S_n$  une topologie moins fine que la topologie  $\mathfrak{I}_n$  de  $S_n$ .*

$H_2)$  *La boule de  $S_n$  est relativement compacte dans  $S_{n+1}$ .*

*Dans ces conditions, on peut affirmer que :*

$T_1)$  *L'espace  $S$  est séparé, complet et réflexif. Son dual fort est un espace  $(\mathfrak{M})$ .*

$T_2)$  *La topologie  $\mathfrak{I}_\omega$  de  $S$  peut être définie à partir des suites convergentes, dans ce sens que les ensembles fermés par rapport à  $\mathfrak{I}_\omega$  sont les ensembles fermés par rapport aux limites des suites  $\mathfrak{I}_\omega$ -convergentes.*

$T_3)$  *Pour qu'une suite  $(u_k)$  d'éléments de  $S$  converge vers 0 par rapport à  $\mathfrak{I}_\omega$ , il faut et il suffit qu'il existe au moins un entier  $n$  tel que les  $u_k$  soient tous contenus dans  $S_n$  et on ait  $\lim u_k = 0$  par rapport à  $\mathfrak{I}_n$ .*

$T_4)$  *Pour qu'un ensemble  $H \subset S$  soit borné par rapport à  $\mathfrak{I}$  il faut et il suffit qu'il existe un entier  $n$  tel que  $H$  soit contenu dans  $S_n$  et borné par rapport à  $\mathfrak{I}_n$ .*

Dans [21] on trouvera les démonstrations détaillées de toutes les parties de cette proposition.

17. Les espaces vectoriels topologiques  $\mathfrak{E}_p(\Delta)$  et  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  — Considérons, d'une part, l'espace vectoriel  $\mathfrak{E}(\Delta)$  des fonctions définies et continues dans un compact  $\Delta$  qui soit l'adhérence d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et, d'autre part, l'espace vectoriel  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  des distributions  $T = \tilde{D}^p f$  où  $f \in \mathfrak{E}(\Delta)$  et  $D = D_{x_1} D_{x_2} \cdots D_{x_n}$ , en interprétant ici les symboles  $D_{x_i}$  comme nous l'avons fait au n. 12. On aura donc

$$\mathfrak{E}_\omega(\Delta) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathfrak{E}_p(\Delta).$$

Dorénavant, sauf mention expresse du contraire, nous considérons définie dans l'ensemble  $\mathfrak{E}_0(\Delta) = \mathfrak{E}(\Delta)$ , outre sa structure d'espace vectoriel, la topologie déterminée par la norme usuelle

$$\|f\| = \max_{x \in \Delta} |f(x)|,$$

qui le fait devenir un espace de BANACH. Nous désignons par  $\mathfrak{T}$  cette topologie.

Nous poserons encore  $\hat{N}(D^p) = N(\tilde{D}^p) \cap \mathfrak{E}(\Delta)$  où  $\tilde{D}$  est l'opérateur  $D$  prolongé à  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ . Alors, l'application  $f + \hat{N}(D^p) \rightarrow \tilde{D}^p f$  est un isomorphisme algébrique de  $\mathfrak{E}(\Delta)/\hat{N}(D^p)$  sur  $\mathfrak{E}_p(\Delta)$ . On a en outre :

PROPOSITION 15. *Quel que soit  $p$ ,  $\hat{N}(D^p)$  est fermé dans  $\mathfrak{E}(\Delta)$  topologique.*

Démonstration. a) Considérons d'abord le cas où  $\Delta$  est un intervalle  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$ . Posons

$$P^{(p)} = I - (I - P_1^{(p)}) (I - P_2^{(p)}) \cdots (I - P_n^{(p)});$$

alors  $P^{(p)}$  sera, pour  $p = 0, 1, \dots$ , un projecteur de  $\mathfrak{E}(Q)$  sur  $\hat{N}(D^p)$ , les  $P_i^{(p)}$  étant définis comme nous l'avons indiqué au n° 3. Observons que, pour toute  $f \in \mathfrak{E}(\Delta)$ , le coefficient

$\gamma_{\nu k}(\mathbf{x})$  de  $x_k^\nu$  dans  $\mathbf{P}^{(p)}f$  est une combinaison linéaire de fonctions que l'on obtient de  $f(\mathbf{x})$  en remplaçant  $x_k$  par des constantes ( $k=1, \dots, n; \nu=0, 1, \dots, p-1$ ); alors on voit aussitôt que le projecteur  $\mathbf{P}^{(p)}$  est continu et, par suite,  $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p)$  fermé dans  $\mathfrak{E}(\mathbf{Q})$ .<sup>(20)</sup>

b) Considérons maintenant le cas général. Soit  $(f_k)$  une suite d'éléments de  $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p) \subset \mathfrak{E}(\Delta)$  convergeant vers  $f_0 \in \mathfrak{E}(\Delta)$ ; alors, quel que soit l'intervalle compact  $Q \subset \Delta$ , on aura  $\lim_k f_k(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x})$  uniformément sur  $Q$ , et par conséquent, d'après a), la restriction de  $f_0(\mathbf{x})$  à  $Q$  est de la forme (1.1). Mais, suivant les considérations du n° 12, cela veut dire précisément que  $f_0 \in \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p)$ , c. q. f. d.

Cette proposition nous permet d'affirmer qu'il est possible de définir sur l'espace vectoriel  $\mathfrak{E}(\Delta)/\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p)$  une norme donnant la topologie quotient de celle de  $\mathfrak{E}(\Delta)$  par  $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p)$  (cf. [4], pp. 45-46). Nous prenons pour boule ouverte de centre 0 et rayon 1, dans cet espace quotient, l'ensemble des classes

$$\dot{f} = f + \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p) \text{ avec } \|f\| < 1 \text{ dans } \mathfrak{E}(\Delta).$$

Donc, si l'on considère comme boule ouverte de centre 0 et rayon 1, dans  $\mathfrak{E}_p(\Delta)$ , l'ensemble des distributions

$$T = \mathbf{D}^p f, \text{ où } f \in \mathfrak{E}(\Delta), \|f\| < 1,$$

$\mathfrak{E}_p(\Delta)$  devient un espace normé<sup>(21)</sup> (même un espace de BANACH) dont la topologie rend bicontinue l'application  $f + \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p) \rightarrow \mathbf{D}^p f$  de  $\mathfrak{E}(\Delta)/\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p)$  sur  $\mathfrak{E}_p(\Delta)$ . Nous désignerons par  $\mathfrak{T}_p$

<sup>(20)</sup> Soit en effet  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p)$  convergeant vers  $f_0 \in \mathfrak{E}(\mathbf{Q})$ . Alors  $f_n = \mathbf{P}^{(p)} f_n \rightarrow \mathbf{P}^{(p)} f_0 = f_0 \in \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{D}^p)$ .

<sup>(21)</sup> La norme de chaque distribution  $T$  sera définie par la formule  $\|T\| = \inf \{ \|f\|; \mathbf{D}^p f = T \}$ .

cette topologie. Cela étant, nous pouvons établir le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 8. *Quel que soit  $p = 1, 2, \dots$ , on peut affirmer que: I)  $\mathfrak{T}_{p+1}$  induit dans  $\mathfrak{E}_p(\Delta)$  une topologie moins fine que  $\mathfrak{T}_p$ ; II) la boule de l'espace normé  $\mathfrak{E}_p(\Delta)$  est relativement compacte par rapport à  $\mathfrak{T}_{p+1}$ .*

Pour démontrer I) il suffit d'appliquer la prop. 13. Posons, pour chaque fonction  $f \in \mathfrak{E}(\Delta)$  :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ sur } \Delta, \quad \tilde{f}(\mathbf{x}) = 0 \text{ sur } \mathbf{R}^n - \Delta,$$

et

$$\mathfrak{D}_{x_i} f = \int_0^{x_i} \tilde{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi_i.$$

On voit aussitôt que  $\mathfrak{D}_{x_i}$  est un inverse à droite de  $D_{x_i}$ , continu par rapport à  $\mathfrak{T}$ .

Pour démontrer II), nous utiliserons le théorème de ASCOLI sur les familles de fonctions équi continues dans un compact. Posons

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

c'est-à-dire,  $F = \mathfrak{D}_{x_1} \dots \mathfrak{D}_{x_n} f$ . Pour tout  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  et tout  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$ , on aura

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n [F(x_1 + h_1, \dots, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1 + h_1, \dots, x_{i-1} + h_{i-1}, x_i, \dots, x_n)]$$

(pour  $i=0$ , il n'existe pas  $x_{i-1}$  ni  $h_{i-1}$ , évidemment).

Alors, si  $|f(\mathbf{x})| < 1$  pour  $\mathbf{x} \in \Delta$ , on en déduit

$$|F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})| < \sum_{i=0}^n |(x_1 + h_1) \dots (x_{i-1} + h_{i-1}) h_i x_{i+1} \dots x_n|.$$

On voit ainsi que l'ensemble  $\mathfrak{H}$  des fonctions  $F(\mathbf{x})$  telles que  $|f(\mathbf{x})| < 1$  sur  $\Delta$  est équi continu et borné;

par conséquent, d'après le théorème de ASCOLI,  $\mathfrak{H}$  est relativement compact dans  $\mathfrak{C}(\Delta)$ . Or, la boule ouverte  $\mathfrak{B}_p$  de centre 0 et rayon 1 dans  $\mathfrak{C}_p(\Delta)$  est constituée précisément par les distributions  $T = D^p f$  telles que  $|f(\mathbf{x})| < 1$  sur  $\Delta$ ; on a donc

$$\mathfrak{B}_p = D^{p+1} \mathfrak{H}.$$

Mais  $D^{p+1}$  est une application continue de  $\mathfrak{C}(\Delta)[\mathfrak{T}]$  sur  $\mathfrak{C}_{p+1}(\Delta)[\mathfrak{T}_{p+1}]$ . Alors, puisque  $\mathfrak{H}$  est relativement compact par rapport à  $\mathfrak{T}$ , on conclut que  $\mathfrak{B}_p$  est relativement compact par rapport à  $\mathfrak{T}_{p+1}$ , c. q. f. d.

*Dorénavant, sauf mention expresse du contraire, nous considérons l'espace vectoriel  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  muni de la topologie  $\mathfrak{T}_\omega$  de la limite inductive des espaces  $\mathfrak{C}_p(\Delta)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ .*

En tenant compte des théorèmes 6 et 7, on tire immédiatement du théorème précédent les conclusions suivantes :

COROLLAIRES :

I. *L'espace  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  est séparé, complet et réflexif. Son dual fort est un espace  $(\mathfrak{M})$ .*

II. *Pour qu'une suite  $(T_k)$  de distributions sur  $\Delta$  converge vers 0 il faut et il suffit qu'il existe un entier  $p$  et une suite  $(f_k)$  de fonctions continues, tels que : 1)  $T_k = D^p f_k$  pour tout  $k$ ; 2)  $f_k(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  uniformément sur  $\Delta$ .*

III. *Pour qu'un ensemble  $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  soit fermé, il faut et il suffit qu'il contienne la limite de toute suite convergente de distributions appartenant à  $\mathfrak{X}$ .*

IV.  *$\mathfrak{T}_\omega$  est la plus fine topologie sur  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  qui rend continus tous les opérateurs de dérivation.*

V. *Pour qu'une application  $\Theta$  de  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  dans un espace topologique  $S$  quelconque soit continue, il faut et il suffit que la restriction de  $\Theta$  à  $\mathfrak{C}_p(\Delta)$  soit continue par rapport à  $\mathfrak{T}_p$ , pour tout  $p$ ; ou encore : que l'opérateur  $\Theta D^p$  soit une application continue de  $\mathfrak{C}(\Delta)[\mathfrak{T}]$  dans  $S$ , pour tout  $p$ .*

VI. Pour qu'un ensemble  $\mathfrak{X}$  de distributions sur  $\Delta$  soit borné, il faut et il suffit qu'il existe un entier  $p$  et un ensemble  $\mathfrak{X}^*$  borné dans  $\mathfrak{E}(\Delta)[\mathfrak{I}]$  tel que  $\mathfrak{X} = \mathbf{D}^p \mathfrak{X}^*$ .

Un autre point essentiel dans la théorie des distributions est le théorème suivant :

THÉORÈME 9. Pour toute fonction  $\alpha \in \mathfrak{E}(\Delta)$ , l'application linéaire  $T \rightarrow \alpha T$  de l'espace  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  dans lui-même est continue <sup>(22)</sup>.

Pour la démonstration il suffit d'appliquer la formule (9.2) et le corollaire V du th. 8.

Enfin, nous utiliserons encore la proposition suivante, dont la démonstration n'offre aucune difficulté :

PROPOSITION 16. Étant donné un compact  $\Delta^* \subset \Delta$ , qui soit l'adhérence d'un ouvert, l'application  $T \rightarrow T_{\Delta^*}$  de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  sur  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta^*)$  est continue.

18. Le deuxième critère de convergence — Au n° 4 nous avons vu que les éléments de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  peuvent être aussi définis comme les dérivées des éléments de  $L^1(\Delta)$  (fonctions sommables dans  $\Delta$ ). Nous considérons maintenant l'espace vectoriel  $L^1(\Delta)$  muni de la norme usuelle :

$$\|f\| = \int_{\Delta} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Rappelons que la notion de convergence dans cet espace est celle de *convergence en moyenne sur  $\Delta$* . Cela étant, nous pouvons énoncer la

---

<sup>(22)</sup> On démontre de même que, pour tout  $T \in \mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ ,  $\alpha T$  est une fonction continue de  $\alpha$ . Mais nous n'avons pas besoin de cette propriété ici.

PROPOSITION 17. *Pour qu'une suite  $(T_k)$  de distributions dans  $\Delta$  converge vers 0 il faut et il suffit qu'il existe un entier  $p$  et une suite  $(f_k)$  de fonctions sommables dans  $\Delta$ , tels que: I)  $T_k = D^p f_k$  pour tout  $k$ ; II) les  $f_k$  convergent en moyenne vers zéro sur  $\Delta$ .*

Que la condition soit nécessaire, cela est évident, en tenant compte du critère précédent. Supposons réciproquement que cette condition est vérifiée. Alors, si l'on pose  $\tilde{f}_k(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x})$  sur  $\Delta$ ,  $\tilde{f}_k(\mathbf{x}) = 0$  sur  $\mathbb{R}^n \sim \Delta$  et

$$F_k(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} \tilde{f}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots,$$

on aura :

$$|F_k(\mathbf{x})| \leq \int_{\Delta} |f_k(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Delta \text{ et tout } k = 1, 2, \dots,$$

et, comme  $\|f_k\| \rightarrow 0$  dans  $L^1(\Delta)$ , d'après l'hypothèse, il en découle que  $F_k(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  uniformément sur  $\Delta$ . Alors, puisque  $T_k = D^{p+1} F_k$ , on a  $\lim T_k = 0$  par rapport à  $\mathfrak{T}_\omega$ , c. q. f. d.

NOTE. Ce critère devient assez commode si l'on applique le *théorème de la convergence bornée de LEBESGUE* :

*Si  $(f_k)$  est une suite de fonctions sommables qui converge vers  $f_0$  presque partout et s'il existe une fonction sommable  $\mu(\mathbf{x})$  telle que  $|f_k(\mathbf{x})| \leq \mu(\mathbf{x})$  presque partout ( $k = 1, 2, \dots$ ), alors  $f_0$  est sommable et la suite  $(f_k)$  converge vers  $f_0$  en moyenne.*

19. L'espace vectoriel topologique des distributions définies dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  — Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Au n° 6 nous avons défini l'espace vectoriel  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  comme la limite projective algébrique des espaces  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ , avec  $Q \subset \Omega(\Omega)$ , par rapport aux opérateurs de restriction

$\rho_{Q,Q_2}$ . Or ces opérateurs sont continus par rapport aux topologies  $\mathfrak{T}_\omega$  (prop. 16). Il sera donc naturel de donner à l'espace  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  la topologie de la limite projective<sup>(23)</sup> des  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  topologiques par rapport aux  $\rho_{Q,Q_2}$ , c'est-à-dire, *la moins fine des topologies qui rendent continue, pour tout  $Q$ , l'application  $T \rightarrow T_Q$  de  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  sur  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ . Nous désignerons par  $\mathfrak{T}_\pi$  cette topologie.*

Donc, si l'on a fixé, pour tout  $Q$ , un système fondamental  $\{V_{\lambda,Q}\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$  de voisinages de 0 dans  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ , la famille de tous les ensembles  $\rho_Q^{(-1)}(V_{\lambda,Q})$ , avec  $\lambda \in \mathcal{L}$ ,  $Q \in \Omega(\Omega)$ , constitue un système fondamental de voisinages de 0 dans l'espace  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ , pour la topologie  $\mathfrak{T}_\pi$ . Naturellement, on obtient la même topologie, si l'on substitue à la classe  $\Omega(\Omega)$  une sous classe  $\Omega^*(\Omega)$  co-finale dans  $\Omega(\Omega)$  par rapport à la relation  $Q_1 \subset Q_2$ . En particulier, l'espace topologique  $\mathfrak{E}_\pi(\mathbb{R}^n)$  des distributions sur  $\mathbb{R}^n$  peut être considéré comme limite projective d'une suite d'espaces  $\mathfrak{E}_\omega(Q_m)$ ,  $m=1,2,\dots$ , avec  $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$  et  $\bigcup_1^\infty Q_m = \mathbb{R}^n$ .

Considérons un compact  $\Delta \subset \Omega$ , qui soit d'adhérence d'un ouvert, et soit  $\mathfrak{X}$  une partie de  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ . Nous désignerons par  $\mathfrak{X}_\Delta$  l'ensemble des restrictions des éléments de  $\mathfrak{X}$  à  $\Delta$  et nous dirons que  $\mathfrak{X}_\Delta$  est la restriction de  $\mathfrak{X}$  à  $\Delta$ .

Cela posé, il nous sera commode d'introduire la

**DÉFINITION 5.** Étant donné un filtre  $\{\mathfrak{X}^{(\nu)}\}$  constitué par des ensembles  $\mathfrak{X}^{(\nu)} \subset \mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ , on dit que ce filtre *converge sur  $\Delta$  vers une distribution*  $T \in \mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ , si le filtre  $\{\mathfrak{X}_\Delta^{(\nu)}\}$  converge vers la distribution  $T_\Delta$  dans l'espace  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  (on suppose que  $\nu$  parcourt un ensemble  $\mathcal{I}$  d'indices).

D'autre part, nous appellerons *voisinage compact* d'un point  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^n$  l'adhérence de tout ouvert borné contenant  $\mathbf{x}$ .

Nous pouvons maintenant rendre plus intuitive la topologie  $\mathfrak{T}_\pi$  au moyen du théorème suivant:

<sup>(23)</sup> Pour les détails concernant les limites projectives voir [7], p. 59, et [21].

THÉORÈME 10. Soit  $\{\mathfrak{F}^{(\nu)}\}$  un filtre constitué par des ensembles  $\mathfrak{F}^{(\nu)} \subset \mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ . Pour que ce filtre converge vers 0 (sur  $\Omega$ , par rapport à  $\mathfrak{T}_\pi$ ) il faut et il suffit qu'il converge vers 0 sur un voisinage compact de chaque point  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$ .

On voit aisément que la condition est nécessaire; montrons qu'elle est aussi suffisante. Nous pouvons faire une démonstration semblable à celle du th. 5. Soit donc  $\{\mathfrak{F}^{(\nu)}\}$  un filtre sur  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  et supposons que, pour chaque  $\mathbf{x} \in \Omega$ , il existe un voisinage compact  $\Delta_{\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{x}$  sur lequel  $\{\mathfrak{F}^{(\nu)}\}$  converge vers 0. Choisissons alors un recouvrement  $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$  localement fini, de  $\Omega$ , constitué par des intervalles ouverts et bornés de  $\mathbb{R}^n$ , l'adhérence de chaque  $Q_\lambda$  étant contenu dans un  $\Delta_{\mathbf{x}}$ , et considérons une partition  $\{\alpha_\lambda(\mathbf{x})\}$  de l'unité, subordonnée à ce recouvrement. Pour toute distribution  $T$  dans  $\Omega$ , on a

$$(19.1) \quad T = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \alpha_\lambda T.$$

Puisque l'espace  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  est la limite projective des espaces  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ , avec  $Q \in \Omega(\Omega)$ , par rapport aux  $\rho_{Q, Q_0}$ , le théorème sera démontré, si l'on réussit à établir que  $\{\mathfrak{F}^{(\nu)}\}$  converge vers 0 sur n'importe quel intervalle compact contenu dans  $\Omega$ . Soit donc  $Q$  un tel intervalle et soient  $Q_{\lambda_1}, \dots, Q_{\lambda_r}$  les éléments du deuxième recouvrement (en nombre fini) qui rencontrent  $Q$ . Soit, d'autre part,  $\mathfrak{U}$  un voisinage convexe cerclé de 0 dans  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ ; il existe au moins un autre voisinage  $\mathfrak{B}$  de 0 dans le même espace tel que  $r\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ . Puisque le filtre  $\{\mathfrak{F}^{(\nu)}\}$  converge vers 0 sur  $\Delta_{\mathbf{x}}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ , il converge vers 0 aussi sur les intervalles  $\bar{Q}_\lambda$  (prop. 16). Donc, d'après le th. 9, il existe, pour chaque  $i=1, 2, \dots, r$ , un indice  $\nu_i$  tel que  $\alpha_{\lambda_i} \mathfrak{F}_Q^{(\nu_i)} \subset \mathfrak{B}_Q$ . Alors, si l'on pose  $\mathfrak{F}^{(\bar{\nu})} = \mathfrak{F}^{(\nu_1)} \cap \dots \cap \mathfrak{F}^{(\nu_r)}$ ,  $\mathfrak{F}^{(\bar{\nu})}$  sera un élément du même filtre et on aura, en vertu de (19.1):

$$\mathfrak{F}_Q^{(\bar{\nu})} \subset \sum_{i=1}^r \alpha_{\lambda_i} \mathfrak{F}_Q^{(\bar{\nu})} \subset r\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U};$$

mais cela veut dire que  $\{\mathfrak{F}^{(v)}\}$  converge vers 0 sur  $Q$ ,  
c. q. f. d.

NOTES. I. Ce théorème peut encore s'énoncer de la façon suivante: *Supposons fixé, arbitrairement, pour tout  $x \in \Omega$ , un voisinage compact  $\Delta_x$  du point  $x$ . Alors, l'espace vectoriel topologique  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  est la limite projective des espaces  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta_x)$  par rapport aux opérateurs de restriction.*

II. Le th. 10, avec le corollaire I du th. 8 et la prop. 17 nous redonne les critères de convergence de SCHWARTZ (cf. [17], tome I, th. XIX, p. 82 et th. XXIII, p. 87).

III. La déf. 5 et le th. 10 se généralisent immédiatement au cas d'un ouvert quelconque au lieu de  $\Delta$  et de voisinages ouverts au lieu des  $\Delta_x$ .

20. La topologie  $\mathfrak{T}_\pi$  définie en termes de limites des suites — Nous avons vu que, dans un espace  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ , la topologie  $\mathfrak{T}_\omega$  peut être définie à partir du concept de limite d'une suite (en employant le corollaire III du th. 8). Est-ce qu'il en sera de même pour la topologie  $\mathfrak{T}_\pi$  dans un espace  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ ?

Dans cette direction nous avons obtenu le résultat suivant:

PROPOSITION 18. *Soit  $E$  un espace localement convexe quelconque. Pour qu'une application linéaire  $\Theta$  de  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  dans  $E$  soit continue, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta(T_k) = \Theta(\lim_{k \rightarrow \infty} T_k),$$

*quelle que soit la suite convergente  $(T_k)$  d'éléments de  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ .*

Pour la démonstration il suffit d'employer la théorème 6 démontré dans [21] et le lemme suivant:

LEMME. Soit  $Q$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}^n$ . Pour toute suite  $(T_k)$  de distributions sur  $Q$  convergente vers 0, il existe une suite  $(\tilde{T}_k)$  de distributions dans  $\mathbb{R}^n$  telle que: I)  $\tilde{T}_k \rightarrow 0$  (sur  $\mathbb{R}^n$ ); II)  $T_k$  est la restriction de  $\tilde{T}_k$  à  $Q$  pour tout  $k$ .

Soit en effet  $(T_k)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{E}_\omega(Q)$  convergente vers 0 (sur  $Q$ ). Alors, il existe un entier  $p$  et une suite  $(f_k)$  de fonctions continues dans  $Q$  tels que: 1)  $T_k = D^p f_k$  pour tout  $k$ ; 2)  $f_k(x) \rightarrow 0$  uniformément sur  $Q$ . Posons:

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{sur } Q \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \sim Q \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

On aura évidemment  $\tilde{f}_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $k$  et si l'on pose  $\tilde{T}_k = D^p \tilde{f}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , on voit aussitôt, en appliquant la prop. 17 et le th. 10, que  $\tilde{T}_k \rightarrow 0$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

De la prop. 18 découle, d'après les résultats contenus dans [21]:

COROLLAIRE. Pour qu'un ensemble convexe  $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}_\pi(\Omega)$  soit ouvert (par rapport à  $\mathfrak{I}_\pi$ ), il faut et il suffit que  $\mathfrak{X}$  ne contienne la limite d'aucune suite d'éléments du complémentaire de  $\mathfrak{X}$ .

Or ce résultat permet de définir la topologie  $\mathfrak{I}_\pi$  à partir du concept de limite d'une suite, puisque l'on peut prendre, pour voisinages de 0 dans  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ , les ensembles convexes ouverts contenant 0.

Enfin, dans cet ordre d'idées, on pourrait encore donner une axiomatique du groupe topologique  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$  en termes de «fonctions continues», «somme», «dérivées» et «limites des suites».

### § 3 — L'analyse linéaire des distributions

21. La formule intégrale de Dirac — À la base du calcul symbolique des électrothéiciens et de la mécanique ondulatoire de DIRAC, on trouve une formule intégrale (justifiée par des considérations intuitives) du type suivant

$$f(\mathbf{x}) = \int_M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u}) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u},$$

où  $f(\mathbf{x})$  est une distribution définie dans un ensemble  $M \subset \mathbb{R}^n$ , écrite avec la notation d'une fonction, et  $\delta(\mathbf{x})$  la «fonction» de DIRAC, c'est-à-dire,

$$\delta = D_{x_1} \dots D_{x_n} H,$$

où  $H(\mathbf{x})$  est la fonction de HEAVISIDE (n° 4);  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{u})$  représente, naturellement, la translaté  $\tau_{\mathbf{u}}$  de  $\delta$  (cf. nos 4 et 8). *Nous supposons que  $M$  est un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ou un compact  $\Delta$  qui soit l'adhérence d'un ouvert.*

M. SCHWARTZ a donné, dans [17], tome 2, une justification de cette formule au moyen du concept de produit de composition. Nous essayerons de donner ici une interprétation plus directe de la même formule, qu'il est bien naturel de prendre pour base de l'analyse linéaire des distributions: on verra que, dans cette étude, la formule de DIRAC joue un rôle tout à fait analogue à celui de la formule de CAUCHY dans l'analyse linéaire des fonctions analytiques.

Observons d'abord que, si l'on pose

$$\hat{\delta}(\mathbf{u}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = \tau_{\mathbf{u}} \delta, \quad \text{pour chaque } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n,$$

$\hat{\delta}(\mathbf{u})$  sera une fonction de  $\mathbf{u}$  définie dans  $\mathbb{R}^n$  et prenant ses valeurs dans  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . Si l'on effectue maintenant la restriction des valeurs de  $\hat{\delta}(\mathbf{u})$  à  $\Delta$  (resp.  $\Omega$ ) on obtient une fonction de  $\mathbf{u}$ , définie encore dans  $\mathbb{R}^n$  et prenant ses valeurs dans

$\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  [resp.  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ ]. Pour ne pas trop alourdir les notations nous désignerons encore par  $\hat{\delta}(\mathbf{u})$  cette fonction, aucune confusion étant possible après cette remarque.

PROPOSITION 19. *La fonction  $\hat{\delta}(\mathbf{u})$  est indéfiniment dérivable dans l'espace  $\mathbf{R}^n$ . Pour chaque  $n$ -uplet d'entiers  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  et pour chaque  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$  on a précisément*

$$(21.1) \quad D_{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} \hat{\delta}(\mathbf{u}) = (-1)^{|\mathbf{p}|} \delta^{(\mathbf{p})}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \quad \text{dans } \Delta \text{ (resp. dans } \Omega),$$

$\delta^{(\mathbf{p})}$  étant la dérivée  $\tilde{D}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{p}} \delta$  de  $\delta$ , au sens de la théorie des distributions, et  $|\mathbf{p}| = p_1 + \dots + p_n$ .

Il suffit de faire la démonstration pour le cas où  $\hat{\delta}(\mathbf{u})$  prend ses valeurs dans  $\mathfrak{E}_\pi(\mathbf{R}^n)$ , puisque les opérateurs de restriction sont continus (n° 19). Notre démonstration sera fondée sur le deuxième critère de convergence (prop. 17), avec le théorème de la convergence bornée de LEBESGUE.

Nous raisonnerons par induction sur  $\mathbf{p}$ . La thèse est certainement vérifiée pour  $\mathbf{p} = (0, \dots, 0)$ . Supposons-la vérifiée pour  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ; nous montrerons qu'elle est aussi vérifiée pour  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{k-1}, p_k + 1, p_{k+1}, \dots, p_n)$ . Il s'agit donc de montrer que l'on a, pour tout  $k = 1, \dots, n$  et tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$

$$(21.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{\delta}^{(\mathbf{p})}(\mathbf{u} + h \mathbf{e}_k) - \hat{\delta}^{(\mathbf{p})}(\mathbf{u})}{h} = -\delta^{(\mathbf{p} + \mathbf{e}_k)}(\mathbf{u} - \mathbf{x}),$$

où  $\mathbf{e}_k$  est l'élément de  $\mathbf{R}^n$  dont la  $k$ -ième coordonnée est 1, les autres étant toutes nulles, et où  $\hat{\delta}^{(\mathbf{p})}(\mathbf{u})$  représente la dérivée  $D_{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} \hat{\delta}(\mathbf{u})$  de  $\hat{\delta}(\mathbf{u})$  au sens usuel. Tout se ramène à montrer que

$$(21.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{\delta}(\mathbf{u} + h \mathbf{e}_k) - \hat{\delta}(\mathbf{u})}{h} = -\tilde{D}_{\mathbf{x}_k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u});$$

en effet, l'opérateur  $\tilde{D}_x^p$  étant linéaire et continu, si on l'applique aux deux membres de (21.3), on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{D}_x^p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u} - h \mathbf{e}_k) - \tilde{D}_x^p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u})}{h} = -\tilde{D}^{(p+\mathbf{e}_k)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u}),$$

d'où l'on déduira (21.2), en employant (21.1), d'après l'hypothèse d'induction. Or, si l'on pose

$$G_k(\mathbf{x}) = \int_0^{x_k} H(\mathbf{x}) dx_k$$

et que l'on se donne une suite quelconque  $h^{(\nu)}$  de nombres réels convergeant vers 0, les fonctions de  $\mathbf{x}$  :

$$\frac{G_k(\mathbf{x} - \mathbf{u} - h^{(\nu)} \mathbf{e}_k) - G_k(\mathbf{x} - \mathbf{u})}{h^{(\nu)}}, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

pour chaque  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , seront bornées sur tout compact et formeront une suite qui converge vers la fonction  $-H(\mathbf{x} - \mathbf{u})$  pour tout  $\mathbf{x} \neq \mathbf{u}$ . Alors, en utilisant la prop. 17, on en déduit (21.3).

Maintenant, on voit aisément que la fonction  $\hat{\delta}(\mathbf{u})$  et toutes ses dérivées sont continues. En effet,  $\tilde{D}^p$  étant une application continue de l'espace  $\mathfrak{C}_\pi(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même et  $H(\mathbf{x} - \mathbf{u})$  étant une fonction continue de  $\mathbf{u}$  à contredomaine dans  $\mathfrak{C}_\pi(\mathbb{R}^n)$ , il en sera de même pour la fonction  $\tilde{D}_x^p H(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = (-1)^{|\mathbf{p}|} \hat{\delta}^{(\mathbf{p})}(\mathbf{u})$ , quel que soit  $\mathbf{p}$ . (Nous convenons de considérer implicite dans le caractère «dérivable» le caractère «continu»).

NOTE. La caractérisation *générale* des fonctions  $\Phi(\mathbf{u})$  à valeurs dans un espace  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  qui sont indéfiniment dérivables dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , peut se faire aisément à partir du corollaire de la prop. 8 établie dans [10], p. 77, appliqué aux espaces qui vérifient les hypothèses du th. 7. On a le critère suivant :

Soit  $\Phi(\mathbf{u})$  une fonction à valeurs dans  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ , définie dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ . Pour que  $\Phi(\mathbf{u})$  admette dérivée partielle par rapport à  $u_i$ , continue dans  $\Omega$ , il faut et il suffit que, pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un entier  $p$  et une fonction complexe  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  continue et admettant dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial u_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  continue dans  $\Delta \times \Omega$ , tels que  $\Phi(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}}^p f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  pour chaque  $\mathbf{u} \in K$ . Alors on aura  $\frac{\partial}{\partial u_i} \Phi(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}}^p \frac{\partial}{\partial u_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  pour tout  $\mathbf{u} \in K$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Et de même pour les dérivées d'ordre supérieur. Naturellement, ce critère se généralise aux espaces  $S$  qui vérifient les hypothèses du th. 7. —

Cela étant, nous établirons la formule de DIRAC, en utilisant le lemme suivant :

LEMME. Pour toute fonction complexe  $f(\mathbf{x})$  définie et continue dans  $M$ , on a

$$f = \int_M f(\mathbf{u}) \delta(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

l'intégrale étant rapportée à la topologie  $\mathfrak{T}_\omega$  de  $\mathfrak{E}_\omega(M)$  [resp.  $\mathfrak{T}_\pi$  de  $\mathfrak{E}_\pi(M)$ ].

Démonstration. a) Supposons d'abord que  $M$  est l'adhérence  $\Delta$  d'un ouvert borné de  $\mathbf{R}^n$ . L'existence de l'intégrale étant assurée par la continuité de la fonction intégrande  $f(\mathbf{u}) \hat{\delta}(\mathbf{u})$ , il reste à montrer que sa valeur est  $f$ . À cet effet, considérons un intervalle compact  $Q = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  de  $\mathbf{R}^n$  tel que  $\Delta \subset Q$  et posons :  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$  sur  $\Delta$ ,  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0$  sur  $\mathbf{R}^n \sim \Delta$ . Alors, si l'on se donne une partition de  $Q$  en des intervalles  $Q_i = [\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , et si l'on pose  $Q_i^* = Q_i \cap \Delta$ , la somme

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \tilde{f}(\mathbf{a}^i) H(\mathbf{x} - \mathbf{a}^i) \text{ mes } Q_i^*,$$

converge vers l'intégrale,  $F(\mathbf{x})$ , de  $\tilde{f}(\mathbf{u})$  dans l'intervalle  $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$  — tout en restant bornée sur  $Q$  — quand le diamètre de la partition  $\{Q_i\}$  tend vers 0. Et, puisque l'on a

$$\tilde{D}_x S(x) = \sum_{i=1}^r \tilde{f}(a^i) \tilde{D}_x H(x-a^i) \text{ mes } Q_i^*,$$

$$\tilde{D}_x H(x-a^i) = \delta(x-a^i), \quad D_x F(x) = f(x) \quad \text{pour } x \in \Delta,$$

on conclut que les sommes  $\sum_1^r \tilde{f}(a^i) \delta(a^i) \text{ mes } Q_i^*$  convergent vers  $f(x)$  par rapport à  $\mathfrak{T}_\omega$ , c'est-à-dire :

$$f(x) = \int_{\Delta} f(u) \hat{\delta}(u) du = \int_{\Delta} \delta(x-u) f(u) du.$$

b) Soit maintenant  $M$  un ouvert quelconque  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons une suite  $(\Omega_\nu)$  d'ouverts tels que  $\bigcup_0^\infty \Omega_\nu = \Omega$  et  $\overline{\Omega}_\nu \subset \Omega_{\nu+1}$  pour tout  $\nu$ . Alors on aura, d'après le raisonnement précédent

$$\int_{\overline{\Omega}_\nu} f(u) \hat{\delta}(u) du = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in \Omega_\nu \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}_\nu \end{cases}$$

et par suite

$$\int_{\Omega} f(u) \hat{\delta}(u) du = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\overline{\Omega}_\nu} f(u) \hat{\delta}(u) du = f \quad \text{c. q. f. d.}$$

Avant de poursuivre, nous devons attribuer un sens au symbole

$$\int_M T_u \theta(u) du,$$

où  $T$  est une distribution dans  $M^* \supset M$  et  $\theta(u)$  une fonction continue de  $u$ , à valeurs dans un espace localement convexe  $E$ , complet par rapport aux suites.

a) Supposons d'abord que  $M$  est l'adhérence  $\Delta$  d'un ouvert borné. Alors il existe une fonction  $f$  continue sur  $\Delta$  et un entier  $p$  tels que  $T = D^p f$  dans  $\Delta$ ; d'autre part, d'après le théorème de WEIERSTRASS, on pourra fixer une suite  $\{\beta_k\}$  de fonctions indéfiniment dérivables (polynômes), telles que  $\beta_k(x) \rightarrow f(x)$  uniformément sur  $\Delta$ .

Si l'on pose  $\gamma_k = \mathbf{D}^p \beta_k$  pour tout  $k$ , on aura donc  $\gamma_k \rightarrow \mathbf{T}$  par rapport à  $\mathfrak{L}_\omega$ . Alors :

DÉFINITION 6. Si la suite

$$\int_{\Delta} \gamma_k(\mathbf{u}) \theta(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad k = 1, 2, \dots$$

a une limite dans  $\mathbf{E}$ , indépendante de la suite  $(\gamma_k)$  choisie, on écrira

$$\int_{\Delta} \mathbf{T}_u \theta(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} \gamma_k(\mathbf{u}) \theta(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

b) Supposons maintenant que  $\mathbf{M}$  est un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $(\Omega_\nu)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , une suite de ouverts de réunion  $\Omega$  tels que  $\Omega_\nu \subset \Omega_{\nu+1}$  pour tout  $\nu$  et soit  $\alpha_\nu(\mathbf{x})$ , pour chaque  $\nu = 2, 3, \dots$ , une fonction indéfiniment dérivable à support contenu dans  $\bar{\Omega}_\nu$  et égale à 1 sur  $\Omega_{\nu-1}$ . Alors on posera

$$\text{DÉFINITION 7. } \int_{\Delta} \mathbf{T}_u \theta(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\nu} \alpha_\nu(\mathbf{u}) \mathbf{T}_u \theta(\mathbf{u}) d\mathbf{u},$$

si les intégrales du 2<sup>ème</sup> membre existent et si, en outre, la limite indiquée existe indépendamment du choix de  $(\Omega_\nu)$  et de  $(\alpha_\nu)$ .

Cela étant, nous pouvons présenter notre interprétation de la formule de DIRAC.

THÉORÈME 11. Pour toute distribution  $\mathbf{T}$  dans  $\mathbf{M}$  on a la représentation

$$\mathbf{T} = \int_{\mathbf{M}} \mathbf{T}_u \hat{\delta}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Démonstration. a) Soit d'abord  $\mathbf{M}$  l'adhérence  $\Delta$  d'un ouvert borné. Quelle que soit la suite  $(\gamma_k)$  de fonctions indéfiniment dérivables convergeant vers  $\mathbf{T}$ , on aura, d'après le lemme

$$\int_{\Delta} \gamma_k(\mathbf{u}) \hat{\delta}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \gamma_k, \quad \text{pour tout } k.$$

Donc, suivant la déf. 6, l'intégrale de  $T_u \hat{\delta}(u)$  sur  $\Delta$  existe et est égale à

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} \gamma_k(u) \hat{\delta}(u) du = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = T \quad (\text{par rapport à } \mathfrak{T}_0).$$

b) Si  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , la thèse est une conséquence immédiate de la déf. 7 et de ce que l'on a démontré dans a). —

Mais il faut remarquer que, si  $\theta(x)$  est une fonction indéfiniment dérivable à support compact contenu dans  $M$ , la déf. 6, avec la méthode d'intégrations par parties, nous donne, pour chaque  $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\int_M \delta(u - x) \theta(u) du = (-1)^n \int_M H(u - x) [D \theta(u)] du = \theta(x).$$

On a donc la formule

$$(17.4) \quad \theta(x) = \int_M \delta(u - x) \theta(u) du = (-1)^n \int_M \delta(x - u) \theta(u) du,$$

qui semble en contradiction avec la formule de DIRAC. Or, ces deux formules correspondent à des points de vue différents: ici  $\delta(u - x)$  n'est pas à considérer comme fonction de  $u$  dont les valeurs sont les distributions  $(-1)^n \tilde{D}_x H(u - x)$ , mais, tout au contraire, comme fonction de  $x$  dont les valeurs sont les distributions  $\tilde{D}_u H(u - x)$ ; plus précisément, on considère, dans (17.4),

$$\delta(u - x) = \tau_x \delta, \quad \delta(x - u) = \tilde{D}_u H(x - u) = (-1)^n \tau_x \delta, \\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour éviter les confusions, nous écrirons par la suite un point sur la variable muette: donc,  $\delta(\dot{x} - u)$  représentera la fonction  $\hat{\delta}(u)$ , tandis que  $\delta(x - \dot{u})$  représentera la fonction  $(-1)^n \hat{\delta}(x)$ .

Nous aurons besoin aussi de la formule (17.4) au n° suivant.

22. Recherche des applications linéaires continues de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  dans un espace localement convexe — Soit  $\Delta$  l'adhérence d'un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $E$  un espace localement convexe, *complet par rapport aux suites*. Proposons-nous de déterminer l'expression générale des applications linéaires continues de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  dans  $E$ .

a) Soit  $\Phi$  une telle application. On a, pour chaque  $T \in \mathfrak{E}_\omega(\Delta)$

$$T = \int_{\Delta} T_u \hat{\delta}(u) du = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} \gamma_k(u) \hat{\delta}(u) du,$$

où les  $\gamma_k$  sont des fonctions indéfiniment dérivables telles que  $\gamma_k \rightarrow T$  par rapport à  $\mathfrak{T}_\omega$ . Mais, comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme du th. 11, les intégrales du 2<sup>ème</sup> membre sont exprimables comme limites, par rapport à  $\mathfrak{T}_\omega$ , de suites de sommes de RIEMANN, ce qui nous permet d'écrire tout de suite

$$\Phi(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} \gamma_k(u) \Phi[\delta(\dot{x} - u)] du = \int_{\Delta} T_u \varphi(u) du,$$

où

$$\varphi(u) = \Phi[\delta(\dot{x} - u)] \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}^n,$$

Nous dirons que  $\varphi(u)$  est la *fonction indicatrice* <sup>(24)</sup> de l'opérateur  $\Phi$ . Cherchons à caractériser cette fonction.

Nous avons vu (prop. 19) que *la fonction  $\hat{\delta}(u)$  est indéfiniment dérivable, au sens usuel, dans  $\mathbb{R}^n$ , par rapport à la topologie  $\mathfrak{T}_\omega$  de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ . Or cette propriété est évidemment respectée par n'importe quelle application linéaire continue  $\Phi$  de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  dans  $E$  et on aura précisément*

$$(22.1) \quad D_u^p \varphi(u) = D_u^p \Phi[\delta(\dot{x} - u)] = \Phi[D_u^p \delta(\dot{x} - u)],$$

pour toute  $n$ -uple  $p$  d'entiers.

---

(24) Par analogie avec le concept que M. FANTAPPIÈ a distingué avec ce terme, dans la théorie des fonctionnelles analytiques.

D'autre part, on voit que, pour chaque  $u \in \mathbb{R}^n \sim \Delta$ , la valeur de  $\hat{\delta}(u)$  dans  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  est zéro. Or il est évident que cette propriété, elle-aussi, est respectée par  $\Phi$ , de sorte que l'on doit avoir  $\varphi(u) = 0$  hors de  $\Delta$  et par suite, sur la frontière de  $\Delta$  ( $\varphi$  étant continue).

b) Soit réciproquement  $\varphi(u)$  une fonction à valeurs dans  $\mathbf{E}$ , indéfiniment dérivable dans  $\mathbb{R}^n$  et nulle au dehors de  $\Delta$ , et posons

$$(22.2) \quad \Phi(T) = \int_{\Delta} T_u \varphi(u) du, \quad \text{pour chaque } T \in \mathfrak{C}_\omega(\Delta).$$

Nous montrerons que cette intégrale existe et qu'elle définit une application linéaire continue  $\Phi$  de  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  dans  $\mathbf{E}$ .

En effet, il existe, pour chaque  $T$ , un entier  $p$  et une fonction continue  $f$ , tels que  $T = D^p f$ ; d'autre part, il existe une suite  $(\beta_k)$  de polynômes convergeant vers  $f$  uniformément sur  $\Delta$ . Dans ces conditions on doit avoir, si l'intégrale dont il est question existe :

$$\int_{\Delta} T_u \varphi(u) du = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta} [D^p \beta_k(u)] \varphi(u) du.$$

L'application répétée de la méthode d'intégration par parties nous permet d'écrire

$$\int_{\Delta} [D^p \beta_k(u)] \varphi(u) du = (-1)^{np} \int_{\Delta} \beta_k(u) [D^p \varphi(u)] du,$$

compte tenu des propriétés de l'intégrale qui restent valables pour les fonctions à contredomaine dans  $\mathbf{E}$  et du fait que les dérivées de  $\varphi(u)$  sont continues dans  $\mathbb{R}^n$  et nulles au dehors de  $\Delta$ .

Alors, puisque l'on a  $\beta_k \rightarrow f$  uniformément sur  $\Delta$ , on doit avoir

$$(22.2_a) \quad \int_{\Delta} T_u \varphi(u) du = (-1)^{np} \int_{\Delta} f(u) [D^p \varphi(u)] du.$$

L'intégrale du deuxième membre est évidemment indépendante de la suite  $(\beta_k)$  choisie. Pour établir l'existence de l'intégrale du 1<sup>er</sup> membre suivant la déf. 6, il reste à montrer que la valeur du 2<sup>ème</sup> membre ne dépend pas du choix de  $p$  et de  $f$ . Supposons

$$T = D^p f = D^q g, \quad \text{avec} \quad q > p,$$

$g$  étant continue dans  $\Delta$ . Alors il existe  $f^*$  telle que  $f = D^{q-p} f^*$ ,  $D^q(g - f^*) = 0$ . En employant la méthode d'intégration par parties, on voit que

$$\int_{\Delta} f(u) [D^p \varphi(u)] du = (-1)^{n(q-p)} \int_{\Delta} f^*(u) [D^q \varphi(u)] du.$$

Il reste donc à montrer que

$$\int_{\Delta} \theta(u) D^q \varphi(u) du = 0, \quad \text{pour} \quad \theta \in \hat{N}(D^q) \subset \mathcal{E}(\Delta).$$

Mais, compte tenue de la forme (1.1) de  $\theta$ , cela se réduit à un calcul facile dans le cas où  $\Delta$  est un intervalle de  $\mathbb{R}^n$ . Le cas général ( $\Delta$  quelconque) se ramène au précédent par une partition de l'unité.

L'existence de l'intégrale est donc établie. Maintenant on voit aussitôt que l'opérateur  $\Phi$  défini par (22.2) est linéaire. En employant le corollaire V du th. 8, on voit de même, au moyen de (22.2<sub>a</sub>) que cet opérateur est continu. Enfin, on aura, d'après (17.4):

$$\Phi[\delta(\dot{x} - u)] = \int_{\Delta} \delta(\bar{u} - u) \varphi(\bar{u}) d\bar{u} = \varphi(u), \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{R}.$$

On est ainsi parvenu au résultat suivant:

**THÉORÈME 12.** *Chaque application linéaire continue  $\Phi$  de  $\mathcal{E}_{\omega}(\Delta)$  dans  $\mathbf{E}$  détermine, suivant la formule*

$$(22.3) \quad \varphi(u) = \Phi[\delta(\dot{x} - u)], \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

une fonction  $\varphi(\mathbf{u})$ , prenant ses valeurs dans  $\mathbf{E}$ , indéfiniment dérivable dans  $\mathbf{R}^n$ , nulle au dehors de  $\Delta$  et telle que

$$(22.4) \quad \Phi(T) = \int_{\Delta} T_{\mathbf{u}} \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad T \in \mathfrak{C}_{\omega}(\Delta).$$

Réciproquement, chaque fonction  $\varphi(\mathbf{u})$ , prenant ses valeurs dans  $\mathbf{E}$ , indéfiniment dérivable dans  $\mathbf{R}^n$  et à support contenu dans  $\Delta$ , détermine, suivant la formule (22.4), une application linéaire continue  $\Phi$  de  $\mathfrak{C}_{\omega}(\Delta)$  dans  $\mathbf{E}$  telle que l'on a (22.3).

Un cas particulier important à considérer est celui où  $\mathbf{E}$  se réduit au corps complexe,  $\mathbb{C}$ .

Nous désignerons par  $\mathfrak{D}(\Delta)$  l'espace vectoriel des fonctions complexes  $\varphi$ , indéfiniment dérivables dans  $\mathbf{R}^n$  et s'annulant au dehors de  $\Delta$ . D'autre part, l'espace vectoriel des fonctionnelles  $\Phi$  linéaires continues dans  $\mathfrak{C}_{\omega}(\Delta)$  — l'espace dual de  $\mathfrak{C}_{\omega}(\Delta)$  — se représente par  $\mathfrak{C}_{\omega}(\Delta)'$ . Or il est aisé de voir que l'application  $\varphi \rightarrow \Phi$  de  $\mathfrak{D}(\Delta)$  sur  $\mathfrak{C}_{\omega}(\Delta)'$  définie par (22.4) est *linéaire*. Nous pouvons donc exprimer ces résultats de la façon suivante:

*SCOLIE. Si  $\mathbf{E}$  se réduit à la droite complexe, les formules (22.3) et (22.4) définissent une application biunivoque  $\varphi \leftrightarrow \Phi$  de l'espace vectoriel  $\mathfrak{D}(\Delta)$  sur l'espace dual de  $\mathfrak{C}_{\omega}(\Delta)$ . Cette application est un isomorphisme (algébrique), ce qui nous permet d'identifier ces deux espaces vectoriels (au point de vue algébrique).*

Dans la suite, nous désignerons par la notation

$$\langle T, \varphi \rangle, \quad \text{où } T \in \mathfrak{C}_{\omega}(\Delta), \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Delta),$$

le nombre complexe  $\varphi(T) = \Phi(T)$ , où  $\Phi$  est l'élément de  $\mathfrak{C}_{\omega}(\Delta)'$  déterminé par  $\varphi$ , et nous dirons que  $\langle T, \varphi \rangle$  est le *produit scalaire de  $T$  par  $\varphi$* .—

Un autre cas important à considérer est celui où  $\mathbf{E}$  est lui-même un espace  $\mathfrak{C}_{\omega}(\Delta^*)$ ,  $\Delta^*$  étant l'adhérence d'un

ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Le critère indiqué dans la note du n° 21 permet de caractériser les fonctions indicatrices des applications linéaires continues de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  dans  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta^*)$ .

En particulier, on peut ainsi déterminer l'expression générale des applications linéaires continues de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  dans  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta^*)$  qui permutent avec les opérateurs de dérivation, en observant que la fonction  $\delta(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u})$  de  $\mathbf{u}$  vérifie la propriété  $D_{x_i} \delta(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u}) + D_{u_i} \delta(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u}) = 0, i = 1, \dots, n$ , qui est respectée par ces applications (cf. [19], p. 97-98). Soit  $\Phi$  une telle application et  $\varphi(\mathbf{u})$  sa fonction indicatrice. D'après le critère ci-dessus mentionné, il existe un entier  $p$  et une fonction complexe  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  admettant dérivées partielles par rapport à  $u_1, \dots, u_n$  (jusqu'à l'ordre que l'on veuille considérer), continues dans  $\Delta^* \times \Delta$ , tels que  $\varphi(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{x}}^p f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $D_{u_i} \varphi(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{x}}^p D_{u_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  pour tout  $\mathbf{u} \in \Delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . On doit donc avoir

$$D_{\mathbf{x}}^p D_{x_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + D_{\mathbf{x}}^p D_{u_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

où, ce qui revient au même

$$D_{x_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + D_{u_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \theta_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \text{avec } \theta_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \hat{N}(\mathcal{D}^p),$$

pour chaque  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ .

La théorie des équations aux dérivées partielles permet alors de voir <sup>(25)</sup> que  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  est de la forme  $F(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \theta(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  avec  $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \hat{N}(\mathcal{D}^p)$  pour chaque  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ . Donc, si l'on pose  $S = D_{\mathbf{x}}^p F$ , on aura  $\varphi(\mathbf{u}) = S(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u})$ , où, pour abrégier, on a écrit  $S(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u})$  au lieu de  $(\tau_{\mathbf{u}} S)_{\Delta^*}$ . Par conséquent

$$\Phi(T) = \int_{\Delta} S(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u}) T(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

---

<sup>(25)</sup> En employant les projecteurs  $\hat{P}(\mathcal{P})$ , dont la continuité a été montrée au n° 17, on réussit à rendre  $\theta_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  indépendante de  $x_i$ , ce qui simplifie beaucoup les calculs.

Cette intégrale est nommée le *produit de composition* de  $S$  par  $T$  et désignée par  $S * T$ .

Réciproquement, il est aisé de voir que, si  $S$  est une distribution dans  $\mathbf{R}^n$ , telle que la fonction  $(\tau_u S)_{\Delta^*}$  de  $u$  ait le support contenu dans  $\Delta$  (ce qui exige en particulier que le support de  $S$  soit compact), la correspondance  $T \rightarrow S * T$  est une application linéaire continue de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  dans  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta^*)$  permutant avec les opérateurs de dérivation.

23. La topologie de l'espace  $\mathfrak{D}(\Delta)$ , comme dual de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  — Nous avons vu au n° précédent que le produit scalaire d'un élément  $\varphi$  de  $\mathfrak{D}(\Delta)$ , par un élément  $T$  de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ , est donné par la formule

$$(23.1) \quad \langle \varphi, T \rangle = (-1)^{n_p} \int_{\Delta} f(u) D^p \varphi(u) du, \text{ si } T = D^p f, \\ \text{avec } f \in \mathfrak{C}(\Delta).$$

D'autre part, nous savons déjà que le dual fort de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  est un espace  $(\mathfrak{F})$  — même un espace  $(\mathfrak{M})$  (corollaire I du th. 8). La topologie forte,  $\mathfrak{I}_b$ , dans  $\mathfrak{D}(\Delta)$  sera donc déterminée, au sens usuel, par la connaissance des limites des suites par rapport à  $\mathfrak{I}_b$ . Or on a le critère suivant :

**THÉORÈME 13.** *Une suite  $(\varphi_k)$  d'éléments de  $\mathfrak{D}(\Delta)$  converge vers 0 par rapport à  $\mathfrak{I}_b$ , si, et seulement si, les fonctions  $\varphi_k(x)$  et toutes leurs dérivées  $D^p \varphi_k(x)$  convergent uniformément vers 0 sur  $\Delta$ .*

**Démonstration.** a) Supposons cette condition vérifiée pour  $(\varphi_k)$ ; nous devons montrer que  $(\varphi_k)$  converge fortement vers 0, c'est-à-dire, que  $\varphi_k(T) \rightarrow 0$  uniformément sur toute partie bornée de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ . Soit donc  $\mathfrak{B}$  une partie bornée de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ . D'après le corollaire IV du th. 8 il existera un  $p$  et un  $\mu$ , tels que tout élément  $T$  de  $\mathfrak{B}$  est de la forme  $T = D^p f$ , avec  $f \in \mathfrak{C}(\Delta)$  et  $|f(x)| \leq \mu$  sur  $\Delta$ .

Alors la formule (23.1) donne aussitôt la limitation

$$|\langle \varphi_k, T \rangle| \leq \mu \max_{x \in \Delta} |D^p \varphi_k| \text{ mes } \Delta, \text{ pour } T \in \mathfrak{B}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

d'où l'on déduit que  $\varphi_k(T)$  (c'est-à-dire  $\langle \varphi_k, T \rangle$ ) converge uniformément sur  $\mathfrak{B}$ .

b) Supposons, réciproquement, que  $(\varphi_k)$  converge fortement vers 0. D'après (22.1) on a

$$D^p \varphi_k(u) = \langle \varphi_k, D_u^p \delta(\dot{x} - u) \rangle \text{ pour chaque } u \in \mathbb{R}^n; \quad p, k = 1, \dots,$$

et, puisque  $D_u^p \delta(\dot{x} - u) = (-1)^{n_p} D_x^p \delta(\dot{x} - u)$  (prop. 19), on voit aisément que, pour chaque  $p$ , le contredomaine de la fonction  $D_u^p \hat{\delta}(u)$  est borné dans  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$ . Donc,  $\varphi_k(T)$  converge uniformément vers 0 sur le contredomaine de cette fonction et, par suite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{u \in \Delta} |D^p \varphi_k(u)| = 0, \text{ quel que soit } p = 1, 2, \dots.$$

COROLLAIRE. La topologie  $\mathfrak{T}_b$  dans  $\mathfrak{D}(\Delta)$  coïncide avec la topologie naturelle de cet espace, définie par la suite de normes

$$\|\varphi\|_p = \max_{x \in \Delta} \{|\varphi(x)|, |D\varphi(x)|, \dots, |D^p \varphi(x)|\}, \quad p = 1, 2, \dots$$

D'après le corollaire I du th. 8, l'espace  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta) [\mathfrak{T}_\omega]$  est réflexif, donc isomorphe au dual fort de l'espace  $\mathfrak{D}(\Delta) [\mathfrak{T}_b]$ . En employant le th. 12, et la théorie générale des espaces localement convexes on peut formuler tous ces résultats de la façon suivante:

THÉORÈME 14. Les espaces  $\mathfrak{D}(\Delta)$  et  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  constituent un système dual par rapport à la forme bilinéaire

$$\langle \varphi, T \rangle = \int_{\Delta} T_u \varphi(u) du.$$

Si l'on suppose ces espaces munis de leurs topologies naturelles, la formule

$$\tilde{T}(\varphi) = \langle \cdot, T \rangle \text{ pour tout } \varphi \in \mathfrak{D}(\Delta)$$

définit un isomorphisme  $T \leftrightarrow \tilde{T}$  de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$  sur le dual fort de  $\mathfrak{D}(\Delta)$ , tandis que la formule

$$\tilde{\varphi}(T) = \langle \varphi, T \rangle, \text{ pour tout } T \in \mathfrak{E}_\omega(\Delta)$$

définit un isomorphisme  $\varphi \leftrightarrow \tilde{\varphi}$  de  $\mathfrak{D}(\Delta)$  sur le dual fort de  $\mathfrak{E}_\omega(\Delta)$ .

24. l'espace  $\mathfrak{D}(\Omega)$  et son dual fort — Étant donné un ensemble  $M \subset \mathbb{R}^n$  qui soit un ouvert ou l'adhérence d'un ouvert borné, nous désignons par  $\mathfrak{D}(M)$  l'espace vectoriel topologique de fonctions numériques  $\varphi(\mathbf{x})$  indéfiniment dérivables dans  $\mathbb{R}^n$ , à support compact contenu dans  $M$ , avec les conventions suivantes :

a) Si  $M$  est compact, la topologie de  $\mathfrak{D}(M)$  est celle définie par la suite de normes

$$\|\varphi\|_p = \max_{\mathbf{x} \in M} \{ |\varphi(\mathbf{x})|, |\mathbf{D}\varphi(\mathbf{x})|, \dots, |\mathbf{D}^p\varphi(\mathbf{x})| \}, \quad p = 1, 2, \dots$$

b) Si  $M$  est un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$ , la topologie de  $\mathfrak{D}(M)$  est celle de la limite inductive des espaces  $\mathfrak{D}(\overline{\Omega}_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , que l'on obtient en choisissant une suite quelconque  $(\Omega_k)$  d'ouverts bornés de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\bigcup_1^\infty \Omega_k = M$  et  $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$  pour tout  $k$ .

Dans le premier cas,  $\mathfrak{D}(M)$  est un espace  $(\mathfrak{M})$  ; dans le deuxième cas,  $\mathfrak{D}(M)$  est un espace  $(\mathfrak{LM})$ , dont la topologie ne dépend pas de la suite  $(\Omega_k)$  choisie (voir [10], pp. 65-71 et 79).

Soit alors  $\Omega$  un ouvert quelconque. On a :

THÉORÈME 15. *Le dual de l'espace  $\mathfrak{D}(\Omega)$  est algébriquement isomorphe à l'espace  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$ , l'isomorphisme étant défini par la formule suivante*

$$\tilde{T}(\varphi) = \int_\Omega T_u \varphi(u) du, \text{ pour tout } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

où  $T$  est un élément quelconque de  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$  et  $\tilde{T}$  l'élément de  $\mathcal{D}(\Omega)'$  déterminé par  $T$ .

Démonstration. a) Soit  $U$  une fonctionnelle linéaire continue dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  et soit  $\Delta$  l'adhérence d'un ouvert borné, tel que  $\Delta \subset \Omega$ . On sait que la topologie de  $\mathcal{D}(\Omega)$  induit dans  $\mathcal{D}(\Delta)$  la topologie naturelle de  $\mathcal{D}(\Delta)$ ; alors, la restriction  $U_\Delta$  de  $U$  à  $\mathcal{D}(\Delta)$  est encore une fonctionnelle linéaire continue dans  $\mathcal{D}(\Delta)$ . D'après le th. 14,  $U_\Delta$  détermine une distribution  $\hat{U}_\Delta$  dans  $\Delta$ ; il existe donc un entier  $p$  et une fonction  $f \in \mathcal{C}(\Delta)$  tels que

$$U_\Delta(\varphi) = (-1)^{n_p} \int_\Delta f(u) D^p \varphi(u) du, \text{ pour } \varphi \in \mathcal{D}(\Delta) [\hat{U}_\Delta = D^p f].$$

Or, si l'on considère un autre compact  $\Delta^* \subset \Delta$ , cette formule montre tout de suite que la restriction de  $\hat{U}_\Delta$  à  $\Delta^*$  est précisément  $U_{\Delta^*}$ , ce qui veut dire que  $U$  détermine une distribution  $\hat{U}$  sur  $\Omega$ . Enfin, en tenant compte de la déf. 7 et du fait que  $\varphi$  est à support compact contenu dans  $\Omega$ , on reconnaît que

$$U(\varphi) = \int_\Omega \hat{U}_u \varphi(u) du, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

b) Soit, réciproquement,  $T$  une distribution dans  $\Omega$  et soit  $(\Omega_\nu)$  une suite d'ouverts bornés tels que:  $\bigcup_1^\infty \Omega_\nu = \Omega$  et  $\bar{\Omega}_\nu \subset \Omega_{\nu+1}$ , pour tout  $\nu$ . Alors, suivant le th. 14, la restriction  $T^{(\nu)}$  de  $T$  à  $\bar{\Omega}_\nu$  détermine une fonctionnelle linéaire continue  $\tilde{T}^{(\nu)}$  dans  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$ . Par conséquent, d'après la déf. 7, la formule

$$\tilde{T}(\varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{T}^{(\nu)}(\alpha_\nu \varphi) = \int_\Omega T_u \varphi(u) du, \text{ pour } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

définit dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  une fonctionnelle linéaire  $\tilde{T}$  dont la restriction à chaque sous-espace  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$  est con-

tinue. Puisque  $\mathcal{D}(\Omega)$  est la limite inductive de ces sous-espaces, il s'ensuit que  $\tilde{T}$  est continue. —

Nous pouvons maintenant établir le théorème qui achève l'identification de la théorie axiomatique des distributions avec la théorie fonctionnelle de M. SCHWARTZ:

THÉORÈME 16. *La topologie forte,  $\mathcal{T}_b$ , de l'espace  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ , considéré comme le dual de l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$ , coïncide avec la topologie  $\mathcal{T}_\pi$  de  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ .*

Démonstration. Soit  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  une suite d'ouverts bornés de réunion  $\Omega$  tels que  $\bar{\Omega}_\nu \subset \Omega_{\nu+1}$ , pour tout  $\nu$ . Puisque, d'après le th. 14, le dual fort de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$  est isomorphe à  $\mathcal{E}_\omega(\bar{\Omega}_\nu)[\mathcal{T}_\omega]$ , un système fondamental de voisinages dans cet espace sera celui donné par tous les polaires  $\mathfrak{B}_\nu^0$  des parties bornées  $\mathfrak{B}$  de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$ , ( $\nu=1, 2, \dots$ ). Mais tout ensemble  $\mathfrak{B}$  borné dans  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$  est encore borné dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  et, comme la topologie de  $\mathcal{D}(\Omega)$  est un *prolongement strict* de celle de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$ , tout élément du polaire  $\mathfrak{B}_\nu^0$  de  $\mathfrak{B}$  pris dans le dual de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$  peut se prolonger en un élément du polaire  $\mathfrak{B}^0$  de  $\mathfrak{B}$  pris dans le dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$  (et réciproquement); donc, si l'on identifie les éléments de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)'$  et  $\mathcal{D}(\Omega)'$ , respectivement, avec les éléments correspondants de  $\mathcal{E}_\omega(\bar{\Omega}_\nu)$  et  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ , on aura

$$(24.1) \quad \mathfrak{B}^0 = \rho_\nu^{(-1)}(\mathfrak{B}_\nu^0), \quad \text{où} \quad \rho_\nu = \rho_{\bar{\Omega}_\nu}.$$

Or, l'espace  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)[\mathcal{T}_\pi]$  étant la limite projective des  $\mathcal{E}_\omega(\bar{\Omega}_\nu)[\mathcal{T}_\omega]$  par rapport aux  $\rho_\nu$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ), les ensembles de la forme  $\rho_\nu^{(-1)}(\mathfrak{B}_\nu^0)$  constituent précisément une base du filtre de voisinages de 0 dans cet espace.

Réciproquement, l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  étant la limite inductive des  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$ , qui sont des espaces  $(\mathfrak{F})$ , tout ensemble  $\mathfrak{B}$

borné dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  sera contenu et borné<sup>(26)</sup> dans un au moins des  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_\nu)$ , et par suite les ensembles de la forme (24.1) forment aussi un système fondamental de voisinages de 0 par rapport à  $\mathfrak{I}_b$  dans  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ . On a donc bien  $\mathfrak{I}_b = \mathfrak{I}_\pi$ . c. q. f. d.

Cela étant, si l'on rappelle que l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est un espace  $(\mathcal{LM})$ , donc réflexif, on reconnaît aussitôt que le th. 14 reste valable, si l'on remplace partout  $\Delta$  par  $\Omega$ ,  $\mathcal{D}(\Delta)$  par  $\mathcal{D}(\Omega)$  et  $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$  par  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$ .

25. Recherche des applications linéaires continues d'un espace  $\mathcal{E}_\pi(\Omega)$  dans un autre espace — À cet effet nous utiliserons une proposition de la théorie des espaces localement convexes.

LEMME. Soit  $\mathbf{E}$  un espace  $(\mathcal{LF})$  strict et  $(\mathbf{E}_m)$  une suite de définition de  $\mathbf{E}$ . Tout filtre de CAUCHY sur  $\mathbf{E}$  qui admet une base dénombrable a au moins un de ses ensembles contenu dans un des espaces  $\mathbf{E}_m$ .

On peut démontrer ce lemme à peu près comme le corollaire de la prop. 8 dans [10], en tenant compte de la prop. 4, démontrée dans le même travail.

PROPOSITION 20. Soient  $\mathbf{E}$  un espace  $(\mathcal{LF})$ ,  $\mathbf{F}$  un espace  $(\mathcal{LF})$  strict et  $(\mathbf{F}_m)$  une suite de définition de  $\mathbf{F}$ . Pour qu'une application linéaire  $\Theta$  de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}$  soit continue, il faut et il suffit qu'il existe au moins un entier  $m$  tel que  $\Theta$  soit une application continue de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{F}_m$ .

Pour la démonstration il suffit d'appliquer le lemme au filtre engendré par  $\Theta(\mathfrak{B})$ , où  $\mathfrak{B}$  est le filtre des voisinages de zéro dans  $\mathbf{E}$ .

---

<sup>(26)</sup> Voir [10], prop. 4, p. 70.

Considérons de nouveau un ouvert  $\Omega$  quelconque de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $(\Omega_m)$  une suite d'ouverts bornés de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\bar{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1}$  et  $\bigcup_1^\infty \Omega_m = \Omega$ .

**THÉORÈME 17.** *Soit  $E$  un espace normé ou le dual fort d'un espace  $(\mathcal{F})$  réflexif. Pour qu'une application linéaire  $\Theta$  de  $\mathcal{C}_\pi(\Omega)$  dans  $E$  soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un entier  $m$  et une application linéaire continue  $\Theta_m$  de  $\mathcal{C}_\omega(\bar{\Omega}_m)$  dans  $E$  tels que*

$$\Theta = \Theta_m \varphi_m$$

où  $\varphi_m$  désigne l'opérateur de restriction des éléments de  $\mathcal{C}_\pi(\Omega)$  à  $\Omega_m$ .

**Démonstration.** Si  $E$  est un espace normé, la thèse est une conséquence d'une proposition générale concernant les limites projectives d'espaces localement convexes (cf. [21], prop. 4).

Supposons maintenant que  $E$  est le dual d'un espace  $(\mathcal{F})$  réflexif et soit  $\Theta$  une application linéaire continue de  $\mathcal{C}_\pi(\Omega)$  dans  $E$ . Alors la transposée  $\Theta'$  de  $\Theta$  est une application (fortement) continue de  $E'$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Mais, en vertu de l'hypothèse, le dual fort de  $E$  est un espace  $(\mathcal{F})$ . Donc, d'après la prop. 20, il existe un entier  $m$  tel que  $\Theta'$  soit une application continue de  $E'$  dans  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_m)$ . Désignons par  $\Theta_m$  la transposée de  $\Theta'$ , cet opérateur étant considéré comme application de  $E'$  dans  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_m)$ . Puisque le dual fort de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_m)$  est isomorphe à  $\mathcal{C}_\omega(\bar{\Omega}_m)$ ,  $\Theta_m$  sera une application linéaire continue de  $\mathcal{C}_\omega(\bar{\Omega}_m)$  dans  $E$ , telle que

$$\langle \Theta_m T_m, u \rangle = \langle T_m, \Theta' u \rangle,$$

pour tout  $u \in E'$  et tout  $T_m \in \mathcal{C}_\omega(\bar{\Omega}_m)$ .

On aura donc

$$\langle \Theta_m(\varphi_m T), u \rangle = \langle T, \Theta' u \rangle,$$

pour tout  $u \in \mathbf{E}'$ , tout  $T \in \mathfrak{C}_\pi(\Omega)$  et tout  $m = 1, 2, \dots$ , ce qui veut dire que

$$\Theta_m \varphi_m = \Theta.$$

Réciproquement, il est immédiat que, si cette condition est vérifiée,  $\Theta$  est une application continue de  $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$  dans  $\mathbf{E}$ .

NOTE. Nous ne savons pas encore ce que l'on peut dire dans le cas où  $\mathbf{E}$  est un espace  $(\mathfrak{F})$  quelconque.

COROLLAIRE. Soit  $\mathbf{E}$  la limite projective d'une famille d'espaces localement convexes  $\mathbf{E}_\lambda (\lambda \in \mathcal{L})$ , par rapport à certaines applications continues  $g_{\lambda\mu} (\lambda \prec \mu)$ , chaque  $\mathbf{E}_\lambda$  étant un espace normé ou le dual fort d'un espace  $(\mathfrak{F})$  réflexif. Alors, pour qu'une application linéaire de  $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$  dans  $\mathbf{E}$  soit continue, il faut et il suffit que, pour tout  $\lambda \in \mathcal{L}$ , il existe un entier  $m$  et une application linéaire continue  $\Theta_{\lambda m}$  de  $\mathfrak{C}_\omega(\bar{\Omega}_m)$  dans  $\mathbf{E}_\lambda$  telle que

$$g_\lambda \Theta = \Theta_{\lambda m} \varphi_m.$$

Pour la démonstration, il suffit d'employer le théorème, en tenant compte des propriétés élémentaires des limites projectives (cf. [21], prop. 2).

Ce résultat fait ressortir l'intérêt du th. 3. —

Cela étant, la recherche des applications linéaires continues d'un espace  $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$  dans un espace  $\mathbf{E}$  appartenant à une des catégories indiquées se ramène à la recherche des applications linéaires continues d'un espace  $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$  dans un espace normé ou dans le dual fort d'un espace  $(\mathfrak{F})$  réflexif. Mais nous avons déjà donné au n° 22 la solution de ce problème, dans le cas où le deuxième espace est complet par rapport aux suites.

Soit d'abord  $E$  un espace de BANACH ou le dual fort d'un espace  $(\mathfrak{F})$  réflexif. Alors, compte tenu des résultats précédents, on voit que :

*Il y a une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues  $\Theta$  de  $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$  dans  $E$  et les fonctions  $\theta(u)$  à valeurs dans  $E$ , indéfiniment dérivables dans  $\mathbb{R}^n$  et à support compact contenu dans  $\Omega$ , cette correspondance étant donnée par les formules*

$$\Theta(T) = \int_{\Omega} T_u \theta(u) du, \quad \text{pour } T \in \mathfrak{C}_\pi(\Omega)$$

et

$$\theta(u) = \Theta[\partial(\dot{x} - u)], \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}^n.$$

Dans le cas où  $E$  est une limite projective d'une famille  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$  d'espaces de BANACH ou de duals forts d'espaces  $(\mathfrak{F})$  réflexifs, par rapport à des applications  $g_{\lambda\mu}$ , ce résultat subsiste avec la seule modification suivante :  $\theta(u)$  n'est pas nécessairement à support compact contenu dans  $\Omega$ , mais cette condition doit être vérifiée par la fonction  $g_\lambda(\theta(u))$  quel que soit  $\lambda \in \mathcal{L}$ .

En particulier,  $E$  peut être un deuxième espace  $\mathfrak{C}_\pi(\Omega^*)$ ,  $\Omega^*$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Alors on pourra caractériser la fonction  $\theta(u)$  à l'aide du critère énoncé au n° 21.

Enfin, compte tenu des résultats du n° 22, on reconnaît qu'il existe une correspondance biunivoque  $S \leftrightarrow \Theta$  entre les distributions  $S$  dans  $\mathbb{R}^n$ , à support compact et les applications linéaires continues de l'espace  $\mathfrak{C}_\pi(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même, permutant avec les opérateurs de dérivation, cette correspondance étant fixée par la formule

$$\Theta(T) = S * T = \int_{\Omega} S(\dot{x} - u) T(u) du.$$

Voilà une façon naturelle d'introduire la notion de produit de composition  $S * T$ , dans le cas considéré.

26. La dualité dans les espaces de distributions à support compact— Le th. 14 pourrait également s'établir au moyen de la formule de RIESZ. Ce procédé serait moins direct, mais présenterait l'avantage de conduire, en même temps, à la détermination des duals des espaces  $\mathcal{E}_p(\Delta)$ . Nous avons vu au n° 17, que pour tout  $p$ ,  $\mathcal{E}_p(\Delta)$  est isomorphe, au sens algébrique et au sens topologique, à l'espace  $\mathcal{E}(\Delta)/\hat{N}(\mathbf{D}^p)$ , l'isomorphisme étant défini par la correspondance  $f + \hat{N}(\mathbf{D}^p) \rightarrow \mathbf{D}^p f$ . Donc, la détermination du dual de  $\mathcal{E}_p(\Delta)$  se réduit à la détermination du dual de  $\mathcal{E}(\Delta)/\hat{N}(\mathbf{D}^p)$ .

Mais, suivant la définition d'espace quotient, les fonctionnelles linéaires continues dans  $\mathcal{E}(\Delta)/\hat{N}(\mathbf{D}^p)$  seront toutes les applications  $\dot{\Phi}$  de cette espace dans  $\mathbf{C}$  qui peuvent se mettre sous la forme

$$\dot{\Phi}(f) = \Phi(f), \text{ pour } f \in \mathcal{E}(\Delta), \quad f = f + \hat{N}(\mathbf{D}^p),$$

où  $\Phi$  désigne un élément arbitraire de  $\mathcal{E}(\Delta)'$  tel que  $\Phi[\hat{N}(\mathbf{D}^p)] = \{0\}$ . Or, les éléments  $\Phi$  de  $\mathcal{E}(\Delta)'$  sont donnés par la formule de RIESZ

$$(25.1) \quad \Phi(f) = \int_{\Delta} f(u) dF(u),$$

où  $F$  est une fonction à variation bornée dans un intervalle  $Q \supset \Delta$ ; deux telles fonctions  $F_1, F_2$  déterminent la même fonctionnelle  $\Phi$ , si, et seulement si, les distributions  $\tilde{D}F_1, \tilde{D}F_2$  (mesures) coïncident. Désignons par  $\mathfrak{B}^p(\Delta)$  l'espace vectoriel des fonctions  $\varphi(u)$  définies dans  $\mathbf{R}^n$  et à support contenu dans  $\Delta$ , ayant dérivées  $\mathbf{D}^k \varphi$  au sens usuel, pour  $k = 0, 1, \dots, p$ , et  $\mathbf{D}^p \varphi$  étant à variation bornée. On pourrait démontrer, par des considérations élémentaires, que la condition  $\hat{N}(\mathbf{D}^p) \subset \Phi^{(-1)}(0)$  est équivalente à la condition suivante :

$$(25.2) \quad \text{Il existe une (et seulement une) fonction } \varphi \in \mathfrak{B}^{p-1}(\Delta) \text{ telle que } F = \mathbf{D}^{p-1} \varphi.$$

Il en résulte immédiatement que le dual de l'espace  $\mathfrak{E}_p(\Delta)$  est isomorphe à l'espace  $\tilde{\mathfrak{D}} \mathfrak{B}^{p-1}(\Delta)$ , la dualité étant définie par la formule

$$\langle \varphi, \mathbf{D}^{p-1} f \rangle = \int_{\Delta} f(\mathbf{u}) d[\mathbf{D}^{p-1} \varphi(\mathbf{u})], \quad \varphi \in \mathfrak{B}^{p-1}(\Delta), f \in \mathfrak{E}(\Delta),$$

ou, d'une façon plus résumée :

$$(25.3) \quad \langle \varphi, T \rangle = \int_{\Delta} T_{\mathbf{u}} d\varphi(\mathbf{u}), \quad \varphi \in \mathfrak{B}^{p-1}(\Delta), T \in \mathfrak{E}_p(\Delta).$$

D'ailleurs, la topologie forte dans  $\tilde{\mathfrak{D}} \mathfrak{B}^{p-1}(\Delta)$  peut être définie au moyen de la norme

$$\|\varphi\| = \text{variation totale de } \mathbf{D}^{p-1} \varphi;$$

on voit alors que la convergence forte d'une suite  $(\varphi_k)$  implique la convergence uniforme des suites des fonctions  $\varphi_k(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{D} \varphi_k(\mathbf{u})$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{D}^{p-2} \varphi_k(\mathbf{u})$ .

Soit maintenant  $K$  un compact quelconque de  $\mathbf{R}^n$  et considérons l'espace  $\dot{\mathfrak{E}}_{\omega}(K)$  des distributions à support contenu dans  $K$  (n° 13). Soit d'autre part  $\Omega$  un ouvert borné contenant  $K$  et posons  $\Delta = \bar{\Omega}$ ; nous considérons l'espace  $\dot{\mathfrak{E}}_{\omega}(K)$  muni de la topologie  $\mathfrak{T}_{\omega}$  induite par celle de  $\mathfrak{E}_{\omega}(\Delta)$ ; cette topologie ne dépend pas, évidemment, du choix de  $\Delta$ . Si l'on pose  $\dot{\mathfrak{E}}_p(K) = \dot{\mathfrak{E}}_{\omega}(K) \cap \mathfrak{E}_p(\Delta)$ , pour tout  $p = 0, 1, \dots$ ,  $\dot{\mathfrak{E}}_{\omega}(K)$  peut être considéré comme la limite inductive des  $\dot{\mathfrak{E}}_p(K)$ . Or la formule (25.3), qui donne l'expression générale des fonctionnelles linéaires continues dans  $\mathfrak{E}_p(\Delta)$ , donnera aussi toutes les fonctionnelles linéaires continues dans  $\dot{\mathfrak{E}}_p(K)$ .

Alors, en appliquant les résultats que nous établissons dans [21], on conclut aisément que :

*L'espace vectoriel topologique  $\mathfrak{E}_{\omega}(K)$  est réflexif. Son dual fort est un espace  $(\mathfrak{M})$ , isomorphe à l'espace quotient*

de  $\mathcal{D}(\Delta)$  par l'ensemble des fonctions  $\varphi \in \mathcal{D}(\Delta)$  s'annulant sur  $K$ , ainsi que toutes leurs dérivées.

D'autre part, on peut démontrer que, si  $K$  est lui-même l'adhérence d'un ouvert, l'espace quotient dont il question ici est isomorphe à l'espace  $\mathcal{E}(K)$  des fonctions  $\varphi$  indéfiniment dérivables à l'intérieur de  $K$  et dont les dérivées sont prolongeables par continuité à  $K$ .

Enfin, soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbf{R}^n$  et  $(\Omega_\nu)$  une suite d'ouverts de réunion  $\Omega$  tels que  $\overline{\Omega}_\nu \subset \Omega_{\nu+1}$  pour tout  $\nu = 0, 1, \dots$ . À l'espace  $\mathcal{E}_\omega(\Omega)$  des distributions à support compact contenu dans  $\Omega$  nous donnerons la topologie de la limite inductive des espaces  $\mathcal{E}_\nu(\overline{\Omega}_\nu)$ ,  $\nu = 0, 1, \dots$ . Cela étant, on trouve, à l'aide des théorèmes établis dans [21], le résultat suivant (cf. [17], pp. 87-90):

*L'espace  $\mathcal{E}_\omega(\Delta)$  est réflexif. Son dual fort est l'espace  $\mathcal{E}(\Omega)$  des fonctions indéfiniment dérivables dans  $\Omega$  avec sa topologie naturelle, donnée par la suite de semi-normes*

$$q_\nu(\varphi) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} (|\mathbf{D}^0 \varphi(\mathbf{x})|, \dots, |\mathbf{D}^\nu \varphi(\mathbf{x})|), \quad \nu = 0, 1, \dots$$

## NOTES FINALES

I. Résolution du problème général d'extension algébrique — Pendant la correction des épreuves, nous avons résolu complètement le problème abstrait d'extension algébrique que nous avons posé au commencement du n° 2 et que nous énoncerons maintenant sous la forme suivante:

*Soit  $E$  un groupe additif abélien et soit  $\Lambda$  un semi-groupe multiplicatif de homomorphismes de sous-groupes de  $E$  sur  $E$ , contenant l'identité,  $I$ . Étant donné d'avance, pour tout  $\Phi \in \Lambda$ , un sous-groupe  $\hat{N}(\Phi)$  de  $E$ , on demande: construire*

un sur-groupe  $\tilde{E}$  de  $E$ , dans lequel on puisse définir, pour chaque  $\Phi \in \Lambda$ , un prolongement  $\tilde{\Phi}$  de  $\Phi$  à  $E$  de façon que : 1)  $\tilde{\Phi}$  soit un endomorphisme de  $E$ ; 2)  $\tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}\tilde{\Phi}$ , quels que soient  $\Phi, \Psi \in \Lambda$ ; 3) tout élément  $\tilde{u}$  de  $\tilde{E}$  soit de la forme  $\tilde{u} = \tilde{\Phi}u$ , avec  $u \in E$ ,  $\Phi \in \Lambda$ ; 4)  $E \cap N(\tilde{\Phi}) = \hat{N}(\Phi)$ .

Voici la réponse :

*Le problème ne peut jamais avoir plus d'une solution, à moins d'un isomorphisme opératoire laissant fixes les éléments de  $E$ . Pour qu'il soit résoluble, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- $\alpha)$   $\hat{N}(\Phi\Psi) = \hat{N}(\Psi\Phi) \supset \Psi^{(-1)}(\hat{N}(\Phi)) + \hat{N}(\Psi)$ ;
- $\beta)$   $(\Phi\Psi)^{(-1)}u - (\Psi\Phi)^{(-1)}u \subset \hat{N}(\Phi\Psi)$ , pour tout  $u \in E$ ;
- $\gamma)$   $\Phi^{(-1)}(u) \subset \hat{N}(\Phi\Psi)$  implique  $u \in \hat{N}(\Psi)$ ;
- $\delta)$   $\hat{N}(I) = \{0\}$ .

Pour la première partie de cette proposition on peut raisonner comme dans la démonstration du th. 1, a). Quant à la deuxième partie, on voit aisément que la condition énoncée est nécessaire; pour voir qu'elle est suffisante, on peut suivre à peu près la démonstration du th. 1, b). On définit dans l'ensemble  $\Lambda \times E$  une relation  $\sim$  de la façon suivante :

$$(\Phi, u) \sim (\Psi, v) \text{ si et seulement si } \Psi^{(-1)}(u) - \Phi^{(-1)}(v) \subset \hat{N}(\Phi\Psi)$$

(cf. définition analogue, p. 91); on voit sans difficulté, à l'aide des conditions  $\alpha)$ ,  $\beta)$ ,  $\gamma)$ , qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence. On désignera encore par  $[\Phi, u]$  la classe des couples équivalents à  $(\Phi, u)$ . Ensuite, il sera convenable de démontrer que l'on a toujours  $[\Phi\Psi, u] = [\Psi\Phi, u]$  et que, si  $u^* \in \Psi^{(-1)}(u)$ , alors  $[\Phi, u] = [\Phi\Psi, u^*]$ , ce qui permet de remplacer deux expressions  $[\Phi, u]$ ,  $[\Psi, v]$  par des expressions du type  $[\Theta, u^*]$ ,  $[\Theta, v^*]$ , avec  $\Theta = \Phi\Psi$ . Alors on peut définir l'addition tout simplement par

$$[\Phi, u] + [\Phi, v] = [\Phi, u + v],$$

ce que simplifie beaucoup la vérification des propriétés groupales. Dans le reste, la démonstration sera une adaptation immédiate de celle du th. 1.

11. Les distributions d'ordre fini comme dérivées de fonctions localement sommables — L'analyse du n° 4 est imparfaite; nous tâcherons de l'améliorer ici.

Tout d'abord, la notation  $L^1(Q)$ , pour l'ensemble des fonctions localement sommables dans  $Q$ , est mal choisie; il convient de la remplacer par une autre, par exemple  $L_c^1(Q)$ , en réservant le symbole  $L^1(Q)$  pour l'ensemble des fonctions sommables dans  $Q$ .

D'autre part, la prop. 7 doit être remplacée par la proposition suivante:

*Si l'on pose  $\varkappa(f) = \mathbf{D} \int_{c_1}^{x_1} \cdots \int_{c_n}^{x_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  pour  $f \in L_c^1(Q)$ , l'application  $\varkappa$  est un isomorphisme du groupe additif  $L_c^1(Q)$  dans le groupe  $\mathfrak{E}_1(Q)$ , et on a  $\varkappa(D_{x_i} f) = \tilde{D}_{x_i}(\varkappa f)$  pour toute fonction  $f$  absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des  $x_i$  et admettant presque partout pour dérivée  $D_{x_i} f$  (au sens usuel) une fonction localement sommable (cf. [17], tome I, p. 58, th. V, 1.<sup>o</sup>).*

On démontre d'abord que l'application  $\varkappa$  est biunivoque, par une technique semblable à celle de la démonstration de la prop. 7. Ensuite, on voit aussitôt que  $\varkappa$  est un isomorphisme. Enfin, si  $f$  est une fonction absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des  $x_i$  et telle que  $D_{x_i} f \in L_c^1(Q)$ , on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \varkappa(D_{x_i} f) &= \tilde{D} \int_{c_1}^{x_1} \cdots \int_{c_n}^{x_n} D_{x_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \tilde{D} D_{x_i} \int_{c_1}^{x_1} \cdots \int_{c_n}^{x_n} \int_{c_i}^{x_i} D_{x_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \tilde{D}_{x_i} \tilde{D} \int_{c_1}^{x_1} \cdots \int_{c_n}^{x_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = D_{x_i}(\varkappa f) \end{aligned}$$

On démontre de même que, *s'il existe*  $x^{-1} \tilde{D}_{x_i} x \cdot f$ , *il existe aussi*  $D_{x_i} f$  (au sens usuel) *et, alors,*  $D_{x_i} f = x^{-1} \tilde{D}_{x_i} x \cdot f$ . Cela veut dire que les prolongements des opérateurs  $D_{x_i}$  seront des prolongements stricts, ce qui n'est plus vrai, en général, pour les opérateurs  $D^p$ .

III. Sur l'axiomatique des distributions — Nous avons choisi pour Axiome 6 le principe du recollement des morceaux, que nous avons présenté p. 128 comme le th. 5. Rien ne s'oppose logiquement à ce qu'un théorème soit transformé en axiome. Mais il serait peut-être préférable de choisir pour Axiome 6 la proposition suivante, plus faible que le principe du recollement des morceaux: *Si, étant donné un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , on fait correspondre à chaque intervalle ouvert  $Q \subset \Omega$  une distribution  $T_Q$ , de façon que, si  $Q^* \subset Q$ , on ait  $T_{Q^*} = (T_Q)_{Q^*}$ , il existe une, et seulement une distribution  $U$  dans  $\Omega$ , telle que  $U_Q = T_Q$  quel que soit  $Q$ .*

IV. Détermination des duals des espaces  $\mathcal{D}^p(\Delta)$  et  $\mathcal{D}^p(\Omega)$  — Soient  $\Omega$  un ouvert et  $\Delta$  l'adhérence d'un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . On désigne par  $\mathcal{D}^p(\Delta)$  l'espace vectoriel des fonctions  $f(x)$  qui sont  $p$  fois continûment différentiables dans  $\mathbb{R}^n$ , à support contenu dans  $\Delta$ , avec la topologie de la convergence uniforme des dérivées d'ordre  $\leq p$  dans  $\Delta$ ; et par  $\mathcal{D}^p(\Omega)$  la limite inductive des espaces  $\mathcal{D}^p(\Delta^*)$  avec  $\Delta^* \subset \Omega$ . Définissons les opérateurs  $\mathfrak{D}_{x_i}$  comme au n° 3, avec  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \sim \Delta$ . Puisque

$$f(x) = \mathfrak{D}_{x_1}^{k_1} \dots \mathfrak{D}_{x_n}^{k_n} D^k f(x), \quad \text{pour } f \in \mathcal{D}^p(\Delta) \quad \text{et} \quad |k| = p,$$

on voit que, si l'on considère l'espace  $\mathcal{E}(\Delta)^{m_p}$  des fonctions  $F(x)$  continues dans  $\Delta$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^{m_p}$ , où  $m_p = 2^p$ , avec la topologie de la convergence uniforme de ces fonctions sur  $\Delta$ , les vecteurs  $\{D^k f(x)\}_{|k|=p}$ , pour toutes les déterminations de  $f$ , forment dans cet espace

un sous-espace,  $\tilde{\mathcal{D}}^p(\Delta)$ , algébriquement et topologiquement isomorphe à  $\mathcal{D}^p(\Delta)$ . Et, comme toute fonctionnelle linéaire et continue dans  $\tilde{\mathcal{D}}^p(\Delta)$  est prolongeable à  $\mathcal{C}(\Delta)^{m_p}$ , on conclut que tout élément  $L$  de  $\mathcal{D}^p(\Delta)$  est nécessairement de la forme

$$L(f) = \sum_{|\mathbf{k}|=p} \int_{\Delta} D^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}) dg_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

où  $g_{\mathbf{k}}$  désigne une fonction à variation bornée dans  $\mathbf{R}^n$ , pour tout  $\mathbf{k}$ . La réciproque est évidente. (Cf. [17], tome I, p. 91, dém. du th. XXVII).

Rappelons maintenant que l'espace  $\mathcal{D}(\Delta)$  est la limite projective (intersection) des espaces  $\mathcal{D}^p(\Delta)$ , pour  $p=1,2,\dots$ ; il s'ensuit que, pour toute distribution  $T$  dans  $\Omega$ , considérée comme élément de  $\mathcal{D}(\Delta)'$ , il existe un  $p$  tel que  $T$  soit une fonctionnelle continue dans un sous-espace de  $\mathcal{D}^p(\Delta)$  et par suite prolongeable en un élément (unique) de  $\mathcal{D}^p(\Delta)'$ . Donc, la formule précédente nous dit que *toute distribution appartenant à  $\mathcal{D}^p(\Delta)$  est une somme finie de dérivées d'ordres  $\leq p$  de mesures.* (La réciproque est aussi vraie).

Cela posé, une distribution  $T$  dans l'ouvert  $\Omega$  est dite d'ordre  $\leq p$ , si elle peut être identifiée à un élément du dual de  $\mathcal{D}^p(\Omega)$  (cf. [17], tome I, p. 25). Le th. XXXI, du chapitre III de [17] donne la caractérisation des distributions d'ordre  $\leq p$  dans un ouvert, comme sommes finies de dérivées d'ordres  $\leq p$  de mesures. On voit alors que toute distribution d'ordre fini est une dérivée d'une fonction continue (et réciproquement). D'après ce point de vue, le critère d'égalité de deux dérivées de fonctions continues pourra être introduit aisément en employant le «Satz 9» établi dans [14]. Voilà donc un procédé direct, assez simple, pour caractériser les duals des espaces  $\mathcal{D}(\Delta)$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$ ; évidemment, il est à la base de la méthode fonctionnelle de M. SCHWARTZ.

V. Construction de  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  au moyen de suites convergentes de fonctions indéfiniment dérivables — On a vu que, si  $Q$  est un intervalle compact de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace  $\mathfrak{E}(Q)$  des fonctions indéfiniment dérivables dans  $Q$  est dense dans l'espace  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ . Cela suggère une construction de  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  par complétion topologique de  $\mathfrak{E}(Q)$  par rapport à  $\mathfrak{T}_\omega$ . Nous dirons qu'une suite  $(\varphi_n)$  de fonctions indéfiniment dérivables dans  $Q$  est *régulière*, si il existe un entier  $p$  et une suite  $(\bar{\varphi}_n)$  tels que: 1)  $\varphi_n = D^p \bar{\varphi}_n$  pour tout  $n$ ; 2)  $(\bar{\varphi}_n)$  est uniformément convergente sur  $Q$ . Nous dirons que deux suites régulières  $(\varphi_n)$ ,  $(\psi_n)$  sont *équivalentes*, et nous écrirons  $(\varphi_n) \sim (\psi_n)$ , s'il existe un  $p$  et deux suites  $(\bar{\varphi}_n)$ ,  $(\bar{\psi}_n)$ , tels que: 1)  $\varphi_n = D^p \bar{\varphi}_n$ ,  $\psi_n = D^p \bar{\psi}_n$ ; 2)  $\bar{\varphi}_n - \bar{\psi}_n \rightarrow 0$  uniformément sur  $Q$ . En employant les projecteurs que nous définissons au n° 3, on voit aisément qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence. Désignons alors par  $[\varphi_n]$  la classe des suites équivalentes à  $(\varphi_n)$ , et par  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  l'ensemble de ces classes  $[\varphi_n]$ . Dans  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ , on définit maintenant la somme, les dérivées et le produit multiplicatif, tout simplement par

$$[\varphi_n] + [\psi_n] = [\varphi_n + \psi_n], \quad \tilde{D}_{x_i}[\varphi_n] = [D_{x_i}\varphi_n], \quad \alpha[\varphi_n] = [\alpha\varphi_n].$$

D'ailleurs, on pourra identifier chaque fonction continue  $f$  avec la classe  $[\varphi_n]$ , où  $(\varphi_n)$  est une suite quelconque vérifiant la condition suivante: il existe un entier  $p$ , une suite  $(\bar{\varphi}_n)$  et une fonction  $\bar{f}$  tels que: 1)  $\varphi_n = D^p \bar{\varphi}_n$ ; 2)  $\bar{\varphi}_n \rightarrow \bar{f}$  uniformément sur  $Q$ . On démontre alors que  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  est un sur-groupe de  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ ,  $\tilde{D}_{x_i}$  un prolongement de  $D_{x_i}$ , etc.

VI. L'espace des distributions tempérées dans  $\mathbb{R}^n$  — Considérons l'espace  $(\mathfrak{S}')$  des distributions tempérées dans  $\mathbb{R}^n$ , avec la topologie forte de SCHWARTZ (voir [17], tome II, chap. VII). Ces distributions sont déjà caractérisées par le th. VI, p. 95. Mais on peut aussi expliciter la topologie de  $(\mathfrak{S}')$  en appliquant la théorie de notre § 2. Maintenant,

les opérateurs que l'on doit rendre continus seront les applications  $T \rightarrow \mathbf{D}^p [(1 + |\mathbf{x}|^2)^{p/2} T]$ , de l'espace des distributions tempérées dans lui-même ( $p = 1, 2, \dots$ ). Le th. 7 reste applicable à ce cas, grâce au th. de ASCOLI.

Mais on pourrait aussi adopter une méthode tout à fait analogue à celle de notre § 3, à l'analyse linéaire des distributions tempérées, en partant encore de la formule de DIRAC, l'intégrale étant définie directement par rapport à la topologie de  $(\mathfrak{S}')$ . On voit alors que la fonction  $\tau_u \delta$  de  $\mathbf{u}$ , à valeurs dans  $(\mathfrak{S}')$ , est une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide dans  $\mathbf{R}^n$ , ce qui permettrait de caractériser les applications linéaires continues de  $(\mathfrak{S}')$  dans un espace localement convexe,  $\mathbf{E}$ . En particulier, on pourrait introduire, d'une façon naturelle, la notion de produit de composition  $S * T$ , où  $T$  est une distribution tempérée et  $S$  une distribution à décroissance rapide dans  $\mathbf{R}^n$ . Enfin, la transformation de FOURIER pourrait être définie directement, au moyen d'une intégrale, comme dans le cas des fonctions.

## CONCLUSION

Ce travail n'a évidemment pas pour but d'exposer la théorie des distributions de la façon la plus brève et la plus facile. Nous avons eu le souci de résoudre plusieurs questions, d'abord dans le domaine de l'algèbre et de la topologie abstraites, et après dans le plan concret (caractérisation axiomatique de la structure des distributions, explicitation de la topologie des espaces de distributions, recherche des applications linéaires continues d'un espace de distributions dans un autre, etc.). Mais, en faisant ainsi, nous avons ouvert plusieurs possibilités d'exposition de cette théorie, suivant notre point de vue.

Si l'on veut s'adresser à des techniciens, on préférera une orientation plutôt concrète. La méthode de complétion topologique que nous avons indiqué dans NOTES FINALES, V, sera peut-être la plus intuitive pour construire les espaces  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$ ; elle conduit immédiatement à la notion de limite d'une suite, qui suffit pour faire, d'une façon élémentaire, l'analyse linéaire des distributions. Des espaces  $\mathfrak{E}_\omega(Q)$  on peut passer, d'une façon presque triviale, aux espaces  $\mathfrak{E}_\pi(\Omega)$  (algébriques), sans employer le langage abstrait des limites projectives.

Au contraire, pour les mathématiciens, il y aura toujours intérêt à connaître la théorie des distributions d'un point de vue supérieur.

Notre désir a été de contribuer à la clarification et au développement d'une si belle et si importante théorie.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integral*, Leipzig, 1932.
- [2] BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, Act. Scient. Ind., n.ºs 846-1141, Hermann, Paris (1951).
- [3] ———, *Topologie générale*, chapitres I-II, Act. Scient. Ind., n.ºs 858-1142, Hermann, Paris (1934).
- [4] ———, *Topologie générale*, chapitre IX, Act. Scient. Ind., n.º 1045, Hermann, Paris, (1948).
- [5] ———, *Topologie générale*, chapitre X, Act. Scient. Ind., n.º 1045, Hermann, Paris, (1949).
- [6] ———, *Algèbre*, chapitre II, Act. Scient. Ind., n.º 1032, Hermann, Paris, (1947).
- [7] ———, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I-II, Act. Scient. Ind., n.º 1189, Hermann, Paris (1953).
- [8] ———, *Intégration*, chapitres I-IV, Act. Scient. Ind., n.º 1175, Hermann, Paris, (1952).
- [9] J. DIEUDONNÉ, *Recent developments in the theory of locally convex vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 59 (1953), pp. 495-515.
- [10] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces (F) et (LF)*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 1 (1949), pp. 61-101 (1950).
- [11] R. L. GOMES, *Integral de Lebesgue-Stieltjes*, Junta de Investigação Matemática, Porto (1952).
- [12] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces (F) et (DF)*, à paraître dans Summa Bras. Math.
- [13] ———, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Reine Angew. Math., vol. 192 (1953), pp. 35-64 et 77-95.
- [14] H. KÖNIG, *Neue Begründung der Theorie der «Distributionen» von L. Schwartz*, Math. Nachrichten, vol. 9 (1953), pp. 129-148.
- [15] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*, J. Reine Angew. Math., vol. 191 (1953), pp. 29-49.
- [16] ———, *Die Randverteilungen analytischer Funktionen*, Math. Zeitschr., vol. 57 (1952), pp. 13-33.

- [17] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I, II, Act. Scient. Ind., n.º 1091, Hermann, Paris (1950).
- [18] ———, *Théorie des noyaux*, Proc. Int. Cong. Math. 1950, pp. 220-230,
- [19] J. SEBASTIÃO E SILVA, *As funções analíticas e a análise funcional*, Thèse, 1948 (Port. Math. 1950).
- [20] ———, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, Port. Math., vol. 12 (1953), pp. 1-46.
- [21] ———, *Su certi spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, Rend. Math. Univ. Roma, serie V, vol. 14 (1955), p. 388-410.
- [22] C. DA SILVA DIAS, *Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação na teoria dos espaços funcionais analíticos*, Thèse, Univ. S. Paulo (1951).
- [23] H.-G. TILLMANN, *Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen*, Math. Zeitschr., vol. 59, pp. 61-83 (1953).
- [24] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques*, Act. Scient. Ind., n.º 869, Hermann, Paris (1940).

UNIVERSIDADE DE LISBOA

---

REVISTA  
DA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS

2.<sup>a</sup> SÉRIE

A—CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

VOL. V



1955-1956

BIBLIOTECA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS  
Rua da Escola Politécnica

LISBOA

# RECTIFICATIONS A L'ARTICLE «SUR UNE CONSTRUCTION AXIOMATIQUE DE LA THEORIE DES DISTRIBUTIONS»

PAR

J. SEBASTIÃO E SILVA

La plupart des remarques suivantes, concernant notre article publié dans le vol. IV de cette revue (1954-55), p. 79-186, nous ont été aimablement suggérées par M. L. SCHWARTZ, que nous en remercions ici.

*a)* La prop. 10, p. 130 (lemme) doit être supprimée: elle est tout à fait dispensable; sa démonstration n'est pas correcte. On évite ce lemme dans la dém. de la prop. 11, en considérant les fonctions  $f_i(\mathbf{x})$  prolongées comme fonctions à  $\mathbb{R}^n$ . Dans la dém. du th. 8, p. 146, on doit introduire tout de suite l'inverse à droite de  $\mathbf{D} = D_{x_1} D_{x_2} \cdots D_{x_n}$  tel que nous l'avons défini. La continuité des opérateurs  $D_{x_i}$  viendra aussitôt.

*b)* Dans le cor. IV, p. 147, il y a eu une lacune: il faut ajouter que  $\mathfrak{T}_\omega$  *prolonge* la topologie  $\mathfrak{T}$  de  $\mathfrak{C}(\Delta)$ .

*c)* Page 183, ligne 2, il faut remplacer l'exposant  $p/2$  par  $\dot{p}$ .

*d)* La prop. 18, p. 152, est une conséquence immédiate de résultats contenus dans le travail de GROTHENDIECK «*Sur les espaces (F) et (DF)*», qui vient de paraître dans «*Summa Brasiliensis Math.*», mais qui a été reçu en 1952. Nous comptons y revenir dans une note.

*e)* Nous avons dû refaire, suivant notre orientation, une petite partie de la théorie de l'intégration des distributions. Une théorie complète et générale en a été donnée par M. SCHWARTZ dans son Séminaire 1953-1954 [cf. *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*, J. d'Analyse Math., 4 (1954-55), p. 88-148].