

PORTUGALIAE MATHEMATICA

Revista editada
por
ANTÓNIO MONTEIRO
com
a cooperação de
HUGO RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR NUNES

VOLUME 2
1941

FACULDADE DE CIÊNCIAS
LISBOA — PORTUGAL

Publicação subsidiada pelo Instituto para a Alta Cultura

SUR UNE MÉTHODE D'APPROXIMATION SEMBLABLE À CELLE DE GRÄFFE

par J. SEBASTIÃO E SILVA¹ (À LISBONNE)

(Recebido em 1941, Setembro, 15)

Dans cette note nous allons indiquer un résultat², qui conduit à une méthode d'approximation, semblable à celle de Gräffe, pour le calcul des racines d'une équation algébrique quelconque.

1. Soit $F(x) \equiv x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n S_n$ un polynôme, à coefficients réels ou imaginaires, dont les zéros, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, satisfont aux seules conditions suivantes: 1) ils sont distincts deux à deux; 2) il en existe un, α_1 par exemple, tel que $|\alpha_1| > |\alpha_i|$ ($i=2, 3, \dots, n$). Soit, en outre, $f_1^p(x) \equiv A_0^p x^{n-1} - A_1^p x^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} A_{n-1}^p$, le reste de la division de x^n par $F(x)$, p étant un nombre entier et positif quelconque. Dans ces conditions, *quand p croît indéfiniment, le polynôme $\frac{1}{A_0^p} f_1^p(x)$ tend vers un polynôme $F_1(x)$, dont les zéros sont $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.*

Pour démontrer cette proposition, faisons d'abord la remarque suivante. Quels que soient les nombres, distincts deux à deux, a_1, a_2, \dots, a_m : si l'on désigne par σ_k ($k=1, 2, \dots, m$) la somme des produits k à k de ces nombres (sans répétition)³, c'est-à-dire, si l'on pose

$$\sigma_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m; k=1, 2, \dots, m),$$

on aura les identités suivantes:

$$1) \quad \begin{vmatrix} a_1^m & a_1^{m-1} & \dots & a_1^{m-k+1} & a_1^{m-k} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^m & a_2^{m-1} & \dots & a_2^{m-k+1} & a_2^{m-k} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^m & a_m^{m-1} & \dots & a_m^{m-k+1} & a_m^{m-k} & \dots & a_m & 1 \end{vmatrix} = \sigma_k \begin{vmatrix} a_1^{m-1} & a_1^{m-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^{m-1} & a_2^{m-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^{m-1} & a_m^{m-2} & \dots & a_m & 1 \end{vmatrix} \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

¹ Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura.

² Nous n'avons trouvé nulle part ce résultat.

³ Dans la suite, n nombres étant donnés, nous appellerons «somme des produits 1 à 1 de ces nombres» leur somme, et «somme des produits n à n de ces nombres (sans répétition)» leur produit.

En effet, étant donné que $\alpha_i'' - \sigma_1 \alpha_i^{m-1} + \sigma_2 \alpha_i^{m-2} - \dots + (-1)^n \sigma_m = 0$, d'où $\alpha_i'' = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sigma_j \alpha_i^{m-j}$ ($i=1, 2, \dots, m$), on a, si l'on désigne par Δ le premier membre de 1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sigma_j \alpha_1^{m-j} & \alpha_1^{m-1} & \dots & \alpha_1^{m-k+1} & \alpha_1^{m-k-1} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sigma_j \alpha_2^{m-j} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_2^{m-k+1} & \alpha_2^{m-k-1} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sigma_j \alpha_m^{m-j} & \alpha_m^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-k+1} & \alpha_m^{m-k-1} & \dots & \alpha_m & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \sigma_j \begin{vmatrix} \alpha_1^{m-j} & \alpha_1^{m-1} & \dots & \alpha_1^{m-k+1} & \alpha_1^{m-k-1} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{m-j} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_2^{m-k+1} & \alpha_2^{m-k-1} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m^{m-j} & \alpha_m^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-k+1} & \alpha_m^{m-k-1} & \dots & \alpha_m & 1 \end{vmatrix};$$

mais, pour $j \neq k$, les déterminants correspondants sont nuls, parce qu'ils ont deux colonnes identiques; donc

$$\Delta = (-1)^{k-1} \sigma_k \begin{vmatrix} \alpha_1^{m-k} & \alpha_1^{m-1} & \dots & \alpha_1^{m-k+1} & \alpha_1^{m-k-1} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{m-k} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_2^{m-k+1} & \alpha_2^{m-k-1} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m^{m-k} & \alpha_m^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-k+1} & \alpha_m^{m-k-1} & \dots & \alpha_m & 1 \end{vmatrix},$$

d'où l'on déduit immédiatement les identités 1).

Cela posé, remarquons que, de la relation $x^n = q^n(x) \cdot F(x) + f_i^n(x)$, où $q^n(x)$ désigne le quotient de la division de x^n par $F(x)$, il résulte que $\alpha_i^n = f_i^n(\alpha_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

On peut donc écrire :

$$2) \quad \begin{cases} \Lambda_0^n \alpha_1^{n-1} - \Lambda_1^n \alpha_1^{n-2} + \Lambda_2^n \alpha_1^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} \Lambda_{n-1}^n = \alpha_1^n, \\ \Lambda_0^n \alpha_2^{n-1} - \Lambda_1^n \alpha_2^{n-2} + \Lambda_2^n \alpha_2^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} \Lambda_{n-1}^n = \alpha_2^n, \\ \dots \\ \Lambda_0^n \alpha_n^{n-1} - \Lambda_1^n \alpha_n^{n-2} + \Lambda_2^n \alpha_n^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} \Lambda_{n-1}^n = \alpha_n^n. \end{cases}$$

Alors, si l'on désigne par V le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \dots & \alpha_n & 1 \end{vmatrix};$$

par $V^{(i)}$, le déterminant qui se déduit de V , en supprimant la première colonne et la i ème ligne; et par $S_k^{(i)}$, la somme des produits k à k (sans

répétition) des zéros de $F(x)$, excepté α_i , on déduit du système 1), d'après la règle de Cramer :

$$A_k^p = \frac{(-1)^k}{V} \begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \dots & \alpha_1^{n-k} & \alpha_1^p & \alpha_1^{n-k-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_2^{n-k} & \alpha_2^p & \alpha_2^{n-k-2} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \dots & \alpha_n^{n-k} & \alpha_n^p & \alpha_n^{n-k-2} & \dots & \alpha_n & 1 \end{vmatrix} \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Si l'on développe ce déterminant par rapport aux éléments de la $(k+1)^{\text{ème}}$ colonne, on a, en tenant compte de la remarque précédente,

$$\begin{cases} A_k^p = \frac{1}{V} [\alpha_1^p S_k^{(1)} V^{(1)} - \alpha_2^p S_k^{(2)} V^{(2)} + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_n^p S_k^{(n)} V^{(n)}] \\ A_0^p = \frac{1}{V} [\alpha_1^p V^{(1)} - \alpha_2^p V^{(2)} + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_n^p V^{(n)}], \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, n-1),$$

d'où

$$\frac{A_k^p}{A_0^p} = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_i^p S_k^{(i)} V^{(i)}}{\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \alpha_i^p V^{(i)}} \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

En divisant les deux termes de la dernière fraction par α_i^p , on a

$$\frac{A_k^p}{A_0^p} = \frac{S_k^{(1)} V^{(1)} + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right)^p S_k^{(i)} V^{(i)}}{V^{(1)} + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right)^p V^{(i)}} \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

Or, quand p croît indéfiniment, les variables $\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right)^p$ ($i=2, 3, \dots, n$) tendent vers zéro (on a, par hypothèse, $|\alpha_1| > |\alpha_i|$, pour $1 < i \leq n$), tandis que les coefficients $V^{(i)}$ et $S_k^{(i)}$ demeurent constants. Alors on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A_k^p}{A_0^p} = S_k^{(1)} \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

Par conséquent, le polynôme $\frac{1}{A_0^p} f_i^p(x)$ tend vers le polynôme $F_1(x) = x^{n-1} - S_1^{(1)} x^{n-2} + S_2^{(1)} x^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}^{(1)}$, dont les zéros sont, évidemment, $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, c. q. f. d.

2. On peut généraliser le résultat précédent. A cet effet, supposons maintenant que les zéros de $F(x)$ sont encore distincts deux à deux, et qu'ils vérifient la condition $|\alpha_i| > |\alpha_j|$ ($i=1, 2, \dots, r$; $j=r+1, r+2, \dots, n$). Soit encore $f_i^p(x)$ le reste de la division de x^n par $F(x)$. Le degré n ,

(§ 1), en supprimant les r premières colonnes et les $i_1^{ème}, i_2^{ème}, \dots, i_r^{ème}$ lignes; par V_{i_1, i_2, \dots, i_r} le déterminant qui se déduit de V , en supprimant les $n-r$ premières colonnes et *en conservant* les $i_1^{ème}, i_2^{ème}, \dots, i_r^{ème}$ lignes; et, finalement, par $S^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}$ la somme des produits k à k (sans répétition) des zéros de $F(x)$, exception faite de $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$. Alors, si l'on développe les déterminants de δ) par rapport aux déterminants contenus dans les r premières colonnes, on a, d'après la remarque que nous avons faite au § 1 :

$$\frac{R_k^p}{R_0^p} = \frac{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} (-1)^y (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r})^p S_k^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} V_{i_1, i_2, \dots, i_r} V^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}}{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} (-1)^y (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r})^p V_{i_1, i_2, \dots, i_r} V^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n; \quad k=1, 2, \dots, n-r),$$

ou, si l'on pose $(-1)^y V^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} V_{i_1, i_2, \dots, i_r} = \Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_r}$,

$$\frac{R_k^p}{R_0^p} = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)^p S_k^{(1, 2, \dots, r)} \Gamma_{1, 2, \dots, r} + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r})^p S_k^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} \Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_r}}{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)^p \Gamma_{1, 2, \dots, r} + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r})^p \Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_r}} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n; \quad i_r > r; \quad k=1, 2, \dots, n-r).$$

Si l'on divise les deux termes de cette fraction par $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)^p \Gamma_{1, 2, \dots, r}^{-1}$, on obtient

$$\frac{R_k^p}{R_0^p} = \frac{S_k^{(1, 2, \dots, r)} + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} \left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \right)^p S_k^{(i_1, i_2, \dots, i_r)} \frac{\Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_r}}{\Gamma_{1, 2, \dots, r}}}{1 + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} \left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \right)^p \frac{\Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_r}}{\Gamma_{1, 2, \dots, r}}} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n; \quad i_r > r; \quad k=1, 2, \dots, n-r).$$

Remarquons maintenant que, de la condition $|\alpha_i| > |\alpha_j|$ ($i=1, 2, \dots, r$; $j=r+1, r+2, \dots, n$), il résulte $\left| \frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \right| < 1$, pour toutes les combinaisons d'indices, différentes de $(1, 2, \dots, r)$. Alors, quand p croît indéfiniment, les variables $\left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \right)^p$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n; \quad i_r > r$) tendent vers zéro, tandis que les coefficients $\frac{\Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_r}}{\Gamma_{1, 2, \dots, r}}$ et $S^{(i_1, i_2, \dots, i_r)}$ demeurent constants.

¹ On a $\Gamma_{1, 2, \dots, r} \neq 0$, puisque les zéros de $F(x)$ sont distincts.

On a donc

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{R_k^p}{R_0^p} = S_k^{(1, 2, \dots, r)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-r);$$

celà veut dire que le polynôme $\frac{1}{R_0^p} f_r^p(x)$ tend vers le polynôme

$$F_r(x) = x^{n-r} - S_k^{(1, 2, \dots, r)} x^{n-r-1} + S_2^{(1, 2, \dots, r)} x^{n-r-2} + \dots + (-1)^{n-r} S_{n-r}^{(1, 2, \dots, r)}$$

dont les zéros sont $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$, ce que nous voulions établir.

REMARQUE — Il est intéressant de signaler que le polynôme $\frac{1}{N_0^p} \phi_r^p(x)$ tend vers un polynôme $\Phi_r(x)$, dont les zéros sont $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$, pourvu que la condition $|\alpha_i| > |\alpha_j|$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$; $j = r, r+1, \dots, n$) soit vérifiée.

3. Le théorème que nous venons de démontrer permet de résoudre, complètement, toute équation algébrique. Soit l'équation $F(x) = 0$, que nous supposons déjà débarrassée de racines multiples; soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines de cette équation. Alors, deux cas peuvent se présenter :

1^{er} CAS — *Les racines n'ont pas toutes le même module.* Nous supposons qu'il y a au plus m racines $\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2}, \dots, \alpha_{r_m}$ ($r_1 < r_2 < \dots < r_m$) telles que $|\alpha_i| > |\alpha_j|$ ($i = 1, 2, \dots, r_k$; $j = r_k + 1, r_k + 2, \dots, n$); c'est à dire,

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = \dots = |\alpha_{r_1}| > |\alpha_{r_1+1}| = |\alpha_{r_1+2}| = \dots = |\alpha_{r_2}| > \dots \\ \dots > |\alpha_{r_m+1}| = |\alpha_{r_m+2}| = \dots = |\alpha_n|.$$

Le théorème précédent permet de calculer, par des approximations, les coefficients de l'équation $F_{r_1}(x) = 0$, dont les racines sont $\alpha_{r_1+1}, \alpha_{r_1+2}, \dots, \alpha_n$; les coefficients de l'équation $F_{r_2}(x) = 0$, dont les racines sont $\alpha_{r_2+1}, \alpha_{r_2+2}, \dots, \alpha_n$; etc. Or l'équation $\frac{F(x)}{F_{r_1}(x)} = 0$ a pour raci-

nes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r_1}$; l'équation $\frac{F_{r_1}(x)}{F_{r_2}(x)} = 0$ a pour racines $\alpha_{r_1+1}, \alpha_{r_1+2}, \dots, \alpha_{r_2}$;

et ainsi de suite. On est ramené de cette manière au 2^e cas. En particulier, si $r_1 = 1, r_2 = 2, \dots, r_m = n$, on utilisera les formules :

$$\alpha_i = S_i - S_i^{(1)}; \quad \alpha_i = S_i^{(1, 2, \dots, i-1)} - S_i^{(1, 2, \dots, i)} \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

2^e CAS — *Les racines ont toutes le même module.* Alors, si l'on effectue sur $F(x) = 0$ une transformation $y = x + \lambda$, où λ désigne un nombre réel quelconque, différent de zéro, le module de chaque racine α_i devient différent des modules des autres racines, à moins qu'il existe une racine conjuguée de α_i . Par conséquent, si l'on applique sur l'équa-

tion transformée le procédé du 1^{er} cas, on parvient à des équations du 1^{er} degré, et à des équations du 2^e degré, dont les deux racines sont conjuguées. Si les coefficients de l'équation $F(x)=0$ sont tous réels, il est préférable d'effectuer la transformation $y = \frac{x}{\rho}$, où ρ désigne le module commun des racines: on obtient ainsi une équation réciproque, que l'on peut remplacer par une équation, de degré plus petit, dont les racines sont toutes réels et distinctes (chaque racine étant le double du cosinus de l'argument de deux racines conjuguées de l'équation $F(x)=0$).

INSTRUCTIONS PRATIQUES — Pour le calcul des polynômes $f_1^n(x)$, $f_1^{n+1}(x)$, \dots , $f_1^{2(n-1)}(x)$, il est convenable d'employer les formules de récurrence :

$$\alpha_i^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k \alpha_i^{n-k}; \alpha_i^{n+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k \alpha_i^{n+1-k}; \dots; \alpha_i^{2(n-1)} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k \alpha_i^{2(n-1)-k}$$

[nous rappellerons que $\alpha_i^p = f_1^p(\alpha_i)$]. Alors on a :

$$f_1^n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k x^{n-k}, \quad f_1^{n+1}(x) = S_1 f_1^n(x) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} S_k x^{n+1-k},$$

$$f_1^{n+2}(x) = S_1 f_1^{n+1}(x) - S_2 f_1^n(x) + \sum_{k=3}^n (-1)^{k-1} S_k x^{n+2-k}, \text{ etc.}$$

Après avoir déterminé $f_1^p(x)$, on obtient immédiatement $f_1^{2p}(x)$, quel que soit p , en développant $[f_1^p(x)]^2$ et en remplaçant, dans ce développement, les puissances $x^n, x^{n+1}, \dots, x_i^{2(n-1)}$, respectivement, par $f_1^n(x), f_1^{n+1}(x), \dots, f_1^{2(n-1)}(x)$; si l'on applique plusieurs fois cette opération, on obtient successivement $f_1^{2p}(x), f_1^{4p}(x), f_1^{8p}(x)$, etc., et on parvient vite à des exposants des α_i fort élevés, comme dans la méthode de Gräffe.

Lorsqu'on arrive à une valeur de p suffisamment élevée, il faut déterminer les polynômes $f_2^p(x), f_3^p(x)$, etc. A cet effet, nous indiquerons le procédé suivant :

Multiplions $f_1^p(x)$ successivement par x, x^2, \dots, x^{n-2} , et remplaçons, dans les résultats, $x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n-3}$, respectivement par $f_1^n(x), f_1^{n+1}(x), \dots, f_1^{2n-3}(x)$: on obtient de cette manière les polynômes $f_1^{n+1}(x), f_1^{n+2}(x), \dots, f_1^{n+n-2}(x)$. Alors on peut trouver r multiplicateurs $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ ($r=2, 3, \dots, n-1$), non tous nuls, tels que, dans le polynôme

$$\Psi_r(x) = \lambda_0 f_1^n(x) + \lambda_1 f_1^{n+1}(x) + \dots + \lambda_{r-1} f_1^{n+r-1}(x),$$

les coefficients des termes en $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^{n-r+1}$ soient nuls; pour

celà, il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda_0 A_0^p + \lambda_1 A_0^{p+1} + \dots + \lambda_{r-1} A_0^{p+r-1} = 0, \\ \lambda_0 A_1^p + \lambda_1 A_1^{p+1} + \dots + \lambda_{r-2} A_1^{p+r-1} = 0, \\ \vdots \\ \lambda_0 A_{r-2}^p + \lambda_1 A_{r-2}^{p+1} + \dots + \lambda_{r-2} A_{r-2}^{p+r-1} = 0, \end{cases}$$

qui admet, nécessairement, une solution non nulle. Il est aisé de voir que l'on a $\psi_r^p(x) \equiv f_r^p(x)$, à moins d'un facteur constant, et que les λ_i ne sont que les coefficients $-N_i^p$ du polynôme $\varphi_r^p(x)$, multipliés par un facteur commun. D'ailleurs, il résulte de la remarque que nous avons faite à la fin du § 2, qu'il suffit de connaître les polynômes $\varphi_k^p(x)$ ($k=r_1+1, r_2+1, \dots, r_m+1$), pour le calcul des racines de l'équation $F(x)=0$.

4. Le théorème que nous avons établi au § 2 est encore susceptible de se généraliser, si l'on remplace x^p par $[R(x)]^p$, où $R(x)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de x , qui demeure finie, lorsqu'on pose $x = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Alors, on peut déterminer¹, comme au § 2, un polynôme $\eta_1^p(x)$, dont le degré est au plus $n-1$, tel que $[R(\alpha_i)]^p = \eta_1^p(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), et, de même, des polynômes $\eta_k^p(x)$, dont le degré est au plus $n-k$, tels que $\chi_k^p(\alpha_i)[R(\alpha_i)]^p = \eta_k^p(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), où $\chi_k^p(x)$ désigne un polynôme dont le degré est au plus $k-1$. Supposons d'ailleurs que l'on a $|R(\alpha_i)| > |R(\alpha_j)|$ ($1 \leq i \leq s; s+1 \leq j \leq n$), et soit S_0^p le coefficient du terme en x^{p-s} de $\eta_s^p(x)$. Dans ces conditions, il est aisé d'établir la proposition suivante: *Quand p croît indéfiniment, le polynôme $\frac{1}{S_0^p} \eta_s^p(x)$ tend vers un polynôme $\Psi_s(x)$, dont les zéros sont $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \dots, \alpha_n$.*

Pour la détermination de $\eta_1^p(x)$, on peut utiliser le procédé suivant: Soit $R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, où $N(x)$ et $D(x)$ désignent deux polynômes; alors on a:

$$\frac{N(\alpha_i)}{D(\alpha_i)} = \eta_1^p(\alpha_i)$$

ou bien

$$N(\alpha_i) - D(\alpha_i) \eta_1^p(\alpha_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si l'on remplace, dans cette égalité, $\alpha_i^n, \alpha_i^{n+1}, \alpha_i^{n+2}$, etc., respectivement

¹ En effet, on sait que toute fonction rationnelle d'une racine α d'une équation algébrique de degré n peut s'exprimer au moyen d'une fonction entière de cette racine, dont le degré est au plus $n-1$ et dont les coefficients sont fonctions rationnelles des coefficients de l'équation. Nous indiquons ici un procédé pour le calcul des coefficients de cette fonction entière.

par $f_1''(\alpha_i)$, $f_1^{n+1}(\alpha_i)$, $f_1^{n+2}(\alpha_i)$, etc., on obtient une égalité

$$P_0 \alpha_i^{n-1} + P_1 \alpha_i^{n-2} + \dots + P_{n-2} \alpha_i + P_{n-1} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

où les P_k désignent des fonctions linéaires des n coefficients $B_0^1, B_1^1, \dots, B_{n-1}^1$ de $\pi_1^1(x)$. On a, évidemment, $P_0=0$, $P_1=0$, \dots , $P_{n-1}=0$, et ces égalités constituent un système de Cramer, si l'on prend pour inconnues les B_k^1 . On peut donc déterminer les coefficients de $\pi_1^1(x)$, en utilisant ce système.

Pour la détermination des polynômes $\pi_1^p(x)$ ($p > 1$) et $\pi_k^p(x)$ ($k > 1$), on peut appliquer, *mutatis mutandis*, les procédés que nous avons décrits au § 3 (Instructions pratiques), pour la détermination des polynômes $f_1^p(x)$ ($p > 1$) et $f_k^p(x)$ ($k > 1$).

La méthode que nous venons d'exposer est semblable à celle de Gräffe, mais il faut signaler quelques différences entre ces deux méthodes. Dans la méthode de Gräffe, on calcule d'abord les modules des racines et après, leurs arguments, tandis que, dans la méthode que nous avons exposée, on fait directement le calcul complet des racines. Toutefois, les calculs qu'il faut effectuer dans la méthode de Gräffe, pour la détermination des *modules* des racines, sont plus simples que ceux qu'il faut effectuer, dans la méthode que nous avons décrite, pour la détermination *complète* des racines.

REMARQUE — Nous avons dit à la page 274 que le rang du système 4) est égal à n , pour des valeurs suffisamment élevées de p ; cela résulte du fait suivant: le dénominateur, que nous désignerons ici par D_p , de la troisième fraction égale à $\frac{R_p^p}{R_0^p}$ (p. 275), tend vers l'unité, quand $p \rightarrow \infty$; par conséquent, on peut déterminer un entier p_1 , tel que, pour tout $p > p_1$, on ait $D_p > 0$, et il en sera de même de la variable $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^p D_p$, qui est précisément la valeur d'un déterminant d'ordre n , ayant pour éléments les coefficients de n inconnues.