

J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO
DO
COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA
(1.º volume)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

V

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO IV

1. Na introdução do conceito de aplicação (ou função) discordámos da maioria dos autores modernos *para o ensino secundário*, não só pelas razões de ordem lógica que são expostas na nota da página 214 do 1.º tomo do *Compêndio*, mas ainda por outras razões, especialmente de ordem didáctica.

Para os referidos autores, uma função (de uma variável) nada mais é do que uma relação binária R , funcional na 2.ª variável, isto é, tal que

$$\forall x \in D, \exists^1 y : x R y,$$

em que D é o domínio da função. Pode, desde logo, perguntar-se:

Porquê funcional na segunda variável e não na primeira?

Esta convenção artificial conduz a distorções da linguagem natural, que nos parecem não só inúteis, mas até opostas à fácil assimilação dos assuntos. Por exemplo, diz-se sistematicamente

x tem por pai y

em vez de

y é o pai de x

como seria muito mais natural e explícito (o artigo definido 'o' está a indicar precisamente que *só existe um pai de x*, para todo o indivíduo x). Para quê privar a linguagem comum daquilo que tem, precisamente, de mais útil e significativo? *Apenas para que a relação se possa chamar uma função*. Nesta ordem de ideias, nunca mais deveríamos escrever daqui por diante

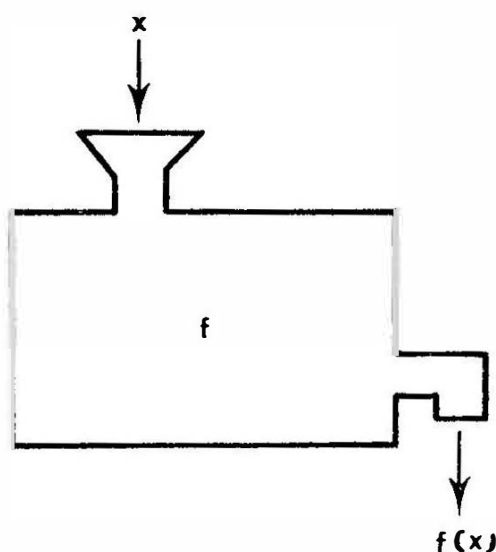
$$y = f(x) \quad \text{mas apenas } f(x) = y,$$

o que seria o cúmulo do dogmatismo bizantino! Seria como querer obrigar as pessoas a olharem só para a direita e nunca para a esquerda...

E tudo isto, porque se pretende evitar a noção de *correspondência* como noção primitiva, do mesmo modo que se pretende reduzir a noção de *par ordenado* à de conjunto de tipo 2. Trata-se,

a nosso ver, de um purismo lógico exagerado, ilusório e bastante nocivo do ponto de vista didático. A noção de correspondência é afinal bastante intuitiva; pode e deve ser usada sem qualquer temor de impureza.

2. O conceito de função pode aparecer psicologicamente sob diferentes aspectos. Um desses aspectos é o da *operação* (ou *transformação*), que faz passar do *dado* para o *resultado*. Neste sentido, a imagem mais adequada para o conceito de função é a de uma máquina que recebe o dado e, *após algum tempo*, fornece o resultado (a figura junta foi copiada do livro de *Cálculo* de Apostol).



Um exemplo humorístico é o da máquina de fazer chouriços, das quais se diz que entra por um lado o porco e saem por outro os chouriços...

Um exemplo real e actual é o dos computadores, em que os dados entram sob a forma de programa e os resultados saem, ao fim de algum tempo, escritos à máquina sobre uma fita ⁽¹⁾. Não esquecer que há operações com mais de um dado (funções de mais de uma variável), das quais nos ocupamos no Capítulo V.

Observe-se que a ideia de *tempo* é inerente à de operação: *o dado antecede no tempo o resultado*. Quando, por exemplo, se dá a um aluno a expressão ' $3 \times 0,75$ ' para calcular, ele escreverá a seguir ' $= 2,25$ '.

(¹) Embora estas considerações se dirijam ao professor, podem ser em parte aproveitadas por este para animar o ensino. O professor deve aproveitar todos os pretextos para tornar o ensino vivo, atraente e alegre, sabendo usar o sentido do humor sem quebra de disciplina. Há muitos animais que choram (até os crocodilos...), mas, que saibamos, o homem é o único animal que ri.

Mas a ordem pode ser invertida, especialmente quando se trata de definir um símbolo ou termo novo. Exemplos:

π = razão entre o comprimento duma circunferência e o do respectivo diâmetro.

\aleph_0 = número cardinal de \mathbb{N} .

Energia cinética dum ponto material = metade do produto da massa pelo quadrado da velocidade do ponto.

3. Um outro aspecto sob o qual aparece o conceito de função é o da definição clássica, isto é, como *dependência funcional entre variáveis*.

O caso mais simples é o das expressões designatórias, como as dos exemplos da página 173 do 1.º tomo (o exemplo das províncias de Portugal pode ser indicado apenas para leitura).

Mas os casos mais sugestivos — e também os mais importantes — são os que se apresentam na geometria, na física e em outras ciências. Por exemplo, diz-se:

O volume duma esfera é função do raio da esfera.

O que quer isto dizer? Na realidade, o *volume duma esfera* E e o *raio dessa esfera* são já funções de E , que podemos designar respectivamente por $v(E)$ e $r(E)$. A frase anterior é apenas uma abreviatura da seguinte:

Existe uma função f que transforma $r(E)$ em $v(E)$, isto é, tal que

$$v(E) = f(r(E)) \quad , \quad \forall E$$

É para brevidade de linguagem que escrevemos apenas

$$v = f(r)$$

e dizemos que a *variável v é função da variável r* . Aliás, no mesmo sentido se pode dizer que r é função de v (função inversa).

Significado análogo tem a frase:

O volume dum gás é função da pressão e da temperatura a que está sujeito o gás.

(Neste caso, o volume, a pressão e a temperatura são funções do gás e do tempo t .)

!MPORTANTE:

O aluno médio não estará talvez ainda em condições de ir até ao fundo desta análise lógica. Mas o que não oferece dúvidas é

que o aluno necessita absolutamente de se familiarizar com este tipo de linguagem, de modo intuitivo, tal como se faz no Compêndio de Álgebra adoptado, cuja leitura neste ponto se aconselha na pág. 240 do texto experimental, após ter introduzido as noções que se apresentam em números anteriores.

Se não se habituar desde muito cedo o aluno a essa linguagem de tipo intuitivo, deliberadamente pouco rigorosa, corre-se o risco de criar nele inibições graves, tornando-o escravo de uma matemática bacteriologicamente pura, que o inibe de qualquer aplicação — de todo o contacto com o mundo exterior a essa perfeição platónica. Isso é grave, sobretudo entre nós, onde o divórcio entre a matemática e as suas aplicações tem sido quase completo, não só no liceu, como na universidade.

É preciso que o aluno adquira os conceitos com todo o rigor possível. Mas é também necessário que se habitue depois, de maneira consciente, aos abusos cómodos de linguagem, sem os quais a matemática se tornaria insuportável e incompreensível.

4. Consideremos o exemplo do volume dum gás como função da pressão a que está sujeito, a uma dada temperatura. Suponhamos que essa função é dada pela fórmula:

$$v = \frac{1,25}{p} ,$$

sendo, por exemplo, v a medida do volume em litros e p a medida da pressão em atmosferas. Da fórmula anterior resulta uma infinidade de implicações. Por exemplo:

$$\begin{aligned} p = 1 &\Rightarrow v = 1,25 & , & \quad p = 2 \Rightarrow v = 0,625 \\ p = 4 &\Rightarrow v = 0,3125 & , & \quad p = 5 \Rightarrow v = 0,25 & , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Abreviadamente, podemos escrever

$$\begin{aligned} 1 \hookrightarrow 1,25 & \quad , \quad 2 \hookrightarrow 0,625 \\ 4 \hookrightarrow 0,3125 & \quad , \quad 5 \hookrightarrow 0,25 & , \quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

em que o sinal \hookrightarrow indica correspondência (por exemplo, a expressão $1 \hookrightarrow 1,25$ pode ler-se 'a 1 corresponde 1,25').

Assim, nestes casos, como noutros de dependência funcional, a correspondência é, no fundo, uma implicação sob forma abreviada.

Note-se que a função anterior exprime uma lei de carácter empírico. É indispensável que o aluno fique bem consciente de que as leis das ciências experimentais têm sempre carácter contingente e aproximado, quer dizer: os valores teóricos dados pelas fórmulas são mais ou menos próximos dos valores observados, mas não coincidem necessariamente com estes. Aliás, é preciso não esquecer que as próprias medidas das grandezas físicas são sempre aproximadas, nunca exactas.

Haveria muito interesse em fazer exercícios em que, num gráfico se apresentassem, por um lado, uma função como a anterior, referente a uma lei física, e, por outro lado, se representassem pares de valores observados das variáveis que intervêm nessa lei (tirados por exemplo dum trabalho experimental, com a ajuda do professor de físico-químicas ou do professor de ciências naturais). O aluno verificaria então que os pontos representativos desses pares não se encontram geralmente sobre o gráfico da função, embora deste se aproximem mais ou menos. Em estatística matemática estudam-se métodos de ajustamento, pelos quais se escolhe a recta ou curva de tipo determinado que melhor se ajusta ao conjunto dos pontos marcados (regressão linear ou não linear).

Como mínimo dos mínimos, o professor deveria pelo menos mostrar ao aluno alguns desses gráficos já desenhados.

IMPORTANTE:

Alguns alunos da alínea g) (ciências económico-financeiras) alegam que os exemplos de física apresentam para eles dificuldade e pouco interesse, uma vez que a disciplina de Físico-Química não é para eles obrigatória. É preciso esclarecê-los, dizendo que os conhecimentos de física exigidos por tais exemplos são extremamente elementares e fazem parte da cultura geral do homem do século XX. Durante muito tempo, desde Newton, a física e análise infinitesimal foram irmãs siamesas e ainda hoje, após a operação que as separou no século passado, não se sabe ao certo onde acaba a física e onde começa a matemática. Deste modo, prescindir dos exemplos da física, é privar a matemática de uma das suas mais ricas fontes de intuição e é portanto, em grande parte, *esterilizar o ensino da matemática*.

No entanto, o professor deve, em relação a esses alunos, ter o cuidado de explicar mais minuciosamente esses exemplos, aten-

dendo a que, desgraçadamente, o ensino da física está reduzido quase a zero no 2.º ciclo dos nossos liceus, *apesar de se ter iniciado, há 20 anos, a Era Atómica.*

5. Até ao n.º 17 deste capítulo é feito o estudo geral das funções, no aspecto operativo, e só depois, como se indica no n.º 18, se deve passar ao estudo das funções reais de variável real, com aplicação às ciências experimentais.

O professor deve dedicar especial atenção às demonstrações (na verdade bem poucas são). Quanto à demonstração da associatividade do produto de aplicações f, g, h poderá limitar-se ao caso simples em que o domínio de f contém o contradomínio de g e o domínio de g contém o contradomínio de h , o que desde logo elimina a questão dos domínios, que é a parte mais delicada da demonstração.

Mas, para alunos de excepção, convém aconselhar a leitura da demonstração no caso geral.

6. Nos exemplos apresentados recorre-se muitas vezes a operadores tais como *o dobro, o triplo, a metade, um terço*, etc. Estes operadores e os respectivos produtos, em qualquer ordem, são afinal os *números racionais positivos*, quando aplicados a grandezas tais como comprimentos, volumes, massas, tempos, etc. Está-se a fazer, deste modo, uma preparação psicológica para a *teoria dos números reais como operadores*, que há-de ser estruturada logicamente no 7.º ano. As designações dos números racionais positivos são os *numerais multiplicativos-partitivos*, já atrás mencionados e que convém a princípio escrever por extenso. Ao passar para as respectivas abreviaturas simbólicas — que são as *fracções* — impõe-se mais uma vez salientar que *uma coisa é uma fracção e outra coisa é um número designado por essa fracção*.

Por exemplo, as fracções $\frac{3}{4}$ e $\frac{75}{100}$ são equivalentes, isto é, designam o *mesmo número* (fraccionário), mas *não são a mesma fracção*, isto é, tem-se

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100}, \text{ mas não } \frac{'3'}{4} = \frac{'75'}{100}$$

A segunda é redutível, enquanto a primeira é irredutível — o que não faz sentido dizer dum número fraccionário.

Analogamente, as fracções $\frac{12}{4}$ e $\frac{3}{1}$ são equivalentes, isto é, representam o mesmo número (inteiro), etc.

Será também muito importante salientar que o *produto de números racionais é definido como produto de operadores*. Exemplos:

metade *de* um terço = um sexto $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \right)$

três quartos *de* dois quintos = três décimos $\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \right)$

Neste caso, a preposição *de* traduz-se por ' \times ' (vezes).

Há alunos que chegam ao 6.º ano sem conhecerem o significado da multiplicação de números racionais!

Nunca é de mais insistir no estudo comparativo entre a lógica gramatical e a lógica matemática, entre a linguagem vulgar e a lógica matemática, entre a linguagem vulgar e a linguagem da matemática. Não devemos esquecer que a matemática é, no fundo, um processo de formalização progressiva da linguagem comum. Isto torna-se bem evidente na iniciação algébrica que é feita no 2.º ciclo. Pena é que o objectivo fundamental dessa iniciação — o pôr problemas em equação e resolvê-los por esse método — esteja a ser quase completamente ignorado no nosso ensino. Esta deficiência torna-se ainda mais chocante, quando verificamos que, segundo o método Suppes, para o ensino primário, as crianças começam a pôr problemas em equação logo na 1.ª classe.

ÍNDICE

	Págs.
Advertência prévia	9
Normas gerais	11
I — Observações ao Capítulo I	15
II — Observações ao Capítulo II	30
III — Introdução à geometria analítica tratado no <i>Compêndio</i>)	45
IV — Observações ao Capítulo III	98
V — Observações ao Capítulo IV	114
VI — Observações ao Capítulo V	121
VII — Observações ao Capítulo VI	134
VIII — Observações ao Capítulo VII	143

**GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA**