

J. SEBASTIÃO E SILVA

**GUIA**  
**PARA A UTILIZAÇÃO**  
**DO**  
**COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA**  
(1.º volume)

**Curso Complementar**  
**do Ensino Secundário**

Edição GEP

LISBOA

## VII

### OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO VI

1. Embora os assuntos aqui desenvolvidos tenham grande importância e despertem seguro interesse nas turmas, grande parte do que se inclui neste capítulo virá a ser mais para elucidação do professor do que para informação do aluno. Assim, convirá aqui indicar desde já, precisamente, um mínimo de matéria a tratar nas aulas, o que passamos a fazer.

2. Todos os assuntos dos n.<sup>os</sup> 1 a 5, inclusive, deverão ser tratados em pormenor, excepto o n.<sup>o</sup> 2 em que basta dar a noção de isomorfismo entre anéis, renunciando ao exemplo apresentado (que exige tempo excessivo), mas insistindo nas notas que são bastante esclarecedoras.

3. Devem dar-se os conceitos de 'divisor de zero' e de 'elemento regular', mas podem omitir-se os teoremas do n.<sup>o</sup> 6. Nestas condições, o corolário 1 do n.<sup>o</sup> 7 aparecerá como propriedade dos corpos, que se demonstra directamente:

Suponhamos que  $a \cdot b = 0$ , com  $a \neq 0$ . Então  $a$  é regular (por definição de corpo) e assim, multiplicando ambos os membros de  $a \cdot b = 0$  por  $a^{-1}$ , obtém-se

$$a^{-1}(ab) = 0 \text{ ou seja } (a^{-1}a) \cdot b = 0, \text{ donde } b = 0$$

Isto prova a inexistência de divisores de zero num corpo  $A$  qualquer.

Analogamente se demonstra o corolário 2 (a que chamaremos agora PROPRIEDADE DO ANULAMENTO DO PRODUTO):

Se  $a \cdot b = 0$  e  $a \neq 0$ , tem-se, pelo raciocínio anterior,  $b = 0$ .

Se  $a \cdot b = 0$  e  $b \neq 0$ , tem-se, de modo análogo,  $a = 0$ .

Logo  $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ . A implicação inversa é consequência imediata do COROLÁRIO I da pág. 75.

Assim se poupará tempo, que vai ser necessário para outros assuntos mais prementes.

4. Os n.ºs 8 e 9 devem manter-se com as respectivas notas esclarecedoras, mas a matéria dos n.ºs 10 e 11 deve agora reduzir-se ao estudo de equações quadráticas em  $\mathbb{R}$ .

Deve-se agora começar, precisamente, pela resolução da equação do 2.º grau em  $\mathbb{R}$  (omitindo-se pois o n.º 10).

Já no primeiro período, a propósito do estudo da lógica (págs. 21-22 deste *Guia*), o aluno recordou um artifício que permite fazer facilmente a factorização dum polinómio do segundo grau (quando possível). *Podemos agora aplicar artifício à resolução da equação geral do 2.º grau.* Convirá, como sempre, começar por exemplos numéricos e só depois *convidar* os alunos a passarem ao caso geral.

#### EXEMPLO 1:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 3 &= 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{18} &= 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) \left(x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right) &= 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right) (x + 1) = 0 \end{aligned}$$

Vê-se, deste modo, que a equação proposta tem *duas* raízes em  $\mathbb{R}$   $\left(-1 \text{ e } \frac{3}{2}\right)$ .

#### EXEMPLO 2:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$$

Vê-se que a equação tem uma *única* raiz (3).

#### EXEMPLO 3:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x + 2 &= 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} &= 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} = 0 \end{aligned}$$

Como  $\frac{5}{9} > 0$  e  $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , segue-se que a equação é impossível em  $\mathbb{R}$ .

RESOLUÇÃO GERAL:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Ponhamos, agora,  $b^2 - 4ac = \Delta$ . Três casos se podem dar:

1)  $\Delta > 0$ . Sabe-se que existe então um e um só número positivo cujo quadrado é  $\Delta$ . Designa-se por  $\sqrt{\Delta}$  esse número positivo, que é raiz quadrada de  $\Delta$ . Tem-se pois por definição  $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$  e portanto:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Deste modo, o PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO mostra que a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  tem *duas* raízes em  $\mathbb{R}$ , dadas pelas fórmulas:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

2)  $\Delta = 0$ . Então

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

e o PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO mostra que a equação tem uma *única* raiz, que é  $\frac{-b}{2a}$ . Mas, como essa raiz pode ser dada por qualquer das fórmulas (1), também se diz que a equação tem neste caso *uma raiz dupla* (ou *duas raízes iguais*,  $x_1 = x_2$ ), enquanto no primeiro caso se diz que a equação tem *duas raízes simples* (ou duas raízes distintas,  $x_1 \neq x_2$ ).

3)  $\Delta < 0$ . Neste caso, tem-se  $-\Delta > 0$ . Ora

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

Como  $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$  e  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , vem

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

o que mostra que, neste caso, a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  é impossível em  $\mathbb{R}$ , isto é, *não tem nenhuma raiz em  $\mathbb{R}$* .

5. A análise anterior mostrou que, quaisquer que sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , se tem:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &\equiv a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + c\right) \equiv \\ &\equiv a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Além disso, quando  $\Delta \geq 0$ , tem-se:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \equiv \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x - \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Em conclusão:

TEOREMA. Se  $\Delta \geq 0$ , tem-se, quaisquer que sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ :

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$\text{onde } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Estas últimas fórmulas fornecem facilmente as *relações entre as raízes e os coeficientes do polinômio*:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

A partir deste momento podem resumir-se os três casos principais da discussão da equação quadrática, como no n.º 13, pág. 110, e prosseguir a discussão como se faz nesse número.

Pode, depois, fazer-se a discussão de algumas equações numéricas e de algumas (poucas) equações com coeficientes dependentes dum parâmetro, *sem cair no exagero tradicional*.

NOTA. A título de esclarecimento, terá muito interesse informar o aluno de que a anterior teoria da equação do 2.º grau pode ser generalizada a corpos quaisquer, desde que estes verifiquem certa condição que a seguir se verá. Considere-se, por exemplo, a equação

$$\bar{2}x^2 + \bar{5}x + \bar{3} = 0$$

no corpo  $A_7$ . Segundo o artifício habitual, tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{2}x + \bar{5}x + \bar{3} = 0 &\Leftrightarrow \bar{2}\left(x^2 + \frac{\bar{5}}{\bar{2}} \cdot x + \frac{\bar{1}}{\bar{2}}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \bar{6}x + \bar{5} = 0 &\Leftrightarrow (x + \bar{3})^2 + \bar{5}^2 - \bar{3}^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x + \bar{3})^2 + \bar{3} = 0 &\Leftrightarrow (x + \bar{3})^2 - \bar{4} = 0\end{aligned}$$

Procuraremos agora um elemento de  $A_7$  cujo quadrado seja  $\bar{4}$ . Construindo a tabela da aplicação  $x \mapsto x^2$  neste corpo vê-se que há aí dois elementos cujo quadrado é  $\bar{4}$ : são  $\bar{2}$  e  $\bar{5}$ . Escolhendo o primeiro, tem-se:

$$\begin{aligned}(x + \bar{3})^2 - \bar{4} = 0 &\Leftrightarrow (x + \bar{3})^2 - \bar{2}^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x + \bar{5})(x + \bar{1}) = 0 &\Leftrightarrow (x - \bar{2})(x - \bar{6}) = 0\end{aligned}$$

A equação proposta tem, pois, duas raízes:  $\bar{2}$  e  $\bar{6}$  (em  $A_7$ ).

Note-se que, numa das passagens anteriores, foi necessário dividir  $\bar{6}$  em  $A_7$  pelo *número natural* 2, o que deu  $\bar{3}$ . No corpo  $A_7$  a divisão por 2 é sempre possível, visto que  $2 \cdot 1 = \bar{2} \neq 0$  e dividir por 2 equivale a dividir por  $\bar{2}$  (tem-se  $2x \equiv \bar{2}x$ ). Mas em  $A_2$  a divisão por 2 é impossível porque  $2 \cdot \bar{1} = \bar{2} = 0$ .

Diz-se que um corpo  $K$  tem *característica* 2, sse  $2 \cdot 1 = 0$  em  $K$  (sendo 1 o elemento unidade de  $K$ ).

Ora é fácil ver o seguinte:

*Num corpo  $K$  que não tenha característica 2, uma equação do 2.º grau tem duas raízes, uma só, ou nenhuma, conforme o discriminante  $\Delta$  da equação tiver duas raízes quadradas, uma só ou nenhuma. Nesta hipótese, as fórmulas resolventes e todos os teoremas anteriores em que não intervenha a relação  $<$  são válidas no corpo  $K$ .*

6. O estudo das funções quadráticas em  $\mathbb{R}$  (n.º 14, págs. 113-118, 2.º tomo) pode, agora, fazer-se rapidamente. *As demonstrações dos*

*teoremas I, II e III podem ser dispensadas: basta que o aluno chegue indutivamente a essas conclusões, como foi preconizado no n.º 10 deste Guia (págs. 21-22).*

Quanto ao COMPLEMENTO AO TEOREMA I, convirá que seja também o aluno a redescobri-lo. Apresente-se, por exemplo, a função

$$f(x) \equiv x^2 - 3x + 1 \quad (\Delta > 0)$$

e convide-se o aluno a procurar a posição do número 2 em relação às raízes desta função. Como  $f(2) = 2 > 0$ , vê-se que 2 é exterior ao intervalo das raízes. Pergunta-se:

*É maior ou menor que as raízes?*

A tendência será resolver a equação para fazer o confronto. *Mas a equação foi escolhida propositadamente com as raízes irracionais e o que interessa é responder à pergunta sem resolver a equação.* Suponhamos que 2 é menor que as raízes (hipótese sugerida ao aluno).

Então

$$x_1 > 2 \text{ e } x_2 > 2 \text{ donde, } x_1 + x_2 > 4$$

Ora  $x_1 + x_2 = 3$ . Logo...

Dum modo geral:

$$\begin{array}{ccccccc} & c & x_1 & \frac{S}{2} & x_2 & & \\ & | & | & | & | & & \\ \hline & | & | & | & | & & \end{array}$$

$$x_1 > c \wedge x_2 > c \Rightarrow x_1 + x_2 > 2c \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} > c$$

$$x_1 < c \wedge x_2 < c \Rightarrow x_1 + x_2 < 2c \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} < c$$

Daqui o aluno deduz a regra em questão (convém recorrer ao gráfico anterior).

7. Quanto à matéria dos n.ºs 15, 16 e 18 bastará fazer o que se disse atrás, a propósito da intersecção de rectas em geometria analítica. Quando muito, poderá resolver-se um sistema de equações lineares num corpo  $A_p$ , a título de curiosidade.

Quanto ao assunto do n.º 17, seria prematuro e pouco proveitoso tratá-lo agora.

Também a análise do conceito de equação paramétrica, tal como é feita no n.º 19, nos parece prematura — muito embora, como se disse atrás, se possa fazer a discussão de equações para-

métricas, apresentadas de modo intuitivo. No entanto, a análise do referido conceito de equação paramétrica *interessa sobremaneira ao professor*.

MUITO IMPORTANTE:

*A resolução e discussão de problemas concretos por meio de equações é da máxima importância, como se diz no n.º 20 (pág. 135) e até porque, como já atrás foi observado, o ensinar a pôr problemas em equação tem sido deploravelmente descurado no 2.º ciclo.*

*Um problema típico, para começar, seria o que se considera no Compêndio de Álgebra, 7.º ano, Cap. XIV, n.º 3, pág. 71, relativo ao encontro de dois automóveis, começando pelo caso particular numérico e passando depois ao caso geral, seguido de discussão (supondo  $d$  fixo  $> 0$  e  $v, v'$  variáveis).*

*Note-se, a propósito, que a discussão de equações lineares, tal como se faz nesse capítulo do referido Compêndio, é sem significado concreto, é inteiramente dispensável — é tempo perdido!*

Aliás, a resolução e discussão de problemas concretos é assunto que convém iniciar no 6.º ano, com moderação, para desenvolver depois no 7.º ano.

8. O assunto relativo a equações do 3.º grau (n.º 2, págs. 136-142) deverá restringir-se ao corpo real e *ser considerado, essencialmente, como motivação para o estudo do corpo complexo*.

No entanto, o teorema segundo o qual uma equação cúbica não pode ter mais de três raízes distintas pode ser demonstrado para um corpo  $K$  qualquer e as considerações relativas a equações binômias podem igualmente ser mantidas com a mesma forma.

Mas logo a seguir deve avisar-se o aluno de que, *para fixar ideias*, o corpo  $K$  passa a ser o corpo  $\mathbb{R}$  e assim, onde se diz 'determinar um elemento  $h$  tal que' poderá dizer-se 'determinar um número  $h$  tal que'. Do mesmo modo, a frase '*Suponhamos que o corpo  $K$  não é de característica 3*' pode ser omitida, por desnecessária, assim como, na pág. 138, a restrição '*se o corpo  $K$  não é de característica 2*' e tudo o que, no seguimento, se liga a estas duas hipóteses (verificadas em  $\mathbb{R}$ ).

Por outro lado, desde que exista o número  $\alpha$  dado por (7), isto é, desde que seja

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$$

existe uma e uma só raiz cúbica de  $\alpha$  em  $\mathbb{R}$ , que se designa por  $\sqrt[3]{\alpha}$ .



O enunciado do teorema da pág. 139 deverá então ser modificado de acordo com estas observações:

TEOREMA. *A fórmula*

$$x = \sqrt[3]{\alpha} - \frac{p}{3 \sqrt[3]{\alpha}}, \text{ com } \alpha = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

fornece uma raiz da equação (2) em  $\mathbb{R}$ , desde que seja

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$$

Convém ainda observar ao aluno que, de acordo com (4), (5) e (6) (no texto), se tem  $x = u + v = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$  e portanto

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

É com este aspecto que a fórmula resolvente da equação (2) se costuma chamar 'fórmula de Tartaglia'. Mas a anterior tem vantagem sobre esta, quando se passa do corpo real ao corpo complexo.

Quanto a exemplos, é claro que basta dar os dois primeiros.

9. O assunto do n.º 22 deverá ser dado integralmente como se apresenta no texto, *com uma possível excepção*: a demonstração de isomorfismo dada nas páginas 149 e 150, que pode ser dispensada. No entanto, a observação que se segue sobre a natureza dos números complexos é, sem dúvida alguma, essencial.

*Igualmente essencial se deve considerar a matéria dos n.ºs 23, 24, 26 e 28.*

O n.º 25 deve ser suprimido e o n.º 28 considerado *facultativo*, assim como o n.º 29; não deve contudo deixar de ser feita uma *breve referência às equações biquadradas* (n.º 29).

Os n.ºs 30 e 31 poderão ser indicados, como leitura, aos alunos mais interessados.

O n.º 32 (funções homográficas) poderá ser reservado para o 7.º ano, *no corpo*  $\mathbb{R}$ , a propósito do estudo das cónicas, como foi atrás indicado.

10. Finalmente, o estudo das álgebras de Boole (sem demonstrações ou apenas com *uma ou duas*, a título de exemplo), pode ser transferido para o 7.º ano, com duas finalidades principais:

a) fazer uma revisão sistematizada das operações sobre valores lógicos e das operações sobre conjuntos, servindo de introdução ao cálculo das probabilidades;

b) apresentar um tipo muito importante de estruturas algébricas (as álgebras de Boole), que se afastam nitidamente do domínio clássico dos universos numéricos, *e cuja comparação com as estruturas análogas de corpo deve ser feita atentamente pelo aluno.*

## ÍNDICE

	Págs.
Advertência prévia .....	9
Normas gerais .....	11
I — Observações ao Capítulo I .....	15
II — Observações ao Capítulo II .....	30
III — Introdução à geometria analítica tratado no <i>Compêndio</i> ) .....	45
IV — Observações ao Capítulo III .....	98
V — Observações ao Capítulo IV .....	114
VI — Observações ao Capítulo V .....	121
VII — Observações ao Capítulo VI .....	134
VIII — Observações ao Capítulo VII .....	143

**GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO  
DO  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA**