ÍNDICE

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

I.2

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Página em branco

I.2

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

§ 1.° Conceito geral de transformação

Sejam A e B dois conjuntos ou classes de objectos de natureza qualquer.[1] Chama-se *transformação unívoca* de A sobre B toda a correspondência Φ, pela qual fique associado, a cada elemento x de A, *um e um só* elemento y de B, que se chamará *o transformado* ou *a imagem de x por meio de* Φ e se representará pelo símbolo $\Phi(x)$:

$$y = \Phi(x).$$

Também se dirá, neste caso, que a variável y é *função unívoca* da variável x.

Se os conjuntos A e B coincidem (isto é, se os símbolos A e B representam o *mesmo* conjunto), dir-se-á que Φ é uma transformação unívoca do conjunto A *sobre si mesmo*.

No conceito de função que se apresenta inicialmente em Matemática, intervêm apenas *variáveis numéricas*, isto é, variáveis cujos valores são *números*. Porém, necessidades ulteriores da Matemática

(1) – Como as letras maiúsculas do alfabeto latino (da imprensa) costumam ser usadas para designar pontos, conviria outro tipo (manuscrito ou gótico) para designar conjuntos. Na presente edição usa-se para esse fim o itálico (maiúsculas).

levam mais tarde a considerar variáveis, cujos valores podem ser *entidades de natureza qualquer*. Surge-nos, assim, na sua extrema generalidade, o conceito de função, tal como se entende modernamente.

Para esclarecer este conceito – que pelo seu elevado grau de abstracção entra no domínio da lógica formal, a par dos conceitos de "indivíduo" e de "classe" – convém desde logo citar exemplos colhidos fora do âmbito tradicional da Matemática. Assim, consideremos o conjunto de todos os países do mundo, conjunto que designaremos por P, e o conjunto de todas as cidades do mundo, conjunto que designaremos por C; a cada elemento x de P (isto é, a cada país), podemos fazer corresponder um determinado elemento y de C – que pode ser, por exemplo, *a capital de* x, ou, abreviadamente, *cap* x; ficará assim definida uma transformação unívoca de P sobre C: $y = cap\, x$.

(Em vez do termo "transformação", usam-se ainda, com significado idêntico, os termos "operação" e "operador").

Dadas duas transformações unívocas Φ_1 e Φ_2 de A sobre B, diz-se que Φ_1 e Φ_2 são *idênticas* (ou que são a *mesma* transformação), e escreve-se então $\Phi_1 \equiv \Phi_2$, quando o transformado de qualquer elemento de A por meio de Φ_1 coincide com o transformado desse elemento por meio de Φ_2. Basta portanto que exista um elemento x de A cujo transformado por meio de Φ_1 não coincida com o transformado de x por meio de Φ_2, para que as transformações Φ_1 e Φ_2 sejam consideradas distintas ($\Phi_1 \not\equiv \Phi_2$).

Dada uma transformação unívoca Φ de A sobre B, diz-se que Φ é uma transformação *biunívoca* ou *reversível* de A sobre B, quando para *todo* o elemento y de B existir *um e um só* elemento x de A, do qual y seja a imagem por meio de Φ, isto é, tal que $\Phi(x) = y$. Verificada esta hipótese, chama-se *transformação inversa* de Φ, e representa-se por Φ^{-1}, a transformação que faz passar de y para x:

$$x = \Phi^{-1}(y) \text{ (transformação de } B \text{ sobre } A).$$

No exemplo atrás considerado, a correspondência $x \rightarrow \mathrm{cap}\, x$ não é uma transformação biunívoca de P sobre C, pela simples razão de que existem elementos de C (isto é, existem cidades) que não são capitais de nenhum elemento de P; mas se representarmos por C^* o conjunto das cidades que são capitais, já o operador *cap* será uma transformação reversível de P sobre C^*, pois que não há dois países distintos com a mesma capital.

Um outro exemplo. Seja Π o conjunto de todos os polinómios numa variável x, e N o conjunto dos números inteiros não negativos. A cada elemento p de Π podemos associar um determinado elemento n de N – por exemplo, o *grau de p,* que designaremos, abreviadamente por $\gamma(p)$: $n=\gamma(p)$. É claro que a transformação $p \to n$ de Π sobre N assim definida não é biunívoca, porque há infinitos polinómios com um mesmo grau. (Note-se de passagem que, enquanto n é uma variável numérica, a variável independente p já não o é: não se trata portanto ainda duma função no sentido clássico).

Tornemos agora ao domínio clássico das funções: aí os exemplos são-nos bem familiares. Designando por R o conjunto dos números reais, é fácil ver que a função $y=x^3$ representa uma transformação $(x \to x^3)$ do conjunto R sobre si mesmo, a qual é biunívoca, sendo a sua inversa a transformação $x \to \sqrt[3]{x}$, enquanto a função $y=x^2$ representa uma transformação unívoca, *mas não reversível*, de R sobre si mesmo. Analogamente, o símbolo trigonométrico *sen* representa uma transformação unívoca não reversível de R sobre si mesmo – mas uma transformação biunívoca do intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ sobre o intervalo $[-1, 1]$, transformação que tem por inversa a que é representada pelo símbolo *arc sen.*

Diz-se que um elemento x é *invariante*, numa dada transformação Φ, quando coincide com o seu transformado por meio de Φ. Por exemplo, os elementos -1, 2 são invariantes na transformação $y = x^2 - 2$.

Chama-se *transformação idêntica* ou *identidade* (relativa a um dado conjunto A), e representa-se por I, a transformação que deixa invariantes *todos* os elementos de A, isto é, que faz corresponder a cada elemento x de A, esse mesmo elemento x. Trata-se pois, da função $y = x$.

§ 2.° Transformações pontuais em R_3

Como foi posto em relevo por Felix Klein na sua histórica dissertação conhecida por *Programa de Erlangen*[1], o conceito de transformação desempenha um vasto papel coordenador e simplificador no estudo da Geometria.

Para comodidade de exposição, representaremos em tudo o que segue por $\boldsymbol{R}_3$ o *espaço euclideano* ou *cartesiano* (conjunto dos pontos *próprios*, isto é, dos pontos considerados como existentes na geometria clássica de Euclides) e por $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ o *espaço projectivo* ou *arguesiano* (que se obtém do primeiro pela adjunção dos *pontos impróprios* ou *pontos do infinito*)[2].

Limitar-nos-emos, por enquanto, ao espaço $\boldsymbol{R}_3$.

Consideremos, por exemplo, um plano α (euclideano) e uma recta d não paralela a α. Se fizermos corresponder a cada ponto P de $\boldsymbol{R}_3$ a sua projecção sobre α paralelamente a d (que existe sempre e é única), ficará definida uma transformação unívoca $P \rightarrow P'$ de $\boldsymbol{R}_3$ sobre α. Considerando P e P' como variáveis, podemos dizer, tal como em Análise, que P' é *função unívoca* de P. Porém esta transformação não é biunívoca, pois que, dado um ponto M de α, existem infinitos pontos de $\boldsymbol{R}_3$ cuja projecção sobre α paralelamente a d coincide com M.

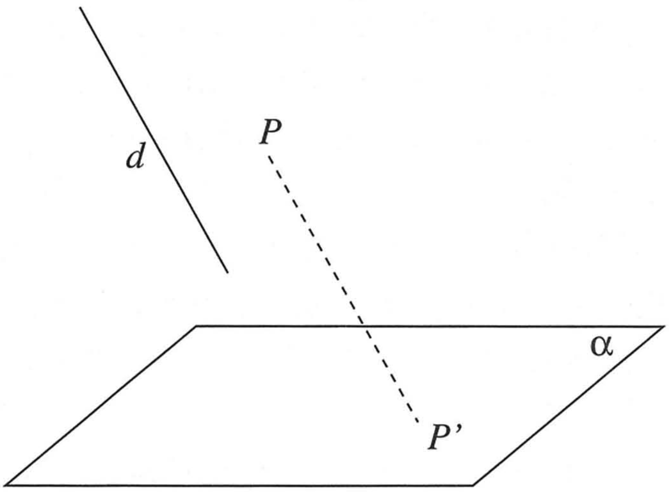


Fig. 1

(1) – Exposto por Klein ao tomar posse duma cátedra da Universidade de Erlangen em 1872. Veja-se o artigo "Introdução ao estudo da geometria baseado no conceito de transformação", Gazeta de Matemática, n.° 35.

(2) – Diz-se "arguesiano" ,em homenagem a Desargues, geómetra e engenheiro francês (1593-1662), que foi levado a considerar os pontos do infinito, ao introduzir em geometria os métodos da perspectiva utilizados pelos pintores e arquitectos da Renascença.

Dum modo geral, chamaremos *transformada* ou *imagem* duma figura F (conjunto de pontos), por meio de uma transformação pontual Φ, o conjunto dos transformados dos pontos de F por meio de Φ. Assim, no exemplo anterior, a transformada duma figura será a sua projecção sobre α segundo a direcção d.

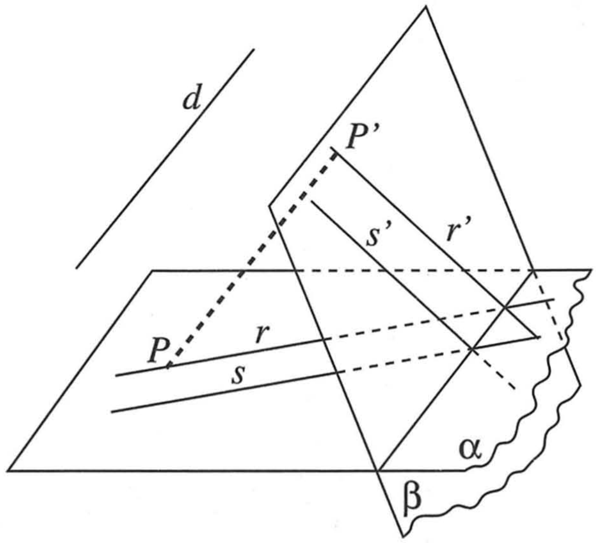


Fig. 2

Consideremos agora dois planos α, β e uma recta d não paralela a nenhum deles (figura 2). Fazendo corresponder a cada ponto P de α a sua projecção P' sobre β paralelamente a d, ficará definida uma transformação unívoca $P \to P'$ de α sobre β, a qual é manifestamente reversível, sendo a sua inversa a projecção dos pontos de β sobre α segundo a mesma direcção d. Observemos de passagem que, neste caso, a imagem duma *recta* é ainda uma *recta* e que as imagens de duas rectas *r, s paralelas entre si* são ainda duas rectas *r', s' paralelas entre si*. Em símbolos:

$r // s \to r' // s'$ (aqui o sinal "$\to$" deve ler-se "implica").

Exemplos notáveis de transformações biunívocas do conjunto $\boldsymbol{R}_3$ sobre si mesmo são as *homotetias*, as *translacções*, as *rotações* e as *simetrias*.

a) Homotetias. Fixados arbitrariamente um ponto O e um número real $r \neq 0$, chama-se *homotetia de centro O e de razão r* a transformação Θ que faz corresponder a cada ponto P de $\boldsymbol{R}_3$ aquele ponto P^* colinear com O e P tal que

$$\overline{OP^*} = |r| \,.\, \overline{OP}$$

e situado do mesmo lado de P ou do lado oposto, em relação a O, conforme o número r é positivo ou negativo. (No caso da fig. 3 escolheu-se $r = -3/2$ e portanto, sendo a razão negativa, o centro O deve ficar entre cada ponto e o seu transformado). É claro que, segundo as convenções precedentes, o ponto P^* pode também ser representado por Θ (P).

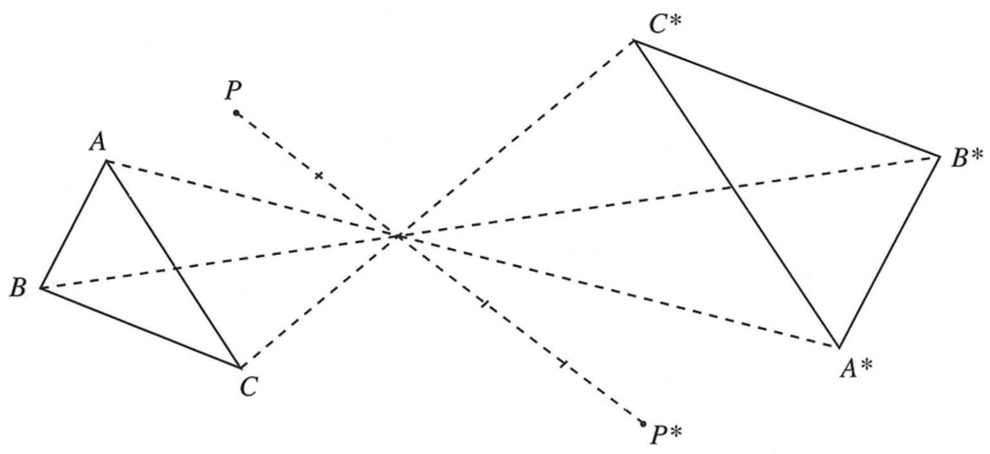


Fig. 3

Imediatamente se reconhece que a transformação é biunívoca, *sendo a sua inversa a homotetia com o mesmo centro e de razão* $1/r$. (No caso da figura, Θ^{-1} será a homotetia do centro O e razão $-2/3$). Notemos ainda que o transformado de O por meio de Θ é o próprio ponto O; quero dizer: O é invariante em Θ ($O^* \equiv O$). De resto, o centro é o único ponto invariante de Θ desde que se tenha $r \neq 1$; porém, se $r = 1$, *todos* os pontos serão invariantes e a homotetia reduz-se então à identidade (veja-se definição no final do §1.°). Caso notável é ainda aquele em que $r = -1$: então Θ será a *simetria* em relação a O.

Por outro lado, do estudo feito no liceu (a partir do teorema de Thales e dos seus recíprocos) sabe-se que:

1) *A transformada de uma recta, por meio duma homotetia, é sempre uma recta paralela à primeira.*

2) *A imagem homotética dum segmento é sempre um segmento paralelo ao primeiro.*

Deste modo, para construir a imagem homotética duma figura composta de segmentos de recta, basta determinar os transformados dos extremos dos segmentos e unir depois os pontos obtidos pelos segmentos correspondentes aos dados. (No caso da fig. 3, supõe-se dado o triângulo [*ABC*])

Dum modo geral, diz-se que uma figura *F* é invariante numa dada transformação pontual Φ, quando a transformada de *F* por meio de Φ é a própria figura *F* – mesmo que os seus pontos não sejam todos invariantes em Φ. Assim, é fácil ver que, *numa homotetia* Θ, *as rectas que passam pelo centro (raios da homotetia) são todas invariantes em* Θ.

b) *Translações* – para definir "translação" convém introduzir algumas noções prévias.

Chama-se *segmento orientado* todo o segmento de recta ao qual é atribuído um sentido, considerando um dos seus extremos como o *primeiro extremo* (ou *origem*) e o outro como *segundo extremo* (ou *extremidade*). Pelo símbolo $\overrightarrow{AB}$ designaremos o segmento orientado de origem *A* e extremidade *B*.

Dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ dizem-se *equipolentes*, quando têm o mesmo *comprimento,* a mesma *direcção* e o mesmo *sentido. Se os segmentos* $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ *não pertencem a uma mesma recta* (fig. 4), *é fácil ver que eles serão equipolentes, se e só se, forem verificadas as duas condições*

$$AB \,/\!/\, CD, \; AC \,/\!/\, BD.$$

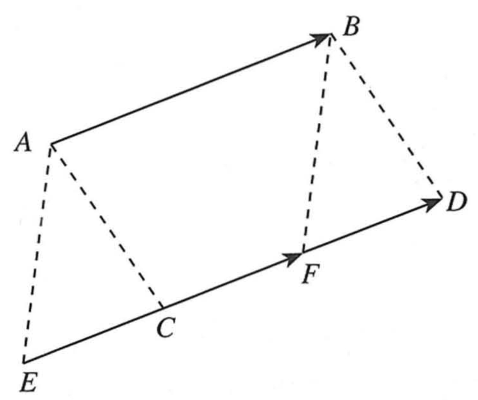


Fig. 4

Dados dois segmentos orientados $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ pertencentes à mesma recta, para saber se eles são ou não equipolentes, basta ver se existe ou não, fora dessa recta, um terceiro segmento $\overrightarrow{AB}$ que seja equipolente a ambos – atendendo a que "dois segmentos orientados equipolentes a um terceiro são equipolentes entre si" (*propriedade transitiva da equipolência*).

Diz-se que dois segmentos orientados definem a *mesma grandeza vectorial* ou o mesmo *vector* quando, e só quando, são equipolentes. Assim, cada vector pode ser concebido como a *classe* ou o *abstracto* dos infinitos segmentos orientados que o definem (todos equipolentes entre si). O vector definido pelo segmento $\overrightarrow{PP^*}$ será designado aqui pela notação $P^* - P$.

Posto isto, sejam P, P^* dois pontos quaisquer de $\boldsymbol{R}_3$; chama-se *translação* definida pelo segmento orientado $\overrightarrow{PP^*}$ a transformação τ que faz corresponder a cada ponto A de $\boldsymbol{R}_3$ o ponto A^*, extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{AA^*}$ que tem por origem A e é equipolente a $\overrightarrow{PP^*}$. Observe-se que, para dois segmentos orientados definirem a mesma translação, é necessário e suficiente que eles sejam equipolentes, isto é, que representem o mesmo vector. Existe assim uma correspondência biunívoca entre os *vectores*, por um lado, e as *translações*, por outro lado.

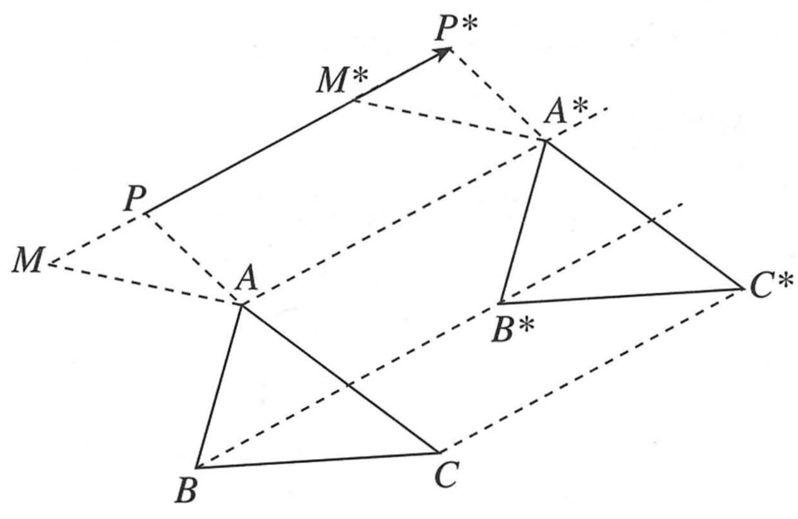


Fig. 5

Desde logo se reconhece que toda a translação τ é uma transformação biunívoca (de $\boldsymbol{R}_3$ sobre si mesmo), que tem por inversa a translação definida pelo vector $P - P^*$, simétrico do vector $P^* - P$ que define τ. Se $P \equiv P^*$, o vector $P^* - P$ será *nulo* e todos os pontos serão invariantes: τ reduz-se então à identidade.

Notemos ainda que, tal como nas homotetias, o transformado dum segmento de recta, por meio duma translação, é um segmento paralelo ao primeiro, o que facilita, ainda neste caso, a construção da transformada duma figura composta de segmentos de recta.

c) *Rotações*. O conceito de rotação depende do de ângulo orientado. Como se sabe do estudo da trigonometria, um ângulo diz-se *orientado* quando lhe é atribuído um determinado *sentido*, escolhendo um dos seus lados para *primeiro lado* (ou *lado-origem*), e o outro para *segundo lado* (ou *lado extremidade*). Além disso, para saber se dois ângulos orientados dum mesmo plano são ou não *iguais* (ou *congruentes*), é necessário fixar, sobre uma das faces do plano, um *sentido circular positivo* (que é geralmente o sentido *anti-horário*).

Posto isto, seja e uma recta qualquer orientada e ω um ângulo orientado; chama-se *rotação de eixo e* e *amplitude* ω a transformação ρ que deixa invariantes os pontos de e e faz corresponder, a cada ponto P fora de e, o ponto P^* que verifica as seguintes condições:

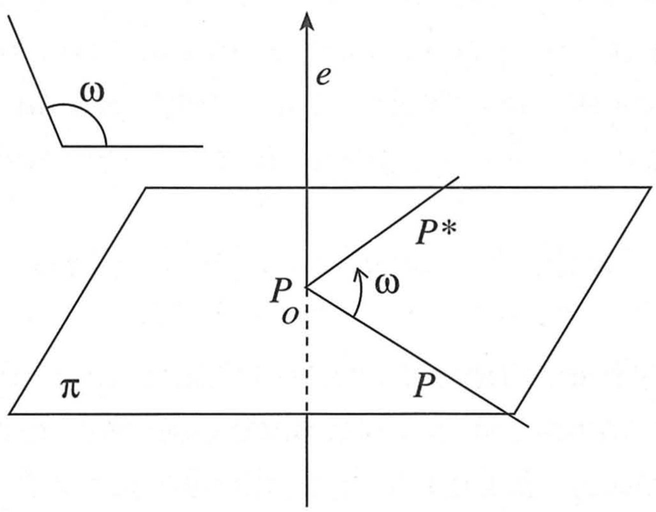


Fig. 6

1) P^* pertence ao plano π que passa por P e é perpendicular a e;
2) Designando por P_o o ponto $\pi \,.\, e$, o ângulo orientado $P\hat{P}_oP^*$, tendo por lado-origem P_oP, é igual a ω e o segmento $\overline{P_oP^*}$ igual a $\overline{P_oP}$ (supõe-se fixado o sentido circular positivo, a respeito dum observador colocado *no sentido* da recta orientada e). A transformação assim definida é manifestamente reversível, sendo a sua inversa a rotação

de eixo *e* e de amplitude $-\omega$. Se for $\omega = 0$, a rotação reduz-se à identidade.

Observe-se ainda que toda a rotação transforma uma recta numa outra recta, a qual porém não é geralmente paralela à primeira. Mas transforma rectas *paralelas entre si* em rectas ainda *paralelas entre si.*

d) *Simetrias*. Os conceitos de simetria em relação a um ponto, em relação a uma recta, e em relação a um plano são já bem conhecidos. Observemos apenas que a inversa duma simetria σ é essa mesma simetria σ, isto é, $\sigma^{-1} \equiv \sigma$.

§ 3.° Noção de grupo de transformações. Deslocamentos

Sejam *A, B, C* três conjuntos de elementos quaisquer e Θ, Φ duas transformações unívocas, respectivamente de *A* sobre *B* e de *B* sobre *C*. (É claro que os conjuntos *A, B, C* podem não ser todos distintos). A cada elemento *x* de *A* corresponde por Θ um elemento *y* de *B*; por sua vez, ao elemento *y* de *B* corresponde por Φ um elemento *z* de *C*. Se fizermos corresponder directamente ao elemento *x* o elemento *z,* ficará assim definida uma transformação unívoca $x \to z$ de *A* sobre *C*, a qual se chama *produto* (ou *resultante*) de Φ por Θ e se representa por $\Phi.\Theta$ ou por $\Phi\Theta$. Ainda podemos dizer, neste caso, que *z* é *função composta de x por intermédio de y*:

$$z = \Phi(y),\ y = \Theta(x) \to z = \Phi(\Theta(x)).$$

O produto $\Phi\Theta$ será pois a transformação que equivale a executar *primeiro* Θ e *depois* Φ (o que pode não ser equivalente a efectuar *primeiro* Φ e *depois* Θ; isto é, pode não ser $\Phi\Theta \equiv \Theta\Phi$).

É evidente que o produto de qualquer transformação Φ pela identidade coincide com Φ. Em símbolos $\Phi I \equiv I\Phi \equiv \Phi$. Observe-se ainda que, se Φ e Θ forem biunívocas, também o produto $\Phi\Theta$ o será.

Exemplos: o produto de duas homotetias Θ_1, Θ_2, com um mesmo centro *O* e de razão r_1, r_2, é a homotetia de centro *O* e de razão $r_1\, r_2$; o produto de duas rotações ρ_1 e ρ_2 com um mesmo eixo *e* e de amplitude ω_1, ω_2 é a rotação de eixo *e* e de amplitude $\omega_1 + \omega_2$; etc. Mas já o produto de duas rotações em torno de eixos distintos não é, geralmente, uma rotação.

Chama-se *deslocamento* toda a transformação que se pode obter como produto $\rho\alpha$ duma rotação por uma translação. (Como se pode ter, em particular, $\rho \equiv I$ ou $\tau \equiv I$, as translações e as rotações ficam incluídas neste conceito de deslocamento). Por outro lado, demonstra-se que: *o produto de dois deslocamentos é ainda um deslocamento e a transformação inversa de um deslocamento é também um deslocamento.*

Dum modo geral, diz-se que uma classe G de transformações reversíveis é um *grupo,* quando o produto de duas quaisquer transformações pertencentes a G está ainda em G e a inversa de qualquer transformação de G pertence também a G.

Posto isto, a proposição precedente pode enunciar-se mais simplesmente, dizendo que: *a família dos deslocamentos é um grupo.*

É de notar que, por exemplo, a classe das rotações em torno dum mesmo eixo é um grupo, enquanto a classe de todas as rotações (com eixos quaisquer) o não é, uma vez que o produto de duas rotações pode não ser uma rotação. Mas já a classe de todas as translações é um grupo.

No estudo das rotações e translações observa-se que cada figura é transformada numa figura igual à primeira. Mas o que se entende por figuras *iguais*? No curso liceal, diz-se que duas figuras são iguais quando se podem *levar* a coincidir uma com a outra. Mas é visível que não se dá aqui uma *definição lógica*: faz-se apelo, implicitamente, à noção intuitiva de *deslocamento dos corpos sólidos*, isto é, dos corpos que se mantêm *iguais a si mesmos* durante o deslocamento. Só agora estamos em condições de dar uma definição rigorosa de igualdade geométrica, baseando-nos no conceito já definido de deslocamento:

DEFINIÇÃO: Duas figuras dizem-se *geometricamente iguais* ou *sobreponíveis* quando é possível transformar uma na outra mediante um deslocamento.

Por exemplo, os dois triângulos [*ABC*] e [*EFG*] da fig. 7 são iguais porque é possível passar do primeiro para o segundo mediante uma translação seguida duma rotação.

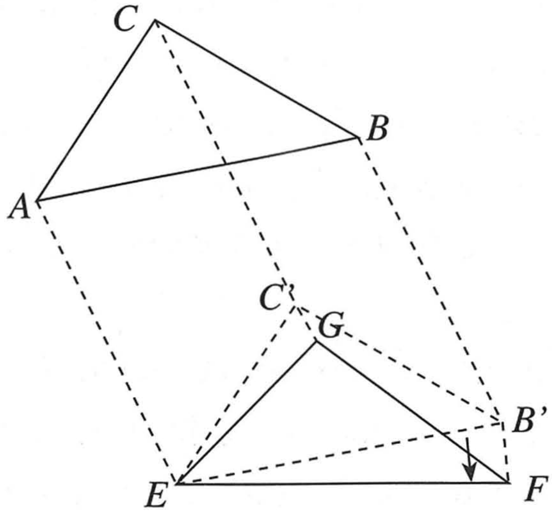


Fig. 7

É necessário, contudo, não perder de vista que os deslocamentos, tais como aqui foram definidos, não são a mesma coisa que os *deslocamentos físicos contínuos*: – basta notar que, no segundo conceito, intervém a ideia de tempo, absolutamente estranha ao primeiro conceito.

Por outro lado, um exame minucioso das definições precedentes de rotação e translação mostra que estas noções são dadas, em última análise, a partir da noção de igualdade de segmentos de recta. Quer isto dizer que há aqui um circulo vicioso? Não, porque definir igualdade de duas figuras *quaisquer* é mais do que definir igualdade de segmentos de recta. Além disso, não esqueçamos este facto: as noções que nós possuímos efectivamente sobre um dado assunto são em número *finito*, de modo que, se procurarmos definir logicamente umas noções a partir das outras, havemos de chegar necessariamente a *um fim* (a não ser que se volte ao ponto de partida, caindo num círculo vicioso). Por conseguinte, haverá sempre noções que devemos renunciar a definir e que temos portanto de admitir como dadas *a priori,* intuitivamente: tais são as chamadas *noções primitivas. O necessário é fixar, em cada teoria dedutiva, quais as noções aí consideradas primitivas – de contrário toda a definição deixará de ter sentido.*

Ora, reconheceu-se que, em geometria euclideana, se podem tomar para noções primitivas, por exemplo, a de "recta", a de "situado entre" e a de "igualdade de segmentos" – sem falar, é claro, da noção de "ponto", que é necessariamente pressuposta (a noção de "situado entre" refere-se a pontos colineares e aparece em frases do tipo: A está situado entre B e C).

De resto, tais noções não são ainda independentes. Com efeito, dizer que três pontos distintos A, B, C são *colineares* (ou estão em *linha recta*) equivale a dizer que não existe nenhum ponto P de R_3 tal que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$. Podemos, portanto, definir "recta" a partir de "igualdade de distâncias".

Por outro lado, é possível definir a noção de "situado entre" a partir da noção de colinearidade (ou de "recta").(1) *Assim, poderíamos tomar como única noção primitiva da geometria euclideana a de igualdade de segmentos (ou de distâncias entre pontos).* E não é possível substituir esta noção por uma outra que nos pareça mais simples.

§ 4.° Transformações de semelhança

Chama-se *transformação de semelhança* ou simplesmente *semelhança* toda a transformação pontual biunívoca (de R_3 sobre si mesmo) que respeita a igualdade de segmentos, isto é, que transforma *segmentos iguais entre si* em *segmentos iguais entre si*.

Resulta desta definição que *toda a transformação de semelhança* Θ *respeita a razão entre dois quaisquer segmentos*. Suponhamos, por exemplo, que os dois segmentos dados, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, admitem um submúltiplo comum $\overline{PQ}$: $\overline{AB} = m\,.\,\overline{PQ}$, $\overline{CD} = n\,.\,\overline{PQ}$; então, designando por $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{P'Q'}$, respectivamente, os transformados de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{PQ}$ por meio de Θ, virá ainda

$$\overline{A'B'} = m\,.\,\overline{P'Q'},\ \overline{C'D'} = n\,.\,\overline{P'Q'},$$

(1) – Esta definição é demasiado longa para que valha a pena reproduzi-la aqui.

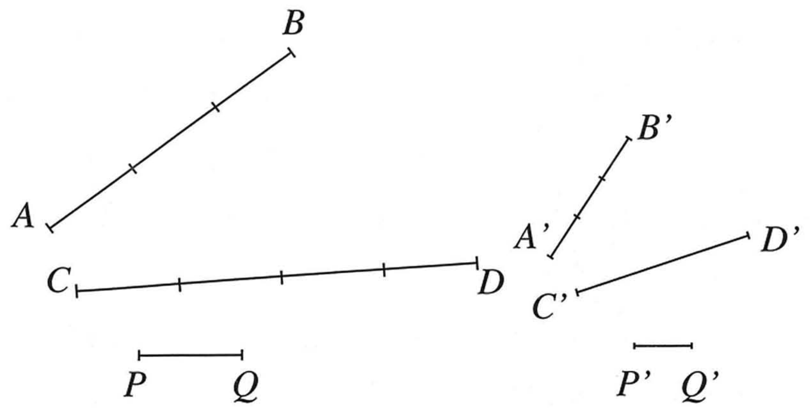


Fig. 8

isto é: se $\overline{AB}$ é igual à soma de m segmentos iguais a $\overline{PQ}$, também $\overline{A'B'}$ deve ser igual à soma de m segmentos iguais a $\overline{P'Q'}$ (e analogamente para $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$) uma vez que Θ transforma segmentos iguais entre si em segmentos ainda iguais entre si. Ter-se-á pois,

$$\overline{AB} \,/\, \overline{CD} = \overline{A'B'} \,/\, \overline{C'D'}.$$

Este resultado subsiste mesmo no caso de os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não serem comensuráveis, isto é, não admitirem um submúltiplo comum[1]. Virá, portanto, em geral:

$$\overline{A'B'} \,/\, \overline{AB} = \overline{C'D'} \,/\, \overline{CD} = \ldots = \text{constante } (\textit{razão de semelhança}).$$

Quer isto dizer: numa semelhança Θ, todos os segmentos vêm multiplicados por um mesmo número positivo r (*razão de semelhança*). Além disso, como se conclui do estudo da semelhança de triângulos feito no liceu, serão ainda conservadas por Θ as amplitudes dos ângulos, isto é, cada ângulo será transformado por Θ num ângulo igual ao primeiro.

(1) – Para este caso, leia-se o já citado artigo da Gazeta de Matemática.

Como exemplo intuitivo de semelhança, consideremos dois mapas, F e F', dum mesmo país, em escalas diferentes. Fixadas três localidades A, B, C em F, corresponder-lhes-ão em F' três pontos A', B', C', representativos das mesmas localidades. É claro que se terá $\overline{A'B'} / \overline{AB} = \overline{A'C'} / \overline{AC} = \overline{B'C'} / \overline{BC}$ = razão de semelhança (3/4 caso da fig. 9). Além disso, tem-se, por exemplo,

$$A'\widehat{B'}C' = A\widehat{B}C$$

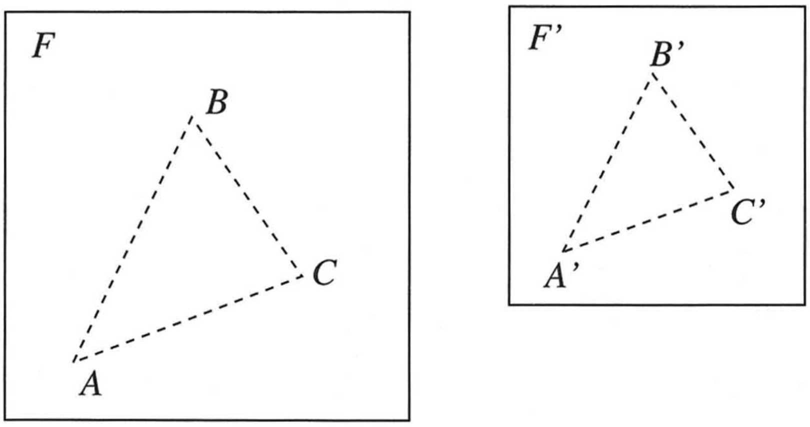


Fig. 9

Toda a homotetia é, notoriamente, uma transformação de semelhança que tem por razão o valor absoluto da razão de homotetia. Mas, se fizermos seguir uma homotetia dum deslocamento, a transformação resultante já não é, em geral, uma homotetia, continuando porém a ser uma semelhança.

Se Θ é uma semelhança de razão $r > 1$, é claro que os segmentos serão todos aumentados na mesma proporção: dá-se uma *ampliação*. Se a razão r é menor do que 1, sucede o contrário: Θ é uma *redução*. Se $r = 1$, não há nem ampliação nem redução: cada segmento é transformado num segmento igual ao primeiro. Será neste caso Θ um deslocamento? Que todo o deslocamento é uma semelhança de razão 1, não oferece dúvida. Mas será verdade também a recíproca?

Consideremos uma simetria σ em relação a um plano π: trata-se visivelmente duma semelhança de razão 1; mas, dado um tetraedro escaleno [$ABCD$], o seu transformado por meio de Θ é, como se sabe (do estudo feito no liceu a propósito da igualdade de triedros), um tetraedro $[A'B'C'D']$ *não sobreponível* ao primeiro, isto é, que não se pode levar a coincidir com aquele mediante um deslocamento. *A simetria não é pois um deslocamento, embora seja uma semelhança de razão* 1.

As simetrias em relação a planos são também chamadas *reflexões*, atendendo a que a reflexão nos espelhos planos oferece um exemplo concreto de tais transformações. Por outro lado, chamaremos *congruências* às semelhanças de razão 1. Posto isto, demonstra-se que:

Toda a congruência ou é um deslocamento (congruência directa) ou é o produto dum deslocamento por uma reflexão (congruência inversa). (Note-se a analogia com a igualdade directa e a igualdade inversa no plano).

Daqui resulta imediatamente que:

Toda a transformação de semelhança equivale a uma homotetia seguida dum deslocamento. (Uma simetria em relação a um ponto é uma congruência inversa)(1).

No curso liceal diz-se que duas figuras são semelhantes quando se podem tornar homotéticas por deslocamento. Nós aqui adoptamos a seguinte

DEFINIÇÃO. Dadas duas figuras F_1, F_2, diz-se que F_1 é *semelhante* a F_2 e escreve-se então $F_1 \sim F_2$ quando é possível passar de F_1 para F_2 mediante uma transformação de semelhança.

Ora, é fácil ver que o produto de duas semelhanças ainda é uma semelhança e a transformação inversa duma semelhança é também uma semelhança; em menos palavras: *as semelhanças formam grupo* (em particular, a identidade é uma semelhança). Daqui resulta que:

1) Qualquer figura é semelhante a si mesma (*propriedade reflexiva*).

2) Se $F_1 \sim F_2$, também $F_2 \sim F_1$ (*propriedade simétrica*).

3) Se $F_1 \sim F_2$ e $F_2 \sim F_3$, então $F_1 \sim F_3$ (*propriedade transitiva*).

---

(1) – A índole do curso de Geometria Descritiva não consente que nos demoremos na demonstração destes teoremas.

De resto, estas mesmas propriedades são verificadas com a relação de congruência e com a de sobreponibilidade, já que a família das congruências e a família dos deslocamentos são também grupos.

Diz-se que duas figuras têm a mesma *forma*, quando são semelhantes. (Poderíamos então dizer que as transformações de semelhança são aquelas que respeitam a forma das figuras).

Se duas figuras são congruentes, terão, além da mesma *forma*, a mesma *grandeza* (ou *extensão*).

§ 5º. Efeito da projecção paralela sobre as homotetias e as translações

Consideremos uma homotetia Θ, definida pelo centro O e pela razão r, e, por outro lado, uma projecção paralela Φ, definida pela direcção d e pelo plano de projecção π (fig. 10). Vejamos como é *transformada* a homotetia Θ pela projecção Φ. Para isso, consideremos um ponto P qualquer de R_3, o seu transformado P_1 por meio de Θ e as imagens P', O', P'_1 dos pontos P, O, P_1 por meio de Φ. O teorema de Thales habilita-nos imediatamente a escrever

$$O'P'_1 / O'P' = OP_1 / OP = |r|.$$

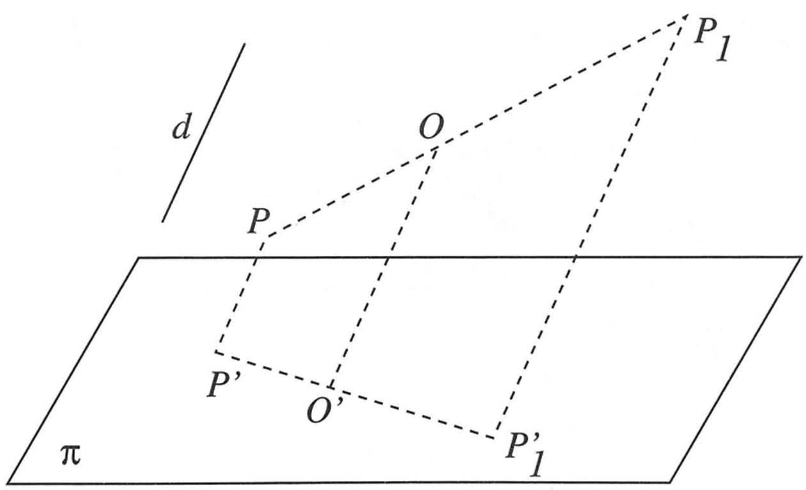


Fig. 10

Além disso, P' e P'_1 estão do mesmo lado ou do lado oposto em relação a O', conforme r é positivo ou negativo. Logo P'_1 é o transformado de P' por meio da homotetia de centro O' e razão r – homotetia que podemos representar por Θ', dizendo que Θ' é a *projecção* de Θ sobre π paralelamente a d ou a *transformada* de Θ *por meio de* Φ: $\Theta' \equiv \Phi(\Theta)$. Em resumo.

A projecção paralela duma homotetia espacial sobre um plano é uma homotetia plana com a mesma razão e que tem por centro a projecção do centro da primeira.

É fácil ver que este resultado não subsiste se, em vez duma projecção paralela, se tratar duma projecção central.

Consideremos agora uma translação τ definida pelo segmento orientado $\overline{MM_1}$ e a projecção Φ definida pelo plano π e pela direcção d (fig. 11). A simples inspecção da figura mostra que *a translação* τ *é transformada por* Φ *numa translação plana* τ' *definida pelo segmento orientado* $\overline{M'M'_1}$*, projecção do segmento* $\overline{MM_1}$ *que define* τ. É claro que se for $\overline{MM_1} // d$, ter-se-á $\overline{M_1} \equiv \overline{M'_1}$ e, portanto, $\tau' \equiv I$.

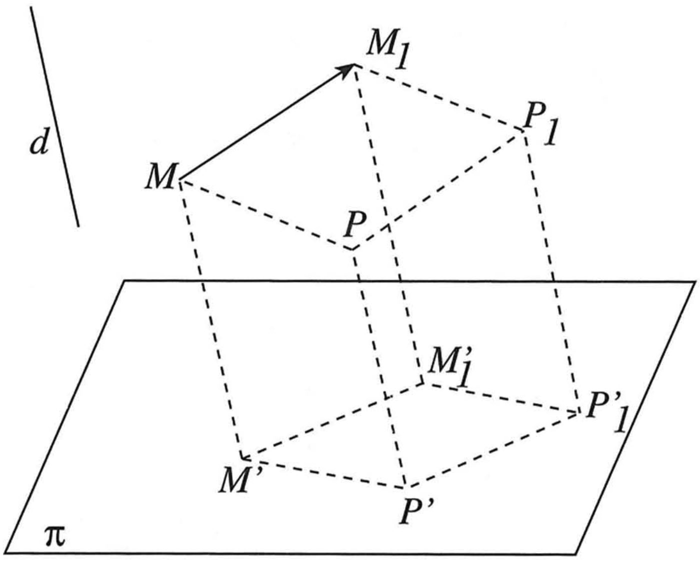


Fig. 11

Ao contrário do que sucede com as homotetias e as translações, a projecção paralela duma rotação não é uma rotação, excluído o caso de a projecção ser ortogonal e o eixo ser perpendicular ao plano de projecção.

Todos estes factos têm aplicação no sistema de Monge.

§ 6.° Introdução dos elementos impróprios

Para fazer o estudo de transformações pontuais em $\overline{R}_3$, convém, primeiro que tudo, fixar nitidamente as convenções sobre que assenta o uso das expressões "ponto impróprio", "recta imprópria" e "plano impróprio".

Consideremos uma recta *r*, um ponto *O* fora de *r* e uma recta *s* que passe por *O* e encontre *r* num ponto que designaremos por *P* (fig. 12).

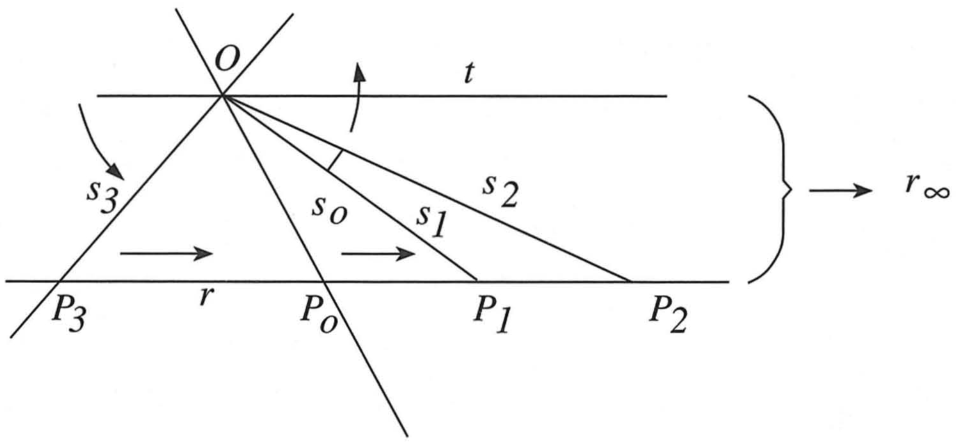


Fig. 12

Supondo que *P* se move *continuamente* sobre *r* no sentido indicado pela seta, a recta *s* rodará em torno de *O* no sentido anti-horário.

Mas é evidente que, por mais afastado que *P* se encontre da posição inicial P_o, nunca a recta *s* atingirá a posição *t* paralela a *r*. Contudo, se P estiver a uma distância *muito grande – praticamente infinita* – da posição P_o, a recta s tornar-se-á *sensivelmente* paralela à recta *r*. Daqui a ideia de convencionar que, sendo *s* efectivamente paralela a *r*, as duas rectas se encontram num *ponto do infinito*, ou *ponto impróprio*(1). É porém manifesto que, ao fazer esta convenção,

(1) – Não esqueçamos porém que, no mundo físico, não existem rectas *rigorosamente paralelas*; mais ainda: não existe nada que em rigor se possa chamar uma recta. Quando se diz, p. ex., que, num dado lugar, duas rectas verticais são paralelas, abstrai-se do facto de elas se deverem encontrar no centro da terra – ponto este que, por sua vez, é já em si uma abstracção.

se sai do esquema clássico da geometria de Euclides, uma vez que, nessa geometria, duas rectas se dizem paralelas quando existem num mesmo plano e *não têm nenhum ponto comum* (ou são coincidentes). Além disso, para que continue a ser verdadeira a proposição "*Duas rectas distintas não podem encontrar-se em mais de um ponto*", devemos atribuir, por este processo, um *único* ponto impróprio a cada recta. Então chamando rectas *próprias* às rectas euclideanas assim acrescidas, teremos a:

CONVENÇÃO I – Cada recta própria tem um único ponto impróprio.

Designaremos pelo símbolo ∞_r o ponto impróprio de r.

No caso da fig. 12, o ponto de intersecção de r com t será pois o *ponto impróprio* de r (e de t). Ficará deste modo estabelecida uma correspondência *biunívoca* entre as rectas do plano Or que passam por O e os pontos de r. Continuando s a rodar de maneira contínua em torno de O, logo depois de passar pela posição t virá a encontrar r em pontos à esquerda de P_o; de modo que, quando s executa uma rotação completa em torno de O no sentido anti-horário, o ponto P percorre a recta *r sempre da esquerda para a direita*, voltando ao ponto de partida depois de ter ultrapassado o ponto impróprio. Deste modo, a recta euclideana acrescida de ponto impróprio aparece-nos como uma linha fechada, no género duma circunferência.

À convenção I devemos juntar esta outra:

CONVENÇÃO II – Duas rectas *próprias r, s* têm o mesmo ponto impróprio se, *e só se*, são paralelas. Em símbolos:

$$\infty_r \equiv \infty_s \rightleftarrows r \,//\, s \quad \text{(o símbolo "}\rightleftarrows\text{" pode ler-se "se e só se")}.$$

Por outro lado, diz-se em geometria euclideana que duas rectas têm a mesma direcção se, e só se, são paralelas. Confrontando este enunciado com o da Convenção II, vê-se que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos impróprios e as direcções, o que leva mesmo alguns autores a identificar "ponto impróprio de uma recta" com "direcção dessa recta". *Dar* um ponto impróprio equivale pois a *dar* uma direcção, isto é, a indicar uma recta que tenha essa direcção (e portanto esse ponto impróprio).

Unir um ponto próprio P com um ponto impróprio ∞_r consistirá, manifestamente, em conduzir por P uma recta s paralela a r, problema este que é sempre possível e determinado, em virtude do postulado de Euclides. Em símbolos:

$$s \equiv P\,\infty_r \rightleftarrows s: \multimap P;\ //\ r.$$

(Em linguagem euclideana: "Um ponto e uma direcção definem uma recta").

Consideremos agora dois pontos impróprios ∞_r e ∞_s distintos, isto é, pertencentes a rectas r, s não paralelas. Em que consiste *unir* ∞_r *com* ∞_s? É claro que nenhuma recta própria pode conter ao mesmo tempo estes dois pontos, porque a isso se opõem as convenções I e II.

Para decidir a questão, é necessário introduzir novas convenções. Chamaremos *plano próprio* de $\overline{R}_3$ a todo o plano euclideano acrescido dos pontos impróprios das rectas nele contidas. Posto isto, é manifesto que, se dois planos próprios α, β são paralelos, têm comuns *todos* os seus pontos impróprios. Então, para que continue a ser verdadeira a proposição "*Quando dois planos distintos se encontram, a sua intersecção só pode ser uma recta*" somos obrigados a introduzir a

CONVENÇÃO III – Diremos que o conjunto dos pontos impróprios dum plano próprio α é uma recta – a *recta imprópria* ou *recta do infinito* de α.

Designaremos por ∞_α a recta imprópria de α. Ter-se-á pois

$$\infty_\alpha \equiv \infty_\beta \rightleftarrows \alpha\ //\ \beta\,.$$

Por outro lado, diz-se em geometria euclideana que dois planos têm a mesma orientação se, e só se, são paralelos. Há pois uma correspondência biunívoca entre rectas impróprias e orientações, o que induz a identificar "recta imprópria dum plano" com "orientação desse plano".

E agora já podemos dizer qual é a recta que une dois pontos impróprios ∞_r, ∞_s distintos; é, manifestamente, a recta imprópria de qualquer plano α que seja paralelo a r e a s. Em símbolos:

$$\infty_\alpha \equiv \infty_r \infty_s \rightleftarrows \alpha: // r\ ;\ s.$$

(Em termos euclideanos: "Duas direcções distintas definem uma orientação").

Subsiste portanto, em $\overline{\boldsymbol{R}_3}$, a proposição "*Por dois pontos distintos passa sempre uma recta e uma só*" (Observe-se entretanto que, *se uma recta tem dois pontos impróprios distintos, todos os seus pontos serão impróprios*).

Consideremos agora este outro postulado da geometria euclideana: "*Por três pontos A, B, C não colineares passa sempre um plano e um só*". Em $\overline{\boldsymbol{R}_3}$, se os dois pontos A, B são próprios (distintos) e o ponto C é impróprio (suponhamos $C \equiv \infty_r$), dizer que A, B, C não são colineares equivale a dizer que a recta AB não é paralela à recta r: o plano ABC definido pelos três pontos será então o plano que passa por AB e é paralelo a r. Se A é próprio e B, C impróprios distintos, ABC será o plano que passa por A e é paralelo às direcções definidoras dos pontos B e C. Mas, suponhamos agora que A, B, C, são três pontos impróprios não colineares, isto é, pertencentes a rectas r, s, t não simultaneamente paralelas a um mesmo plano: o que vem a ser neste caso o plano ABC?

Para responder a tal pergunta, necessário se torna introduzir uma outra convenção. Observemos que, em $\boldsymbol{R}_3$, se pode definir "plano" deste modo:

"*Plano* é todo o conjunto de pontos que verifica as seguintes condições: 1) contém pelo menos três pontos não colineares; 2) não contém todos os pontos possíveis; 3) se contém dois pontos distintos duma recta, contém a recta".

Tornando agora a $\overline{\boldsymbol{R}_3}$, consideremos o conjunto de todos os pontos impróprios, conjunto que designaremos por Ω: é fácil ver que Ω verifica as condições 1), 2), 3). Então, para que subsista em $\overline{\boldsymbol{R}_3}$, a definição precedente, devemos adoptar a

CONVENÇÃO IV – Diremos que o conjunto dos pontos impróprios de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ é um plano – o *plano impróprio* ou *plano do infinito*.

O plano definido por três pontos impróprios não colineares será pois o plano impróprio.

Importa salientar que, ao contrário do que sucede em $\boldsymbol{R}_3$, são verdadeiras em $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ as duas seguintes proposições:

a) *Duas rectas complanares encontram-se sempre* (por outras palavras: *Se duas rectas não se encontram, são com certeza não complanares*).

b) *Dois planos encontram-se sempre.*

Chamaremos *rectas projectivas* e *planos projectivos* às rectas e aos planos de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$, que é preciso não confundir com as rectas euclideanas e com os planos euclideanos (isto é, pertencentes a $\boldsymbol{R}_3$).

Daqui por diante, salvo indicação, em contrário, as nossas considerações referem-se ao espaço projectivo $\overline{\boldsymbol{R}_3}$.

§ 7.° Perspectividade entre dois planos

A comodidade das convenções precedentes patenteia-se no estudo da projecção central.

Consideremos dois planos próprios α, β não paralelos entre si e um ponto próprio O, fora de α e de β (fig. 13). Se a cada ponto P de α fizermos corresponder a sua projecção central P' sobre β a partir de O, ficará definida uma transformação pontual biunívoca Φ de α sobre β, que deixa invariantes os pontos da intersecção e de α com β. (Em $\boldsymbol{R}_3$ a correspondência não seria biunívoca, pois bastaria que OP fosse paralela a β para que não existisse a projecção P' de P a partir de O). Dada uma recta r qualquer de α, o plano Or (plano projectante de r) corta necessariamente o plano β segundo uma recta r', que é a projecção de r sobre α a partir de O. Assim, cada recta r de α é transformada por Φ numa recta r' de β. Em particular, a recta imprópria de α é transformada na recta i, intersecção de β com o plano que passa por O e é paralelo a α; em símbolos:

$$\infty'_\alpha \equiv i \quad (i \equiv \beta \, . \, O \, \infty_\alpha).$$

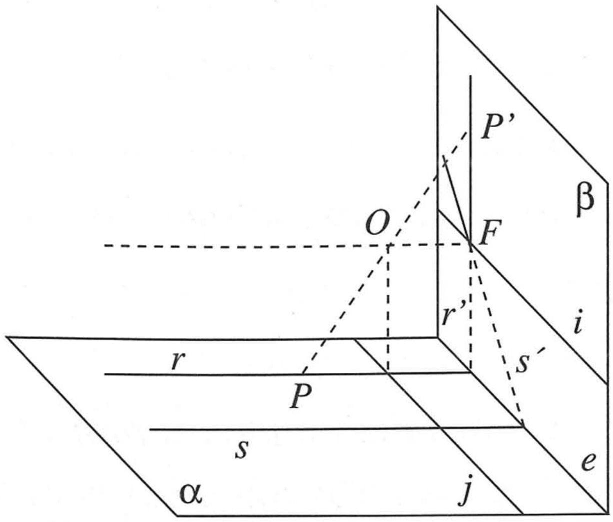


Fig. 13

Por sua vez, a recta *j*, intersecção de α com o plano $O\infty_\beta$, é projectada no infinito, isto é, na recta imprópria de β:

$$j' \equiv \infty_\beta \quad (j \equiv \alpha\,.\,O\infty_\beta).$$

(Às rectas *i, j* chamaremos, respectivamente, *a primeira e a segunda recta de fuga* da transformação Φ).

Deste modo, os pontos e rectas de α aparecem todos *representados* sobre β, mas com esta particularidade notável: a imagem da recta *imprópria* de α é uma recta *própria* de β e vice-versa. Consequência: duas rectas r', s' de β que se cruzem num ponto *próprio F* da recta de *fuga i* são necessariamente imagens de duas rectas *r, s* de α *paralelas entre si*, pois que *F* será a imagem dum ponto impróprio de α, comum a *r* e *s* ($OF \,//\, r$). Portanto, *a transformação* Φ *converte rectas paralelas entre si em rectas que se intersectam sobre i, e que podem por isso não ser paralelas entre si* (excepção única: caso das rectas paralelas a β).

Para tornar mais intuitivas estas considerações, podemos imaginar que o ponto *O* representa o centro óptico da objectiva duma máquina fotográfica e β o plano do alvo. Desde que o ponto *P* esteja no campo óptico da máquina, produzirá sobre o alvo uma imagem, que será a projecção P' de *P* sobre β a partir de *O*. Supondo que α representa uma planície, a recta de fuga *i* coincidirá sensivelmente com a imagem do horizonte (supondo este a distância praticamente infinita). Podemos ainda interpretar *r, s* como as margens duma estrada rectilínea. Desfeita a inversão da imagem, esta virá com o aspecto da fig. 14, em que se observa o chamado *efeito da perspectiva*: rectas paralelas são vistas como concorrentes num ponto *F* de *i*.

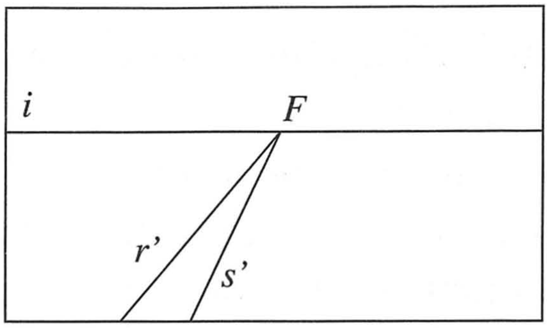


Fig. 14

Recordemos ainda que o globo ocular funciona esquematicamente como a máquina fotográfica: a pupila do observador é o ponto de vista *O*, em que convergem os raios luminosos vindos do exterior, que vão formar sobre a retina as imagens dos objectos. Por isso nós vemos as figuras em deformação perspectiva, desde que não estejam sobre um plano perpendicular ao eixo óptico.

Estas considerações de perspectiva mostram como as convenções relativas aos pontos impróprios têm uma base intuitiva. Foram considerações desta ordem que levaram Desargues a introduzir o conceito de ponto do infinito, observando que, em perspectiva, um feixe de rectas paralelas (*feixe impróprio*) se comporta exactamente como um feixe de concorrentes (*feixe próprio*).

Não esqueçamos porém que os pontos impróprios têm uma existência puramente convencional. De resto, o mesmo se pode dizer a respeito dos pontos próprios e das entidades geométricas em geral, pois que tais entes *não existem* na realidade física: são apenas *idealizações, representações esquemáticas* dos objectos do mundo empírico. Ao matemático, o que interessa é apenas que os *postulados* ou *convenções fundamentais*, que relacionam esses entes, sejam *compatíveis entre si*, isto é, não conduzam a contradição. Como dizia Poincaré, "existir" em Matemática significa "ser isento de contradição".

NOTA: Através dos séculos, tem preponderado no pensamento matemático o ponto de vista de Platão, que distinguia a *realidade sensível* ou *mundo dos fenómenos* (que nos é dada a conhecer através dos sentidos) da *realidade inteligível* ou *mundo das ideias* (que nós conhecemos através da inteligência e da qual a primeira é apenas uma grosseira imitação).

Os conceitos geométricos pertenceriam, segundo Platão, à realidade inteligível: assim, por ex., os triângulos materiais, que nós vemos e desenhamos, seriam apenas imagens imperfeitas dos triângulos ideais, que existem, eternos e imutáveis, no mundo da razão. Todavia, no estado actual da ciência, a concepção platónica não pode ser tomada à letra, pelo menos em Geometria: conhecem-se hoje diversas geometrias – diversos esquemas que nós usamos conforme os casos, na medida em que nos são úteis, mas que nunca se adaptam exactamente à realidade física, demasiado complexa para se reduzir à simplicidade lógica dum esquema.

§ 8.° Colineações e afinidades: homologias

Na transformação pontual Φ há pouco estudada, a imagem de cada recta r é ainda uma recta, r'. Dum modo geral adoptaremos a seguinte

DEFINIÇÃO – Chama-se *colineação* ou *homografia* toda a transformação pontual biunívoca, entre dois planos α, β ou entre o espaço inteiro $\overline{\boldsymbol{R}}_3$ e ele mesmo, que transforma as rectas em rectas, isto é, que transforma qualquer terno de pontos colineares num terno de pontos ainda colineares.

Como sinónimos de "colineação" podem ainda usar-se aqui os termos "transformação projectiva" e "projectividade".(1)

(1) – Todavia, o conceito de projectividade extende-se ulteriormente ao caso de transformações pontuais entre rectas e ainda ao caso de transformações geométricas não pontuais, limitando-se o termo "colineação" ao caso aqui considerado.

No exemplo da transformação Φ do § precedente, tínhamos suposto que o ponto O é próprio. Suponhamos agora que o ponto O é impróprio, situado *fora* dos dois planos α, β, isto é, pertencente a uma recta d não paralela nem a α nem a β ($O \equiv \infty_d$): trata-se então duma projecção cilíndrica dos pontos de α sobre β, segundo a direcção d (caso da fig. 2, § 2°). Neste caso, a imagem de cada ponto próprio é necessariamente um ponto próprio e, portanto, a imagem de cada ponto impróprio será ainda um ponto impróprio. Por outras palavras, a imagem da recta imprópria de α será a recta imprópria de β; isto é, em símbolos:

$$\infty'_\alpha \equiv \infty_\beta .$$

Por isso, duas rectas r, s de α paralelas entre si (isto é, cortando-se sobre ∞_α) terão necessariamente como imagens duas rectas r', s' de β ainda paralelas entre si (isto é, cortando-se sobre ∞_β) – o que, de resto, já tinhamos constatado no § 2°, referindo-nos porém ao espaço euclideano, $\boldsymbol{R}_3$. Posto isto, introduziremos a seguinte

DEFINIÇÃO – *Transformação afim* ou *afinidade* é toda a colineação que transforma os pontos impróprios em pontos impróprios ou (o que é equivalente) que transforma rectas paralelas entre si em rectas paralelas entre si.

Se nos referirmos ao espaço $\boldsymbol{R}_3$, em vez de nos referirmos a $\overline{\boldsymbol{R}_3}$, as afinidades podem ser definidas, mais simplesmente, dizendo que são as transformações pontuais biunívocas que transformam as rectas em rectas. Prova-se depois facilmente que tais transformações devem por força respeitar a relação de paralelismo (veja-se o artigo já citado).

Observemos agora que as transformações de semelhança, tais como foram definidas nos §§ 3° e 4°, para o espaço $\boldsymbol{R}_3$, podem também ser consideradas como transformações biunívocas do espaço $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ sobre si mesmo, pois que, respeitando a relação de paralelismo, fazem corresponder a cada direcção d uma determinada direcção d', que é como dizer, a cada ponto impróprio ∞_d um determinado ponto impróprio $\infty_{d'}$. *São por conseguinte transformações afins.*

Em particular, uma homotetia transforma cada recta r numa recta $r' \parallel r$; isto é, cada ponto impróprio ∞_r *no mesmo* ponto impróprio ($\infty_{r'} \equiv \infty_r$). Podemos pois afirmar que: *em* $\overline{R}_3$ *as homotetias deixam invariantes todos os pontos impróprios.* O mesmo se pode dizer das translações; mas enquanto cada homotetia deixa invariante um ponto próprio (o centro), uma translação não deixa invariante nenhum ponto próprio, a não ser que se reduza à identidade.

Observamos ainda que a transformação projectiva Φ, estudada no § precedente, goza das seguintes propriedades: 1) a cada ponto M da recta $e \equiv \alpha\beta$ faz corresponder esse mesmo ponto ($M' \equiv M$); 2) as rectas que unem pontos P, P' correspondentes passam todas pelo ponto O. (É claro que estas conclusões subsistem mesmo que O seja impróprio). Pois bem:

DEFINIÇÃO – *Homologia* ou *perspectividade* entre dois planos α, β é toda a colineação de α sobre β que deixa invariantes os pontos duma recta (*eixo da homologia*) e tal que as rectas que unem pontos correspondentes passam todas por um mesmo ponto (*centro da homologia*).

Sendo $\alpha \not\equiv \beta$, uma homologia de α sobre β não pode deixar de ser, evidentemente, uma projecção Φ de α sobre β a partir dum ponto O, próprio ou impróprio, fora de α e de β. Mas a definição precedente continua a ser válida, mesmo no caso de ser $\alpha \equiv \beta$ (*homologia do plano* α *sobre si mesmo*). Veremos no § seguinte como se nos apresentam naturalmente as transformações deste último tipo.

NOTA: a definição de homologia será simplificada no número seguinte.

§ 9.° Teoremas relativos a homologias planas

Chama-se *homologia plana* toda a homologia dum plano sobre si mesmo.

Já no § 5° estudámos a maneira como as homotetias e as translações são transformadas por projecção paralela. Vejamos agora qual o efeito duma projecção central sobre uma homologia.

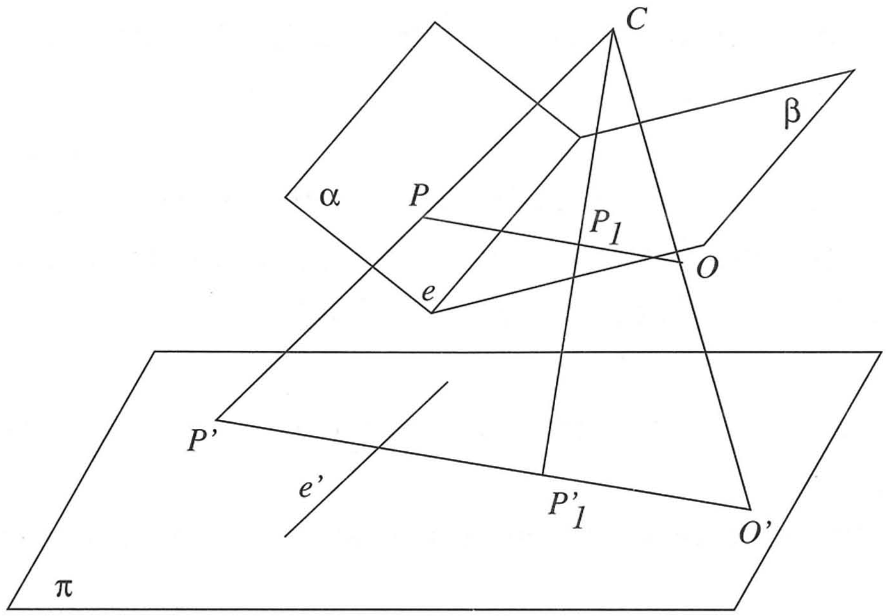


Fig. 15

Consideremos para isso dois planos α, β (por enquanto distintos) e um ponto O (próprio ou impróprio) fora de α e de β. Fazendo corresponder a cada ponto P de α a sua projecção P_1 sobre β a partir de O, fica definida uma homologia Θ de α sobre β, que tem por centro o ponto O e por eixo a intersecção e dos dois planos. Consideremos, por outro lado, um plano π *qualquer* e um ponto C *fora dos três planos* α, β, π. Sejam P', P'_1, O', e', respectivamente, as projecções de P, P_1, O, e sobre π a partir de C. A correspondência $P' \to P'_1$ será manifestamente uma transformação biunívoca do plano π sobre si mesmo, visto que se pode passar de P' para P'_1 executando sucessivas transformações biunívocas: $P' \to P \to P_1 \to P'_1$. Designemos por Θ' a transformação $P' \to P'_1$. Notemos agora que, quando P' descrever uma recta r' sobre π, o seu correspondente P descreve também uma recta r sobre α, o que obriga por sua vez P_1 a descrever uma recta r_1 sobre β, e, finalmente, P'_1 a descrever uma recta r'_1 sobre π. A cada recta de π fica pois a corresponder, por meio de Θ', uma recta de π. Que os pontos de e' são invariantes em Θ' é evidente, atendendo a que o mesmo acontece com os pontos de e, na homologia Θ. Finalmente, é fácil ver que a recta $P'P'_1$ passa necessariamente pelo ponto $O' \equiv OC.\pi$ qualquer que seja a posição de P' em π. Em resumo: a transformação Θ', projecção de Θ sobre π a partir de O é uma homologia plana de eixo e' e de centro O'. Podemos agora observar que esta conclusão subsiste, mesmo no caso em que os planos α, β coincidem, sendo Θ uma homologia do plano α sobre si mesmo. É-nos portanto fácil enunciar, em toda a generalidade, o seguinte

TEOREMA I – A projecção central duma homologia de eixo e e centro O sobre um plano é uma homologia plana que tem por eixo a projecção de e e por centro a projecção de O.

Note-se que o plano π pode em particular coincidir com um dos planos α, β.

Posto isto, podemos demonstrar ainda esta outra proposição:

TEOREMA II – Fixados num plano α dois ternos de pontos não colineares (A, B, C), (A^*, B^*, C^*), e um ponto O distinto dos primeiros, de modo que as rectas OA, OB, OC contenham respectivamente A^*, B^*, C^*, existe uma homologia plana, e uma só, de centro O, que transforma A em A^*, B em B^*, C em C^*.

Este teorema compõe-se de duas partes: por um lado, afirma-se que *existe* (pelo menos) uma homologia nas condições enunciadas (*teorema de existência*); por outro lado, afirma-se que não pode haver mais de *uma* homologia em tais condições (*teorema de unicidade*). Vamos demonstrar separadamente cada uma destas afirmações.

a) *Demonstração de existência.* Consideremos sobre um plano α dois ternos de pontos (A, B, C), (A^*, B^*, C^*) nas condições do enunciado (fig. 16).

Conduzamos por O uma recta r qualquer não assente sobre α e fixemos sobre r dois pontos O_1, O_2 distintos entre si e distintos de O. É claro que o ponto A não pode pertencer à recta r, a não ser que coincida com O, o que é contra a hipótese. Então, as rectas O_1A e O_2A^*, cada uma das quais tem dois pontos distintos no plano Ar, devem assentar sobre este plano e portanto, sendo distintas, devem encontrar-se num ponto, próprio ou impróprio: designaremos esse ponto por $\overline{A}$. (Note-se que o ponto $\overline{A}$ não pode coincidir com O_1, de contrário a recta $O_2\overline{A}$ coincidiria com r e viria $A^* \equiv O$, o que é contra a hipótese. Ter-se-á ainda por razões idênticas $\overline{A} \not\equiv O_2$). Analogamente, podemos afirmar que as rectas O_1B e O_2B^* se encontram num ponto $\overline{B}$ ($\not\equiv O_1, O_2$), e que as rectas O_1C e O_2C^* se encontram num ponto $\overline{C}$ ($\not\equiv O_1, O_2$). Ora, é fácil de ver que os pontos $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ *não são colineares*. Com efeito, se o fossem, os pontos *A, B, C* (por ex.), como projecções de $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ sobre α a partir de O_1, também seriam colineares, o que é de novo contra a hipótese. Logo, os pontos $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ definem um plano que designaremos por β(1). Note-se ainda que O_1 e O_2 estão fora deste plano β; com efeito, se O_2 (por ex.) estivesse sobre β, os pontos A^*, B^*, C^*, como projecções de $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ sobre α a partir de O_2, deviam estar sobre a intersecção de α com β, o que é contra a hipótese de A^*, B^*, C^* não serem colineares.(2)

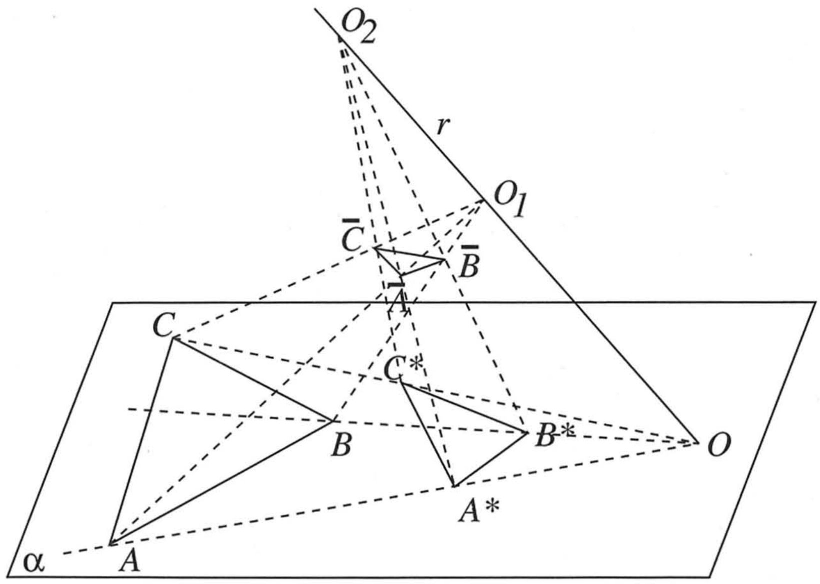


Fig. 16

Podemos pois passar de (*A, B, C*) para (A^*, B^*, C^*), mediante uma projecção Θ_1 de α sobre β a partir de O_1, seguida duma projecção Θ_2 de β sobre α a partir de O_2. A operação Θ resultante ($\Theta \equiv \Theta_2\Theta_1$) será manifestamente a projecção da homologia Θ_1 sobre α a partir de O_2. Ora, em virtude do teorema I, a transformação Θ é uma homologia plana (tendo por eixo a recta $\alpha.\beta$ e por centro o ponto *O*), que transforma *A* em A^*, *B* em B^*, *C* em C^*, q. e. d.

b) *Demonstração de unicidade*. Suponhamos agora que α é o

(1) – Os pontos $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ podem não ser todos próprios, mas já vimos (§ 6°) que, sendo não colineares, definem com certeza um plano.

(2) – O aluno deve ter sempre o cuidado de verificar se, na demonstração de cada teorema, intervêm efectivamente *todas* as hipóteses do teorema, de contrário algumas dessas hipóteses seriam surpérfluas e o teorema poderia então ser enunciado de maneira mais geral.

plano da fig. 17 e consideremos de novo sobre α dois ternos de pontos (A, B, C), (A^*, B^*, C^*) nas condições do enunciado.

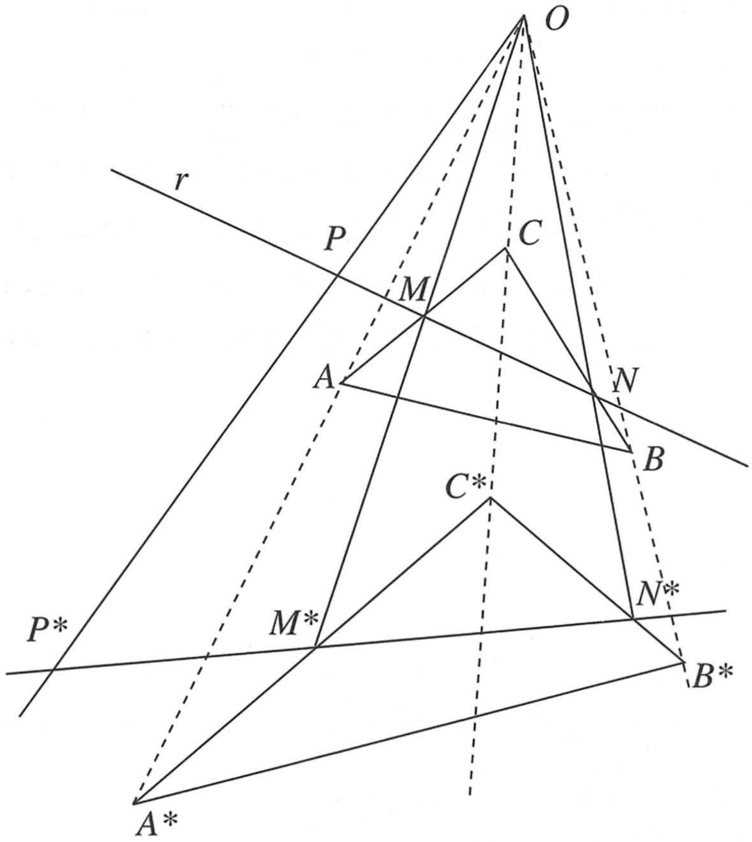


Fig. 17

Já vimos que existe *pelo menos* uma homologia Θ que transforma ordenadamente o primeiro terno no segundo. Seja então P um ponto qualquer de α distinto de O (se fosse $P \equiv O$ seria por força $P^* \equiv P$). Por P nós podemos conduzir uma recta r que encontre duas das rectas AB, BC, AC (no caso da figura, AC e BC) em dois pontos M, N distintos. Os transformados M^*, N^* de M, N por meio de Θ devem estar respectivamente sobre A^*C^*, B^*C^*, imagens de AC, BC em Θ. (visto que Θ é uma *colineação*). Por outro lado, as rectas MM^* e NN^* devem passar por O (visto que Θ é uma *homologia*). Podemos assim determinar M^* (intersecção de OM com A^*C^*) e N^* (intersecção de ON com B^*C^*). Finalmente, raciocinando do mesmo modo, conclui-se que o transformado de P por meio de Θ *não pode deixar de ser* o ponto P^*, intersecção de OP com M^*N^*.

Deste modo, a imagem de cada ponto P de α por meio de Θ só pode ser um *determinado* ponto P^* (função de P), o que significa precisamente que não pode haver outra homologia $\Theta_1 \not\equiv \Theta$, que transforme (A, B, C) em (A^*, B^*, C^*), q. e. d.

Observações:

I) Esta segunda parte do teorema II pode também ser enunciada dizendo que: "*Uma homologia plana fica determinada* (ou *individuada*) *quando, além do centro, se conhecem as imagens de três pontos dados não colineares, distintos do centro da homologia*".

II) Analizando a demonstração b), observa-se que não intervem ali a circunstância de serem invariantes em Θ os pontos do eixo: o facto de Θ ser uma homologia apenas é ali invocado para justificar que MM^*, NN^*, PP^* passam por O. Ficou, portanto provado, simultaneamente, o seguinte teorema: "*Se, numa colineação Θ entre dois planos α, β, as rectas que unem pontos correspondentes passam todas por um mesmo ponto, Θ é necessariamente uma homologia, isto é, deixa invariantes todos os pontos duma recta*" (o que já era evidente no caso de $\alpha \not\equiv \beta$, mas não no caso de $\alpha \equiv \beta$). Podemos portanto dar uma definição simplificada de homologia, como tínhamos enunciado no § 8°:

"Homologia entre dois planos α, β é toda a colineação de α sobre β, em que as rectas que unem pontos correspondentes passam todas por um mesmo ponto".

III) Chamam-se *raios* duma homologia as rectas que passam pelo centro de homologia. É evidente que estas rectas são transformadas em si mesmas, isto é, são *invariantes* na homologia considerada (embora cada um dos seus pontos o não seja necessariamente).

IV) *Na prática*, para determinar a imagem P^* de P (fig. 17), a recta r que se conduz por P deve ser escolhida de modo a evitar inúteis complicações. Assim, por exemplo, no caso da figura, conviria escolher a recta que passa por B, visto que já se conhece a imagem de B, e porque, além disso, a recta PB encontra AC num ponto favorável para que a construção se possa desenvolver *dentro dos limites do desenho*.

V) "*Numa homologia, duas rectas correspondentes encontram-se sempre num ponto do eixo.*" Com efeito, basta notar que, sendo invariante o ponto de encontro R de cada recta r com o eixo da homologia, a imagem r^* de r deve ainda passar por R ($\equiv R^*$). Esta observação indica-nos a maneira de determinar o eixo duma homologia plana quando esta é definida por três pares de pontos homólogos (fig. 18). As duas rectas correspondentes AB e A^*B^* encontrar-se--ão num ponto R do eixo. Analogamente, AC e A^*C^* encontram-se num ponto S do eixo. Como se tem $R \not\equiv S$, o eixo e fica definido pelos pontos R, S. *Como verificação*, as rectas BC, B^*C^* devem encontrar-se ainda num ponto de e (que, no caso da figura, está fora dos limites do desenho). Se não conviessem as rectas consideradas, determinar-se-iam outros pares de rectas correspondentes em posição mais favorável. Pode também acontecer que o eixo fique fora dos limites do desenho ou seja até a recta imprópria do plano do desenho.

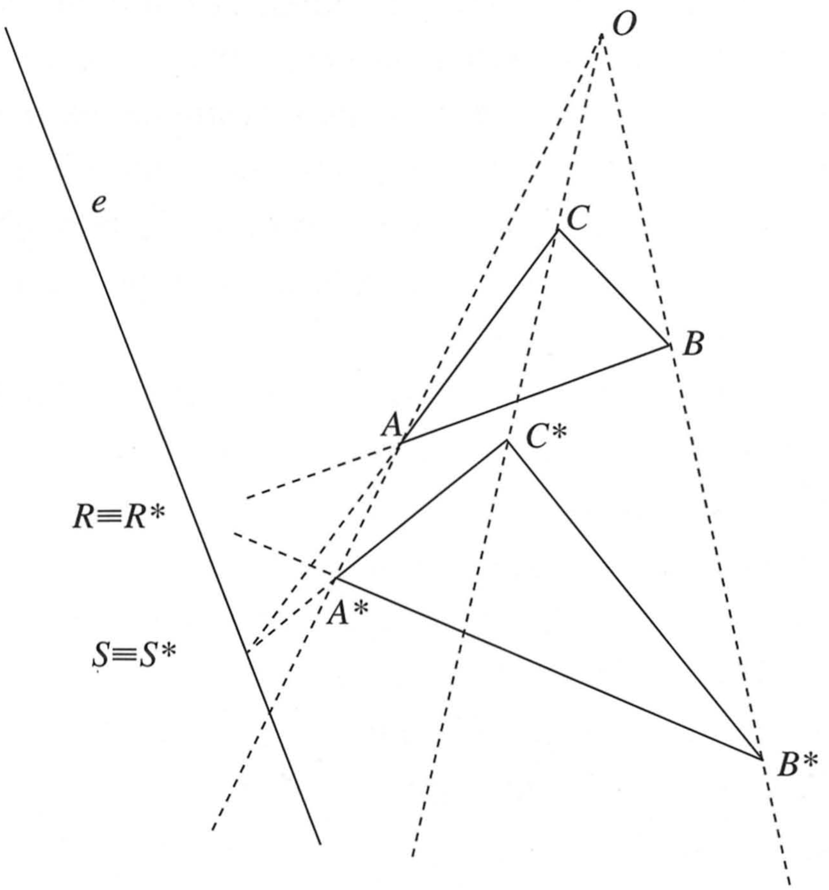


Fig. 18

VI) "*Se uma recta é paralela ao eixo da homologia, também a sua homóloga deve ser paralela ao eixo*" (pois que devem ambas encontrar-se no ponto impróprio do eixo).

Do teorema II deduz-se o seguinte

COROLÁRIO – Fixados num plano α um ponto O, uma recta e e dois pontos A, A^*, colineares com O, distintos de O e não pertencentes a e, existe sempre uma homologia, e uma só, de centro O e eixo e que transforma A em A^*.

Com efeito, sejam B e C pontos distintos de e (fig. 19). Pondo $B^* \equiv B$ e $C^* \equiv C$, os dois ternos de pontos (A, B, C), (A^*, B^*, C^*) verificam a hipótese do teorema II. Existe pois uma homologia plana Θ, e uma só, com centro em O, que converte A em A^*, B em B^*, C em C^*. Como, por outro lado, se tem $B \equiv B^*$, $C \equiv C^*$, segue-se que a recta BC ($\equiv e$) é o eixo da homologia Θ, o que acaba de demonstrar o corolário.

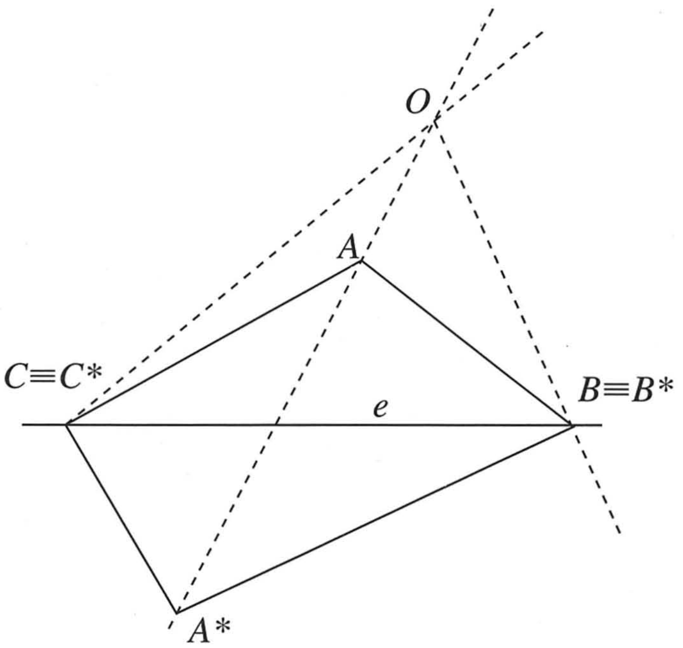


Fig. 19

A afirmação de unicidade contida neste teorema pode ainda enunciar-se dizendo que:

"*Uma homologia plana fica determinada quando se conhecem o centro, o eixo e a imagem dum ponto dado, distinto do centro e não situado sobre o eixo.*"

Notemos por último que, numa homologia plana, os transformados dos pontos podem ser comodamente determinados em certos casos, usufruindo da invariância dos pontos do eixo. Assim, p. ex., no caso da fig. 20, em que a homologia Θ se supõe definida pelo centro O, pelo eixo e e pelo par ordenado (A, A^*) de pontos homólogos, para achar o transformado do ponto P, *não pertencente ao raio OA*, uniu-se A com P, achou-se a intersecção R de AP com o eixo e, *atendendo à invariância do ponto R*, obteve-se a imagem da recta AP, unindo A^* com R^* ($\equiv R$): o transformado de P será pois o ponto P^*, intersecção de A^*R^* com o raio OP. Se o ponto dado, M, *pertence ao raio OA,* este processo é inaplicável, mas bastará então começar por achar o transformado dum ponto P que não esteja nessas condições e substituir, quanto ao resto, o par (A, A^*) pelo par (P, P^*).

É claro que a transformação inversa Θ^{-1} da homologia Θ será a homologia definida pelo mesmo centro, o mesmo eixo e o par ordenado *inverso* (A^*, A). Se $A \equiv A^*$, tem-se $\Theta \equiv I$.

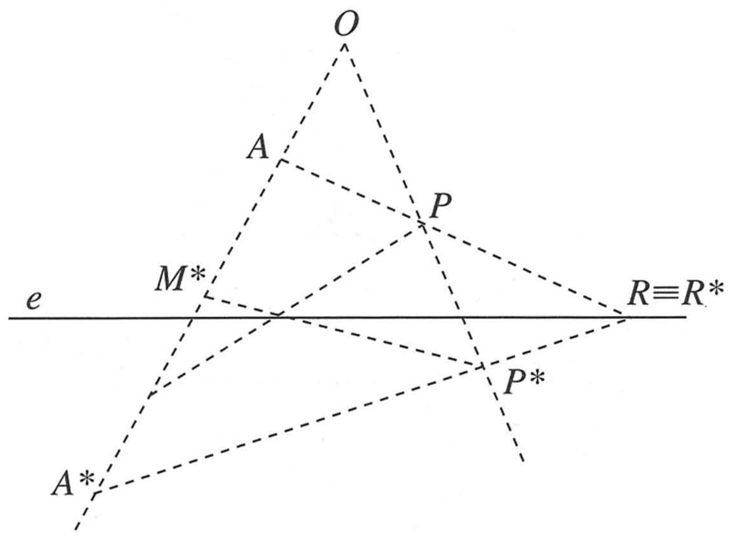


Fig. 20

§ 10.° Casos particulares da homologia

Convém considerar separadamente vários casos notáveis de homologia entre dois planos α, β distintos ou coincidentes.

1.° Caso: *O centro está sobre o eixo* (O —•— e). É fácil ver que, nas considerações precedentes, nada se opõe a que o centro da homologia pertença ao eixo, *desde que se trate duma homologia plana*. Neste caso a homologia diz-se *especial*.

2.° Caso: *O centro é um ponto impróprio*. Seja d a direcção definidora do ponto impróprio O, isto é, $O \equiv \infty_d$. Se os planos α, β são distintos, a homologia Θ será agora, manifestamente, uma projecção paralela de α sobre β (segundo a direcção d), que é, como vimos, uma transformação afim (fig. 2). Se $\alpha \equiv \beta$, é fácil ver que se trata ainda duma transformação afim. Em qualquer dos casos a transformação Θ é chamada uma *homologia afim* e d a direcção da homologia. É claro que os raios da homologia (isto é, as rectas que passam pelo centro O) são agora as rectas com a direcção d.

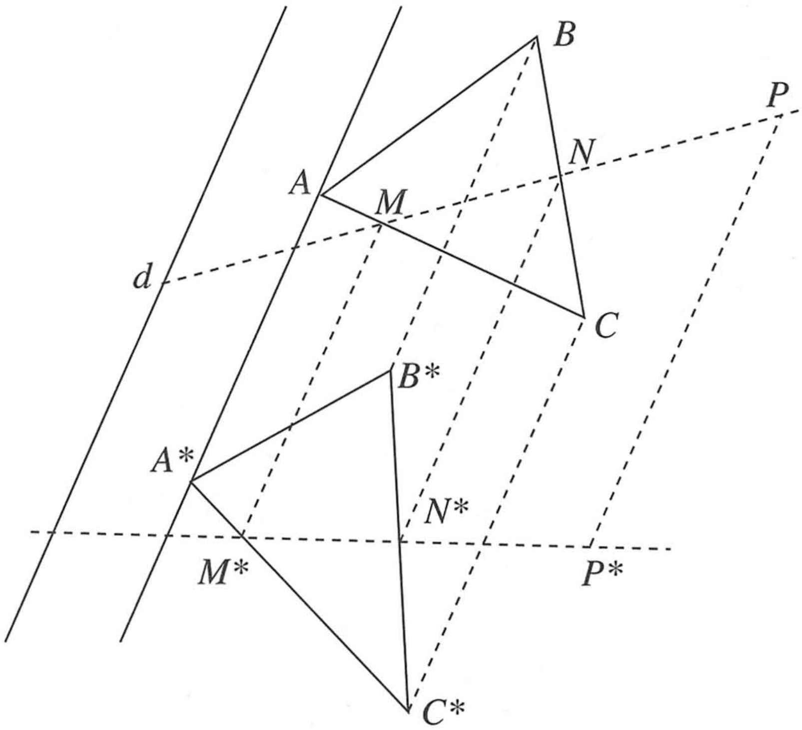


Fig. 21

Na fig. 21, a homologia afim é definida pela direcção d e pelos dois ternos homólogos (A, B, C), (A^*, B^*, C^*) de pontos não colineares. A determinação do transformado P^* de P é perfeitamente análoga à que se fez na fig. 1. Observe-se ainda a analogia deste processo com o que se usa no sistema de Monge, quando, definido um plano não projectante por três pontos A, B, C não colineares, se pretende achar a projecção vertical P'' dum ponto do plano, conhecida a sua projecção horizontal P' ou vice-versa. A explicação do facto está precisamente em que:

A operação $P' \to P''$, que consiste em passar da projecção horizontal dum ponto P dum plano α não projectante para a projecção vertical do mesmo ponto é uma homologia afim (de ν_o sobre si mesmo), que tem por direcção a direcção das linhas de referência e por eixo as projecções (coincidentes) da intersecção de α com o segundo bissector.

No caso da fig. 21, a homologia afim supõe-se definida pelo eixo e e pelo par (M, M^*). As construções são perfeitamente análogas às da fig. 19, com a única diferença de que o centro O agora é impróprio ($O \equiv \infty_d$).

Se $d \,/\!/\, e$ (e só nesse caso), tem-se ∞_d -•- e: a homologia afim é *especial*.

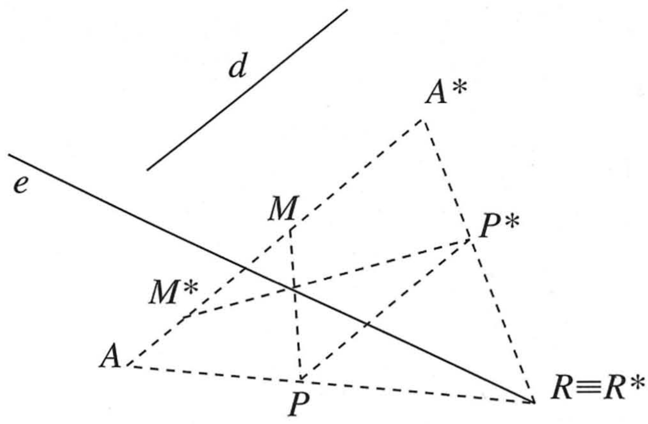


Fig. 21

Se $d \perp e$, a homologia diz-se *ortogonal*. É o caso dos rebatimentos.

Quando se rebate um plano α, *não projectante horizontal, sobre um plano de nível* ν, *a operação que consiste em passar da projecção horizontal* P' *de cada ponto de* α *para a projecção horizontal* $\overline{P'}$ *do mesmo ponto rebatido é uma homologia ortogonal que tem por eixo a charneira do rebatimento* (*intersecção de* α *com* ν). É claro que esta proposição continua a ser válida se substituirmos os termos "horizontal", "nível", P', $\overline{P'}$, ν, respectivamente por "vertical", "frente", P'', $\overline{P''}$, φ.

No caso da fig. 22, supõe-se o plano α definido por uma horizontal n e por um ponto P fora de n ($\alpha \equiv Pn$).

Trata-se do rebatimento de α sobre o plano de nível ν que passa por n (será n pois a charneira). Para determinar $\overline{P'}$ construiu-se o triângulo de rebatimento $[P_o P' P^*]$: $P' P^* \perp P' P_o$, $\overline{P' P^*}$ = dist (P'', n'') (diferença entre a cota de P e a cota de ν); dist ($\overline{P'}$, n') = $\overline{P_o\, P^*}$. Uma vez determinado $\overline{P'}$, fica definida uma homologia afim, pelo eixo e', pela direcção d ($\perp n'$) e por um par ordenado de pontos homólogos (P', $\overline{P'}$), o que permite determinar o transformado $\overline{M'}$ de qualquer outro ponto M', aplicando as considerações precedentes. (Em certos casos pode ser preferível tornar a utilizar triângulos de rebatimento, o que é agora mais fácil, atendendo a que todos são semelhantes).

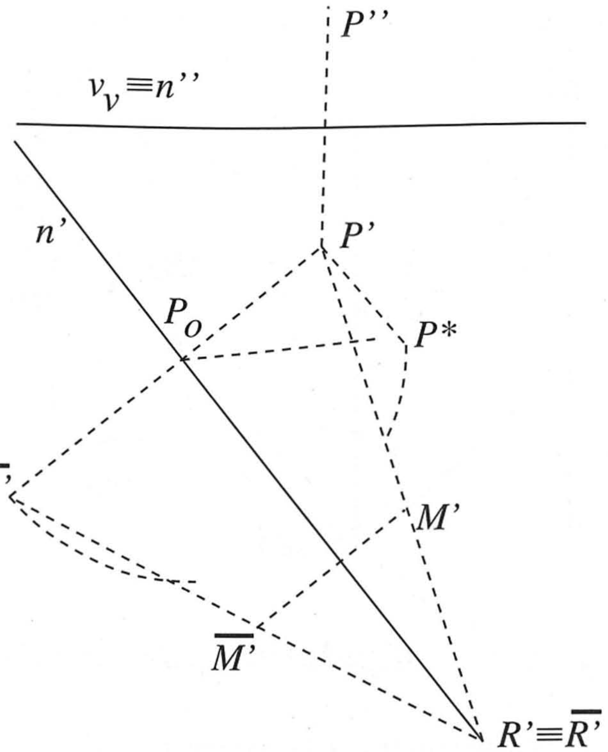


Fig. 22

3º Caso: *Eixo impróprio e centro próprio.* Se os dois planos α, β são distintos, o eixo e da homologia Θ (de α sobre β) é sempre a intersecção $\alpha\beta$: então, e será impróprio quando se tiver α // β. Ora Θ é, neste caso, a projecção de pontos de α sobre β a partir de O (fig. 23) – a qual, por ser α // β se reduz manifestamente a uma homotetia de centro O (caso da projecção cinematográfica).

Se $\alpha \equiv \beta$, é fácil ver que a homologia é ainda uma homotetia (neste caso plana). Com efeito, consideremos (fig. 24) uma homologia plana Θ definida pelo centro O, próprio, pelo eixo e, (impróprio) e por um par ordenado (A, A') de pontos homólogos. Dado um ponto P qualquer fora de OA, o seu transformado P' por meio de Θ será a intersecção do raio OP com a recta r' que passa por A' e encontra AP num ponto de e – isto é, num ponto impróprio, o que significa que r' deve ser // r. Trata-se manifestamente duma homotetia de centro O e de razão igual, em valor absoluto, a $\overline{OP'} / \overline{OP}$.

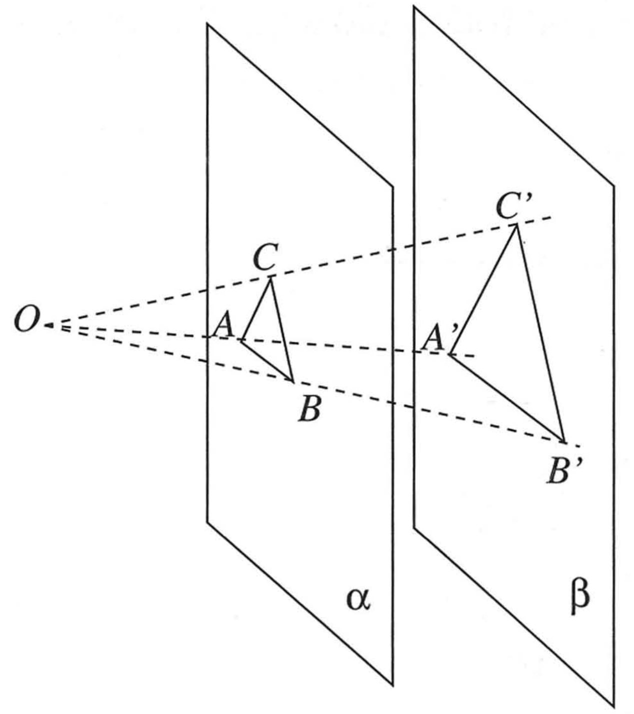


Fig. 23

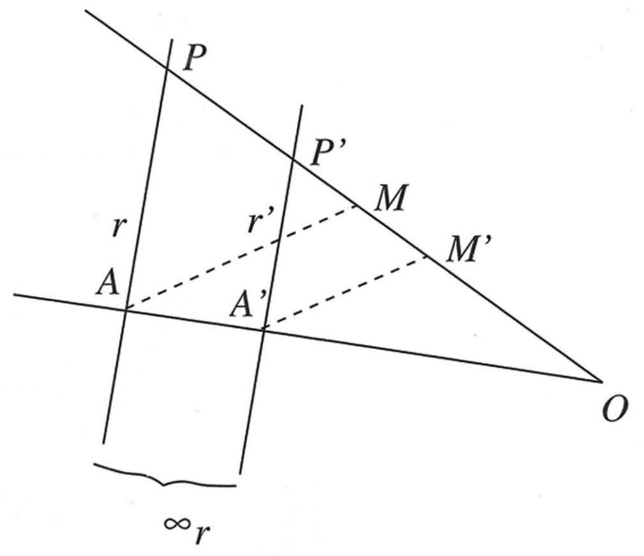


Fig. 24

As homotetias planas podem pois definir-se em $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ como sendo as homologias planas de centro próprio e eixo impróprio.

4° Caso: *Centro e eixo impróprios.* Se $\alpha \not\equiv \beta$, trata-se duma projecção paralela de α sobre β, a qual, por ser $\alpha /\!/ \beta$, se reduz a uma translação.

Se $\alpha \equiv \beta$, trata-se ainda duma translação (neste caso plana). Com efeito, consideremos (fig. 25) uma homologia plana Θ definida pelo centro O, impróprio ($\equiv \infty_d$) e pelo eixo e, também impróprio. A única diferença entre este caso e o da fig. 24 está em que o centro agora é impróprio (homologia afim). É evidente que Θ se reduz à translação plana definida pelo vector $A'-A$. *As translações planas podem, pois, definir-se como sendo as homologias planas de centro e eixo impróprios.* É ainda de notar que se tem neste caso $O \in e$: as translações são pois *homologias especiais* (1° caso).

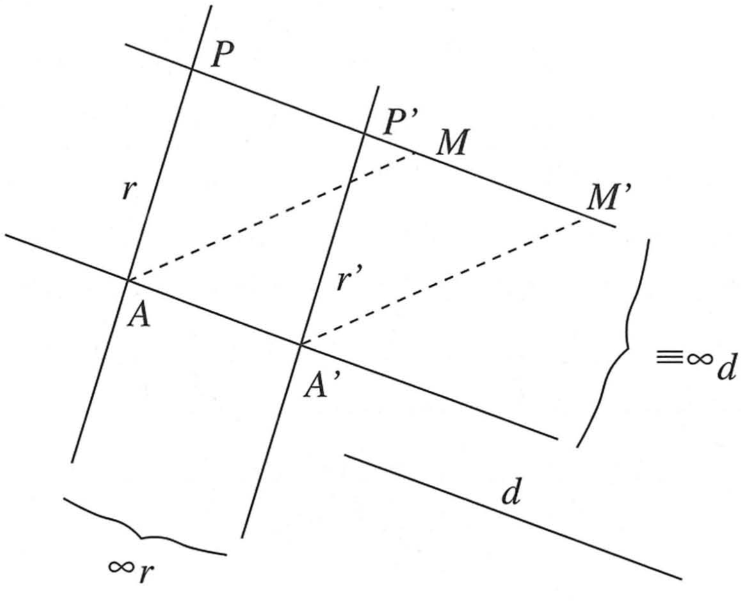


Fig. 25

§ 11.° Rectas limites duma homologia

Seja Θ uma homologia entre dois planos α, β (distintos ou coincidentes). Chamaremos *primeira recta limite* (ou *de fuga*) da homologia Θ a transformada da recta imprópria de α por meio de Θ e *segunda recta limite* (ou *de fuga*) de Θ a recta que é transformada por Θ na recta imprópria de β. É imediato que a segunda recta limite de Θ coincide com a primeira recta limite de Θ^{-1} e vice-versa.

Este conceito já se nos tinha apresentado no §7°, no caso $\alpha \not\equiv \beta$. Vamos agora estudá-lo no caso de $\alpha \equiv \beta$.

Consideremos então uma homologia plana Θ, individuada pelo centro O, pelo eixo e e por um par ordenado (A, A') de pontos homólogos. Representemos por i, j, respectivamente, a primeira e a segunda recta limite de Θ; em símbolos

$$i \equiv \infty'_\alpha, \; j' \equiv \infty_\alpha,$$

ou ainda:

$$i \equiv \Theta\,(\infty_\alpha), \; j \equiv \Theta^{-1}\,(\infty_\alpha).$$

$P \equiv \infty_r$

$Q' \equiv \infty_s$

$r \begin{cases} \sim // e \\ \sim // OA \end{cases}$

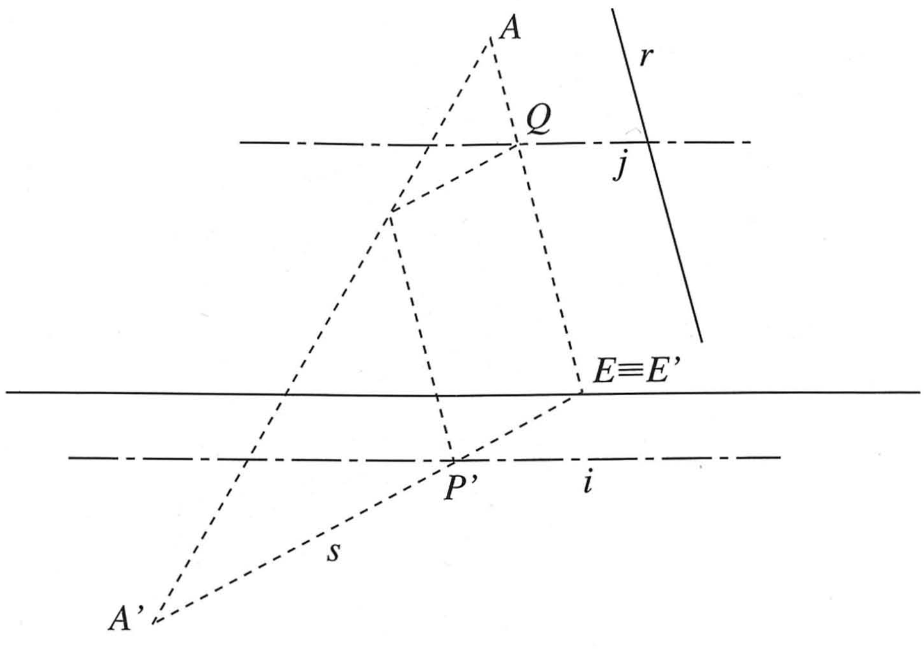


Fig. 26

Ora notemos que, sendo as rectas *i*, ∞_α correspondentes em Θ devem encontrar-se num ponto de *e* (Obs. V, § 9º) o qual ponto não pode deixar de ser impróprio, visto que todos os pontos de ∞_α o são: tem-se pois $i // e$. Analogamente $j // e$. Isto é: *as rectas limites são sempre paralelas ao eixo*. Portanto, para determinar *i*, *j* basta determinar um ponto de cada uma destas rectas.

Proponhamo-nos então determinar *i*, imagem de ∞_α. Para isso, consideremos um ponto *P* qualquer de ∞_α fora de *e* e de *OA*, isto é, o ponto impróprio duma recta *r* de α não paralela nem a *e* nem a *OA*. A determinação de P' faz-se segundo o processo já conhecido: 1) une-se *A* com *P* (isto é, conduz-se por *A* uma paralela a *r*); 2) acha-se a intersecção *E* da recta *AP* com *e*; 3) une-se *E* com A'; 4) acha-se a intersecção P' de $A'E$ com o raio *OP* (isto é, com a paralela a *r* conduzida por *O*). Para se ter *i*, resta agora conduzir por P' uma paralela a *e*, visto que, como já se disse, $i // e$.

Para determinar *j*, basta lembrar que *j* é a imagem de ∞_α por meio de Θ^{-1} e que, portanto, o processo é idêntico ao anterior, substituindo-se o par ordenado (A, A') pelo par inverso (A', A). Com o intuito de aproveitar parte das linhas já traçadas, escolheu-se como ponto de ∞_α fora de *e* e de *OA* o ponto impróprio da recta $s \equiv A'P'$, ponto que designamos por Q'. Basta portanto achar o transformado de Q' por meio de Θ^{-1} e conduzir por *Q* uma paralela a *e*.

Observações:

I) Confrontando a fig. 26 com a fig. 13 (pag. 210), observa-se que já ali nós tínhamos utilizado intuitivamente o processo agora indicado para traçar as rectas de fuga *i, j*. Embora a fig. 13 se refira a uma homologia Φ *no espaço* (entre dois planos distintos α, β), a verdade é que, na figura *efectivamente* desenhada, existe apenas a projecção da homologia Φ *sobre o plano da figura*, a qual projecção é, segundo o teorema I, uma *homologia plana*, definida pelo eixo *e*, pelo centro *O* e pelo par ordenado (*P, P′*). Note-se ainda que se trata ali duma projecção paralela que, como é sabido, respeita o paralelismo das rectas.

II) Pode, em particular, acontecer que se tenha $i \equiv j \equiv \infty_\alpha$, isto é, que a recta imprópria de α seja invariante em Θ. Ora, numa homologia $\Theta \not\equiv I$, as únicas rectas invariantes são, além do eixo, os raios da homologia (Obs. IV, § 9°). Logo, a recta imprópria será invariante em Θ, só nos seguintes casos:

a) Sendo ∞_α um raio da homologia, isto é, sendo *O* impróprio: caso da homologia afim (2° caso do § 10°).

b) Sendo ∞_α o eixo, mas não um raio da homologia: caso das homotetias (3° caso do § 10°).

c) Sendo ∞_α ao mesmo tempo o eixo e um raio da homologia: caso das translações (4° caso do § 10°).

É claro que, em qualquer destes casos, a homologia é uma transformação afim, visto que transforma os pontos impróprios em pontos impróprios; mas importa notar que *as homotetias, sendo ao mesmo tempo homologias e afinidades, não são homologias afins no sentido aqui adoptado, uma vez que o centro da homologia é próprio.*

§ 12.° Perspectiva dum segmento de recta

Ao contrário do que sucede nas afinidades, *a imagem projectiva dum segmento de recta nem sempre é aquilo a que se costuma chamar um segmento de recta.* Este facto é bem visível na fig. 26 em que se considera a projecção de centro *O* sobre a recta *r*. O segmento $\overline{AB}$ não é, de modo algum, transformado no segmento $\overline{A'B'}$: basta notar que os pontos *M, N situados entre A* e *B* são projectados em pontos *M′, N′ não situados entre A′, B′* (não é pois respeitada a relação de "situado entre"), enquanto o ponto K é projectado para o infinito. A imagem de $\overline{AB}$ será pois o complementar do segmento $\overline{A'B'}$, na recta projectiva r, incluindo os extremos A', B'. Diremos então, interpretando este facto, que dois pontos próprios duma recta projectiva separam nessa recta dois *segmentos projectivos*: um deles será formado só por pontos próprios (*segmento próprio* ou, simplesmente, *segmento*), o outro conterá o ponto impróprio da recta (*segmento impróprio* ou *pseudo-segmento*). Recordemos que um facto análogo se verifica na circunferência, em que dois pontos separam sempre dois arcos de círculo.

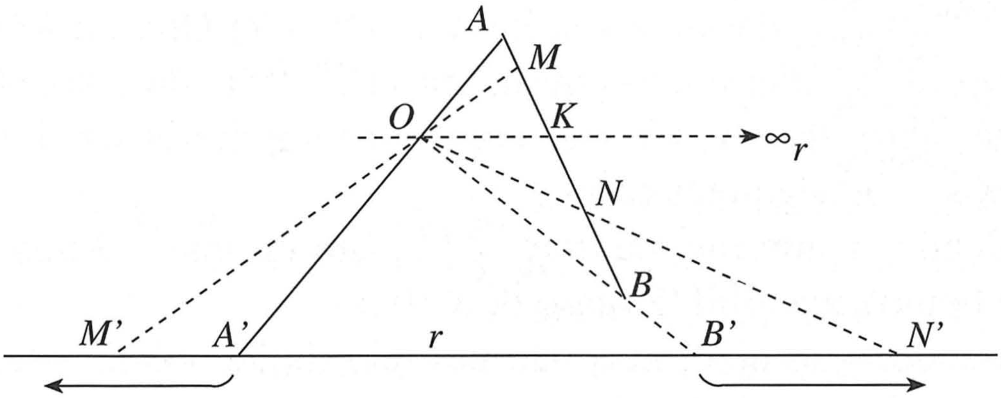


Fig. 27

Seja então Θ uma homologia de α sobre β e j a segunda recta limite de Θ. Dado um segmento $\overline{AB}$ de α, quatro casos se podem verificar: 1°) ou j não encontra $\overline{AB}$ e então Θ ($\overline{AB}$) é ainda um segmento (próprio); 2°) ou j encontra $\overline{AB}$ num ponto K entre A e B (que será transformado num ponto impróprio) e então $\Theta(\overline{AB})$ será um pseudo-segmento; 3°) ou j passa por um dos extremos de $\overline{AB}$ e então $\Theta(\overline{AB})$ será uma semi-recta (com o ponto impróprio); 4°) ou, finalmente, j contém $\overline{AB}$ e então $\Theta(\overline{AB})$ será uma parte de ∞_β.

Estas observações têm importância capital, quando se pretende construir a imagem homológica duma figura composta de segmentos de recta. Como exemplo, consideremos uma homologia plana Θ definida pelo eixo e e pela segunda recta limite j (fig. 28) e proponhamo-nos determinar a imagem, por meio de Θ, do triângulo $[ABC]$, que é atravessado pela recta j nos pontos M, N ($M \mathrel{-\!\bullet\!-} AC$; $N \mathrel{-\!\bullet\!-} BC$).

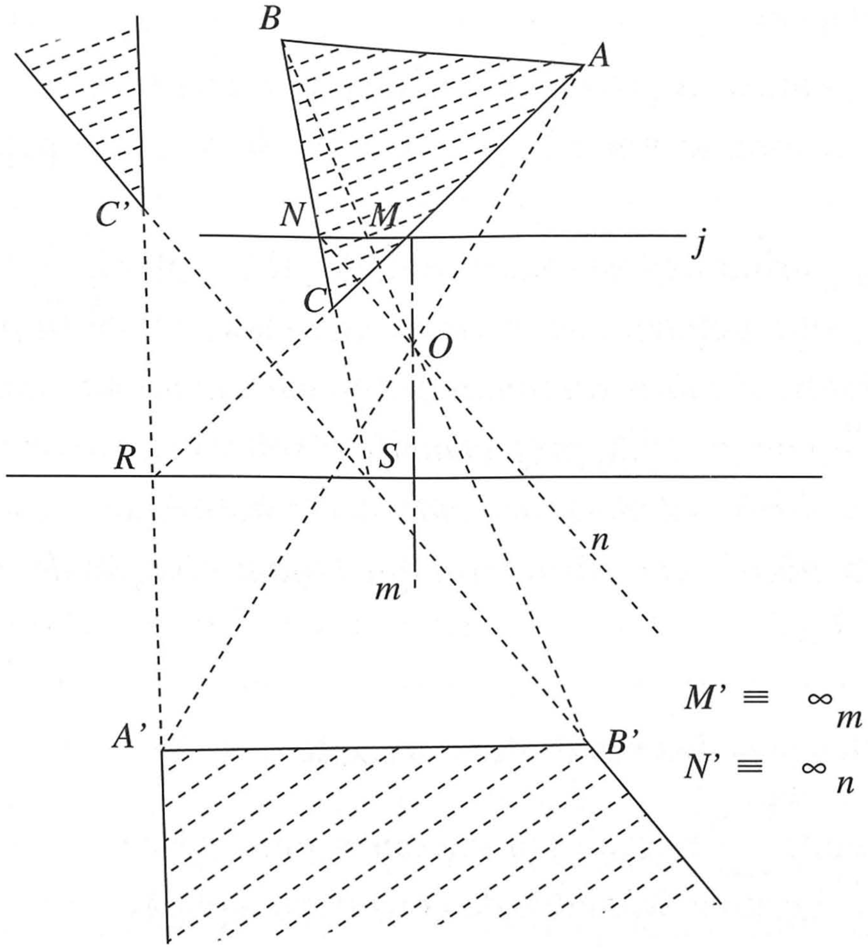


Fig. 28

Sendo M, N pontos de j, os seus transformados M', N' serão impróprios e, precisamente, os pontos impróprios dos raios $m(\equiv OM)$ e $n(\equiv ON)$, aos quais devem pertencer M', N'. O transformado de A pode agora ser determinado segundo o processo geral: 1) acha-se a intersecção R de AM com e; 2) une-se R com $M'(\equiv \infty_m)$, isto é, conduz-se por R uma paralela a m; 3) o ponto A' procurado é a intersecção do raio OA com RM'. A transformada da recta RA será pois a recta RA'. Analogamente se determina B' e a imagem SB' da recta SB. As rectas RA' e SB' encontram-se num ponto que não pode deixar de ser a imagem C' de C, visto que $C \equiv RA.SB$.

É fácil ver agora, recordando as observações precedentes, que a imagem do *segmento* $\overline{AB}$ é o *segmento* $\overline{A'B'}$, enquanto as imagens dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, o pseudo-segmento de extremos B', C' e o pseudo-segmento de extremos A', C'. A imagem do triângulo $[ABC]$ não é portanto um triângulo na acepção comum, visto que é formado por uma região ilimitada do plano.

Observações:

I) Em geometria projectiva, chama-se triângulo (completo) ao conjunto constituído por três pontos não colineares e pelas rectas que os unem.

II) A doutrina exposta neste número tem aplicação no estudo das sombras em geometria descritiva, visto que *a sombra produzida por uma figura F sobre um plano* α *a partir dum ponto luminoso P é a projecção ou parte da projecção de F sobre* α *a partir de P (para que haja sombra dum dado ponto A é preciso que A esteja entre P e* α, *o que não é necessário para que haja projecção de A* sobre α *a partir de P).*

§ 13.° Aplicações dos resultados precedentes

O conceito de homologia encontra numerosas aplicações em geometria descritiva. Métodos de construção aplicáveis em questões diversas aparecem idênticos na sua essência à luz deste conceito, que introduz assim unidade onde havia aparente diversidade. Compete ao matemático tirar o máximo partido de ideias unificadoras como esta, tendo em vista não só a economia e a clareza de pensamento, como ainda a possibilidade de novas descobertas.

Já vimos (§ 10°) como o conceito de homologia afim nos aparece em dois tipos de problemas da geometria de Monge. Estudaremos agora a aplicação do mesmo conceito ao problema das secções planas de pirâmides e prismas.

a) Consideremos uma pirâmide pentagonal $[VABCDE]$, da qual se conhecem *unicamente* a projecção V' do vértice e a projecção $[A'B'C'D'E']$ da base, sobre um plano π qualquer, a partir dum ponto O, próprio ou impróprio, situado fora da superfície da pirâmide e do plano da base. Imaginando que se trata duma pirâmide vista por um observador do ponto O (*ponto de vista*), devemos distinguir as arestas visíveis das invisíveis, traçando estas últimas a pontuado (como se fez na fig. 29, em que o plano de projecção π é o plano da figura).

São dadas, por outro lado, as projecções A'_1, B'_1, D'_1 (a partir de O) de três pontos A_1, B_1, D_1 que se supõem pertencentes às arestas VA, VB, VD da pirâmide. *Pretende-se determinar a projecção completa da secção feita na pirâmide pelo plano* $A_1\ B_1\ D_1$.

Se as projecções A'_1, B'_1, D'_1 forem colineares, a resolução é imediata: o plano $A_1\ B_1\ D_1$ será projectante (isto é, conterá o ponto O) e a projecção da secção reduzir-se-á a um segmento de recta.

Suponhamos que A'_1, B'_1, D'_1 não são colineares (fig. 29). É evidente que se passa da base da pirâmide para a referida secção, mediante uma projecção cónica de centro V, isto é, mediante uma homologia Θ de centro V (entre o plano da base e o plano da secção). A projecção desta homologia sobre π a partir de O será, segundo o teorema I, uma homologia plana Θ' de centro V', a qual está definida por dois ternos homólogos de pontos não colineares: (A', B', D'), (A'_1, B'_1, D'_1). Resta pois determinar os transformados C'_1 e E'_1, de C' e E' por meio de Θ', para o que basta aplicar o processo atrás indicado [teorema II, b)], tendo em vista a Obs. IV.

Para determinar C'_1 utilizou-se a recta $C'D'$, que vai encontrar $A'B'$ em M'. O transformado M'_1 de M' será a intersecção de $A'_1\ B'_1$ com o raio $V'M'$. Unindo M'_1 com D'_1, achou-se imediatamente C'_1 sobre $V'C'$.

Para determinar E'_1 a construção foi mais complexa, apenas com o objectivo de economizar espaço. Utilizou-se a recta $r'(\multimap E')$ que encontra $B'C'$ e $C'D'$ nos pontos N', S', cujos transformados N'_1, S'_1 definem r'_1. Finalmente: $E'_1 \equiv r'_1.V'E'$.

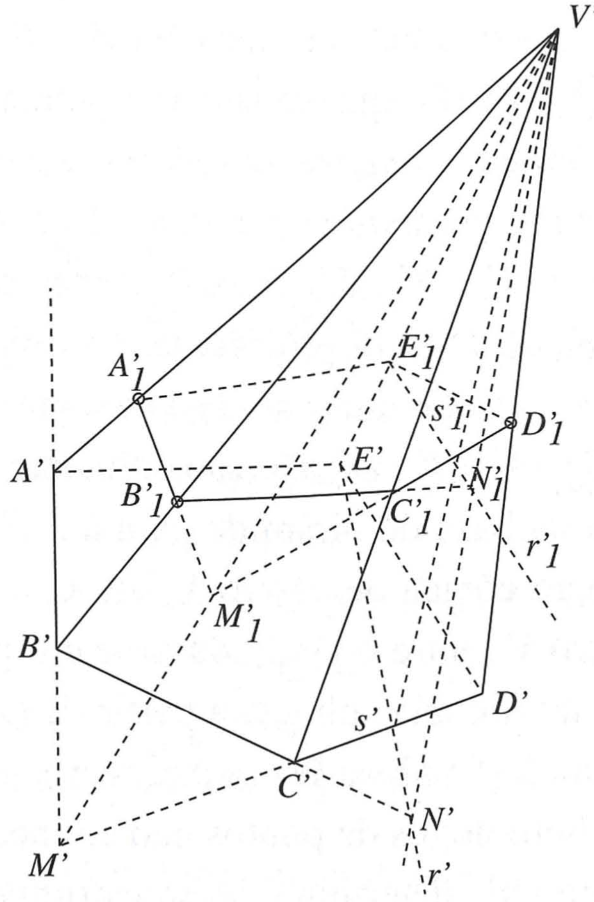


Fig. 29

Em muitos casos pode ser útil determinar o eixo da homologia Θ', atendendo à Obs. V (§ 9°), o que permitirá usufruir da invariância dos pontos do eixo, tal como se indicou na fig. 18. É claro que este processo será inaplicável se o eixo estiver fora dos limites do desenho. Pode mesmo acontecer que o eixo venha a ser impróprio, mas então, sendo V' próprio, já sabemos que Θ' se reduz a uma homotetia: os lados de $[A'_1\ B'_1\ C'_1\ D'_1\ E'_1]$ seriam então paralelos aos lados correspondentes de $[A'\ B'\ C'\ D'\ E']$.

No caso estudado, considerámos três pontos A_1, B_1, D_1 *pertencentes a arestas laterais da pirâmide*. Mas podíamos ainda supor que *um ou dois dos pontos dados pertencessem a arestas da base*. O processo não sofreria alterações substanciais: basta notar que *todo o ponto da secção que esteja sobre a base é necessariamente um ponto do eixo da homologia* Θ, visto que o eixo de Θ é a intersecção do plano da base com o plano da secção.

b) O método anterior subsiste para o caso em que O e V, centro de projecção e vértice da pirâmide, são impróprios: *caso do prisma em projecção paralela*. É claro que, então, V' será também impróprio e, por isso, a homologia Θ' atrás considerada será agora uma homologia afim, à qual se aplicam as observações do § 10°, 2° caso.

Na fig. 30 considerou-se um prisma pentagonal de bases não projectantes. Foram dadas as projecções de três pontos A_1, D_1, M_1, dos quais A_1, D_1 pertencentes a arestas laterais e M_1 pertencente ao lado BC da base; e pretendeu-se determinar a secção feita no prisma pelo plano $A_1D_1M_1$. O eixo da homologia afim Θ', que faz passar da projecção da base para a projecção da secção, é a projecção t' da intersecção do plano da secção com o plano da base. Um dos pontos de t' será pois $M'_1(\equiv M')$; para determinar outro ponto de t', bastou achar a intersecção R' das rectas $A'D'$, $A'_1D'_1$ correspondentes em Θ'. Os pontos E'_1, C'_1, B'_1 puderam então ser determinados, explorando a invariância dos pontos do eixo.

Sucede porém aqui um facto que é preciso salientar: considerando o prisma à maneira usual, isto é, como um sólido limitado, o ponto B'_1 não pertencerá à secção e esta aparece portanto como um hexágono, $[A'_1N'_1M'_1C'_1D'_1E'_1]$.

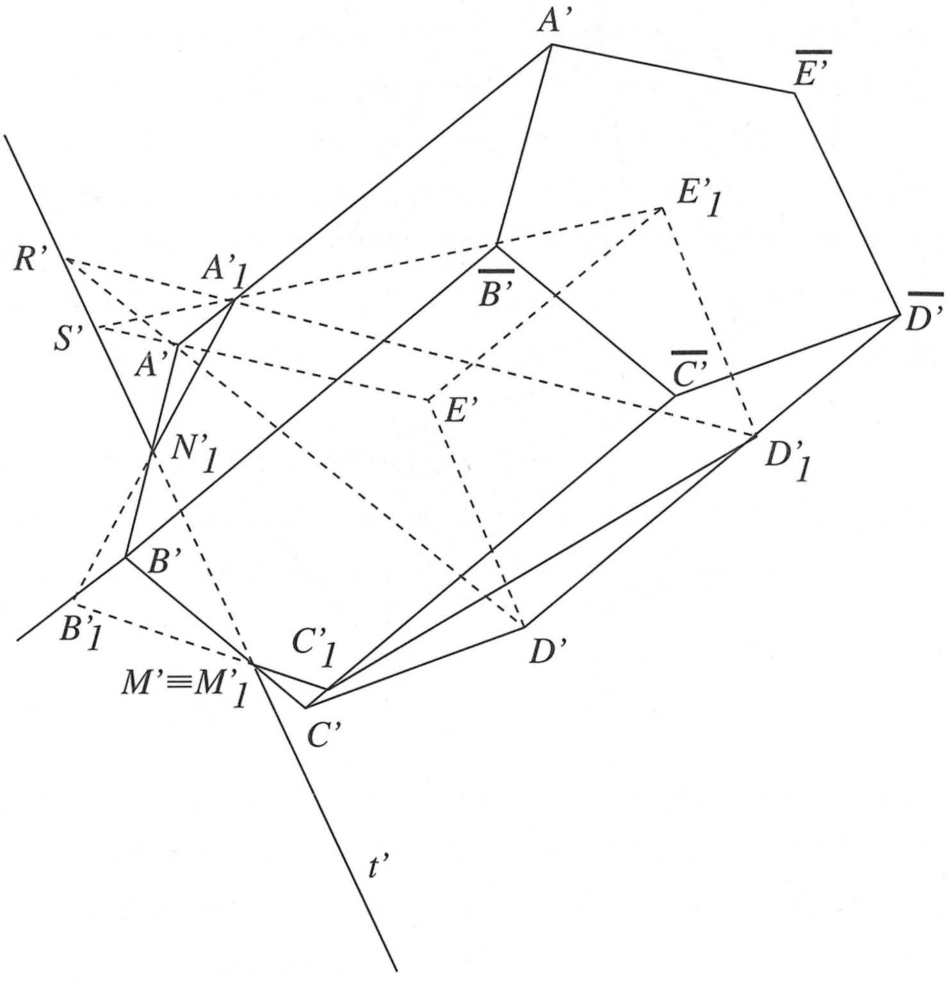


Fig. 30

c) As considerações precedentes aplicam-se, em particular, ao estudo das secções planas de prismas e pirâmides no sistema de Monge. Na fig. 31 considerou-se uma pirâmide triângular definida pelas projecções do vértice e da base, e um plano secante α, definido pelos traços horizontal e vertical. É claro que, da base $[ABC]$ da pirâmide, se passa para a secção $[A_1B_1C_1]$, projectando $[ABC]$ sobre α a partir de V: quer dizer, mediante uma homologia Θ de centro V e eixo h_α (intersecção do plano secante com o plano da base). Ter-se-á pois, *em projecção horizontal*, uma homologia plana Θ', de

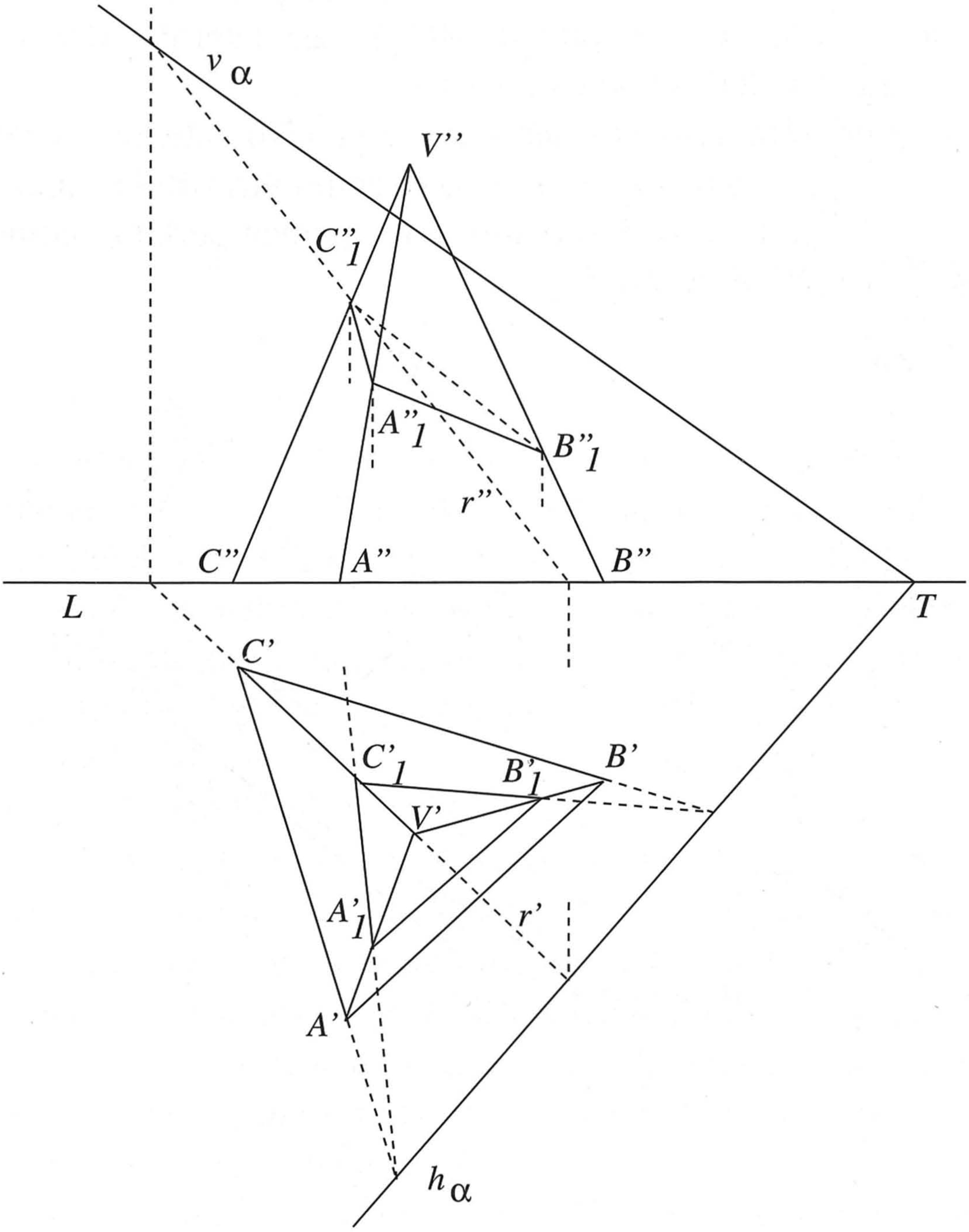


Fig. 31

centro V' e eixo $h_\alpha(\equiv h'_\alpha)$. Para acabar de definir a homologia Θ', basta então *tomar um ponto P qualquer de* ν_o, *tal que* $P \not\equiv V'$, $^{\bullet}\!/\, h_\alpha$, *e determinar a intersecção* P_1 *de VP com* α: o par ordenado (P', P'_1) define com V' e com h_α a homologia Θ' (corolário do teorema II). No caso da figura o ponto P escolhido foi o vértice C, mas nem sempre convém tomar para esse fim um vértice da base. Para achar a intersecção C_1 de VC com α bastou seguir o método geral, considerando a recta r de α cuja projecção horizontal coincide com $V'C'$.

Uma vez determinado C'_1, os restantes vértices A'_1, B'_1 foram determinados por considerações de homologia, atendendo à invariância dos pontos do eixo, h_α. As projecções verticais A''_1, B''_1 foram determinadas à maneira usual, traçando linhas de referência.

d) O método exposto pode, mais geralmente, aplicar–se ao estudo das secções planas de cones e cilindros. Como se sabe, dado um ponto V e uma linha qualquer $|d|$, chama-se *superficie cónica* de vértice V e directriz $|d|$ ao lugar geométrico das rectas que passam por V e se apoiam em $|d|$ (geratrizes da superfície). Quando V é impróprio, as geratrizes são paralelas entre si e a superfície diz-se *cilíndrica*. Em particular, a directriz $|d|$ pode ser uma poligonal: caso das pirâmides e dos prismas. Se $|d|$ é uma linha curva, o problema das secções planas pode ainda ser abordado pelo método anterior; simplesmente, como a projecção da secção deve agora ser determinada *ponto por ponto*, o traçado desta curva não pode ser, na prática, geometricamente rigoroso: contentamo-nos com determinar vários pontos, *bastante próximos para que a curva possa ser desenhada com aproximação satisfatória.*

O caso mais simples será aquele em que $|d|$ é uma circunferência. Deste caso trataremos em especial no § seguinte.

§ 14.° Secções cónicas

Chama-se *secção cónica* ou simplesmente *cónica* toda a secção plana duma superficie cónica de revolução (de vértice próprio ou impróprio). Se o plano secante passa pelo vértice, é evidente que a secção se reduz a um ponto ou a duas rectas (geratrizes), paralelas ou concorrentes, distintas ou coincidentes: então a cónica diz-se *degénere*. No caso contrário, a cónica diz-se *não degénere*; mas, como é de cónicas não degéneres que trataremos exclusivamente, o adjectivo será dispensado. As cónicas são também chamadas *linhas de 2^a ordem*, por razões que se conhecem na geometria analítica.

Chama-se *cone de 2^a ordem* ou *cone quádrico* todo o cone(1) que tem por directriz uma cónica (a cujo plano não pertença o vértice), análoga especificação para os cilindros. Demonstra-se em geometria analítica que *a secção plana dum cone de 2^a ordem é sempre uma cónica*, por outras palavras: *a projecção central duma cónica sobre um plano é sempre uma cónica (não sendo projectante o plano da cónica)*. Por outro lado, como vimos (dem. do teorema II), toda a homologia plana se pode obter mediante duas projecções centrais sucessivas; daqui resulta que:

A imagem homológica (ou perspectiva) duma circunferência é sempre uma cónica.

Posto isto, consideremos dois planos α, β não paralelos, uma circunferência $[C]$ desenhada sobre α e um ponto O fora de α e de β. A projecção de $[C]$ sobre β a partir de O será, como dissemos, uma cónica $[C]^*$. Seja então j a recta de α que se projecta em ∞_β a partir de O: isto é, a segunda recta limite da homologia Θ com centro em O, de α sobre β. Três casos se podem dar:

a) ou j corta $[C]$ em dois pontos M, N e então $[C]^*$ *tem dois pontos impróprios distintos* – os pontos impróprios das rectas OM e ON (caso da fig. 32);

b) ou j é tangente a $[C]$ e então $[C]^*$ tem um único ponto impróprio;

c) ou j não encontra $[C]$ e então $[C]^*$ não tem nenhum ponto impróprio.

Uma cónica é chamada uma *elipse*, uma *parábola* ou uma *hipérbole*, consoante o número dos seus pontos impróprios é 0, 1 ou 2. Como acabamos de ver, nenhum outro caso é possível. Diremos então que a família das cónicas se divide nos três *géneros*: elipse, hipérbole e parábola.

---

(1) – Para brevidade de linguagem, diz-se muitas vezes "cone" por "superfície cónica", "cilindro" por "superfície cilíndrica", "esfera" por "superfície esférica", conquanto os primeiros termos se refiram propriamente a *sólidos limitados*, que não a *superfícies ilimitadas*.

$$O \begin{cases} \bullet / \alpha \\ \bullet / \beta \end{cases}$$

$Oj \,//\, \beta$

$a^* \,//\, OM$
$b^* \,//\, ON$

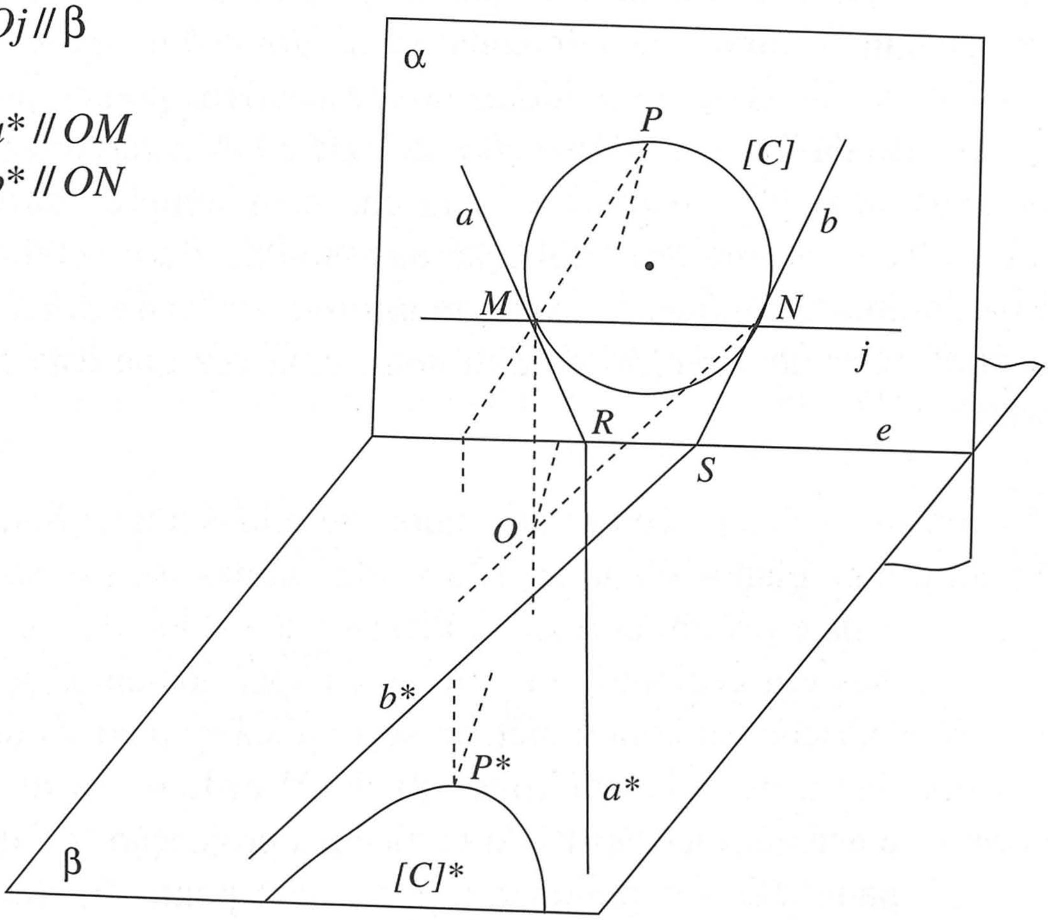


Fig. 32

Recordemos, por outro lado, que uma recta r se diz *secante* ou *tangente* a uma circunferência $[C]$, conforme o número de pontos comuns a r e a $[C]$ é 2 ou 1. Esta definição pode aplicar-se ainda às cónicas, e desde logo se reconhece que, se r é tangente a $[C]$, a imagem r^* de r por meio de uma homologia Θ será ainda tangente à imagem de $[C]$ por meio de Θ. Em particular, se j encontra $[C]$ em dois pontos M, N (caso da hipérbole – fig. 32), as tangentes a, b a $[C]$ em M, N serão convertidas por Θ nas tangentes a^*, b^* a $[C]^*$ *nos pontos impróprios* M^*, N^*. Se j é tangente a $[C]$ (caso da parábola), é claro que ∞_β será tangente a $[C]^*$. Pois bem:

Diz-se que uma recta é *assíntota* duma cónica quando é tangente à cónica num seu ponto impróprio. Do que precede resulta que:

A hipérbole tem duas assíntotas, ambas próprias; a parábola tem uma única assíntota e essa imprópria; a elipse não tem assíntotas.(1)

É óbvio que a assíntota deve passar pelo ponto impróprio em que é tangente à curva; daí o chamarem-se *direcções assintóticas das cónicas* as direcções definidoras dos respectivos pontos impróprios (no caso da fig. 32, as direcções de OM e ON serão direcções assintóticas de $[C]^*$); notemos todavia que nem sempre "direcção assintótica" é o mesmo que "direcção da assíntota": com efeito, no caso da parábola, conquanto exista uma *direcção assintótica*, não faz sentido falar de *direcção da assíntota*, uma vez que esta é imprópria.(2)

As considerações precedentes, embora referidas a uma homologia Θ entre dois planos distintos, são ainda válidas para o caso da homologia plana e podem portanto aplicar-se ao estudo das secções planas de cones em geometria descritiva. Ocupar-nos-emos apenas dos cones quádricos, embora o método seja aplicável a cones quaisquer. Consideremos pois um cone $[\gamma]$ de 2ª ordem, do qual se conheçam apenas a projecção V' do vértice e a projecção $[d]'$ da directriz, sobre um plano π qualquer, a partir dum ponto O, não pertencente a $[\gamma]$ nem ao plano de $[d]$. (No caso da fig. 33, tomou-se para $[d]'$ uma elipse). Consideremos dadas, além disso, a projecção A_1' dum ponto A_1 que supomos situado sobre uma geratriz VA do cone e a projecção t' duma recta t do plano $[\gamma]$ (referimo-nos sempre a projecções sobre π a partir de O). Representemos ainda por δ o plano de $|d|$ e por σ o plano $A_1 t$ (supõe-se $A^{\bullet}/t$).

Pretende-se determinar: a projecção da secção $[d]_1$ *feita por* σ *no cone* $[\gamma]$, *o género da cónica* $[d]_1'$ *(se é elipse, hipérbole ou parábola) e as assíntotas, se porventura as houver.*

Para isso, notemos que se passa de $[d]'$ para $[d]_1'$ mediante uma homologia plana Θ' definida pelo eixo t', pelo centro, V', e pelo par (A', A_1') de pontos homólogos; podem pois determinar-se diferentes

(1) – Mais tarde, em geometria projectiva, com a introdução dos chamados *elementos imaginários*, a elipse passa a ter duas assíntotas próprias (imaginárias).

(2) – Estas noções são depois generalizadas a curvas quaisquer.

pontos de $[d]'_1$, aplicando qualquer dos processos anteriormente descritos. *Para conhecer o género de* $[d]'_1$, *não temos mais do que determinar a segunda recta limite* j' *da homologia* Θ', *procedendo como foi indicado no* §11°: *a cónica* $[d]'_1$ *será uma hipérbole, uma parábola ou uma elipse, conforme* j' *encontrar* $[d]'$ *em dois pontos, um ou nenhum.* Na fig. 33 determinou-se j' segundo o processo indicado no §11°. E visto que j' encontra $[d]'$ em dois pontos M', N', a cónica $[d]'_1$ será uma hipérbole, cujos pontos impróprios são os das rectas $V'M'$, $V'N'$ (que definem portanto as direcções assintóticas). Finalmente, as assíntotas são as imagens por meio de Θ' das tangentes a $[d]'$ em M' e N': achadas as intersecções destas tangentes com o eixo t' da homologia, as assíntotas serão pois as rectas a'_1, b'_1 conduzidas por estes pontos paralelamente a $V'M'$, $V'N'$. Como na figura se considera o cone como um sólido (limitado pelo vértice e pela base), aparece apenas um ramo da hipérbole $[d]'_1$ e, este mesmo, truncado em t'; é claro que o outro ramo provém da segunda folha da superfície cónica, que já não faz parte do sólido.

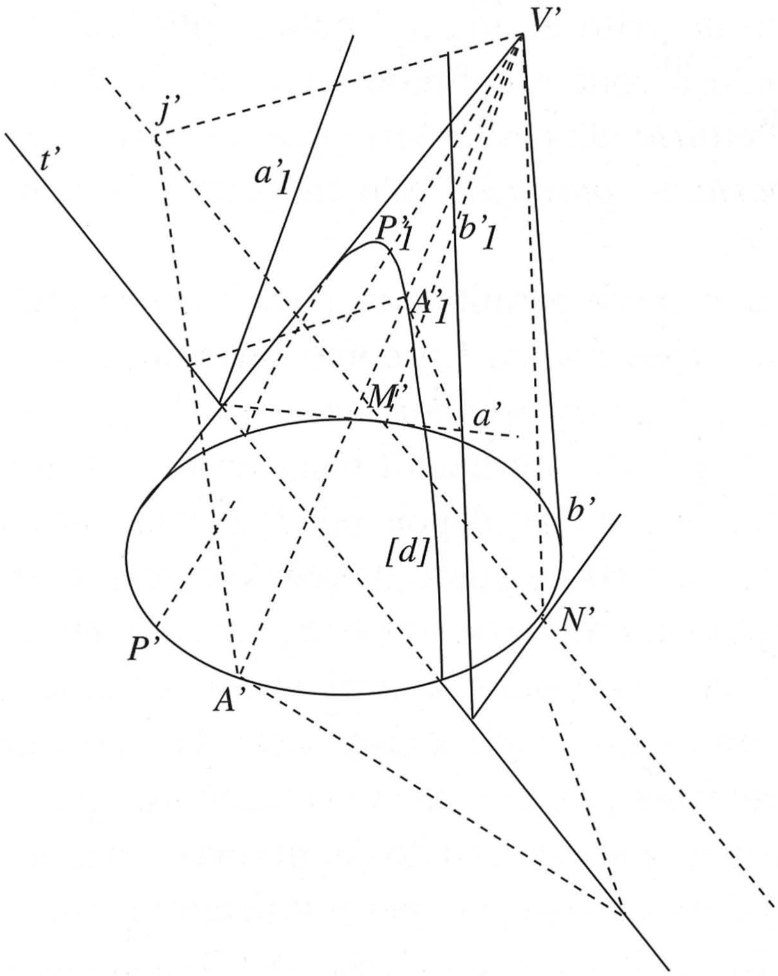


Fig. 33

Na fig. 33 supõe-se o cone [γ] projectado sobre o plano π (da figura) a partir dum ponto *O qualquer* do espaço. *Se, em particular, O é impróprio* (projecção paralela), já sabemos que a recta imprópria de σ se projectará segundo a recta imprópria de π. Então, podemos garantir que, *no espaço*, a secção $[d]_1$ é uma hipérbole se $[d]'_1$ o for e que a'_1, b'_1 são as projecções das *assíntotas* de a_1, b_1 de $[d]_1$. Se O é próprio, já não se pode em geral dizer o mesmo.

Suponhamos pois que O é impróprio. Neste caso a fig. 33 é bastante expressiva para nos mostrar quais foram as operações que, no espaço, acompanharam as operações efectuadas em projecção: 1) conduziu-se por V um plano $\overline{\sigma}$ paralelo a σ; 2) achou-se a intersecção j de $\overline{\sigma}$ com δ; 3) visto que j encontra $[d]$ em dois pontos M, N, concluiu-se que $[d]_1$ é uma hipérbole, cujas direcções assíntóticas são as direcções de VM e de VN; 4) para ter as assíntotas a_1, b_1 de $[d]_1$, bastou conduzir tangentes a $[d]$ em M e N e, pelos pontos de encontro destas tangentes com t, conduzir as rectas a_1, b_1 paralelas respectivamente a VM e VN.

O método descrito é, em particular, aplicável no sistema de Monge, quando o cone é definido pelas projecções horizontais e verticais do vértice e da base – *visto que se trata de projecções ortogonais e, portanto, paralelas*. São em parte aplicáveis as considerações do § 13°.

A doutrina exposta permite-nos ainda resolver problemas deste tipo: "*Definida uma cónica* [*c*] como imagem homológica duma circunferência [c]*, *conduzir por um ponto P, qualquer, uma tangente a* [*c*]" (fig. 34). A primeira ideia seria construir a curva [*c*] ponto por ponto e conduzir depois por *P* as tangentes a [*c*] *empiricamente*, isto é, levando o bordo da régua a tocar a curva sensivelmente num só ponto: mas este processo, além de moroso, carece de rigor geométrico. *Nós podemos determinar as tangentes a* [*c*] *de maneira rigorosa e ainda antes de traçar a curva* (o prévio conhecimento de tangentes à curva em vários pontos é mesmo um auxiliar técnico para o traçado perfeito da mesma). Com efeito, seja Φ a homologia que transforma $[c]^*$ em $[c]$; determine-se a imagem P^* de P por meio de Φ^{-1}; conduzam-se por P^* as tangentes r^*, s^* à circunferência $[c]^*$, (problema que sabemos resolver de maneira rigorosa): é agora evidente que *r, s,* imagens de r^*, s^* por meio de Φ, são as tangentes a [*c*] que passam por *P*. O número de soluções possíveis é 2, 1 ou 0: no caso da figura tiveram-se duas soluções.

Em particular, pode o ponto *P* ser impróprio. Então o problema assume este aspecto: "*Conduzir uma tangente a* [*c*] *paralela a uma recta dada*".

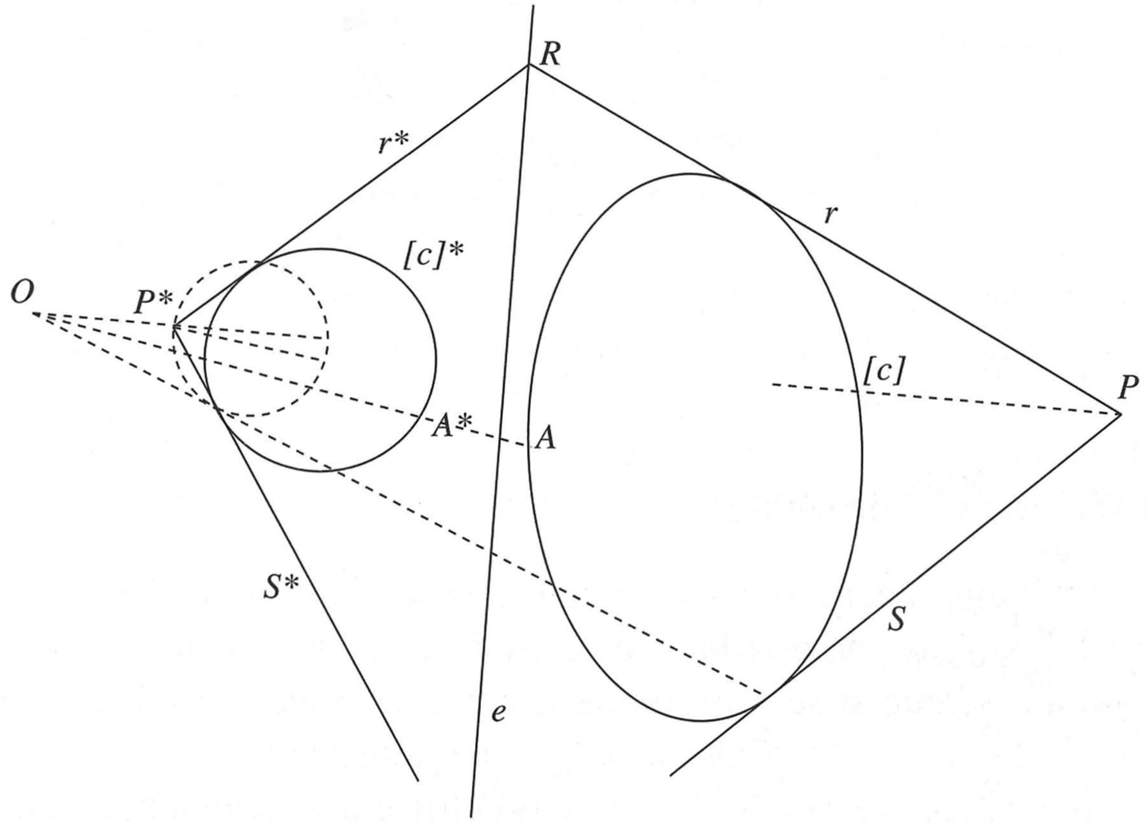


Fig. 34

Quando, a propósito da fig. 33, se falou das tangentes à elipse [*d*]′ nos pontos *A*′, *B*′, pressupunha-se conhecido um método para determinar essas tangentes. Ora, como acabamos de ver, uma elipse pode ser determinada como imagem homológica duma circunferência. No caso da fig. 35, tem-se uma elipse [*c*] definida como transformada duma circunferência [*c*]* mediante uma homologia afim ortogonal de eixo *e*. Resolveu-se o problema de conduzir por um ponto *P* uma tangente a [*c*]. A figura é bastante explícita, para dispensar ulteriores explicações.

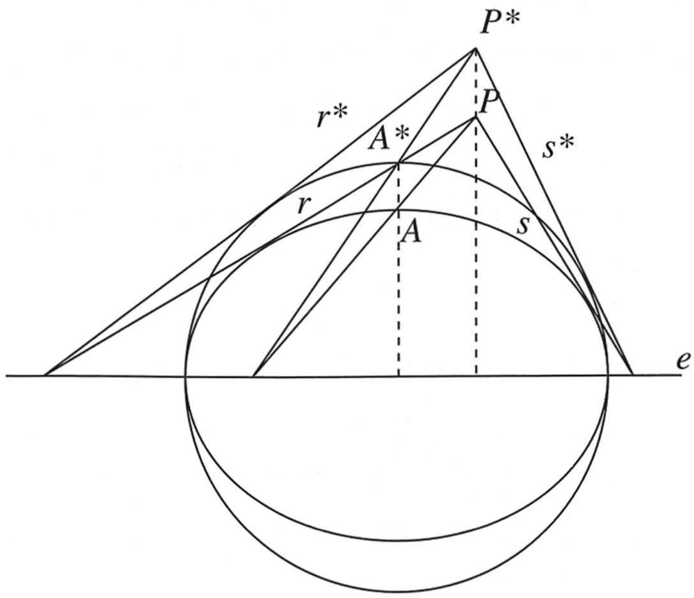


Fig. 35

§ 15.° Homologia sólida

Até aqui, àparte o caso das transformações de semelhança, temo-nos limitado ao estudo da projectividade entre dois planos. Ora, é natural perguntar se existem transformações projectivas do espaço $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ sobre si mesmo, que não se reduzam a semelhanças.

Recordemos que o conceito de simetria em relação a uma recta sugere, naturalmente, o conceito de simetria em relação a um plano. Pois bem, vamos ver que o conceito de homologia plana também sugere um conceito análogo, em que o eixo é substituído por um *plano.*

DEFINIÇÃO – Chama-se *homologia sólida* ou *perspectiva-relevo* toda a colineação do espaço $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ sobre si mesmo que deixa invariantes os pontos dum plano (chamado o *plano da homologia*) e tal que as rectas que unem pontos correspondentes passam todas por um mesmo ponto (*centro da homologia*).

Poderíamos agora demonstrar teoremas de existência e de unicidade, análogos aos que foram estudados no § 9°. Limitar-nos-emos à seguinte proposição de unicidade:

Uma homologia sólida fica determinada quando se conhecem o centro, o plano da homologia e a imagem dum ponto dado distinto do centro e não pertencente ao plano da homologia.

Seja com efeito Θ uma homologia sólida de centro O e de plano π, que transforma A em A', sendo $A \not\equiv O$, ${}^{\bullet}/\pi$ (fig. 36). (Por força da definição, os pontos O, A, A' devem ser colineares).

Seja P um ponto qualquer de $\overline{\boldsymbol{R}}_3$: o seu transformado P' por meio de P deve estar sobre o raio OP da homologia. Suponhamos que P não pertence a OA (caso da figura) e seja R o ponto de encontro de AP com π: então, a imagem de AP (isto é, de AR) deverá ser a recta $A'R$, visto que o ponto R é invariante em Θ; logo P' será a intersecção de OP com $A'R$ (é fácil de ver que estas duas rectas são de facto complanares). Se o ponto dado, M, pertence a OA sem coincidir com O, começará por determinar-se a imagem dum ponto P que não esteja nestas condições e bastará depois substituir o par (A, A') pelo par (P, P'). Finalmente, o transformado de O é necessariamente o próprio ponto O. Assim, a transformação Θ fica perfeitamente definida, q. e. d.

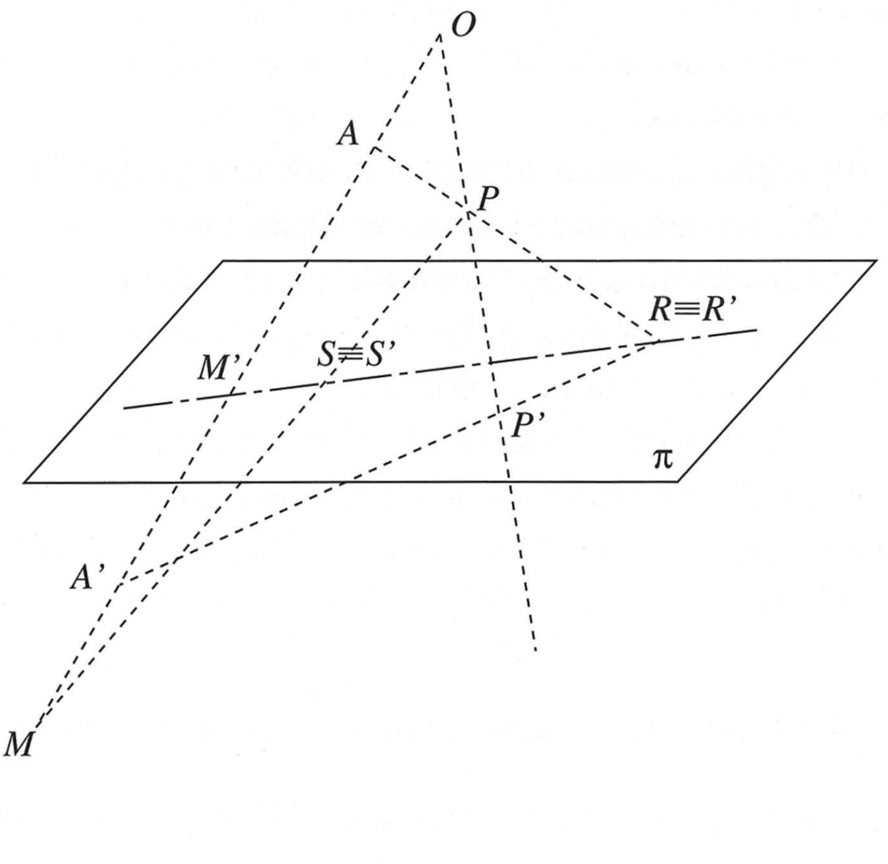


Fig. 36

(Observe-se, todavia, que se admitiu previamente a *existência* duma homologia sólida Θ, de centro O e de plano π que transforma A em A', existência esta que não chegámos a demonstrar. Não será porém difícil, com as ideias já adquiridas, completar a demonstração precedente, de modo a torná-la uma demonstração de existência, o *que recomendamos como óptimo exercício para desenvolver o senso crítico e as faculdades de investigação*).

É claro que, se O e π são próprios, a homologia Θ não é seguramente uma semelhança – porque não é sequer uma afinidade.

Chamaremos 1° e 2° *planos limites* duma homologia sólida Θ os transformados do plano impróprio, Ω, respectivamente, por meio de Θ e de Θ^{-1}. Os planos limites de Θ coincidem com Ω nos seguintes casos:

a) Passando Ω por O, isto é, sendo O impróprio: diz-se então que Θ é uma *homologia afim*, com a direcção d definidora de O.

b) Sendo Ω o plano da homologia, mas não passando por O: caso das *homotetias espaciais*, de centro O.

c) Sendo Ω o plano da homologia e contendo O: caso das *translacções espaciais* de direcção d ($O \equiv \infty_d$).

É claro que, em qualquer destes casos, e só nestes, a homologia Θ é uma transformação afim (se bem que, só no 1.° e no 3.° seja uma *homologia afim*).

Se a direcção d duma homologia afim é perpendicular a π, a homologia diz-se *ortogonal*. Trata-se neste caso duma *compressão* ou duma *distensão* do espaço segundo a direcção d, seguida ou não duma simetria em relação a π. (É claro que a simetria em relação a π é um caso particular da homologia ortogonal).

É ainda fácil provar que *toda a homologia entre dois planos* α, β *pode ser prolongada numa homologia sólida, com o mesmo centro* O *e de plano* π *arbitrário, passando pelo eixo da homologia dada, mas distinto de* α *e de* β.

§ 16.° Equivalência de figuras geométricas a respeito dum grupo

Dadas duas figuras F_1, F_2, diz-se que F_2 é *perspectiva* ou *homológica* em relação a F_1, e escreve-se $F_1 \overline{\wedge} F_2$, quando existe (pelo menos) uma homologia Θ que transforma F_1 em F_2. É fácil ver que: 1) toda a figura é perspectiva em relação a si mesma (visto que a transformação idêntica é uma homologia); 2) Se $F_1 \overline{\overline{\wedge}} F_2$, também $F_2 \overline{\overline{\wedge}} F_1$ (visto que a inversa duma homologia é ainda uma homologia). Porém, dadas três figuras F_1, F_2, F_3 tais que $F_1 \overline{\overline{\wedge}} F_2$, $F_2 \overline{\overline{\wedge}} F_3$, não se pode daqui concluir sem mais que também $F_1 \overline{\overline{\wedge}} F_3$, visto que, executando sucessivamente duas homologias, a transformação resultante não é, em geral, uma homologia. Por outras palavras: *as homologias (planas ou sólidas) não formam grupo.*

No entanto, é fácil ver que o produto de duas colineações é sempre uma colineação e que a transformação inversa duma colineação é também uma colineação.[1] Em resumo: *a família das transformações projectivas do espaço $\overline{\boldsymbol{R}}_3$ sobre si mesmo é um grupo.* Dadas duas figuras F_1, F_2, diz-se que F_2 é projectiva em relação a F_1, e escreve-se então $F_1 \overline{\wedge} F_2$, quando é possível passar de F_1 para F_2 mediante uma colineação. Podemos pois afirmar que:

1) $F \overline{\wedge} F$, qualquer que seja F (*reflexividade*);

2) Se $F_1 \overline{\wedge} F_2$ também $F_2 \overline{\wedge} F_1$ (*simetria*);

3) Se $F_1 \overline{\wedge} F_2$ e $F_2 \overline{\wedge} F_3$, também $F_1 \overline{\wedge} F_3$ (*transitividade*).

Quando $F_1 \overline{\wedge} F_2$ também se diz que as figuras F_1 e F_2 são *projectivas entre si*; e quando se tem $F_1 \overline{\overline{\wedge}} F_2$, também se diz que F_1 e F_2 são *perspectivas entre si* ou que *estão em posição perspectiva.*

Dum modo geral, sendo G um grupo qualquer de transformações pontuais biunívocas do espaço $\overline{\boldsymbol{R}}_3$ sobre si mesmo e F_1, F_2 duas figuras dadas, diz-se que F_1 *é equivalente* a F_2 *a respeito do grupo* G, quando se pode passar de F_1 para F_2 mediante uma transformação pertencente a G. É fácil ver que a relação assim definida entre duas figuras goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Recordando que as afinidades espaciais são as transformações projectivas do espaço $\overline{\boldsymbol{R}}_3$ sobre si mesmo que deixam invariante o plano impróprio, desde logo se reconhece que tais transformações formam também um grupo.

---

(1) – Para o produto, a demonstração é imediata. Quanto à transformação inversa, veja-se no artigo atrás citado a demonstração correspondente para o caso das afinidades, demonstração que se extende imediatamente ao caso das projectividades.

Chamaremos *grupo projectivo, grupo afim, grupo euclideano e grupo métrico elementar*, respectivamente, o grupo das colineações, o grupo das afinidades, o grupo das semelhanças e o grupo das congruências (de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ sobre si mesmo). Representaremos estes grupos, respectivamente, por G_p, G_a, G_e, G_m. Poderemos então escrever

[1] $$G_m \subset G_e \subset G_a \subset G_p \,,$$

em que o sinal "⊂" se deve ler "contido em".

Duas figuras dizem-se *afins*, quando são equivalentes a respeito de G_a. E já sabemos que se dizem semelhantes ou congruentes, conforme são equivalentes a respeito de G_e ou a respeito de G_m. Duas figuras que sejam congruentes são também semelhantes, duas figuras que sejam semelhantes são também afins, etc. – isto em virtude das relações [1]; mas duas figuras podem ser semelhantes sem ser congruentes, etc., pois que

$$G_m \not\equiv G_e \not\equiv G_a \not\equiv G_p \,.$$

Para ver, p. ex., que nem todas as afinidades são semelhanças, basta considerar a projecção ortogonal duma figura situada num plano α (p. ex., um mapa), sobre um plano π não paralelo nem perpendicular a α. Cada segmento $\overline{AB}$ de α projecta-se em π segundo um segmento $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \omega$, em que ω designa o ângulo de AB com π; mas é claro que este ângulo varia com a direcção de AB, entre um mínimo nulo (quando $AB /\!/ \pi$) e um máximo igual ao ângulo de α com π (quando AB é linha de maior declive de α em relação a π); portanto, dois segmentos *iguais* de α que não sejam paralelos entre si projectam-se necessariamente segundo dois segmentos *desiguais*; a transformação considerada não é pois uma semelhança. Consideremos, p. ex., uma circunferência $[c]$ de centro O traçada em α: a sua imagem $[c]'$ já não terá os pontos equidistantes de O'; será, em virtude do que se disse no § 14°, apenas uma elipse. Em resumo: as afinidades não respeitam necessariamente a forma das figuras. Uma afinidade que não se reduza a uma semelhança produz a chamada *deformação afim*, do mesmo modo que uma projectividade não afim produz uma deformação ainda mais profunda: a *deformação projectiva.*

Encontramos uma ilustração muito intuitiva destes factos no exemplo dos espelhos. Um espelho esférico, côncavo ou convexo, de pequena abertura, dá sempre uma imagem que é sensivelmente semelhante ao objecto: pode haver *ampliação* ou *redução*, mas nunca deformação. Por sua vez, um espelho cilíndrico (ou de tipo análogo) já produz uma deformação que pode, em certos casos, ser de natureza afim: a imagem dum paralelogramo será ainda um paralelogramo, embora geralmente de forma diversa. Finalmente, a transformação produzida por um espelho ondulado não é certamente uma afinidade, nem sequer uma projectividade.

§ 17.° Classificação grupal das geometrias

Para uma visão de conjunto do que atrás ficou dito, será útil organizar o seguinte quadro:

Transformações pontuais	Propriedades fundamentais conservadas
Colineações	colinearidade
Afinidades	colinearidade e paralelismo
Semelhanças	colinearidade, paralelismo e igualdade entre segmentos
Congruências	colinearidade, paralelismo e grandeza dos segmentos.

É necessário salientar que as transformações de cada um destes grupos não respeitam apenas as propriedades respectivamente indicadas, mas ainda (como se pode demonstrar) *todas as propriedades que se podem exprimir logicamente a partir das primeiras, e só essas propriedades*. Assim, p. ex., uma vez estabelecido que a noção de plano pode ser definida a partir da noção de recta (§6º), podemos afirmar que *toda a colineação transforma planos em planos*, isto é, que *transforma pontos complanares em pontos complanares*. Analogamente, como a noção de "ponto médio dum segmento" pode ser definida só em termos de "recta" e de "paralelismo", segue-se que toda a afinidade transforma o ponto médio dum segmento no ponto médio do transformado. E assim por diante.

Dum modo geral, segundo F. Klein, chama-se *geometria correspondente a um dado grupo G* (de transformações pontuais) ao estudo das propriedades que são respeitadas por todas as transformações pertencentes a G – propriedades estas que poderão ser definidas a partir de algumas de entre elas, fixadas como *noções primitivas* da geometria considerada. Assim, ao grupo G_p corresponde a *geometria projectiva*, que estuda as *propriedades projectivas* ou *gráficas* (definíveis, em última análise, a partir da noção de "recta"); ao grupo G_a corresponde a *geometria afim*, que estuda as *propriedades afins* ou *descritivas* (exprimíveis em termos de "recta" e de "paralelismo"); ao grupo G_e corresponde a *geometria euclideana*, que estuda as *propriedades métricas relativas* ou *euclideanas*; e, finalmente, ao grupo G_m corresponde a *geometria métrica elementar*, que estuda as *propriedades métricas absolutas*. Exemplo duma propriedade métrica relativa: a razão entre dois segmentos; exemplo duma propriedade métrica absoluta: o comprimento dum segmento (a definição de "metro" não pertence à geometria euclideana); exemplos de propriedades estranhas a qualquer das referidas geometrias: "horizontal", "vertical", "acima de", "a ocidente de", etc. (*noções geográficas*).

São ainda exemplos de noções métricas (relativas) as de perpendicularidade, rotação, ortocentro, incentro e circuncentro dum triângulo, etc.. São noções afins as de homotetia, translação, baricentro dum triângulo, etc.

(De certo modo, poderia dizer-se que a geometria projectiva é a *geometria da régua*, que a geometria afim é a *geometria da régua e do esquadro*, e que a geometria euclideana é a *geometria da régua e do compasso* ou só *do compasso*; mas estas expressões têm hoje um sentido mais restrito).

Não cause estranheza o facto de se falar aqui de geometria *euclideana* no espaço *projectivo*. Como se viu no § 6°, a passagem de $\boldsymbol{R}_3$ para $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ equivale a uma simples mudança de linguagem, que consiste fundamentalmente em substituir, o termo "direcção" pela expressão "ponto impróprio", de modo que toda a geometria euclideana pode ser *traduzida* na nova linguagem. De resto, a noção de "ponto impróprio" não é uma noção *projectiva*, no sentido aqui indicado, visto que as projectividades não respeitam necessariamente a propriedade de "ser impróprio" (isto é, podem transformar pontos impróprios em pontos próprios).

Duas figuras dizem-se *equivalentes* ou *indistinguíveis* numa dada geometria, quando são equivalentes a respeito do grupo desta geometria. Assim, p. ex., um ponto próprio será indistinguível dum ponto impróprio em geometria projectiva (mas já não em geometria afim); dois paralelogramos serão sempre equivalentes em geometria afim, mas não em geometria euclideana, etc.

Como se viu no § 16°, o produto de duas homologias pode não ser uma homologia, mas é necessariamente uma colineação. Portanto, se executarmos sucessivamente várias homologias (em número finito), o resultado será sempre uma colineação. Pois bem: *demonstra-se que, reciprocamente, toda a colineação se pode obter deste modo, isto é, como produto dum número finito de homologias.*

Em particular, prova-se que *toda a colineação entre dois planos pode ser obtida mediante um número finito de projecções centrais.* Analogamente: *toda a afinidade entre dois planos pode ser obtida mediante um número finito de projecções paralelas.*

Daqui se conclui que *as propriedades projectivas das figuras planas são aquelas que se mantêm inalteradas em projecção central.*(1) Analogamente: *as propriedades afins das figuras planas são aquelas que se mantêm inalteradas em projecção paralela.*

Outra consequência será esta: *A imagem projectiva duma circunferência é sempre uma cónica* (recorde-se o que foi dito no § 14°). Portanto, duas cónicas são sempre indistinguíveis em geometria projectiva. As noções de "elipse", "hipérbole" e "parábola" não têm carácter projectivo: são noções afins, uma vez que toda a transformação afim deixa invariante a recta imprópria do plano e portanto o género da cónica. Do mesmo modo, a noção de circunferência não tem carácter afim: é uma noção euclideana.

Note-se que, embora tenhamos definido "cónica" a partir de "circunferência", a noção de cónica pode, como noção projectiva que é, ser definida exclusivamente a partir do conceito de recta, como se faz nos cursos de geometria projectiva.

---

(1) – É assim precisamente que se define "propriedade projectiva" no início da geometria projectiva, tal como foi fundada por Poncelet.

A imagem afim da circunferência é a elipse. Em toda a afinidade, o centro O duma circunferência $[c]$ (centro de simetria da curva $[c]$) é transformado no centro O' da elipse $[c]'$, imagem da circunferência, visto tratar-se duma propriedade afim. Dois diâmetros da circunferência que sejam perpendiculares entre si são transformados em dois diâmetros da elipse, que já não são geralmente perpendiculares entre si – mas que conservam dos primeiros a seguinte propriedade afim: cada um deles divide ao meio as cordas que são paralelas ao outro.

Dizem-se *conjugados* dois diâmetros nestas condições (fig. 37). Prova-se que, se a elipse não se reduz a uma circunferência, existem dois e só dois diâmetros conjugados da elipse, perpendiculares entre si: são os chamados *eixos da elipse*. Este facto é bem visível no estudo da projecção ortogonal da circunferência, em que os eixos da elipse aparecem como as projecções dos diâmetros de nível e de maior declive. *As propriedades axiais da elipse, e das cónicas em geral, são visivelmente propriedades métricas (relativas), visto que dependem da noção de perpendicularidade e, portanto, da noção de igualdade de distâncias*. O mesmo se diga das propriedades focais das cónicas.

Por sua vez, a noção de assíntota é já uma noção afim, mas não uma noção projectiva – o que explica o facto apontado no final do §14°.

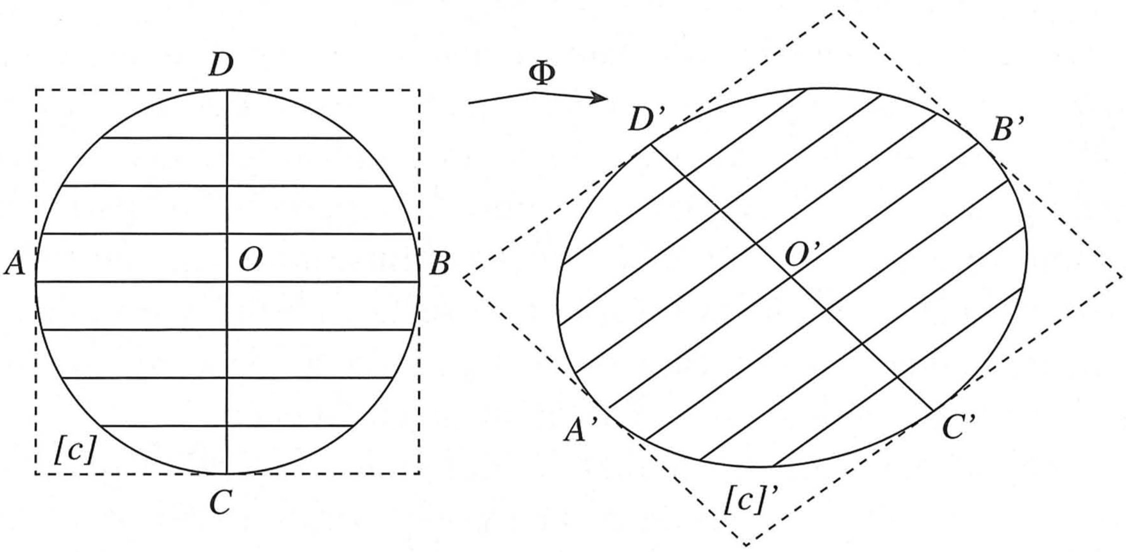


Fig. 37 – Os diâmetros $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ da circunferência $|c|$ perpendiculares entre si, são transformados pela afinidade ϕ nos diâmetros $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ da elipse, conjugados entre si.

§ 18.° Exemplo duma geometria métrica não euclideana

Como vimos, passa-se da geometria projectiva para a geometria afim, fazendo a distinção entre *pontos próprios* e *pontos impróprios*, isto é, fixando em $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ um plano privilegiado como o plano do infinito. Por sua vez, passa-se da geometria afim para a geometria euclideana, introduzindo em $\boldsymbol{R}_3$ a noção de "igualdade de segmentos" (ou de "equidistância" ou de "circunferência").[(1)]

Todavia, a noção de igualdade de segmentos pode ser introduzida de maneira diferente da usual, como vamos ver, limitando-nos ao caso do plano projectivo. Consideremos um plano α de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ e fixado um ponto O fora de α, convencionemos chamar *distância* entre dois pontos A, B de α ao ângulo das rectas OA e OB. É fácil ver que, com tal definição, a distância entre dois pontos quaisquer é sempre *finita*, o que torna impossível a distinção entre pontos próprios e pontos do infinito: toda a recta tem comprimento finito (precisamente igual a π radianos). Fica, portanto, assim introduzida no plano α uma geometria métrica – chamada *geometria plana de Riemann* – onde não existe a noção de paralelismo: duas rectas distintas encontram-se sempre a distância finita. O grupo desta geometria será pois constituído pelas transformações do plano que conservam as distâncias, tais como agora foram definidas – transformações a que chamaremos *congruências riemannianas*. É curioso notar que, nesta geometria, só existem *semelhanças de razão 1*; isto é, as semelhanças reduzem-se aqui às congruências. Um outro facto notável é que existe nesta geometria o conceito de rotação, mas não o de translação (pois que não existe o de paralelismo).

A partir da referida noção de distância podem definir-se agora em α outras noções métricas, como, p. ex., a de *amplitude dum ângulo* $A\widehat{B}C$ – que também pode ser definida directamente dizendo que a amplitude de $A\widehat{B}C$ é igual à do diedro $AB\widehat{O}C$. Prova-se então que a soma dos ângulos internos dum triângulo é sempre superior a 180° (basta atender ao facto análogo verificado com os triedros).

---

(1) – Em geometria projectiva complexa, a métrica euclideana introduz-se de maneira elegante, fixando o *círculo absoluto*, isto é, a cónica imaginária que se assume como intersecção de qualquer esfera com o plano do infinito. As semelhanças serão então as colineações que deixam invariante o círculo absoluto.

É claro que, por este processo, a geometria riemanniana é introduzida em α a partir da métrica euclideana previamente admitida em $\boldsymbol{R}_3$. Todavia, a geometria de Riemann pode ser fundada (mesmo no espaço tridimensional), de maneira autónoma, sobre um sistema privativo de postulados, que diferem naturalmente dos da geometria euclideana. De resto, foi sob esta forma independente que Riemann a apresentou, a fim de mostrar a possibilidade lógica duma geometria em que o postulado de Euclides:

"*Por um ponto não pertencente a uma recta passa sempre uma paralela a essa recta e uma só*"

fosse substituído por este outro:

"*Por um ponto não pertencente a uma recta não passa nenhuma paralela a essa recta*".

Analogamente, Lobatchewsky (1793-1856) fôra conduzido à geometria que tem o seu nome, substituindo o postulado de Euclides por este outro: "*Por um ponto não pertencente a uma recta passa uma infinidade de paralelas a essa recta*". Na geometria de Lobatchewsky, a soma dos ângulos dum triângulo é sempre inferior a 180°

Porém, uma coisa é a *possibilidade lógica* duma geometria como sistema compatível de convenções, outra coisa é a sua *possibilidade física*, como descrição simplificada do Universo. Ora, sucede que, em física moderna, nomeadamente na teoria da relatividade, em óptica e na teoria geral da propagação das ondas, as geometrias de tipo riemanniano(1) se têm revelado por vezes mais adequadas do que a geometria euclideana. Assim, em relatividade geral, as rectas (ao longo das quais se propagam os raios luminosos) aparecem como linhas fechadas de comprimento finito, o que se traduz em afirmações perturbadoras do senso comum, tais como esta: "O espaço físico é curvo e finito". Todavia, a teoria da relatividade geral aplica-se ao *mundo astronómico*. Ora, no *mundo médio* em que nos movemos, a geometria euclideana dá uma aproximação suficiente da realidade, pelo que seria uma inútil complicação recorrer neste caso

---

(1) – Note-se que, além da geometria riemanniana elementar aqui considerada, há ainda as geometrias diferenciais de Riemann, de que não é possível dar aqui uma ideia. Com as suas concepções geométricas, Riemann (1826-1866) foi um genial precursor da física moderna.

a outras geometrias. (Dizia Poincaré: "Não há geometrias verdadeiras ou falsas, há apenas geometrias mais ou menos cómodas").

Numa pequena extensão, o esquema riemanniano confunde-se pois praticamente com o esquema euclideano – o que está em perfeita analogia com este facto que nos é familiar: uma porção de superfície liquída da Terra, que, numa pequena extensão pode ser perfeitamente considerada plana, numa grande extensão deve ser considerada esférica ou mesmo elipsoidal – abstraindo sempre, é claro, das inevitáveis ondulações da superfície.

§ 19.° Geometria analagmática

Tornemos ao espaço euclideano, $\boldsymbol{R}_3$. Fixados um ponto O de $\boldsymbol{R}_3$ e um segmento $\overline{OA}$ não nulo, chama-se *inversão de centro O e de unidade OA* a transformação ϕ que, a cada ponto P de $\boldsymbol{R}_3$ distinto de O, faz corresponder o ponto P' da semi-recta OP (de origem O), tal que

$$[2] \qquad dist\,(O, P') = \frac{1}{\mathrm{dist}\,(O, P)},$$

tomando para unidade de medida das distâncias o comprimento de $\overline{OA}$. Porém, a transformação ϕ não fica assim definida em todo o espaço, uma vez que se excluíu a hipótese $P \equiv O$. Como desfazer esta excepção? É claro que, sendo $P \equiv O$ viria, pela fórmula [2], $\overline{OP'} = \infty$; isto é: o transformado de O por meio de ϕ deveria ser um ponto O' a *distância infinita de O*. Não existem tais pontos em $\boldsymbol{R}_3$, mas existem, como vimos, em $\overline{\boldsymbol{R}}_3$; simplesmente, em $\overline{\boldsymbol{R}}_3$, esses pontos são em número infinito, e não sabemos qual deles deva ser O', para que a transformação ϕ resulte unívoca. Portanto, para que ϕ seja uma transformação unívoca (e até biunívoca) do espaço inteiro sobre si mesmo, devemos fazer a adjunção *dum único ponto impróprio a* $\boldsymbol{R}_3$: obtém-se deste modo o chamado *espaço analagmático*, que representaremos por $\boldsymbol{R}_3^*$.

Posto isto, é fácil ver (como simples exercício de geometria analítica) que, *numa inversão, a imagem duma circunferência é uma recta ou uma circunferência, conforme a circunferência passa ou não pelo centro da inversão*. Analogamente, *numa inversão, a imagem duma recta é uma recta ou uma circunferência, conforme a recta passa ou não pelo centro da inversão*. Pois bem, chamam-se *transformações circulares* ou *homocíclicas* as transformações biunívocas do espaço $\boldsymbol{R}_3^*$ sobre si mesmo que deixam invariante a família constituída pelas rectas e pelas circunferências (permutando-as entre si); e prova-se que *toda a transformação circular é o produto duma semelhança por uma inversão*. As transformações circulares formam pois um grupo, *denominado o grupo analagmático*, o qual, por sua vez, caracteriza a chamada *geometria analagmática*. É óbvio que nesta geometria nenhuma distinção existe entre "recta" e "circunferência".

Facilmente se reconhece ainda que o *plano é equivalente à superficíe esférica em geometria analagmática*. Com efeito, consideremos (fig. 38) uma esfera [ε] e um plano π tangente a [ε] no ponto T, e seja O o ponto de [ε] diametralmente oposto a T; é fácil ver, aplicando um teorema de geometria elementar (1), que a inversão de centro O e de unidade $\overline{OT}$ faz corresponder a cada ponto P de [ε] distinto de O, a projecção central P' de P sobre π a partir de O (e ao ponto O, como já se disse, o ponto impróprio). Esta projecção é usada em cartografia com o nome de "projecção estereográfica". Supondo desenhada sobre [ε] uma rede de paralelos e meridianos, de modo que os meridianos passem por O e T, é evidente que, em projecção, os meridianos irão aparecer como rectas passando por T e os paralelos como circunferências de centro T.

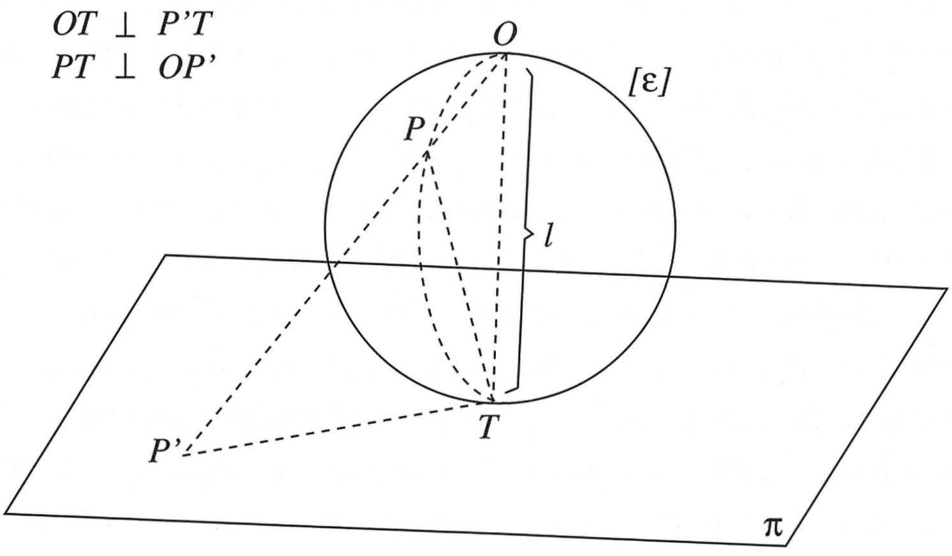


Fig. 38

(1) – Qualquer cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua projecção sobre a hipotenusa.

Com o emprego das inversões, podem resolver-se de maneira elegante vários problemas de geometria elementar, alguns deles clássicos, como, p. ex., o dos círculos de Apolónio, em que se pede uma circunferência tangente a três circunferências dadas.

§ 20.° Topologia do espaço euclideano

Recordemos que, em $\boldsymbol{R}_3$, se chama esfera de centro C e de raio r ao conjunto de todos os pontos cuja distância a C é $\leq r$. (Entende-se portanto aqui "esfera" no sentido normal, isto é, como *sólido*). Posto isto, passamos a definir alguns conceitos relativos a $\boldsymbol{R}_3$.

DEFINIÇÃO 1 – Chamaremos *vizinhança* dum ponto P a toda a esfera de centro P.

(Em geometria euclideana bidimensional ou unidimensional, teremos definições análogas de "vizinhança", substituindo "esfera" por "círculo" ou por "segmento").

DEFINIÇÃO 2 – Diz-se que uma sucessão de pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, *converge* para um dado ponto M (ou tem por *limite* M) e escreve-se então

$$\lim P_n \equiv M,$$

quando, *qualquer que seja* a vizinhança V de P, existe sempre uma ordem ν, a partir da qual *todos* os pontos da sucessão pertencem a V (isto é, são pontos da esfera V).

É claro que a ordem ν dependerá em geral de V, sendo tanto mais elevada quanto menor for o raio de V. Mas pode também isto não acontecer, como se verifica, p. ex., no caso em que todos os pontos coincidem com M (tendo-se então, manifestamente, $\lim P_n \equiv M$).

DEFINIÇÕES 3 – 6 – Seja A um conjunto qualquer de pontos. Diz-se que um dado ponto M é *interior* a A, quando existe pelo menos uma vizinhança de M contida em A (isto é, formada só de pontos de A). Diz-se que M é exterior a A, quando é interior ao conjunto complementar de A (isto é, ao conjunto de todos os pontos que não pertencem a A). Diz-se que M é *aderente* a A, quando não é exterior a A. Diz-se que M é *ponto fronteiro* de A, quando não é nem interior nem exterior a A.

É fácil ver que o conceito de ponto aderente pode ser definido directamente deste outro modo:

DEFINIÇÃO 5 * – Diz-se que M é *aderente* a A, quando, em cada vizinhança de M, existe pelo menos um ponto de A.

DEFINIÇÕES 7 – 10 – Chama-se *interior, exterior, fecho, fronteira* dum conjunto A ao conjunto dos pontos respectivamente interiores a A, exteriores a A, aderentes a A, fronteiros de A. (É claro que: *fecho* = *interior* + *fronteira*).

DEFINIÇÕES 11 – 15 – Um conjunto diz-se *aberto* quando coincide com o seu interior (isto é, quando todos os seus pontos lhe são interiores); diz-se *fechado* quando coincide com o seu fecho (isto é, quando contém a fronteira). Dois conjuntos A, B dizem-se *aderentes* ou *anexos* (entre si), quando existe pelo menos um ponto de um deles que é aderente ao outro; dizem-se *desconexos* (entre si) no caso contrário. Um conjunto diz-se *conexo* (em si), quando não é decomponível em dois conjuntos desconexos entre si; diz-se *desconexo* no caso contrário.

Exemplos: Uma esfera é um conjunto fechado; o seu interior, um conjunto aberto. O conjunto de pontos constituído pelo interior duma esfera acrescido de metade da superfície (excluída a outra metade) *não é aberto nem fechado*: o espaço inteiro $\boldsymbol{R}_3$ é um conjunto *simultaneamente aberto e fechado*. Uma esfera é um conjunto conexo; o conjunto dos pontos de duas esferas que não se tocam é um conjunto desconexo.

DEFINIÇÕES 16 – 17 – Diz-se que M é *ponto de acumulação* de A, quando é aderente ao conjunto dos pontos de A distintos de M; diz-se que M é *isolado* de A, no caso contrário.

Consideremos, p. ex., um conjunto C constituído por dois únicos pontos A, B; é fácil ver que A, B são aderentes a C, sem serem pontos de acumulação de C: são pontos *isolados* de C. Note-se ainda que C não tem pontos interiores: diz-se então que o seu interior é o conjunto *nulo* ou *vazio*, caracterizado pela ausência de pontos. Analogamente, o espaço $\boldsymbol{R}_3$ não tem pontos fronteiros: a sua fronteira é o conjunto vazio.

Por convenção, o conjunto vazio diz-se contido em qualquer conjunto.

Todas as definições precedentes, a partir da 4ª, são baseadas no conceito de "ponto interior". Mas é fácil ver que, por sua vez, este conceito pode ser definido a partir do de "ponto aderente", da seguinte maneira: diz-se que M é interior a A quando não é aderente ao complementar de A. Portanto, todas as noções introduzidas podem ser expressas a partir da noção de "ponto aderente". (De resto, todas podem ser definidas a partir de uma qualquer de entre elas; assim, p. ex., dizer que M é interior a A, equivale a dizer que M pertence a A sem pertencer à *fronteira* de A: dizer que M é aderente a A equivale a dizer que todo o conjunto *fechado* que contiver A também conterá M, etc.). Por outro lado, é fácil ver que:

Se existe pelo menos uma sucessão de pontos de A convergente para M, então M é aderente a A. Com efeito, se existe uma sucessão de pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ todos de A, tal que $\lim P_n \equiv M$, em cada vizinhança de M haverá, pela Def. 2, pontos da sucessão e, portanto, de A, o que significa que M é um ponto aderente a A (Def. 5*).

Ocorre agora perguntar se a proposição recíproca da precedente – "Todo o ponto aderente a A é limite de alguma sucessão de pontos de A" – é ou não verdadeira. A resposta é afirmativa, quando se admite um axioma lógico introduzido pelo matemático ZERMELO. Simplesmente, nem todos os matemáticos aceitam o axioma de Zermelo, à volta do qual se têm travado longas discussões; de modo que, para os matemáticos não zermelianos, a questão continua (e é natural que continue eternamente) em aberto.

O conceito de função contínua apresenta-se em Geometria do mesmo modo que em Análise, e pode ainda aqui ser definida de dois modos diversos:

Segundo HEINE. Consideremos dois conjuntos A, B de pontos e uma transformação unívoca ϕ de A sobre B. Sendo M um ponto qualquer de A e M^* a imagem de M por meio de ϕ, diz-se que ϕ é contínua em M, quando ϕ transforma toda a sucessão $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ de pontos de A convergente para M numa sucessão $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_n^*, \ldots$ de pontos de B convergente para M^*; isto é, em símbolos:

$$\lim_n P_n \equiv M \rightarrow \lim_n P_n^* \equiv M^*.$$

(Intuitivamente, podíamos dizer: ϕ é contínua em M, quando transforma pontos de A *infinitamente próximos* de M em pontos de B infinitamente próximos de M^*).

Segundo CAUCHY. Mantidas as hipóteses precedentes, diz-se que ϕ é contínua no ponto M, quando, qualquer que seja a vizinhança W de M^*, é sempre possível determinar uma vizinhança V de M, de modo que as imagens (por meio de ϕ) dos pontos de A pertencentes a V estejam todas em W.

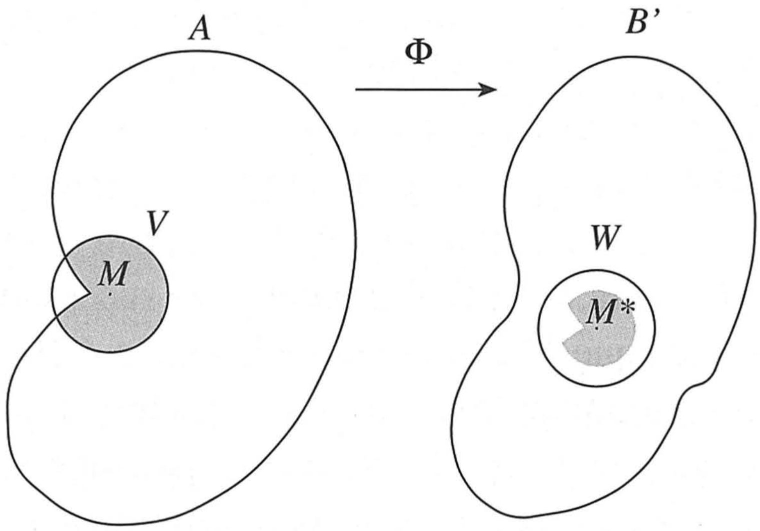


Fig. 39 – Este diagrama esclarece a noção de continuidade à Cauchy. Por menor que seja o raio da vizinhança W de M^*, é sempre possível associar-lhe uma vizinhança V de M, de modo que as imagens dos pontos de A pertencentes a V estejam todas em W (região pontuada).

Posto isto, é fácil ver que, *se ϕ é contínua em M no sentido de Cauchy, também será contínua em M no sentido de Heine*. Mas, para demonstrar a proprosição recíproca, é necessário recorrer ao axioma de Zermelo. Assim, para os matemáticos zermelianos, nenhuma distinção existe entre continuidade à Heine e continuidade à Cauchy, enquanto, para os não zermelianos, a questão continua em aberto.

Em tudo o que se segue, referir-nos-emos ao conceito de continuidade no sentido de Cauchy – sem com isto pretender assumir uma posição no referido pleito acerca do axioma de Zermelo.

Podemos agora demonstrar o seguinte

TEOREMA – Para que uma transformação unívoca ϕ de A sobre B seja contínua num dado ponto M de A, é necessário e suficiente que ϕ transforme todo o subconjunto de A a que é *aderente* M, num subconjunto de B a que é *aderente* M^* (imagem de M por meio de ϕ).

A condição é necessária. Suponhamos que ϕ *é contínua* em M. Designe então C um subconjunto qualquer de A a que M seja aderente, e C^* a imagem de C por meio de ϕ. Vamos provar que *também M^* é aderente a C^**. Com efeito, dada uma vizinhança W qualquer de M^*, existirá sempre uma vizinhança V de M tal que as imagens dos pontos de A pertencentes a V estejam todas em W; mas, sendo M aderente a C, haverá pelo menos um ponto de C contido em V (Def. 5 *) e a sua imagem será um ponto de C^* contido em W. Assim, em cada vizinhança W de M^* existirá pelo menos um ponto de C^*, o que significa que M^* é aderente a C^*.

A condição é suficiente. Suponhamos que ϕ *não é contínua* em M. Quer isto dizer que existe alguma vizinhança W de M^* tal que, em *toda* a vizinhança V de M, se encontrem pontos de A com as imagens *não situadas* em W. Seja então C o conjunto de todos os pontos de A cujas imagens não pertencem a W: como acabámos de ver, M é aderente a C, enquanto M^* não é aderente a C^*, uma vez que na vizinhança W de M^* não existe nenhum ponto de C^*. Por conseguinte, se ϕ transforma cada subconjunto de A a que é aderente M num subconjunto de B, a que é aderente M^*, ϕ não pode deixar de ser contínua em M, q. e. d.

Quando uma transformação ϕ é contínua em todos os pontos do conjunto A em que é definida, diz-se simplesmente que ϕ é uma *transformação contínua*. Em virtude do teorema precedente, as transformações contínuas podem ser definidas simplesmente como *as transformações unívocas que respeitam a propriedade da aderência.*

Daqui resulta imediatamente que *o produto de duas transformações contínuas é também uma transformação contínua.*

É fácil ver ainda que *toda a transformação contínua transforma conjuntos conexos em conjuntos conexos* (veja-se fig. 40); mas pode transformar um conjunto fechado num conjunto não fechado. (Veremos contudo que já assim não sucede em $\overline{\boldsymbol{R}_3}$).

Diz-se *bicontínua,* toda a transformação biunívoca contínua cuja inversa é também contínua.

As transformações bicontínuas são também chamadas *homeomorfismos.*

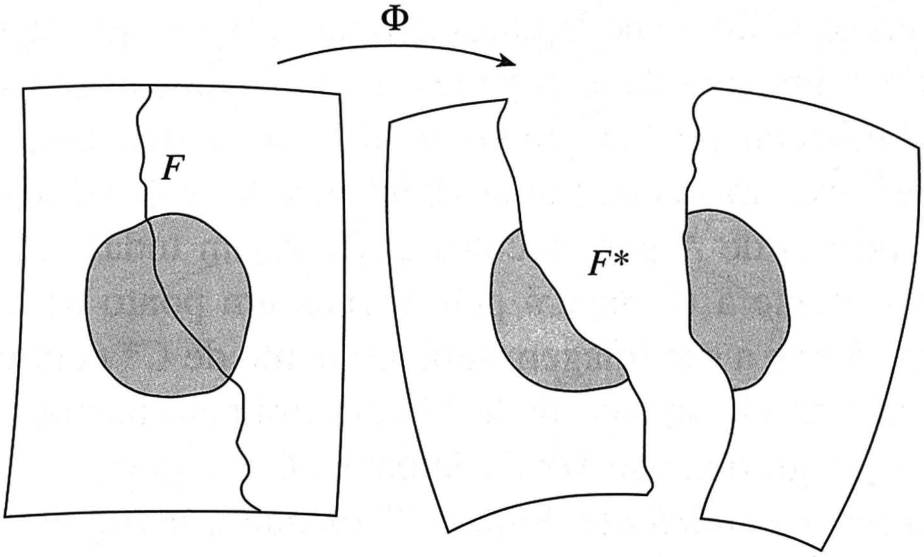


Fig. 40 – Esta figura dá-nos a ideia intuitiva duma transformação descontínua ao longo duma linha. O conjunto *conexo F* é transformado no conjunto *desconexo F**. É destruída pois a aderência ao longo da linha considerada.

Representemos por G_t a família de todos os homeomorfismos do espaço $\boldsymbol{R}_3$ sobre si mesmo. Do que fica dito resulta que:

G_t é um grupo – o grupo dos homeomorfismos de $\boldsymbol{R}_3$. Ao grupo corresponderá, segundo o ponto de vista de *F.* Klein (§ 17°), uma determinada geometria. Pois bem, chama-se *topologia* ou *analysis situs* essa geometria, que consistirá portanto no estudo daquelas propriedades das figuras (chamadas *propriedades topológicas*) que

são respeitadas por todas as transformações pertencentes a G_t. Se, por outro lado, recordarmos que os homeomorfismos podem ser definidos como *as transformações biunívocas que respeitam (nos dois sentidos) a propriedade da aderência*, segue-se que as noções topológicas são todas aquelas que se podem definir logicamente a partir da noção de aderência (tomada para única noção primitiva) – como, p. ex., as de interior, fronteira, conjunto fechado, etc. Assim, se ϕ é um homeomorfismo de $\boldsymbol{R}_3$, há-de transformar o *interior* de cada conjunto F no *interior* do conjunto transformado F^*, a *fronteira* de F na *fronteira* de F^*, etc.; além disso, deve transformar conjuntos fechados em conjuntos fechados, conjuntos abertos em conjuntos abertos , etc.

Em particular, *são homeomorfismos de* $\boldsymbol{R}_3$ *todas as transformações afins desse espaço* (as projectividades não são definidas em $\boldsymbol{R}_3$). Mas os homeomorfismos podem produzir deformações muito mais profundas do que as transformações afins. Para ter uma ideia intuitiva do que possam ser tais deformações, imaginemos uma membrana de cautchu que seja estirada ou destorcida de qualquer maneira: uma figura desenhada sobre a membrana sofrerá então uma deformação, em que geralmente a colinearidade dos pontos não é respeitada; só quando a distensão for uniforme, em direcções determinadas, se terá uma deformação afim (fig. 41). Por outro lado, a ruptura da membrana dar-nos-á a ideia duma transformação *descontínua*.

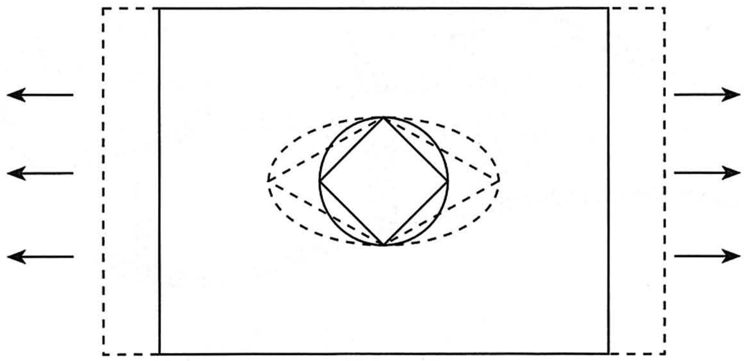


Fig. 41

Encontramos um exemplo sugestivo de descontinuidade no estudo da planificação (transformação pontual biunívoca duma superfície curva sobre um domínio plano, no qual se mantêm inalterados os comprimentos das linhas traçadas sobre a superfície). Ao planificar, p. ex., uma superfície cónica de 2ª ordem, é indispensável *cortá-la* por uma das geratrizes: a transformação será pois descontínua nos pontos dessa geratriz, chamada *geratriz de corte* ou *de abertura* da planificação.

Duas figuras dizem-se *homeomorfas*, quando são equivalentes em topologia, isto é, quando é possível transformar uma na outra mediante um homeomorfismo. Por ex., uma circunferência é homeomorfa não só a uma elipse, como ainda a um triângulo ou a um polígono qualquer não estrelado; mas já não será homeomorfa a uma coroa circular. Uma esfera é homeomorfa a um cubo mas não a um toro, etc.

A topologia é um ramo da Matemática ainda em plena evolução, no qual se concentra hoje a actividade dum grande número de investigadores em todo o mundo.

São conhecidos vários problemas de topologia com carácter recreativo. Um exemplo é o das pontes de Königsberg: havia no tempo de Euler, em Königsberg, sete pontes sobre o rio Pragel, com a disposição indicada no esquema da fig. 42; Euler lembrou-se de pôr o seguinte problema: "Como atravessar as sete pontes sem passar duas vezes pela mesma?"; o problema é impossível.

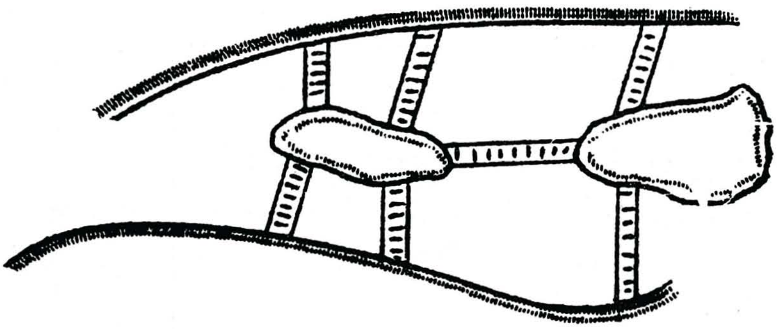


Fig. 42

Um problema clássico da topologia é o que se refere ao *teorema das quatro cores*. Imaginemos o mapa dum país qualquer, real ou fictício, dividido em várias regiões; diz a experiência que, para colorir um tal mapa de modo que não fiquem com a mesma cor duas regiões aderentes ao longo duma linha, nunca são necessárias mais de quatro cores. Procurou-se demonstrar racionalmente este facto empírico (que constitui na verdade um teorema de topologia), mas até hoje têm sido vãos todos os esforços nesse sentido: conseguiu-se já demonstrar que não são precisas mais de cinco cores, mas a experiência diz que bastam 4.

São ainda problemas de topologia várias outras questões que costumam ser apresentadas a título recreativo, como, p. ex., aquela de ligar três casas com três poços por meio de nove estradas que não se cruzem (problema impossível) ou a de traçar uma figura sem percorrer duas vezes a mesma linha (fig. 43).

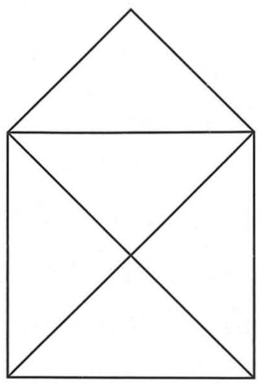


Fig. 43

(Para ver que, p. ex., este último é um problema de topologia, basta notar que a sua solução não depende do facto da figura ser formada de segmentos de recta, mas apenas da maneira como se ligam estes segmentos: *a solução será a mesma em qualquer figura homeomorfa à primeira, como, p. ex., a fig.* 44).

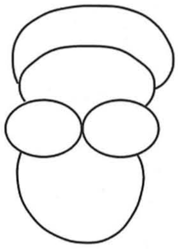


Fig. 44

Não se vá contudo ajuizar destes exemplos que o interesse da topologia se limita a problemas de almanaque. De maneira nenhuma! Todo o edifício da análise assenta sobre a topologia: os mais difíceis e importantes problemas de análise e de geometria contêm geralmente, na sua raiz, uma questão de topologia.

§ 21.° Topologia do espaço projectivo

Já atrás se disse que as transformações afins de $\boldsymbol{R}_3$ são homeomorfismos. Para saber se podemos afirmar o mesmo a respeito das transformações projectivas de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$, necessário se torna, primeiro que tudo, especificar qual seja a topologia deste espaço.

Comecemos pela noção de limite. Quando se dirá que uma dada sucessão $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ de pontos de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ *tem por limite* ou *converge para* um dado ponto M de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$?

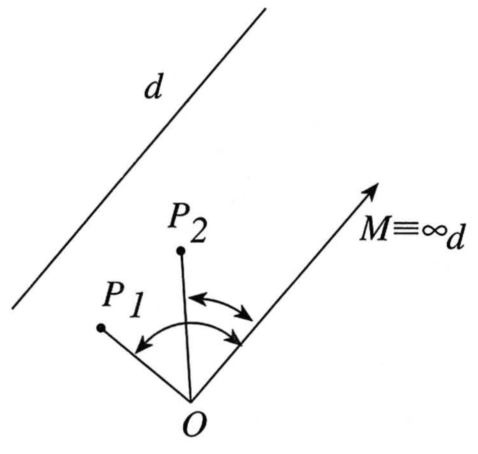
Se os pontos considerados são todos próprios, estamos ainda em $\boldsymbol{R}_3$ e continua portanto a ser válida a Def. 2 do § 20°. Mas, se M é *impróprio*, já não faz sentido falar de “esfera com centro em M”. Diremos então que a sucessão (P_n) converge para M, e escreveremos $\lim P_n \equiv M$, quando, fixado arbitrariamente um ponto *próprio* O, se verificarem as duas seguintes condições:

1) a distância de O a P_n tende para infinito com n, isto é, dado um número positivo ρ, por maior que ele seja, haverá sempre uma ordem ν a partir da qual se tem dist $(O, P_n) > \rho$.

2) o ângulo de OP_n com OM tende para 0 quando $n \to \infty$.

É claro que esta definição terá um sentido, mesmo que alguns ou todos os pontos $P_1, P_2, \ldots$ sejam impróprios.

Por outro lado, é fácil ver que o facto da sucessão (P_n) convergir ou não para M não depende do ponto O escolhido para referência.



Vejamos agora como definir um conceito de vizinhança, a partir do qual seja possível introduzir a precedente noção de limite, segundo a Def. 2 do § 20° (tal como em $\boldsymbol{R}_3$). Seja ainda O um ponto próprio fixado ao arbítrio. Dado um número $\varepsilon > O$, chamaremos vizinhança ε dum ponto impróprio M ao conjunto de todos os pontos P de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$, cuja distância a O é $> 1/\varepsilon$ e tais que o ângulo das rectas OP e OM é $< \varepsilon$ (fig. 45).

É fácil ver que esta noção de vizinhança satisfaz ao requisito indicado. Por outro lado, continuando a chamar vizinhanças de cada ponto próprio às esferas com centro nesse ponto, podemos introduzir em $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ uma estrutura topológica como em $\boldsymbol{R}_3$, segundo as definições do § 20°.

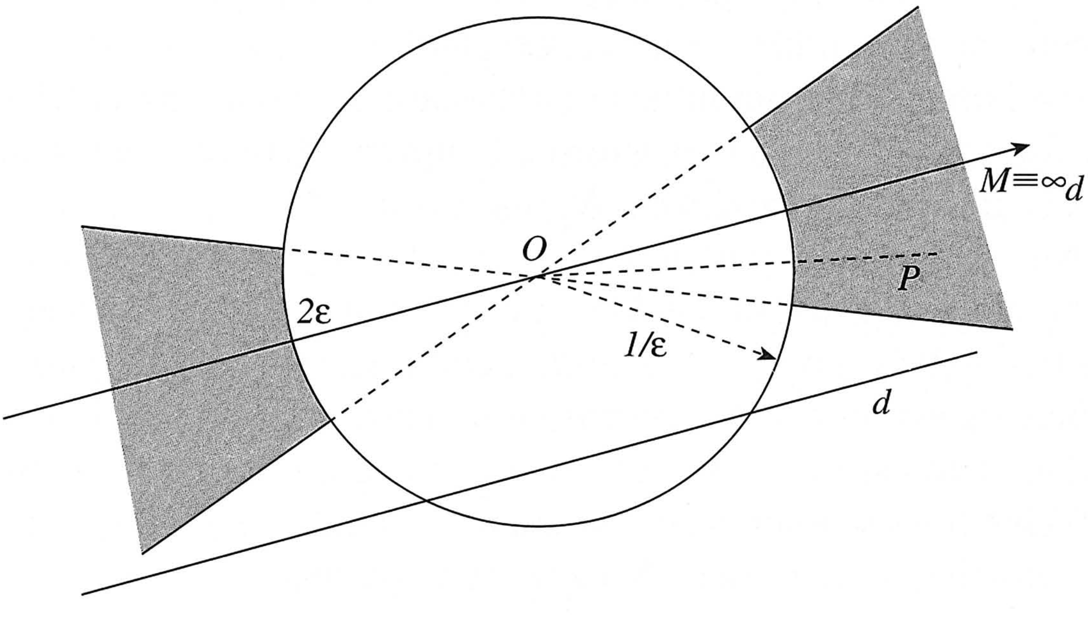


Fig. 45

(Note-se que a topologia de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ pode ainda ser introduzida a partir duma outra noção de vizinhança, em que se utiliza a métrica riemanniana a que nos referimos no § 18°. Chamando agora vizinhança de cada ponto M de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ toda a esfera riemanniana de centro M, vê-se que as definições de ponto aderente, ponto interior, etc., resultam equivalentes às que são dadas a partir da anterior noção de vizinhança).

Importa, contudo, notar que *a topologia do espaço projectivo é muito diferente da topologia do espaço euclideano*. Por exemplo, ao contrário do que sucede com a recta euclideana, a recta projectiva é homeomorfa à circunferência (como se pode reconhecer mediante uma projecção estereográfica, análoga à que se considerou na fig. 37). Do mesmo modo, em $\overline{R_3}$ a circunferência é homeomorfa à hipérbole, o que não sucede em R_3, onde a hipérbole é formada de dois ramos desconexos, homeomorfos à recta euclideana (não esquecendo que, em $\overline{R_3}$, a hipérbole tem mais dois pontos que em R_3, os quais estabelecem a conexão entre os dois ramos).

Conjuntos que são fechados em R_3 deixam de o ser em $\overline{R_3}$, como sucede, p. ex., com uma recta euclideana, à qual falta, em $\overline{R_3}$, um ponto fronteiro impróprio.

Teoremas que são verdadeiros em $\overline{R_3}$ não o são em R_3 e vice-versa. Por exemplo, o teorema de Bolzano-Weierstrass, que em $\overline{R_3}$ se enuncia "Todo o conjunto A com um número infinito de pontos admite pelo menos um ponto de acumulação" não pode ser enunciado com tal generalidade em R_3, exigindo-se neste caso a condição de *ser limitado* o conjunto A. Analogamente, o teorema "Toda a transformação contínua transforma conjuntos fechados em conjuntos fechados" é verdadeira em $\overline{R_3}$ mas não em R_3.

No espaço analagmático R_3^* a topologia pode ser introduzida muito simplesmente, tomando como vizinhanças de cada ponto próprio P as esferas com centro em P e como vizinhanças do *ponto impróprio* os exteriores das esferas com centro num ponto fixo O, arbitrário. Interessa observar que, neste espaço, o teorema de Bolzano-Weierstrass se enuncia como em $\overline{R_3}$. É ainda de notar que a recta analagmática se identifica com a recta projectiva.

§ 22.° Conceito de linha

Uma das noções topológicas mais importantes é a noção de linha, que os matemáticos têm procurado, através dos séculos, fixar em termos lógicos precisos. O conceito intuitivo de linha é o de "trajectória dum ponto móvel". Vejamos, porém, como definir logicamente tal conceito.

Dizer que um ponto P se *move* equivale a dizer que P é função Φ duma variável real t (*variável tempo*), função essa definida num intervalo $[a, b]$. Em símbolos:

$$[1] \qquad P = \phi(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

Dizer que este movimento é *contínuo* equivale a dizer que a função ϕ é *contínua* em todo o intervalo considerado – e já sabemos o que tal significa (§ 20°), se recordarmos que o conjunto dos números reais pode ser identificado com a recta euclideana e o intervalo $[a, b]$ com um segmento de recta. Notemos ainda que, na trajectória de P, os pontos ficam dispostos numa ordem determinada, tal como os pontos duma recta mediante, uma relação de "situado entre". Surge-nos assim naturalmente a seguinte

DEFINIÇÃO – *Linha contínua* é todo o conjunto ordenado de pontos que se pode obter por transformação contínua dum segmento de recta, eventualmente privado de um ou dos dois extremos.

É claro que, com a última restrição, ficam incluídas nesta definição as rectas e as semi-rectas euclideanas. P. ex., a função $y = \tan x$ representa uma transformação contínua (e até bicontínua) do intervalo *aberto* $(-\pi/2, \pi/2)$ sobre o intervalo aberto $(-\infty, +\infty)$, isto é, sobre a recta euclideana.

Consideremos um segmento $\overline{AB}$ e uma transformação contínua Φ de $\overline{AB}$ sobre uma linha $C \equiv \Phi(\overline{AB})$. Vários casos se podem apresentar:

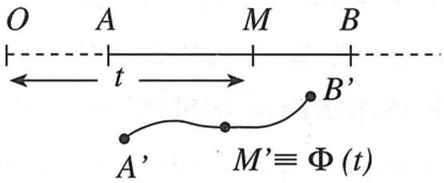


Fig. 46

1) A transformação Φ é biunívoca e portanto *bicontínua*. Então a linha C será homeomorfa ao segmento de recta: chamar-lhe-emos *arco simples* (fig. 46).

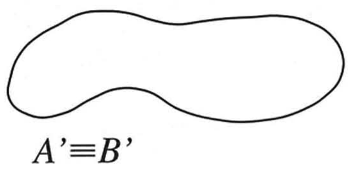


Fig. 47

2) As imagens $A'B'$ dos extremos de $\overline{AB}$ coincidem, mas tal não acontece com as imagens de outros pontos de $\overline{AB}$. Então C é homeomorfa a uma circunferência: chamar-lhe-emos *linha fechada simples* (fig. 47).

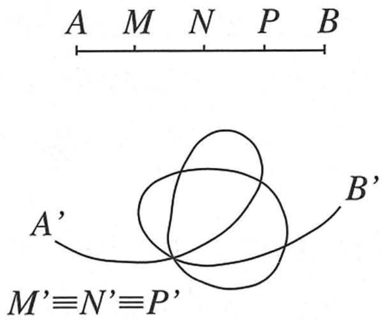


Fig. 48

3) Há pontos M, N, ..., de $\overline{AB}$ distintos dos extremos, cujas imagens M', N', ... coincidem. Chama-se *grau de multiplicidade* dum ponto X de C ao número de pontos de $\overline{AB}$ distintos dos extremos, que têm por imagem X; o ponto X diz-se *simples*, *duplo*, *trïplo*, etc., conforme o seu grau de multiplicidade é 1, 2, 3, etc.; diz-se *múltiplo*, se não é simples (fig. 48).

Compare-se o conceito de "linha contínua" com o de "sucessão de pontos": enquanto o *termo geral* duma sucessão é função da variável natural n, o *ponto gerador* duma linha contínua é função duma variável real t; entre dois pontos distintos duma linha existe sempre uma infinidade de pontos da linha, ao contrário do que acontece numa sucessão. A ideia de "consecutivo" opõe-se à de continuidade.

Fixado em $\boldsymbol{R}_3$ um referencial cartesiano $OXYZ$ constituído por três eixos perpendiculares ou oblíquos entre si, cada ponto M duma linha C será individuado por um terno ordenado (x, y, z) de números reais: *abcissa*, *afastamento* e *cota*. Quer isto então dizer que a transformação Φ, definidora da linha C, será individuada por três funções reais φ_1, φ_2, φ_3 e a expressão [1] resultará portanto equivalente ao sistema de equações

$$[2] \qquad \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases}$$

com

$$(a \leq t \leq b).$$

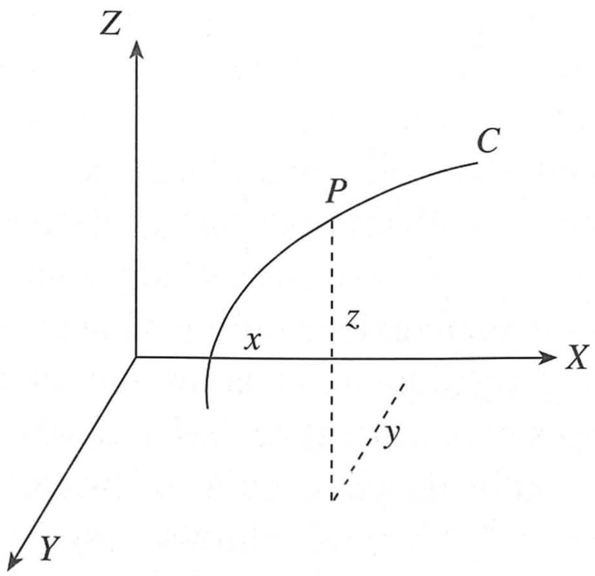


Fig. 49

É claro que a variável t não precisa de ser aqui pensada como *variável tempo*: é simplesmente uma *variável real*, chamada neste caso o *parâmetro* (cujos valores determinam os diferentes pontos da linha).

É fácil ver, por outro lado, que a continuidade da transformação Φ se traduz agora na *continuidade simultânea* das funções φ_1, φ_2, φ_3.

As igualdades [2] são chamadas *equações paramétricas* da linha C. Em geometria plana haverá apenas duas coordenadas e, portanto, apenas duas equações paramétricas:

$$[3] \qquad \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases} \qquad (a \leq t \leq b).$$

A eliminação de (t) entre as equações [3] conduz a uma relação entre x e y, que poderá ser expressa igualando a zero uma conveniente função real $f(x, y)$; obtém-se deste modo a chamada *equação implícita de* C:

$$[4] \qquad f(x, y) = 0.$$

Se esta equação for resolúvel, p. ex., em ordem a y, de modo que se obtenha y como função *unívoca* de x, pode escrever-se a equação da linha sob a forma *explícita*

$$y = F(x).$$

Uma equação em duas variáveis x, y diz-se *algébrica*, quando é redutível à forma dum polinómio (inteiro) em x, y igualado a zero; diz-se *transcendente* no caso oposto. Dada uma equação em duas variáveis $f(x, y) = 0$, podem existir infinitos pares ordenados (x, y) de números reais que a verifiquem: cada um desses pares definirá um ponto do plano. Pois bem, chama-se *linha algébrica plana* ao conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas x, y verificam uma equação algébrica $p(x, y) = 0$. Note-se, no entanto, que uma linha algébrica pode não ser uma linha contínua no sentido atrás precisado, mas sim a reunião dum número finito de linhas contínuas.

Uma linha algébrica diz-se de *ordem n*, quando a sua equação $p(x, y) = 0$ é de grau n, isto é, quando o valor máximo da soma dos expoentes de x e de y no polinómio $p(x, y)$ for n. Por exemplo, a linha de equação $3x^2y - 4y^2 = 0$ é de 3.ª ordem. Se mudarmos o referencial cartesiano, é claro que mudará a equação da linha, *mas prova-se que não muda o grau da equação. Quer isto dizer que a ordem duma linha algébrica plana não depende da posição da linha, isto é, se efectuarmos um deslocamento sobre a linha, a sua ordem não mudará.* Mais ainda: *a ordem duma linha algébrica é invariante em todas as transformações afins*, o que se pode exprimir dizendo que:

A ordem duma linha algébrica plana é uma propriedade afim dessa linha.[1]

Prova-se que as linhas de 1ª ordem são as rectas e que as de 2ª ordem são as cónicas. É claro que, determinar a intersecção duma recta com uma curva de ordem n, equivale a resolver um sistema de duas equações em x e y, uma do 1º grau e a outra de grau n; eliminando, p. ex., y entre essas duas equações, obtém-se geralmente uma

(1) – Demonstra-se mesmo que a ordem duma linha algébrica é uma propriedade projectiva, mas para isso é necessário fazer uso das chamadas *coordenadas homogéneas*, mediante as quais se representam os pontos do espaço projectivo

equação algébrica de grau n em x, que tem n raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, reais ou imaginárias, todas distintas ou não; determinados os valores correspondentes de y, obtém-se finalmente as coordenadas dos pontos da intersecção. Daqui o dizer-se, em sentido figurado, que "a ordem duma linha algébrica é o número de pontos (reais ou imaginários, todos distintos ou não) em que a linha é encontrada por uma recta qualquer". De positivo, temos apenas o seguinte facto:

Uma linha de ordem n não pode ser encontrada por uma recta em mais de n pontos, a não ser que contenha essa recta.

Assim, p. ex., uma sinusoide é uma curva transcendente, visto que pode ser cortada por uma recta em infinitos pontos.

Uma linha algébrica diz-se *redutível* quando é formada por linhas algébricas de ordem inferior; diz-se *irredutível* no caso oposto.

Tornando agora à geometria analítica do espaço, observemos que a eliminação de t entre as três equações [2] conduzirá, geralmente, não a uma única equação, mas a duas equações em x, y, z:

$$[5] \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

chamadas *equações implícitas* da linha C considerada.

NOTA – Como se viu, o conceito de linha algébrica não se refere a um conjunto *ordenado* de pontos, mas a um simples conjunto de pontos. Um conceito de linha contínua em que não intervém a ordem dos pontos é o da seguinte definição (devida a Fréchet): chama-se *linha contínua* todo o conjunto fechado e conexo, que não contém nenhum conjunto homeomorfo a um círculo. Por exemplo, o conjunto indicado a negro na fig. 43 é, segundo esta definição, uma linha contínua, cujos pontos podem ser ordenados de vários modos, em conformidade com a maneira por que a linha se supõe descrita.

§ 23.° Conceito de superfície

Costuma dizer-se em geometria elementar que *uma linha em movimento gera uma superfície*. É assim que surgem, p. ex., os conceitos de "superfície cónica", de "superfície cilíndrica" e de "superfície de revolução". Procuremos agora fixar matematicamente esta ideia intuitiva de superfície.

Suponhamos que, a cada número real v dum dado intervalo, se faz corresponder uma linha C do espaço: diremos então que a linha *variável* C é *função* do parâmetro v. O ponto P gerador da linha variável será pois função de dois parâmetros u, v:

$$P = \Phi(u, v), \tag{6}$$

entendendo-se que, quando u varia num dado intervalo, com v constante, P descreve uma determinada posição da linha C. Se fixarmos agora num plano um sistema de eixos ortogonais, é claro que o conjunto A dos pontos que têm por coordenadas os valores de u e v considerados é o interior dum rectângulo, acrescido ou não de pontos fronteiros (fig. 50).

Posto isto, diz-se que C *gera* (ou é *geratriz de*) *uma superfície contínua* Σ, quando $\Phi(u, v)$ é função contínua de u, v no domínio A, isto é, quando Φ representa uma transformação contínua do conjunto A sobre Σ.

Se, por outro lado, fixarmos em $\boldsymbol{R}_3$ um referencial cartesiano, o ponto P será definido por um terno (x, y, z) de números reáis e a expressão [6] dará lugar a um sistema de três equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \\ z = \varphi_3(u, v) \end{cases}, \tag{7}$$

em que φ_1, φ_2, φ_3 designam funções reais, contínuas no domínio A. Assim, as equações paramétricas duma superfície devem conter dois parâmetros, enquanto as duma linha contêm um só parâmetro.

Por outro lado, a eliminação de u, v entre as equações [7] conduz, nos casos correntes da prática, a uma única equação em x, y, z:

$$f(x, y, z) = 0,$$

chamada *equação implícita* da superfície, enquanto para uma linha se têm duas equações implícitas, as quais corresponderão, naturalmente, a duas superfícies que se cortam segundo essa linha.

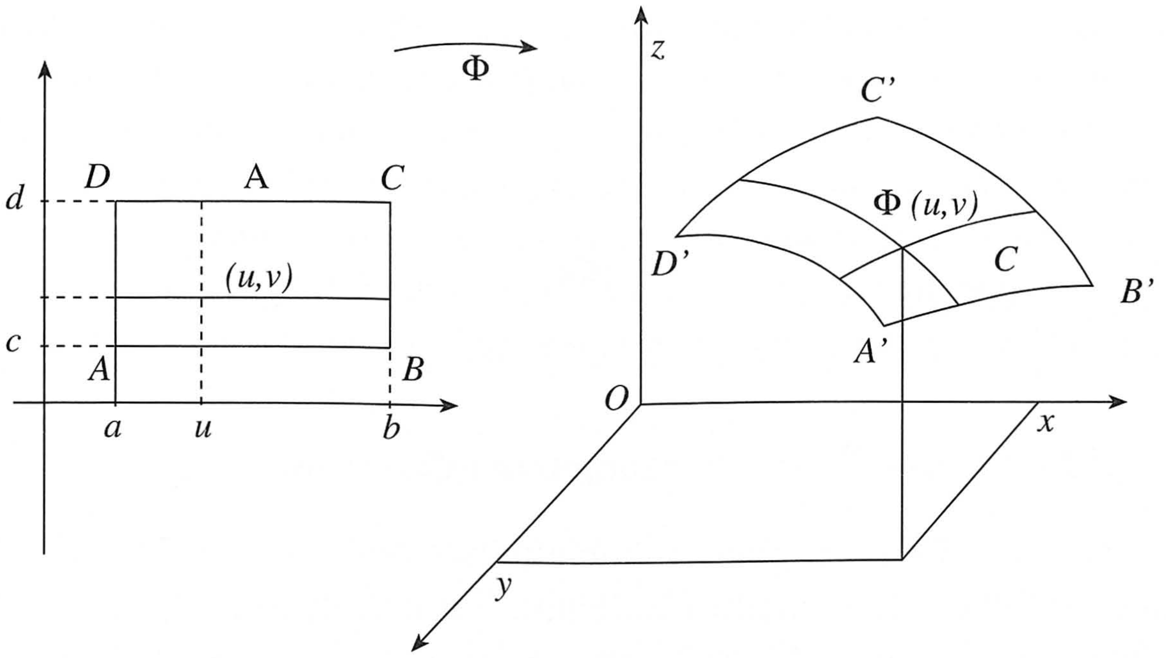


Fig. 50

Chama-se *superfície algébrica* de ordem n ao conjunto dos pontos do espaço cujas coordenadas cartesianas x, y, z verificam uma equação algébrica de grau n (em x, y, z). Demonstra-se que *a ordem duma superfície algébrica é uma propriedade afim (e até projectiva) dessa superfície*. As superfícies algébricas de 1ª ordem são os planos. Exemplos de superfícies de 2ª ordem (também chamadas *quádricas*) são as superfícies esféricas e as superfícies cónicas de 2ª ordem (§ 14°).

A intersecção de duas superfícies algébricas de ordens m, n (que não contenham uma superfície comum) é chamada *linha algébrica de ordem mn*. Por exemplo, a intersecção de duas quádricas será, em geral, uma linha de 4ª ordem (também chamada quártica).

A reunião de duas linhas algébricas C_1, C_2 *de ordens* n_1, n_2 *é uma linha algébrica redutível de ordem* n_1+n_2. Reciprocamente, se uma linha algébrica C de ordem n contém uma linha C_1 de ordem $n_1<n$, diz-se que C é *redutível*, e a parte C_2 que resta de C suprimindo C_1 é chamada uma linha algébrica de ordem $n_2=n-n_1$, *mesmo que* C_2 *não seja a intersecção completa de duas superfíceis algébricas*. Por exemplo, a intersecção de dois cones quádricos com uma (e só uma) geratriz comum será uma quártica, composta de uma recta e de uma linha de 3ª ordem (a chamada *cúbica torsa*); ora, esta linha algébrica de 3ª ordem não pode, visivelmente, ser obtida como intersecção *completa* de duas superfícies algébricas.

Como se sabe, uma linha diz-se *plana* ou *torsa*, conforme existe ou não um plano que a contém. *Uma linha de 2^a ordem (no espaço) é necessariamente uma linha plana: – uma cónica (intersecção dum plano com uma quádrica). Por sua vez, uma linha de 1^a ordem* (*no espaço*) *é necessariamente uma recta* (*intersecção de dois planos*). Observemos por último que, *se a intersecção de duas quádricas contém uma cónica, a parte restante da intersecção é também uma cónica.*

§ 24.° Primeiras noções de geometria diferencial

O conceito de tangente é inicialmente definido, para o caso da circunferência, de maneira elementar. Tal definição pode ainda ser aplicada ao caso das cónicas, como se fez no § 14°, mas é inaplicável ao caso de uma linha qualquer. Recordemos que, tratando-se duma circunferência, a tangente num ponto M é, por assim dizer, a *posição limite* para que tende a secante que passa por M, quando o outro ponto da intersecção tende para M. É esta ideia intuitiva que vamos tentar definir de maneira rigorosa.

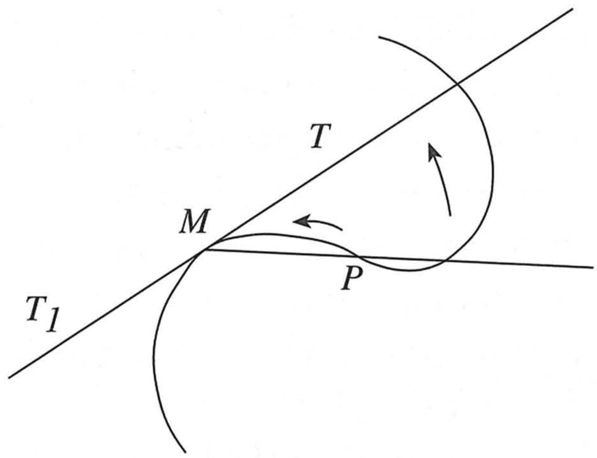


Fig. 51

Seja C uma linha contínua e M um ponto simples (próprio) de C. É claro que M divide C em duas partes, que podemos chamar *anterior* e *posterior* a M (supondo a linha C orientada, isto é, percorrida num determinado sentido). Seja agora P um ponto variável de C *posterior* a M; diz-se que a semi-recta $\widehat{M}P$ (de origem $\widehat{M}$) *tende para uma posição limite MT ao tender de P para M*, quando, qualquer que seja o número $\varepsilon > 0$, se possa sempre associar-lhe $\delta > 0$, de modo que se tenha

$$P\widehat{M}T < \varepsilon \text{, desde que dist } (P, M) < \delta;$$

nesta hipótese, diz-se ainda que a semi-recta $\widehat{M}T$ é *semi-tangente a C em M, à direita*. Analogamente se define *semi-tangente à esquerda* (basta considerar um ponto variável de C anterior a M).

Pode acontecer que a linha C admita em M duas semi-tangentes $\widehat{M}T$, $\widehat{M}T_1$ directamente opostas (fig. 51): então a recta TT_1 formada pelas duas semi-tangentes é chamada *tangente a C* no ponto M. *Se, em particular, a linha é plana, a tangente existe, manifestamente, no plano da linha.*

É claro que esta noção de tangente equivale à noção elementar no caso da circunferência. Porém, *tratando-se duma linha C qualquer, o facto de uma recta r ser ou não tangente a C nada tem que ver com o número de pontos em que r encontra C*. Pode também acontecer que a tangente r atravesse a linha C no ponto de tangência M, dizendo-se então que M é um *ponto de inflexão* de C (fig. 52).

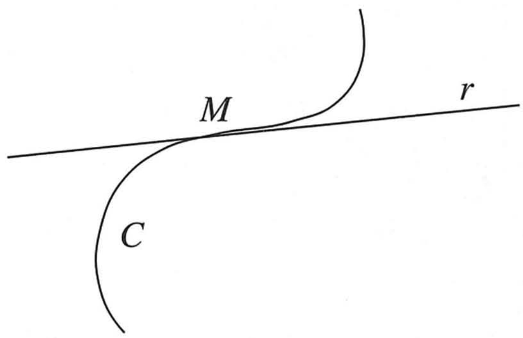


Fig. 52

É fácil ver ainda que, de acordo com a definição precedente, *toda a recta r admite como tangente, em cada um dos seus pontos, a própria recta r.*

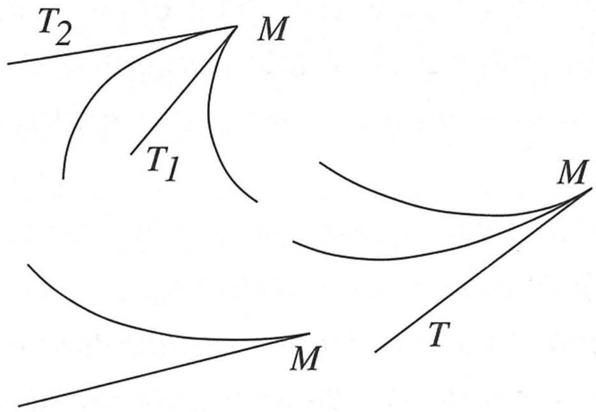
Um ponto M duma linha C diz-se *regular* ou *ordinário*, quando C admite tangente em M; diz-se *singular* no caso oposto. Um ponto simples M de C será singular nos seguintes casos:

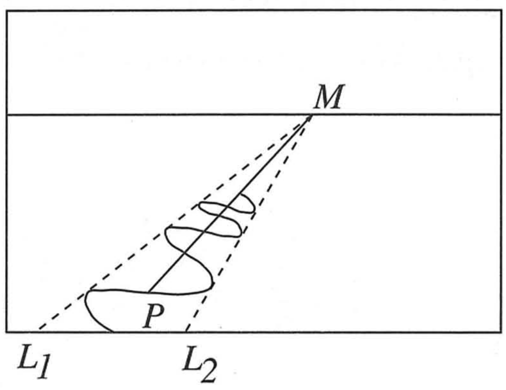
1) Admitindo C em M duas semi-tangentes $\widehat{M}T_1$, $\widehat{M}T_2$ não colineares: M diz-se então um *ponto anguloso* de C.

2) Admitindo C em M duas semi-tangentes coincidentes: M diz--se então um *ponto de reversão* de C .

3) Sendo M um extremo de C (*ponto de suspensão* de C) com uma semi-tangente a C.

4) Não admitindo C semi-tangente em M.





Suponhamos, p. ex., que C é a imagem perspectiva duma sinusoide cujo ponto impróprio tenha por imagem um ponto próprio M; neste caso, sendo P um ponto variável de C, a semi-recta $\widehat{M}P$ oscila entre duas posições extremas $\widehat{M}L_1$, $\widehat{M}L_2$ e não tende, portanto, para nenhuma posição limite, ao tender de P para M: não existe semi-tangente a C em M.

Pode ainda acontecer que uma linha contínua não admita tangente em *nenhum* dos seus pontos: tal é o caso da curva representativa da função de Weierstrass, que não admite derivada em nenhum ponto.

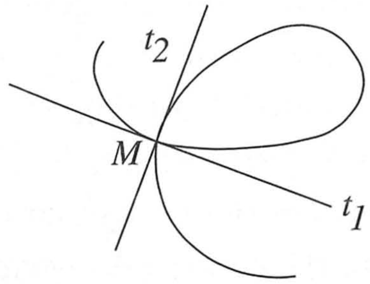


Fig. 53

Se o ponto M de C é múltiplo, não faz sentido falar da tangente a C em M, mas pode acontecer que algumas partes da linha C admitam tangentes em M, as quais serão ainda chamadas, por extensão de linguagem, tangentes a C em M.

Chama-se *normal* duma linha C, num seu ponto regular M, toda a recta perpendicular à tangente a C em M. É claro que, sendo M regular, existirão no espaço infinitas normais a C em M: o seu lugar geométrico é um plano chamado o *plano normal* a C em M.

Chama-se *plano tangente* a uma linha C num seu ponto regular M todo o plano que contenha a tangente a C em M. Uma linha admitirá portanto *infinitos planos* tangentes num seu ponto regular.

Consideremos agora uma superfície Σ e seja M um ponto de Σ. Diz-se que um dado plano θ é *tangente a* Σ *em* M, quando θ é tangente a toda a secção feita em Σ por um plano distinto de θ que passe por M. O ponto M de Σ diz-se *regular* ou *singular*, conforme Σ admite ou não plano tangente em M. Assim, p. ex., o vértice V duma superfície cónica $[\sigma]$ será um ponto singular de $[\sigma]$; se a directriz de $[\sigma]$ só tiver pontos regulares, V será o único ponto singular de $[\sigma]$; mas, por todo o ponto singular da directriz, passará uma geratriz de pontos singulares da superfície.

É óbvio que *todo o plano* π *admite como plano tangente, em cada um dos seus pontos, o próprio plano* π.

Seja M um ponto regular duma superfície Σ e designe θ o plano tangente a M em Σ. Diz-se que M é *elíptico*, quando, em alguma vizinhança de M, não existem pontos comuns a θ e a Σ além de M. Diz-se que M é *hiperbólico*, quando θ corta Σ segundo uma linha com duas tangentes distintas em M (ponto duplo da linha). Diz-se que M é *parabólico*, quando θ corta Σ segundo uma linha com uma única tangente ou semi-tangente em M. Assim, p. ex., os pontos duma superfície esférica são todos elípticos, os pontos dum hiperboloide duma folha são todos hiperbólicos e os pontos regulares duma superfície cónica, todos parabólicos. Podem contudo apresentar-se pontos regulares duma superfície que não pertençam a nenhuma das categorias mencionadas.

É ainda manifesto que o *plano tangente a uma superfície* Σ *num seu ponto regular* M *fica determinado por duas quaisquer rectas distintas, tangentes em* M *a duas linhas planas traçadas sobre a superfície*. É atendendo a este facto que se costuma fazer a determinação dos planos tangentes em geometria descritiva: convém, naturalmente, escolher duas linhas da superfície passando por M, para as quais seja fácil a determinação da tangente em M, como, p. ex., um paralelo e um meridiano, no caso das superfícies de revolução.

Notemos, por outro lado, que, *se* M *é um ponto comum a duas superfícies* Σ_1, Σ_2, *no qual estas admitam planos tangentes* θ_1, θ_2, *distintos, a intersecção destes dois planos será tangente em* M *à intersecção das duas superfícies*. Em particular, uma das superfícies pode ser um plano: *a tangente a uma secção plana de* Σ *num ponto* M (*regular em* Σ) *é a intersecção do plano secante com o plano tangente a* Σ *em* M, *quando esses dois planos forem distintos*.

Chama-se *normal* a uma superfície Σ num seu ponto regular M a recta perpendicular ao plano tangente a Σ em M.

Duas linhas dizem-se *tangentes* num ponto M, quando admitem em M uma tangente comum. Seja C uma curva que varie de maneira contínua com um parâmetro real v (§ 23°); diz-se que uma dada linha é *envolvente* das posições de C quando, nos seus diferentes pontos, essa linha é tangente a cada uma das posições de C. Por exemplo, a família das circunferências que, num dado plano, tem os centros sobre uma recta a e raio constante, r, admite como envolvente a linha formada por duas paralelas à distância r de a.

Duas superfícies dizem-se *concordantes* ao longo duma linha C, quando admitem planos tangentes comuns em todos os pontos de C. Seja Σ uma superfície que varie de maneira contínua com um parâmetro real t; diz-se que uma dada superfície Λ é *envolvente* das posições de Σ, quando concorda com cada uma dessas superfícies ao longo de linhas (chamadas *características* da envolvente) que formam um sistema de geratrizes de Λ. Por exemplo, as posições duma esfera de raio constante, cujo centro descreva uma recta a admitem como envolvente uma superfície cilíndrica de revolução de eixo a, cujas características são as respectivas secções rectas. Os planos tangentes a um cone (de directriz regular) admitem como envolvente esse cone.

§ 25º. Carácter projectivo da noção de tangente. Assíntotas

Consideremos um sistema de projecção constituído por um plano π e por um centro O, e seja C uma linha qualquer de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$. Mostra-nos a fig. 54 intuitivamente que, se *M é um ponto próprio regular de C, a projecção da tangente a C em M é ainda a tangente a C' em M', desde que M' seja próprio e a tangente t não seja projectante (isto é, não passe por O).*

Para averiguar o que acontece no caso de algum dos pontos M, M' não ser próprio, necessário se torna precisar o que se entende por tangente a uma linha num seu ponto impróprio.

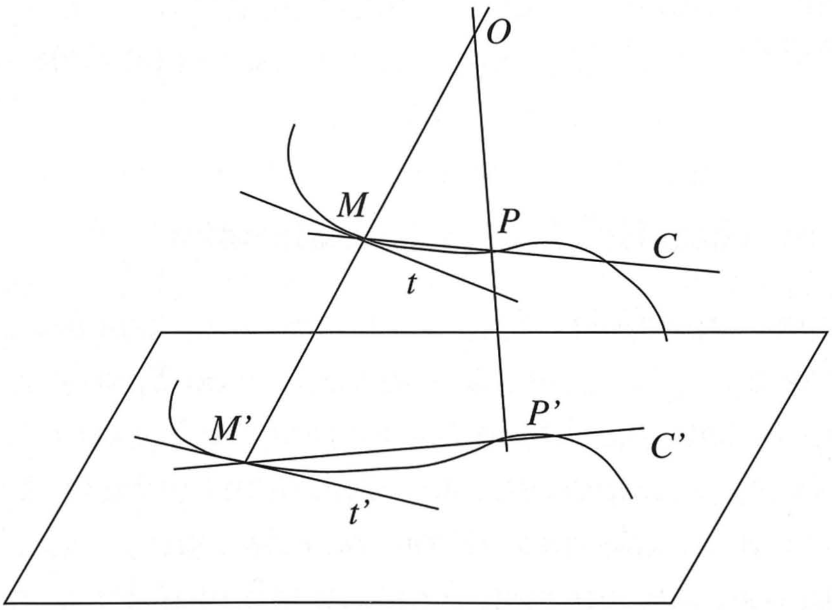


Fig. 54

Consideremos pois uma linha C e designe M um seu ponto impróprio. Seja agora Φ transformação projectiva (de $\overline{\boldsymbol{R}_3}$ sobre si mesmo) que converta o ponto *impróprio* M num ponto *próprio* M'; e seja C' a imagem de C por meio de Φ. Diremos que o ponto M é *regular em* C, quando M' for regular em C', e, nesta hipótese, chamaremos *tangente a* C *em* M a imagem, por meio de Φ^{-1}, da tangente a C' em M'.

É fácil ver agora que, com tal definição, se pode levantar a restrição de M e M' serem próprios, na proposição há pouco enunciada: *a projecção da tangente será sempre a tangente da projeccção, desde que a primeira não seja projectante*. Mais ainda: podemos afirmar que *a propriedade da tangência tem caracter projectivo, isto é, mantém-se em todas as transformações projectivas*.

Ainda poderíamos definir, de maneira análoga, o conceito de semi-tangente num ponto impróprio. Chamam-se *assíntotas* duma linha as tangentes e semi-tangentes a essa linha em pontos impróprios. Por outro lado, chamam-se *direcções assintóticas* duma linha as direcções definidoras dos seus pontos impróprios. Mas é preciso não perder de vista que *nem sempre uma direcção assintótica é acompanhada de assíntota* (*própria* ou *imprópria*); tal é o caso da sinusoide, que tem uma direcção assintótica (um ponto impróprio), mas nenhuma assíntota, como se pode concluir do estudo atrás feito da sua imagem perspectiva.

Poderíamos ainda definir de modo análogo *plano assintótico* duma superfície, isto é, plano tangente a essa superfície num ponto impróprio.

§ 26.° Planificações. Geodésicas e loxodromias

Dadas duas superfícies Σ_1, Σ_2, chama-se *aplicação* de Σ_1 sobre Σ_2 toda a transformação pontual biunívoca Φ de Σ_1 sobre Σ_2 que respeite o comprimento das linhas traçadas sobre Σ_1; admite-se que Φ seja descontínua, *quando muito*, ao longo duma linha de Σ_1, chamada *linha de corte* ou *de abertura*. (Por *comprimento duma linha* C entende-se aqui o limite superior, finito ou infinito, dos comprimentos das poligonais inscritas em C). Diz-se que Σ_1 é *aplicável* sobre Σ_2, quando é possível transformar Σ_1 em Σ_2 mediante uma aplicação.

Chama-se *planificação* duma superfície Σ a aplicação de Σ sobre um domínio plano; se uma tal transformação existe, a superfície diz-se *planificável*. São planificáveis, p. ex., as superfícies cónicas e as cilíndricas (decompondo, se necessário for, a directriz); mas já uma superfície esférica não é planificável.

A operação inversa duma planificação é denominada *enrolamento*.

Fixados dois pontos A, B sobre uma superfície Σ, chama-se *arco geodésico* de extremos A, B sobre Σ uma linha que, traçada em Σ desde A até B, tenha comprimento mínimo em relação a qualquer outra nas mesmas condições. Por outro lado, dá-se o nome de *geodésica* da superfície Σ a toda a linha C desta superfície que contenha um arco geodésico para cada par de pontos de C cuja distância não exceda um certo limite. Por exemplo, no plano, as geodésicas são as rectas, enquanto na esfera as geodésicas são circunferências de círculo máximo.

Para determinar as geodésicas duma superfície planificável Σ, basta considerar uma aplicação Φ desta superfície sobre uma região plana Σ^*: visto que Φ não altera o comprimento das linhas existentes em Σ, é evidente que as geodésicas de Σ serão transformadas por Φ nas geodésicas de Σ^* (que são rectas ou partes de recta); portanto, as geodésicas de Σ serão as imagens, por meio de Φ^{-1}, das rectas ou partes de recta contidas em Σ^*.

O conceito generalizado de geodésica, tal como se apresenta em geometria superior, assume importância fundamental na teoria da relatividade: as rectas aparecem-nos então como as geodésicas do universo (§ 18°).

Por sua vez, o conceito elementar de geodésica tal como aqui foi definido anda ligado ao problema da navegação. Numa viagem por mar, é natural que se procure seguir o arco geodésico, para não perder tempo inutilmente: tal é o objectivo ideal da chamada navegação *ortodrómica*. Todavia, este objectivo nunca pode, por várias razões, ser plenamente atingido na prática. Por exemplo, haverá conveniência em que, durante a viagem, o rumo se mantenha constante, isto é, que o eixo do navio forme sempre um mesmo ângulo com a linha Norte-Sul; nesta hipótese, o barco irá descrevendo sobre o mar uma linha que corta os meridianos segundo um ângulo constante; mas sucede que esta linha – chamada *loxodromia esférica* – não é uma geodésica. (Para o reconhecer, basta observar que, se, p. ex., o barco se deslocar na direcção Leste-Oeste, a linha descrita será um paralelo, que não é em geral um arco de círculo máximo).

A navegação loxodrómica pode contudo ser utilizada em trajectos curtos, como, p. ex., de Lisboa à Madeira, porque então a loxodromia não se afasta consideravelmente da geodésica. Para viagens maiores, convirá seguir uma linha composta de arcos de loxodromia, inscrita no arco geodésico.

Entretanto, importa precisar estas noções. Diz-se que duas linhas C_1, C_2 se cortam segundo um ângulo α num ponto M (regular em ambas), quando as tangentes a C_1 e C_2 em M formam um ângulo de amplitude α. Por outro lado, diz-se que uma linha C é *isógona* a respeito duma família F de linhas, quando corta todas as linhas da família segundo um ângulo constante; se, em particular, este ângulo é recto, diz-se que C é uma *trajectória ortogonal* das linhas da família. *Loxodromia esférica* será pois toda a linha isógona a respeito dos meridianos (sobre a esfera). Em particular, os paralelos serão trajectórias ortogonais dos meridianos e vice-versa.

Dadas duas superfícies Σ_1, Σ_2, chama-se *representação conforme* de Σ_1 sobre Σ_2 toda a transformação bicontínua de Σ_1 sobre Σ_2 que respeite os ângulos segundo os quais se cortam as linhas de Σ_1 (em pontos regulares). As transformações de semelhança são o exemplo mais simples que se possa apresentar de representações conformes; vêm logo em seguida as inversões (§ 19°).

A representação conforme tem um grande interesse em cartografia, como se pode compreender depois do que atrás ficou dito. Consideremos de novo a projecção estereográfica da esfera sobre o plano (fig. 38) e suponhamos que o centro de projecção O representa o pólo norte. Trata-se, como vimos, duma inversão e portanto duma representação conforme da esfera sobre o plano; as imagens dos meridianos serão as rectas que passam por T e as imagens dos paralelos, as circunferências de centro T; uma loxodromia esférica irá pois projectar-se segundo uma linha *isógona* a respeito das rectas que passam por T – linha a que se dá o nome de *espiral logarítmica*. Todavia, para o problema da navegação, o ideal será encontrar uma representação conforme da esfera em que as imagens dos meridianos sejam rectas paralelas entre si, pois que, então, a imagem da loxodromia será manifestamente uma recta. Ora, uma tal representação foi concebida em 1569 pelo famoso matemático *Gerhard Merkator* (cujo verdadeiro nome era *Kremer*). A projecção de Merkator é utilizada em muitos mapas terrestres de quase todos os atlas e apresenta apenas o inconveniente de, sendo os polos afastados para distância infinita do equador, as regiões próximas dos polos aparecerem excessivamente dilatadas e deformadas.

O interesse da representação conforme não se limita de maneira nenhuma ao problema da cartografia. Trata-se de um dos assuntos mais importantes da Análise moderna, intimamente relacionados com a teoria das funções analíticas de variável complexa (estudada na cadeira de Análise Superior).

Interessa ainda observar que a Loxodromia esférica foi, ainda antes de Merkator, estudada pelo matemático e geógrafo português *Pedro Nunes*(1502 - 1578), cuja obra científica ficou em grande parte ligada às empresas marítimas dos portugueses.

Página em branco

APÊNDICE

1. Homologias com centro fora dos limites do desenho

Pode acontecer que o centro duma dada homologia plana Θ esteja fora dos limites do desenho. A homologia pode então ser definida (p. ex.) pelo eixo *e* e por dois pares ordenados de pontos homólogos (A, A^*), (B, B^*), não pertencentes ao eixo (caso da fig. 55). É claro que os pontos considerados devem satisfazer à condição de AB e A^*B^* se encontrarem num ponto do eixo. Neste caso a imagem dum ponto arbitrário *P*, não colinear com *A* e *B*, pode ser determinada como indica a figura, unindo *P* com *A* e *B*, e achando as imagens das rectas *AP*, *BP*, para o que basta atender à invariância dos pontos de *e*. Se o ponto dado *P* fosse colinear com *A* e *B*, bastaria começar por determinar a imagem dum ponto que não estivesse nessas condições.

Pode ainda acontecer que, numa dada homologia plana, tanto o centro como o eixo estejam fora dos limites do desenho. Esta circunstância pode ter lugar, p. ex., ao pretender representar a secção feita por um plano σ num tronco de pirâmide de bases paralelas, conhecidas as projecções das bases e de três pontos não colineares de σ sobre um plano π, segundo uma direcção *d*. Se as projecções do vértice e da intersecção de σ com π estiverem fora dos limites do desenho, a própria natureza do problema sugere a maneira de o resolver.

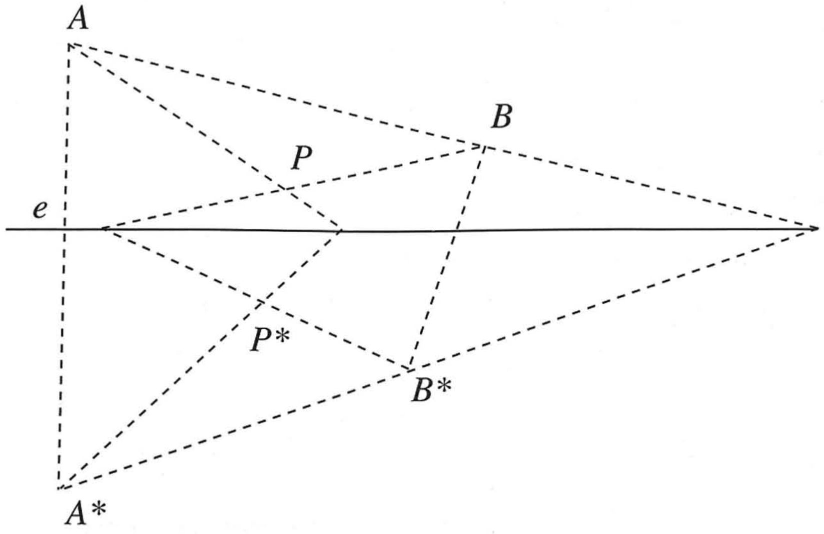


Fig. 55

2. Processo prático para efectuar uma homologia afim

Para achar a transformada duma dada figura F por meio duma homologia afim Θ, é cómodo utilizar o processo indicado na fig. 56. Supondo Θ definida pelo eixo e e por um par ordenado (A, A^*) de pontos homólogos, tome-se um ponto A_o de e não colinear com A, A^* e una-se A_o com estes dois pontos. Para obter a imagem B^* dum ponto B qualquer, conduza-se por B uma paralela BB_o a AA_o; a imagem de BB_o deve ser paralela a A^*A_o (imagem de AA_o) e deve encontrar-se com BB_o num ponto B_o do eixo; o ponto B^* será pois a intersecção do raio que passa por B (paralelo a AA^*) com a paralela a A_oA^* conduzida por B_o.

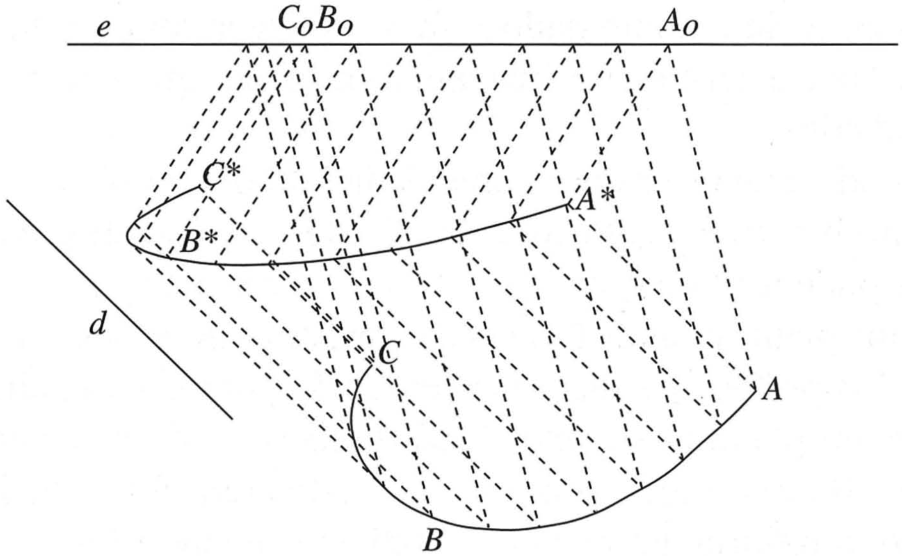


Fig. 56

3. Diâmetros conjugados e eixos da elipse

Tendo em atenção o que foi dito no final do § 17.°, podemos resolver o seguinte problema:

Traçar uma elipse conhecidos dois seus diâmetros conjugados quaisquer (dados em posição e grandeza).

Sejam então AB e CD dois diâmetros conjugados duma elipse $\mathcal{C}$; esta deve estar inscrita no paralelogramo $[PQRS]$ cujos lados passam pelos pontos A, B, C, D e são paralelos aos referidos diâmetros (fig. 57). Então, se construirmos, p. ex., um quadrado $[PQR'S']$ sobre o lado PQ do paralelogramo e inscrevermos uma circunferência $\mathcal{C}'$ neste quadrado, a elipse $\mathcal{C}$ ficará definida, em tais condições, como imagem da circunferência $\mathcal{C}'$ mediante a homologia afim de eixo PQ que transforma R' em R.

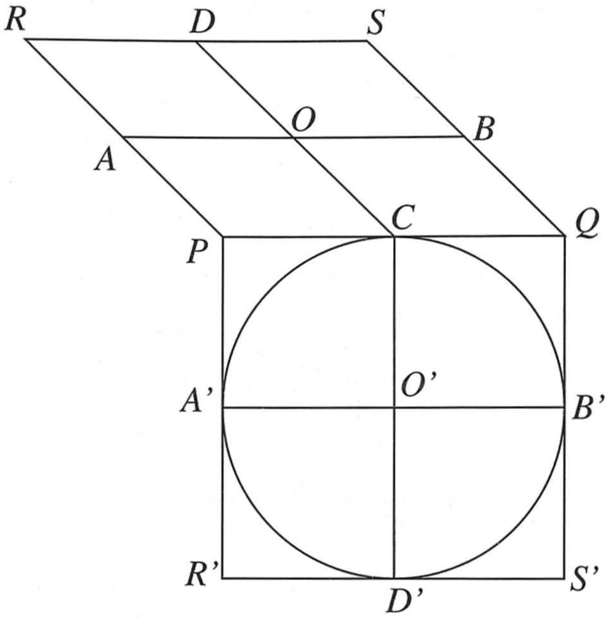


Fig. 57

Quando uma elipse $\mathcal{C}$ é dada como imagem duma circunferência $\mathcal{C}^*$ mediante uma homologia afim os eixos de $\mathcal{C}$ podem ser determinados, *atendendo a que são dois diâmetros de $\mathcal{C}$ perpendiculares entre si, correspondentes a dois diâmetros de $\mathcal{C}^*$ também perpendiculares entre si.* A fig. 58 indica imediatamente a maneira de resolver o problema. Seja O^* o centro de $\mathcal{C}^*$, e o eixo de Θ e O a imagem de O^* por meio de Θ. Determinado o ponto M de e equidistante de O^* e O (intersecção de e com a mediatriz do segmento $\overline{OO^*}$), construa-se a circunferência de centro M que passa por O e O^*, e determinem-se os pontos R, S em que esta circunferência encontra e. Os ângulos $R\widehat{O^*}S$ e $R\widehat{O}S$, por estarem inscritos numa semi-circunferência, são ambos rectos. Por outro lado, as rectas RO^* e SO^* são transformadas por Θ, respectivamente, nas rectas RO e SO, visto os pontos R, S serem invariantes em Θ. Finalmente, conduzindo por A^*, B^*, C^*, D^* paralelas a OO^* (direcção da afinidade), ter-se-ão sobre as rectas RO e SO as imagens A, B, C, D daqueles pontos. *Assim, os diâmetros* $\overline{A^*B^*}$, $\overline{C^*D^*}$ *da circunferência, perpendiculares entre si, são transformados por* Θ *nos diâmetros* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *da elipse, ainda perpendiculares entre si: logo* $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ *são os eixos da elipse.*

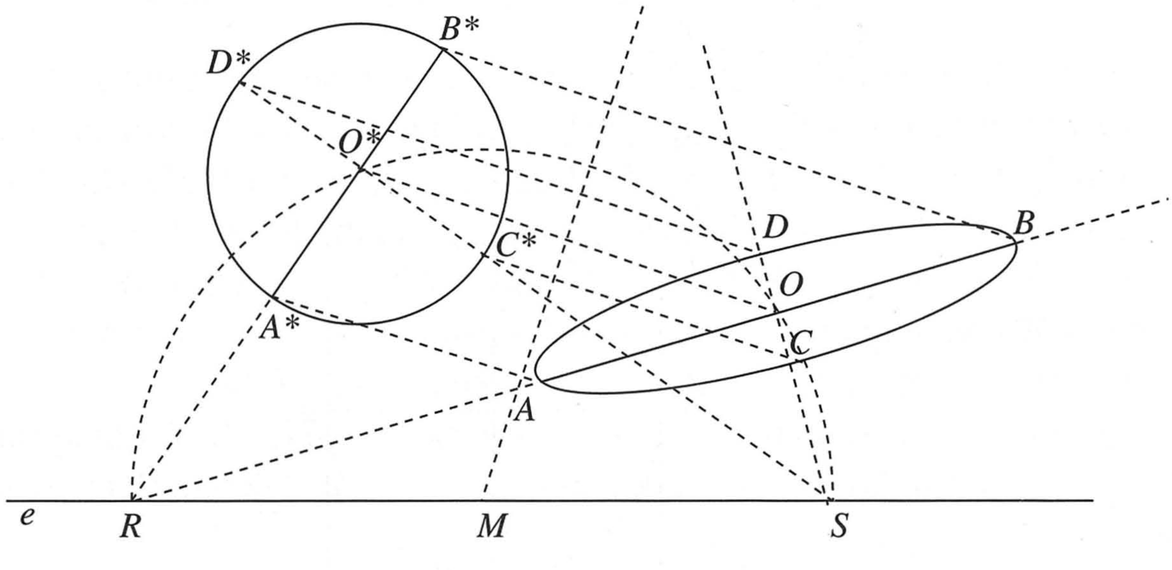


Fig. 58

Se a elipse $\mathcal{C}$ é definida como imagem duma circunferência $\mathcal{C}^*$ mediante uma homologia Θ de centro próprio O (fig. 59), para determinar os eixos de $\mathcal{C}$ é necessário começar por achar um par de diâmetros conjugados de $\mathcal{C}$. Designemos por $\overline{AB}$ o diâmetro da elipse paralelo a e e por $\overline{CD}$ o diâmetro conjugado com $\overline{AB}$. É fácil ver, atendendo ao que foi dito atrás, que as tangentes a $\mathcal{C}$ em C e D são paralelas a $\overline{AB}$ e portanto a e; as suas imagens por meio de Θ^{-1} serão as tangentes a $\mathcal{C}^*$ em C^*, D^*, paralelas ainda a e. Podemos pois começar por determinar C^*, D^* como pontos de contacto das tangentes à circunferência $\mathcal{C}^*$ paralelas a e.

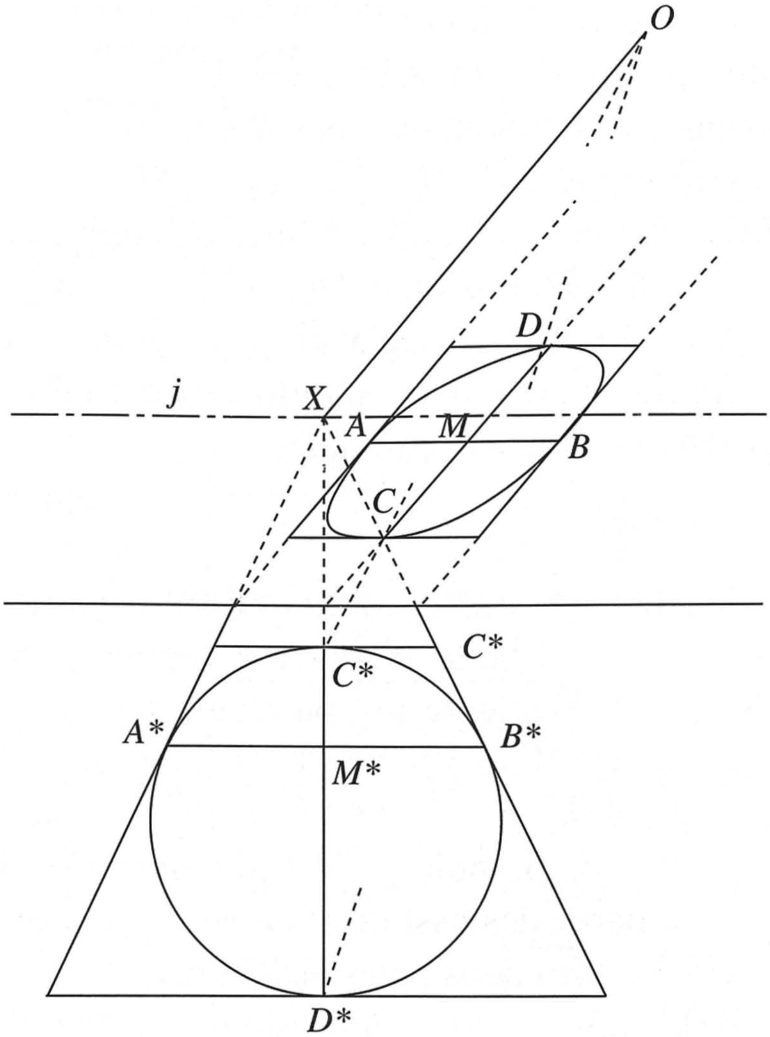


Fig. 59

Por outro lado, as tangentes a $\mathcal{C}$ em A e B serão paralelas a CD e as suas imagens por meio de Θ^{-1} serão pois as tangentes a $\mathcal{C}^*$ que passam pela imagem X do ponto impróprio de CD (por meio de Θ^{-1}). É claro que X será a intersecção de C^*D^* com j. Então, A^*, B^* poderão ser determinados como pontos de contacto das tangentes à circunferência passando por X.

Como a homologia Θ se supõe definida pelo centro O, pelo eixo e e pela segunda recta limite j, a determinação dos pontos $A, B, C, D,$ como transformados de A^*, B^*, C^*, D^* por meio de Θ, pode fazer-se facilmente do seguinte modo: A imagem de X por meio de Θ é o ponto impróprio do eixo OX, visto ser X um ponto de j, mas a imagem de X por meio de Θ é o ponto impróprio de CD: logo $CD // OD$. Para determinar CD, basta pois determinar a intersecção de C^*D^* com e e conduzir por aí uma paralela a OX; a intersecção de CD com os raios OC^* e OD^* dá-nos os pontos C, D. Por outro lado, achadas as intersecções R, S de XA^* e XB^* com e, as rectas RA e SB serão as paralelas a CD conduzidas por R e S. Finalmente, A, B são as intersecções dos raios OA^*, OB^* com RA e SB.

Uma vez determinado o par de diâmetros conjugados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ da elipse, a determinação dos eixos pode seguir-se como há pouco foi indicado. Para não sobrecarregar a figura, pode fazer-se a construção numa figura aparte, desenhando um paralelogramo igual àquele em que está inscrita a elipse dada.

Observações:

I) A determinação dos eixos duma elipse a partir dum par de diâmetros conjugados, permite resolver o seguinte problema interessante: "Dado arbitrariamente um paralelogramo sobre um plano π, determinar um quadrado cuja projecção ortogonal sobre π coincida com o paralelogramo."

II) Os eixos duma hipérbole (eixos de simetria) determinam-se muito facilmente a partir das assíntotas, atendendo a que são as bissectrizes dos ângulos formados pelas assíntotas.

III) A parábola tem um só eixo de simetria, cuja direcção coincide com a direcção assintótica da parábola. O ponto em que o eixo encontra a curva é chamado *vértice* da parábola e pode ser determinado como ponto de contacto da tangente à curva, perpendicular à direcção assintótica.

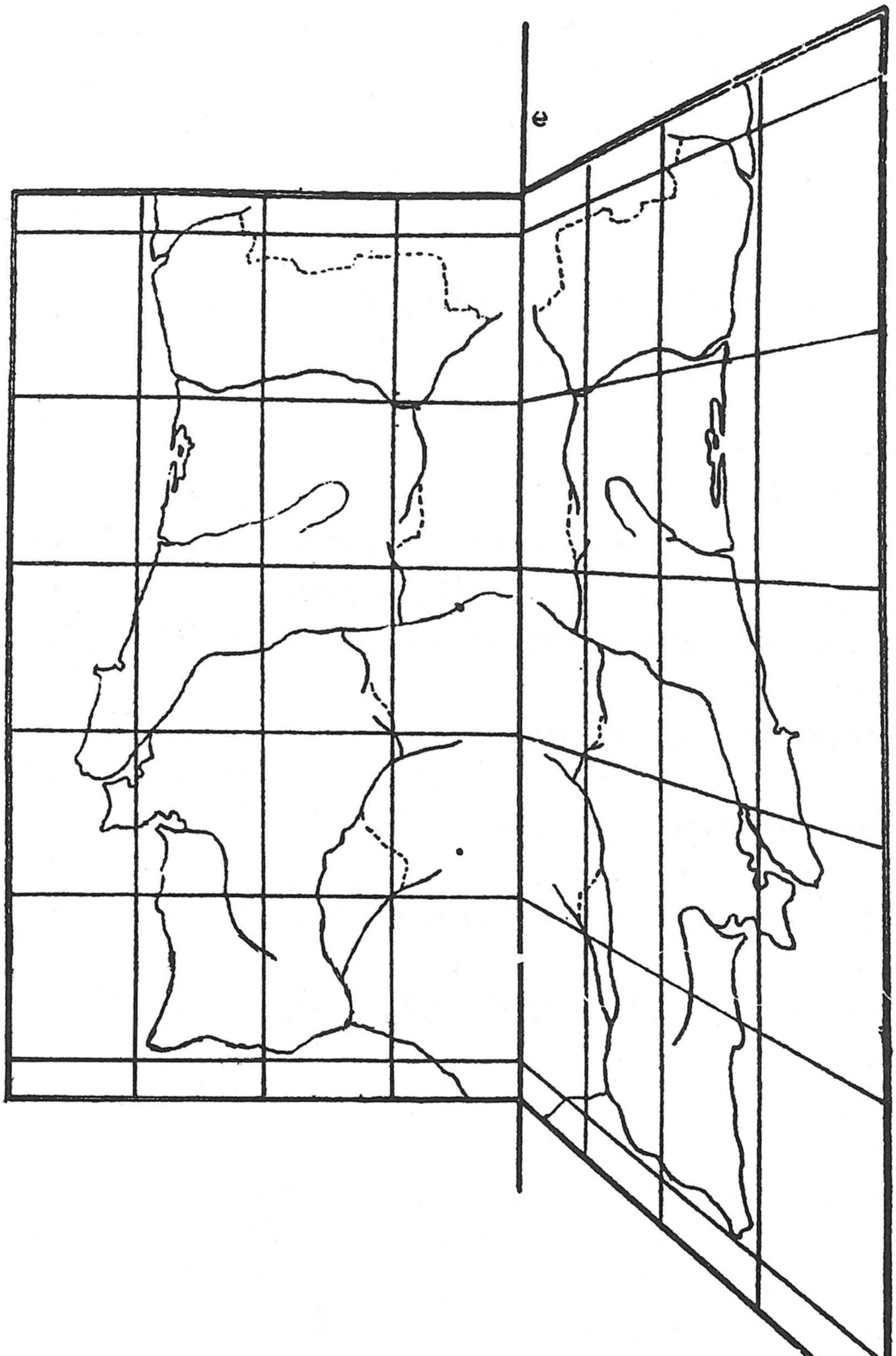


Figura 60

Página em branco

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. R. HAUSSNER – "Geometria descriptiva", tradução espanhola, 2ª Edição, Labor, Barcelona, 1942.
2. E. STIEFEL – "Lehrbuch der darstellenden Geometrie", Birkhäuser, Basel, 1947.
3. G. SCHEFFERS – "Lehrbuch der darstellenden Geometrie", 2 vol., 2ª ed., Berlim, Springer, 1922.
4. G. ILIOVICI et P. ROBERT – "*Geométrie* (Transformations. Coniques. Problèmes), Paris, Eyroler, 1937.
5. TAIBO – "Geometria descriptiva y sus aplicaciones", 2 vol., Madrid, 1943.
6. A. QUEIROZ – "Lições de Geometria descritiva", vol. I, Fernando Machado & Cª, Ldª, Porto, 1931.
7. E. L. INCE – "Principles of descriptive Geometry", Arnold, Londres, 1933.
8. F. KLEIN – "Matemática elemental desde un punto de vista superior", tradução espanhola, vol. II, Madrid, 1931.
9. L. GODEAUX – "Les Géométries", Colin, Paris, 1937.
10. COURANT and ROBBINS – "What is Mathematics?", Oxford University Press, Londres, 1943.
11. U. CASSINA – "Trasformazioni geometriche elementari", Enciclopedia delle matematiche elementari, vol. II, Parte I, Hoepli, Milão, 1937.

Página em branco

ÍNDICE

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS