

I.3

---

## **CÁLCULO DOS VALORES APROXIMADOS**



## I.3

---

### CÁLCULO DOS VALORES APROXIMADOS

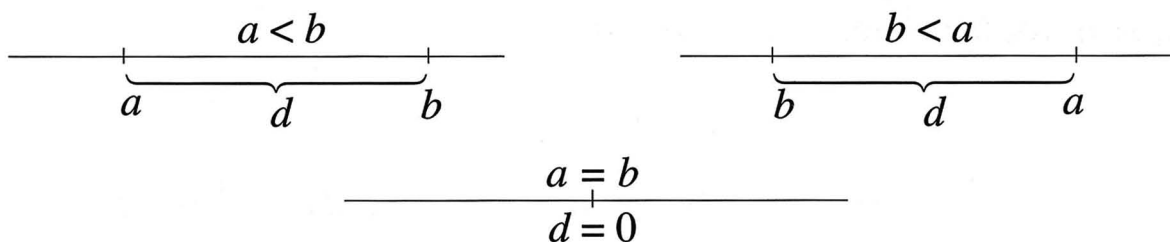
1. – Consideremos uma recta orientada, sobre a qual se escreveu um ponto para origem e um comprimento para unidade. Sendo  $a$  e  $b$  dois números reais quaisquer, existe um ponto da recta cuja abcissa é  $a$  e outro cuja abcissa é  $b$ . A *distância*,  $d$ , entre estes dois pontos será igual a

$$|a - b|,$$

isto é,

$$d = \begin{cases} a - b, & \text{se } b \leq a, \\ b - a, & \text{se } a \leq b. \end{cases}$$

Na verdade, três casos se podem dar:



Por analogia, chama-se *distância entre dois números reais*  $a$  e  $b$  o número  $|a - b|$ .

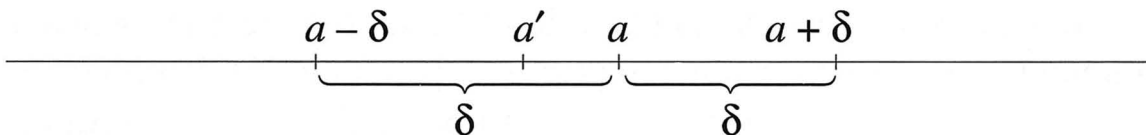
2. – Sendo  $a$  um número real qualquer e  $\delta$  um número positivo ( $\delta > 0$ ), chama-se *valor aproximado de  $a$  a menos de  $\delta$*  todo o número  $a'$  cuja distância a  $a$  seja menor que  $\delta$ , isto é, tal que

$$|a' - a| < \delta.$$

Nesta hipótese, diz-se que  $a'$  é valor aproximado *por defeito*, se  $a' \leq a$ , e que é aproximado *por excesso*, se  $a' \geq a$ .

Dizer que a distância de  $a'$  a  $a$  é menor que  $\delta$  equivale a dizer, evidentemente, que  $a'$  está entre  $a - \delta$  e  $a + \delta$ , isto é, que

$$a - \delta < a' < a + \delta.$$



Chama-se *vizinhança* ( $\delta$ ) *de*  $a$  o conjunto de todos os valores aproximados de  $a$  a menos de  $\delta$ .

Portanto, em virtude do que foi dito atrás, a vizinhança ( $\delta$ ) de  $a$  será o intervalo  $]a - \delta, a + \delta[$ .

Como se tem  $|a' - a| = |a - a'|$ , o raciocínio anterior mostra que, se  $a'$  for um valor aproximado de  $a$  a menos de  $\delta$ , será também

$$a' - \delta < a < a' + \delta.$$

Se, além disso,  $a'$  for aproximado por defeito, podemos escrever mesmo

$$a' \leq a < a' + \delta$$

e, se  $a'$  for aproximado por excesso, será

$$a' - \delta < a \leq a'.$$

Por exemplo, o desenvolvimento decimal de  $\pi$  com 5 decimais

$$\pi = 3,14159 \dots$$

mostra que 3,14159 é um valor aproximado de  $\pi$ , por defeito, a menos de  $\delta = 0,00001$ , isto é, que

$$3,14159 < \pi < 3,1416.$$

Os algarismos posteriores mostram, depois, que  $\pi$  é superior a 3,14159 e que, portanto, 3,1416 é um valor aproximado de  $\pi$ , *por excesso*, a menos de  $10^{-5}$ .

3. – Tomando  $a'$  como valor aproximado de  $a$ , chamaremos *desvio de  $a'$*  a diferença  $a' - a$  (positiva, negativa ou nula) e *erro de  $a'$*  o módulo do desvio. Assim, dizer que  $a'$  é valor aproximado de  $a$  a menos de  $\delta$  equivale a dizer que o erro de  $a'$  é inferior a  $\delta$ .

4. – *ADIÇÃO* — Sejam  $a'$  e  $b'$ , respectivamente, valores aproximados de dois números reais,  $a$  e  $b$ , a menos de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  (com  $\varepsilon_1 > 0$  e  $\varepsilon_2 > 0$ ). Designemos por  $x$  e  $y$  os respectivos desvios:

$$(1) \quad a' - a = x, \quad b' - b = y$$

Será, pois,

$$(2) \quad |x| < \varepsilon_1, \quad |y| < \varepsilon_2$$

e

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) = x + y,$$

isto é: *o desvio da soma é igual à soma dos desvios das parcelas.*

Ora, sabemos que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Daqui resulta, atendendo a (2) e à monotonia da adição,

$$|x + y| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Em particular, se for  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ , será

$$|x + y| < 2\varepsilon,$$

isto é:

*A soma de dois valores aproximados a menos de  $\varepsilon$  é um valor aproximado da soma a menos de  $2\varepsilon$ .*

Portanto:

*Para obter um valor aproximado da soma a menos de um dado número  $\delta > 0$ , basta somar dois valores aproximados das parcelas a menos de  $\delta/2$ .*

É claro que, se as parcelas forem aproximadas, ambas por excesso ou ambas por defeito, também a soma será aproximada por excesso ou por defeito, respectivamente.

5. – *SUBTRACÇÃO* — Mantidas as hipóteses e as notações do número anterior, tem-se

$$(a' - b') - (a - b) = (a' - a) - (b' - b) = x - y,$$

isto é: *o desvio da diferença é igual à diferença entre o desvio do aditivo e o desvio do subtrativo.*

Por outro lado, como

$$x - y = x + (-y) \quad \text{e} \quad |-y| = |y|,$$

será

$$|x - y| < |x| + |y|,$$

donde, atendendo ainda a (2):

$$|x - y| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Em particular, se for  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ , virá

$$|x - y| < 2\varepsilon,$$

isto é:

*A diferença de dois valores aproximados a menos de  $\varepsilon$  é um valor aproximado da diferença a menos de  $2\varepsilon$ .*

E, portanto:

*Para calcular um valor aproximado da diferença a menos de um dado  $\delta$ , basta tomar valores aproximados dos dois termos com erro inferior a  $\delta/2$ .*

A diferença de dois valores aproximados por defeito (ou por excesso) pode já não ser um valor aproximado da diferença por defeito (ou por excesso, respectivamente). Mas é claro que a diferença entre um valor aproximado por defeito e um valor aproximado por excesso é sempre um valor aproximado por defeito (e vice-versa).

6. — *MULTIPLICAÇÃO* — Sejam, ainda,  $a'$  e  $b'$  valores aproximados de  $a$  e de  $b$ , a menos de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , respectivamente, e designemos por  $x$  e  $y$  os respectivos desvios. Será, pois,

$$x = a' - a, \quad y = b' - b, \quad |x| < \varepsilon_1, \quad |y| < \varepsilon_2.$$

Então,

$$a' = a + x, \quad b' = b + y$$

e, portanto,

$$a' b' = ab + ay + bx + xy,$$

donde se deduz o desvio do produto:

$$a' b' - ab = ay + bx + xy.$$

Por outro lado, tem-se

$$|a' b' - ab| \leq |a| |y| + |b| |x| + |x| |y|,$$

donde, atendendo a que  $|x| < \varepsilon_1$  e  $|y| < \varepsilon_2$ :

$$(3) \quad |a' b' - ab| < |a| \varepsilon_1 + |b| \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Na prática, não se conhecem, geralmente,  $|a|$  e  $|b|$ , mas podem substituir-se por números  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  que lhes sejam superiores:

$$(4) \quad \bar{a} > |a|, \quad \bar{b} > |b|,$$



por exemplo,

$$\bar{a} = |a'| + \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad \bar{b} = |b'| + \varepsilon_2.$$

(Na prática, basta, geralmente, tomar os majorantes  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  de  $|a|$  e  $|b|$  com um só algarismo significativo).

Se, além disso, for  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ , virá de (3) e (4):

$$|a' b' - ab| < \bar{a}\varepsilon + \bar{b}\varepsilon + \varepsilon^2 = (\bar{a} + \bar{b} + \varepsilon)\varepsilon.$$

Finalmente, se for  $\varepsilon \leq 1$  (hipótese que se verifica frequentemente na prática), será:

$$(5) \quad |a' b' - ab| < (\bar{a} + \bar{b} + 1)\varepsilon.$$

Esta última fórmula para a majoração do erro do produto permite resolver o problema inverso: achar a aproximação com que podem ser tomados os factores, para obter o produto com erro inferior a um dado número  $\delta > 0$ . Na verdade, a fórmula (5) mostra que, para calcular o produto com erro inferior a  $\delta$ , basta que seja

$$\varepsilon \leq 1 \quad \text{e} \quad (\bar{a} + \bar{b} + 1)\varepsilon \leq \delta,$$

isto é, basta tomar os dois factores com erro inferior a um número  $\varepsilon$  tal que

$$(6) \quad \varepsilon \leq 1, \quad \varepsilon \leq \frac{\delta}{1 + \bar{a} + \bar{b}}.$$

Portanto:

**TEOREMA.** — Dado um número positivo  $\delta$ , pode sempre achar-se outro número positivo  $\varepsilon$ , de modo que o produto de dois valores aproximados de  $a$  e de  $b$  a menos de  $\varepsilon$  seja um valor aproximado de  $ab$  a menos de  $\delta$ . Basta, para isso, utilizar as fórmulas (6).



7. – *DIVISÃO* – Mantidas as hipóteses e as notações do número anterior, tem-se:

$$(7) \quad \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{a+x}{b+y} - \frac{a}{b} = \frac{bx-ay}{b(b+y)}$$

com  $|x| < \varepsilon_1$ ,  $|y| < \varepsilon_2$ . Se, além disso, for

$$\varepsilon_2 < \frac{|b|}{2}$$

(o que, geralmente, sucede na prática), vem

$$|b+y| \geq |b| - |y| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$

e, portanto,

$$(8) \quad \frac{1}{|b+y|} < \frac{2}{|b|}.$$

Ora, de (7) resulta:

$$(9) \quad \left| \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right| = \frac{1}{|b+y|} \cdot \frac{|bx-ay|}{|b|}$$

e, como se tem

$$|bx-ay| \leq |b| |x| + |a| |y| < |b| \varepsilon_1 + |a| \varepsilon_2,$$

virá, de (9) e de (8):

$$(10) \quad \left| \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} \right| < \frac{2(|b| \varepsilon_1 + |a| \varepsilon_2)}{|b|^2}.$$

Na prática, os valores exactos são ignorados, mas, como se trata de uma *fórmula para majoração de erro*, podemos, no numerador, substituir  $|a|$  e  $|b|$  por seus majorantes, respectivamente:

$$\bar{a} > |a| \quad \text{e} \quad \bar{b} > |b|,$$

(por exemplo,  $\bar{a} = |a'| + \varepsilon_1$  e  $\bar{b} = |b'| + \varepsilon_2$ ) e substituir  $|b|$ , no denominador, por um seu minorante positivo:

$$\underline{b} < |b| \text{ (por exemplo, } \underline{b} = |b'| - \varepsilon_2, \text{ sendo } \varepsilon_2 < |b'| \text{)}.$$

Se, além disso, for  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ , a fórmula (10) dá lugar à seguinte:

$$(11) \quad \left| \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \right| < \frac{2(\bar{a} + \bar{b})}{\underline{b}^2} \varepsilon.$$

Ora, esta fórmula, mais simples, de majoração já permite resolver o problema inverso: *achar a aproximação com que podem ser tomados  $a$  e  $b$ , para ter a garantia de o quociente vir com erro inferior a um dado  $\delta$ .*

Com efeito, deduz-se de (11) que, *para obter  $a/b$  com erro inferior a  $\delta$ , basta que seja*

$$\varepsilon < \frac{|b|}{2} \text{ e } \frac{2(\bar{a} + \bar{b})}{\underline{b}^2} \varepsilon \leq \delta,$$

*isto é, basta que  $\varepsilon$  seja inferior ao menor dos números*

$$\frac{|b|}{2} \text{ e } \underline{b}^2 \cdot \frac{\delta}{2(\bar{a} + \bar{b})}.$$

Em conclusão:

**TEOREMA** – *Dado um número  $\delta > 0$ , é sempre possível, segundo a regra anterior, achar um correspondente  $\varepsilon > 0$ , de modo que o quociente de dois valores aproximados de  $a$  e de  $b$  a menos de  $\varepsilon$  seja um valor aproximado de  $a/b$  a menos de  $\delta$ .*

8. – **RADICIAÇÃO** – Para maior clareza, vamos fazer o estudo do cálculo aproximado da raiz começando pelo caso mais simples: o da raiz quadrada.

Seja, agora,  $a$  um número *positivo* e seja  $a'$  um valor aproximado de  $a$  (também positivo), a menos de um número  $\varepsilon > 0$ . Então, será  $a' - a (= x)$  o desvio de  $a'$  e

$$\sqrt{a'} - \sqrt{a}$$

o desvio de  $\sqrt{a'}$ , como valor aproximado de  $\sqrt{a}$ . Multiplicando  $\sqrt{a'} - \sqrt{a}$  pelo seu conjugado, vem

$$(\sqrt{a'} - \sqrt{a})(\sqrt{a'} + \sqrt{a}) = a' - a = x,$$

ou seja,

$$\sqrt{a'} - \sqrt{a} = \frac{x}{\sqrt{a'} + \sqrt{a}}.$$

Como, por hipótese,  $|x| < \varepsilon$ , será, portanto,

$$|\sqrt{a'} - \sqrt{a}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a} + \sqrt{a'}},$$

visto que  $|\sqrt{a} + \sqrt{a'}| = \sqrt{a} + \sqrt{a'}$  por serem  $\sqrt{a}$  e  $\sqrt{a'}$  números positivos. Então, substituindo  $a$  e  $a'$  por um minorante comum (positivo):

$\underline{a} < a$ ,  $\underline{a} < a'$  (por exemplo,  $\underline{a} = a' - \varepsilon$ , sendo  $\varepsilon < a'$ ), virá

$$(12) \quad |\sqrt{a'} - \sqrt{a}| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\underline{a}}}.$$

9. – Passemos, agora, ao caso geral da radiciação. Utilizaremos, para isso, a conhecida identidade

$$(u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}) = u^n - v^n$$

ou, abreviadamente,

$$(u - v) \sum_{i=1}^n u^{n-i} v^{i-1} = u^n - v^n,$$

que se pode verificar efectuando a multiplicação indicada.

Pondo nesta fórmula

$$u = \sqrt[n]{a'} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[n]{a},$$

e notando que  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ,  $(\sqrt[n]{a'})^n = a'$ , vem

$$(\sqrt[n]{a'} - \sqrt[n]{a}) \sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{a'})^{n-i} (\sqrt[n]{a})^{i-1} = a' - a = x$$

donde

$$(13) \quad \sqrt[n]{a'} - \sqrt[n]{a} = \frac{x}{\sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{a'})^{n-i} (\sqrt[n]{a})^{i-1}}.$$

Então, lembrando que  $|x| < \varepsilon$  e substituindo  $a$  e  $a'$  por um minorante comum positivo,

$$\underline{a} < a, \quad \underline{a} < a',$$

virá de (13):

$$(14) \quad |\sqrt[n]{a'} - \sqrt[n]{a}| < \frac{\varepsilon}{n(\sqrt[n]{\underline{a}})^{n-1}},$$

visto que

$$\sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{\underline{a}})^{n-i} (\sqrt[n]{\underline{a}})^{i-1} = \sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{\underline{a}})^{n-1} = n(\sqrt[n]{\underline{a}})^{n-1}.$$

A fórmula (14) permite, pois, majorar o erro da raiz e resolver o problema inverso: *achar a aproximação com que pode ser tomado o radicando, de modo a obter a raiz com erro inferior a um dado  $\delta$* . Com efeito, basta, para isso, que seja

$$\frac{\varepsilon}{n\sqrt[n]{\underline{a}^{n-1}}} < \delta, \quad \text{isto é,} \quad \varepsilon < n\delta\sqrt[n]{\underline{a}^{n-1}}.$$

Em conclusão:

**TEOREMA** – *Dado um número  $\delta > 0$ , é sempre possível achar um correspondente  $\varepsilon > 0$ , de modo que a raiz de índice  $n$  dum valor aproximado de  $a$  a menos de  $\varepsilon$  seja um valor aproximado de  $\sqrt[n]{a}$  a menos de  $\delta$ . Basta, para isso, usar a fórmula anterior.*

**10. – APLICAÇÕES ÀS OPERAÇÕES SOBRE LIMITES** – Os resultados anteriores, relativos à majoração de somas, diferenças, produtos, quocientes e raízes, além das aplicações que encontram na prática, permitem demonstrar comodamente os teoremas de limites duma soma, dum produto etc., quando se trata de variáveis convergentes.

Seja, por exemplo, o teorema da soma:

*“A soma de duas variáveis convergentes é convergente e tem por limite a soma dos limites dessas variáveis”.*

A demonstração pode fazer-se do seguinte modo:

Sejam  $u_n$  e  $v_n$  variáveis convergentes, e  $a$  e  $b$ , respectivamente, os seus limites. Trata-se de provar que

$$\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a + b.$$

Seja  $\delta$  um número positivo *arbitrário*. Como, por hipótese,  $\lim u_n = a$  e  $\lim v_n = b$ , e como  $\delta/2$  é um número positivo, hão-de existir dois números  $p$  e  $q$  tais que:

$u_n$  é valor aproximado de  $a$  a menos de  $\delta/2$ , para  $n > p$ ;

$v_n$  é valor aproximado de  $b$  a menos de  $\delta/2$ , para  $n > q$ .

Portanto, se designarmos por  $r$  o maior dos números  $p$  e  $q$ , podemos afirmar que, quando  $n > r$ ,  $u_n$  e  $v_n$  são valores aproximados de  $a$  e de  $b$ , respectivamente, a menos de  $\delta/2$ . Mas, então (ver número 4),

a soma  $u_n + v_n$  será um valor aproximado de  $a + b$  a menos de  $\delta$ . Existe, pois, para cada número positivo  $\delta$ , uma ordem  $n$ , depois da qual  $u_n + v_n$  é valor aproximado de  $a + b$  a menos de  $\delta$ . Mas isto significa, precisamente que  $\lim (u_n + v_n) = a + b$ .

Vejamos, agora, o teorema do produto:

*“O produto de duas variáveis convergentes ainda é uma variável convergente, cujo limite é o produto dos limites das primeiras”.*

Com efeito, sejam  $u_n$  e  $v_n$  variáveis convergentes e  $\lim u_n = a$ ,  $\lim v_n = b$ . Seja, por outro lado,  $\delta$  um número positivo *arbitrário*. Então (ver Teorema do número 6), há-de existir um número  $\varepsilon$ , também positivo, tal que o produto de dois valores aproximados de  $a$  e de  $b$  a menos de  $\varepsilon$  seja um valor aproximado de  $ab$  a menos de  $\delta$ . Por outro lado, como  $u_n$  tende para  $a$  e  $v_n$  tende para  $b$ , existem dois números  $p$  e  $q$  tais que:

$u_n$  é valor aproximado de  $a$  a menos de  $\varepsilon$ , para  $n > p$ ;

$v_n$  é valor aproximado de  $b$  a menos de  $\varepsilon$ , para  $n > q$ .

Então, se designarmos por  $r$  o maior dos números  $p$  e  $q$ , podemos afirmar que, quando  $n > r$ ,  $u_n$  e  $v_n$  são valores aproximados de  $a$  e de  $b$  a menos de  $\varepsilon$ . Logo,  $u_n v_n$  será valor aproximado de  $ab$  a menos de  $\delta$  para  $n > r$ .

E como  $\delta$  é arbitrário, isto significa que  $u_n v_n \rightarrow ab$ .

Para os restantes casos (diferença, quociente e raiz), as demonstrações são perfeitamente análogas e recomendam-se como exercício ao aluno.