II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

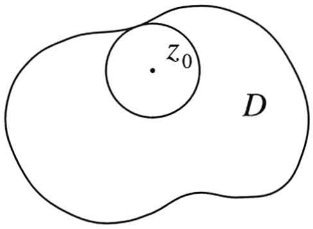
isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência[(1)].

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

---

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[1] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[2]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO II

ESTUDO ELEMENTAR DAS FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA

1. Generalidades sobre funções

Recordemos primeiramente a noção geral de função.

Dados dois conjuntos A e B formados por objectos quaisquer, chama-se *aplicação de A em B* a toda a correspondência f pela qual a cada elemento x de A fique a corresponder *um e um só* elemento y de B. Este elemento y toma o nome de *imagem ou transformado de x por meio de f* e representa-se por $f(x)$, podendo escrever-se, então,

$$y = f(x).$$

Também se diz, neste caso, que f é *uma função definida em A e com os valores em B*, ou ainda que é uma *função* (ou *transformação*) de A para B. Na expressão simbólica

$$y = f(x)$$

a letra x diz-se "variável independente" e a letra y diz-se "variável dependente". O valor que a variável y assume para cada valor x_0 de x também se diz o *valor da função f em x_0*.

Mas é preciso não confundir "função" com "variável dependente"; como vimos, *função* é o mesmo que *correspondência unívoca*, ao passo que as variáveis em Matemática nada mais são do que símbolos, geralmente letras, usados para efeitos de escrita: por exemplo, a função *seno* é uma correspondência fixa, bem determinada e não uma variável.

Por extensão de linguagem, também se dá, por vezes, o nome de função a correspondências não unívocas. Trata-se, então, de *funções em sentido lato*, usualmente chamadas *funções plurívocas* (*ou pluriformes*), enquanto as funções propriamente ditas se dizem *unívocas* ou *uniformes*. Mas em geral, quando se diz "função", subentende-se, salvo indicação expressa em contrário, que se trata de função unívoca.

Como sinónimos dos termos "aplicação", "função", "transformação", também se usam, por vezes, "operação" ou "operador". Neste caso, o elemento y correspondente a cada elemento x *dado* diz-se o *resultado* da operação aplicada a x. Assim, por exemplo, a função de z definida por $3z$ identifica-se à operação de «multiplicar por 3» e traduz-se por uma transformação geométrica (homotetia).

Todavia, o uso tradicional mantém certas "nuances" de significado entre estas palavras. Assim, o termo "função" é usado, de preferência, para correspondências entre números, o termo "transformação" para correspondências entre pontos (em geometria), etc.

Na literatura Matemática contemporânea, o termo que tende a usar-se mais em teorias abstractas é o de "aplicação" ("application", em francês).

Consideremos uma aplicação f de A em B. Dado um conjunto $M \subset A$, chama-se *imagem* ou *transformado de M por f*, e representa-se por $f(M)$, o conjunto das imagens dos elementos x de M por f. Em particular, pode ser $M = A$: o conjunto $f(A)$ é chamado *contradomínio de f*. Por sua vez, o conjunto A diz-se o *domínio de existência* ou simplesmente *domínio* da aplicação f. É claro que se tem $f(A) \subset B$; mas pode acontecer que seja

$$f(A) = B\,.$$

Então, diz-se que f é uma aplicação de A *sobre* B; quer isto dizer, portanto, que, para todo o elemento y de B, existe, pelo menos, um elemento x de A tal que $y = f(x)$.

Diz-se que uma aplicação f de A em B é *biunívoca* (ou *univalente*) de A em B, se transforma elementos distintos de A em elementos distintos de B; isto é, se

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Se f é uma aplicação biunívoca de A *sobre* B, também se diz *invertível*. Assim, dizer que f é uma aplicação biunívoca ou invertível de A sobre B significa que, para todo o elemento y de B, existe *um, e um só,* elemento x de A tal que

$$y = f(x).$$

Deste modo, a cada elemento y de B fica a corresponder um determinado elemento de A; a aplicação de B sobre A assim definida diz-se *inversa* de f e representa-se por f^{-1}. Tem-se, pois, por definição:

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Para melhor esclarecimento destas noções, vejamos alguns exemplos:

a) Seja A o conjunto dos alunos e C o conjunto das carteiras de uma aula liceal. A cada aluno x corresponde, então, uma determinada carteira y:

$$y = \text{carteira de } x.$$

Fica assim definida uma aplicação de A em C. O seu contradomínio será o conjunto das carteiras ocupadas pelos alunos; se todas as carteiras estão ocupadas, trata-se de uma aplicação de A *sobre* C.

A aplicação será univalente, se todas as carteiras forem individuais. Se, além disso, as carteiras estão todas ocupadas, trata-se de uma aplicação biunívoca de A sobre C, cuja inversa é expressa por:

$$x = \text{aluno cuja carteira é } y.$$

É óbvio que, se a aplicação não fosse univalente, o segundo membro seria uma expressão ambígua para dados valores de y, insuficiente para individualizar um aluno.

b) Se, a cada número real x, associarmos o número real $y = x^2$, definimos uma aplicação do conjunto **R** *em si mesmo*, mas não *sobre* si mesmo. É, contudo, uma aplicação de **R** *sobre* o conjunto $\mathbf{R}^+$ dos números reais não negativos. Mas não é univalente, e, portanto, só impropriamente se pode falar da sua *função inversa* $x = \pm\sqrt{y}$, que é apenas função em sentido lato.

c) A correspondência $x \to x^3$, sendo x variável real, já é uma aplicação biunívoca de **R** sobre **R**, cuja inversa é a correspondência $x \to \sqrt[3]{x}$ (a *operação inversa* da elevação ao cubo é a extracção da raiz cúbica).

d) A correspondência $z \to z^3$, sendo z variável complexa, é uma aplicação do conjunto **C** sobre si mesmo, mas não univalente e, portanto, não invertível. Só por abuso cómodo de linguagem podemos falar da sua função inversa representada pela expressão $\sqrt[3]{z}$, visto que esta, para cada $z \neq 0$, pode receber três interpretações distintas (função triforme).

Diz-se que duas funções f e g são *idênticas,* ou que são a *mesma* função e escreve-se

$$f = g,$$

quando verificam as duas seguintes condições:

1) As funções f e g têm por domínio um mesmo conjunto A.

2) Tem-se

$$f(x) = g(x) \text{ para todo o } x \in A.$$

Basta que uma destas condições se não verifique para que as funções não sejam idênticas; dizem-se, então, *distintas* e escreve-se

$$f \neq g.$$

Por exemplo, no campo real as funções definidas por $\sqrt{x}$ e por $\sqrt{|x|}$ são distintas, porque não têm o mesmo domínio de existência, embora coincidam ambas no domínio $\mathbf{R}^+$ da primeira.

Dadas duas funções f e f^*, de domínios D e D^* respectivamente, diz-se que *f^* é um prolongamento de f a D^**, quando se verificam as duas condições:

1) O domínio de f^* contém o domínio de f, isto é, $D^* \supset D$.

2) Tem-se

$$f^*(x) = f(x)\,, \quad \text{para todo o } x \in D\,.$$

Neste caso, também se diz que *f é a restrição de f^* a D*; a operação de restrição é a inversa da operação de prolongamento.

Por exemplo, a função $\sqrt{|x|}$ é *um* prolongamento a $\mathbf{R}$ da função $\sqrt{x}$, definida só em $\mathbf{R}^+$. Analogamente, sendo z variável complexa e x variável real, a função sen z é prolongamento a $\mathbf{C}$ da função sen x definida em $\mathbf{R}$.

Pode acontecer que, uma dada função f, definida num conjunto D, não seja invertível, e já o seja a sua restrição a um subconjunto de D. Por exemplo, a função x^2 definida em $\mathbf{R}$ não é invertível, mas é-o a sua restrição a $\mathbf{R}^+$. Também a função sen x não é invertível em $\mathbf{R}$, mas é invertível no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Funções complexas de variável complexa

Função complexa de variável complexa será toda a aplicação f cujo domínio e cujo contradomínio sejam conjuntos de números complexos. Designemos esses conjuntos, respectivamente, por D e por D^*; então, a cada número complexo $z \in D$, a função f fará corresponder um (e um só) número complexo $w = f(z) \in D^*$. Assim, f é uma aplicação de $D \subset \mathbf{C}$ *sobre* $D^* \subset \mathbf{C}$, e, portanto, uma aplicação de D *em* $\mathbf{C}$ (em particular, pode ser $D^* = \mathbf{C}$). Por exemplo, a função z^2 é uma aplicação de $\mathbf{C}$ sobre $\mathbf{C}$; mas já, como vimos, a função exp z é uma aplicação de $\mathbf{C}$ sobre o conjunto $\mathbf{C}$ *menos o zero*.

Dum modo geral, toda a série de potências de $z - \alpha$ (com $\alpha \in \mathbf{C}$) define uma função de z, cujo domínio de existência é o interior do seu círculo de convergência, acrescido, eventualmente, de um ou mais pontos fronteiros em que a série convirja.

Dada uma função complexa de variável complexa

$$w = f(z) \tag{1}$$

de domínio D, se considerarmos z e w na forma algébrica

$$z = x + iy, \qquad w = u + iv,$$

a cada par ordenado (x, y) de números reais corresponderá, por meio de f, um outro par ordenado (u, v) de números reais. Fica, pois, assim determinado um sistema de duas funções reais de duas variáveis reais

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

ambas definidas no conjunto D. Reciprocamente, é óbvio que um tal sistema de funções define em D uma função complexa de variável complexa.

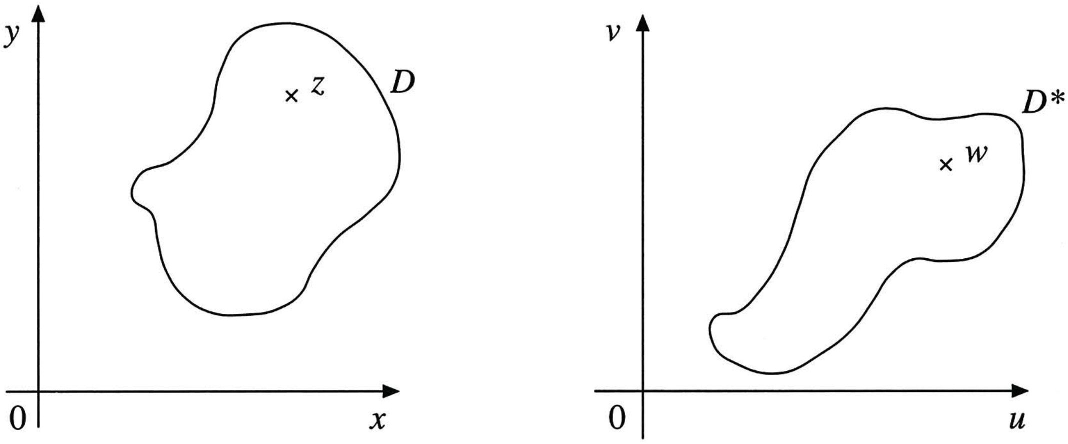
Assim, dar uma função complexa de variável complexa (1) *equivale a dar um sistema* (2) *de duas funções reais de duas variáveis reais, com um mesmo domínio de existência D.*

Todavia, o estudo das funções complexas de variável complexa só tem geralmente interesse no caso das funções analíticas, em que as funções (2) obedecem a certas condições que deduziremos oportunamente.

A primeira dificuldade que se depara ao principiante na passagem da Análise Real para a Análise Complexa é a ausência de representação geométrica *intuitiva* para funções de uma variável. Com efeito, toda a função real de variável real, $y = f(x)$, pode ser representada por um conjunto de pontos (x, y) do plano; mas uma função complexa da variável complexa, $u + iv = f(x + iy)$, só poderia ser representada (de maneira bicontínua) por um conjunto de pontos (x, y, u, v) de um espaço tetradimensional, isomorfo a $\mathbf{R}^4$, que não tem concretização intuitiva (a não ser no cronótopo, que não se presta certamente para esse fim...)

Mas essa dificuldade de ordem subjectiva em breve é superada com o hábito.

O mais que se pode fazer, em considerações intuitivas sobre funções complexas da variável complexa, $w = f(z)$, é representar os valores de z sobre um plano e os valores correspondentes de w sobre outro plano. Assim, o domínio D de f é identificado a um conjunto de pontos do plano dos zz, enquanto o contradomínio D^* é representado por um conjunto de pontos do plano dos ww. Quando o ponto z «percorre» o conjunto D no primeiro plano, o correspondente ponto w «percorre» o conjunto D^* no segundo plano. Tudo isto são recursos intuitivos apreciáveis para ajudar a nossa imaginação.



Assim, a função $w = f(z)$, ou o seu equivalente sistema de funções reais $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, define uma transformação pontual entre os dois planos.

3. Funções reais da variável complexa e funções complexas da variável real

É por vezes necessário considerar funções reais da variável complexa, isto é, funções que têm por domínio um conjunto de números complexos e por contradomínio um conjunto de números reais. Tais são, por exemplo, as seguintes funções de z atrás consideradas (todas definidas em **C**)

$$|z|, \qquad \operatorname{Re} z, \qquad \operatorname{Im} z, \qquad \text{etc.}$$

Também teremos ocasião de considerar funções complexas da variável real, isto é, funções do tipo $z = F(t)$, em que os valores admissíveis de t são números reais e os de z números complexos.

É claro que dar uma função real de variável complexa, $u = f(z)$, equivale a dar *uma* função real, $u = \varphi(x, y)$, de *duas* variáveis reais, x, y; e dar uma função complexa de variável real, $z = F(t)$, equivale a dar *duas* funções reais, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, de *uma* só variável real, t.

NOTA IMPORTANTE. Entre as funções complexas $f(z)$ da variável complexa z interessam, principalmente, aquelas que tomam sempre valores reais *quando z é real,* isto é, as que são prolongamento de funções reais da variável real. Entre essas merecem especial menção as que possuem a seguinte propriedade:

$$(1) \qquad \overline{f(z)} = f(\bar{z}) \quad \text{para todo o } z \in D,$$

sendo D o domínio de f (de um modo geral, dado um número complexo $\alpha = a + bi$, designa-se por $\bar{\alpha}$ o conjugado de α, isto é: $\bar{\alpha} = a - bi$). A anterior propriedade implica, obviamente, que o domínio D é simétrico em relação ao eixo real. Além disso, tem-se $\bar{\alpha} = \alpha$ se e só se α é real; logo, da referida propriedade resulta que

$$z \in D \cap \mathbf{R} \ \Rightarrow \ f(z) \in \mathbf{R}.$$

Recordando ainda as propriedades

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \qquad \overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta},$$

donde

$$\overline{\alpha^n} = \bar{\alpha}^n \ \ (\text{com } n \text{ natural}), \quad \overline{\alpha/\beta} = \bar{\alpha}/\bar{\beta},$$

imediatamente se reconhece que toda a função racional de z de *coeficientes reais* possui a propriedade (1). Também é fácil ver que toda a função de z representada por uma série de potências de $(z - \alpha)$, com coeficientes reais e com $\alpha \in \mathbf{R}$, possui a referida propriedade (tais, por exemplo, as de $\exp z$, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, etc.).

4. Noção de limite para funções complexas da variável complexa

Consideremos uma função complexa da variável complexa $w = f(z)$, de domínio D, e dois números complexos α, β.

DEFINIÇÃO A. *Diz-se que $f(z)$ tende para β quando z tende para α, e escreve-se*

$$f(z) \to \beta \quad \textit{quando} \quad z \to \alpha \,,$$

se, a toda a sucessão $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ de pontos de D distintos de α, tal que $z_n \to \alpha$, corresponde uma sucessão de valores de $f(z)$ tal que $f(z_n) \to \beta$. Na mesma hipótese se diz que β é o limite de $f(z)$ quando $z \to \alpha$ e se escreve:

$$\beta = \lim_{z \to \alpha} f(z) \,.$$

Portanto, a locução "$f(z)$ tende para β quando z tende para α" é apenas o modo abreviado de dizer o seguinte: $f(z)$ *tende para* β *quando z tende para α por uma sucessão de valores distintos de α, qualquer que esta seja* (isto é, qualquer que seja o modo como z tende para α). Assim, basta que exista *uma* sucessão de pontos z_n de D distintos de α), tal que $z_n \to \alpha$, sem que $f(z_n) \to \beta$, para que *não exista* $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z)$, segundo a DEFINIÇÃO A.

Esta definição é ainda válida no caso em que umas das constantes α, β (ou ambas) é ∞, ficando assim esclarecido o significado de expressões tais como $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ *e* $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z) = \infty$.

Note-se que a definição só tem interesse quando α é *um ponto de acumulação de D* (*podendo, contudo, não pertencer a D*), pois que, de contrário, não existirá nenhuma sucessão de pontos de D *distintos de* α que tenha por limite α.

Todavia, a DEFINIÇÃO A, sendo a mais intuitiva e a que naturalmente surgiu em primeiro lugar, envolve a noção anterior de limite de uma sucessão e não é cómoda para muitos fins da Análise. Torna-se por isso vantajoso substituí-la por esta outra, devida a CAUCHY:

DEFINIÇÃO B. *Diz-se que* $f(z)$ *tende para* β (*ou tem por limite* β) *quando* $z \to \alpha$ *e escreve-se:*

$$f(z) \to \beta \quad quando \quad z \to \alpha,$$

ou

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta,$$

se, para todo o número $\delta > 0$, *existe um correspondente número* ε, *de tal modo que se tem*

$$|f(z) - \beta| < \delta$$

sempre que $|z - \alpha| < \varepsilon$, *com* $z \in D$ *e* $z \neq \alpha$*; isto é, simbolicamente*

$$|z - \alpha| < \varepsilon \wedge z \in D \wedge z \neq \alpha \Rightarrow |f(z) - \beta| < \delta.$$

Admitindo o célebre "axioma de Zermelo" (*também chamado "axioma da escolha"*), *demonstra-se facilmente que as duas definições são equivalentes.* Todavia, para um matemático "não zermelista", apenas se pode afirmar que a DEFINIÇÃO B implica a DEFINIÇÃO A, ignorando-se se a implicação recíproca é ou não verdadeira. Mas é com a DEFINIÇÃO B que se trabalha normalmente em Análise.

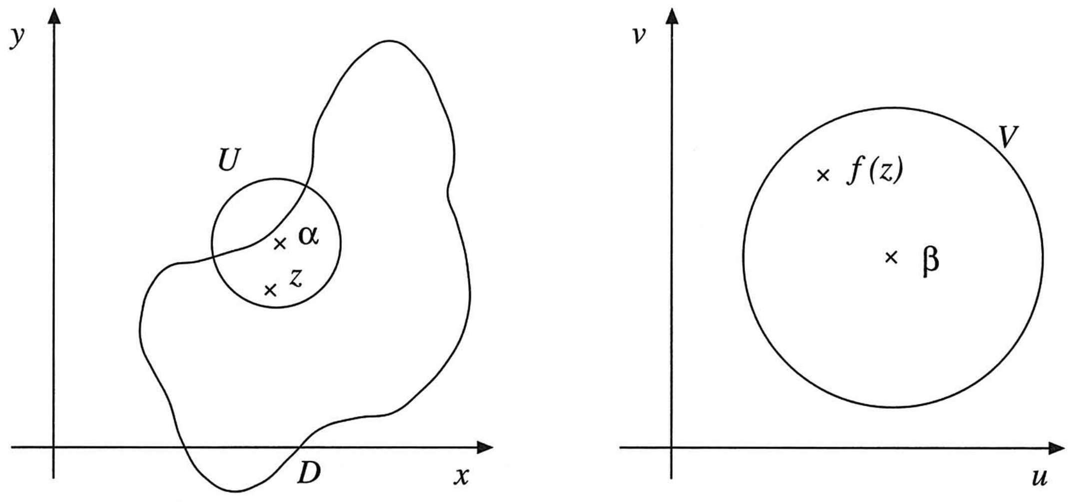
Note-se, porém, que a DEFINIÇÃO B não é aplicável quando uma das constantes é ∞. Mas esta definição é, obviamente, equivalente à seguinte:

DEFINIÇÃO C. *Diz-se que* $f(z)$ *tem por limite* β *quando* $z \to \alpha$, *se para toda a vizinhança* V *de* β *existe uma correspondente vizinhança* U *de* α *tal que:*

$$f(z) \in V \text{ desde que } z \in U, \text{ com } z \in D \text{ e } z \neq \alpha, \text{ isto é, tal que}$$

$$Z \in U \cap D \wedge z \neq \alpha \Rightarrow f(z) \in V.$$

(Na figura estamos a supor que V é a vizinhança (δ) de β e U a vizinhança (ε) de α).



Ora, a DEFINIÇÃO C já é extensível ao caso em que uma das constantes α, β (ou ambas) é ∞, desde que adoptemos a seguinte definição complementar: sendo $\delta > 0$, chama-se *vizinhança* (δ) *de* ∞ ao conjunto cujos elementos são o próprio ∞ e todos os números complexos z tais que $|z| > 1/\delta$.

Recordemos que o elemento ∞ não pertence a **C**. Juntando ao conjunto **C** o ente ideal ∞, obtém-se um novo conjunto, que designaremos por $\overline{\mathbf{C}}$ *e que já não é um corpo*. Oportunamente, daremos uma interpretação geométrica de $\overline{\mathbf{C}}$.

5. Propriedades dos limites das funções

Recordemos as seguintes propriedades elementares:

1) *Uma função* $f(z)$ *não pode tender para dois limites diferentes, quando* z *tende para um determinado limite* α.

2) *O facto de* $f(z)$ *tender ou não para* β *quando* $z \to \alpha$, *depende apenas dos valores que* $f(z)$ *tome numa vizinhança de* α *(qualquer que esta seja) com* $z \neq \alpha$.

3) *Se* $f(z)$ *se reduz a uma constante* β, *numa vizinhança de* α, *então* $f(z) \to \beta$ *quando* $z \to \alpha$.

4) *Se* $f(z)$ *e* $g(z)$ *têm limites finitos quando* $z \to \alpha$, *então*:

I. $\lim\limits_{z\to\alpha} [f(z) + g(z)] = \lim\limits_{z\to\alpha} f(z) + \lim\limits_{z\to\alpha} g(z)$;

$$\text{II. } \lim_{z \to \alpha} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \to \alpha} f(z) \cdot \lim_{z \to \alpha} g(z);$$

se além disso, o $\lim\limits_{z \to \alpha} g(z) \neq 0$ *tem-se*

$$\text{III. } \lim_{z \to \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to \alpha} f(z)}{\lim\limits_{z \to \alpha} g(z)}.$$

Estes teoremas podem demonstrar-se directamente a partir da DEFINIÇÃO B, o que não oferece qualquer dificuldade, ou aplicando as correspondentes propriedades dos limites de sucessões e a DEFINIÇÃO A.

Note-se ainda que a definição de limite para funções complexas de variável complexa se reduz imediatamente à noção de limite para funções reais de duas variáveis reais. Com efeito, já vimos que dar uma função complexa de variável complexa, $w = f(z)$, equivale a dar um sistema de duas funções reais de duas variáveis reais,

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y),$$

em que

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad u = \operatorname{Re} w, \quad v = \operatorname{Im} w.$$

Então, se pusermos α e β na forma algébrica

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = A + Bi$$

facilmente se reconhece, raciocinando como no caso das sucessões, que:

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \varphi(x, y) = A \wedge \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \psi(x, y) = B.$$

NOTA. Recordemos que se escreve:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \varphi(x, y) = A$$

quando, a todo o $\delta > 0$, corresponde um $\varepsilon > 0$ tal que se tem $|\varphi(x, y) - A| < \delta$, desde que o ponto (x, y) esteja na vizinhança (ε) do ponto (a, b), sendo $(x, y) \neq (a, b)$ e $(x, y) \in D$ (analogamente para ψ). É claro que a definição também pode ser dada em termos de sucessões.

6. Continuidade para funções complexas de variável complexa

Consideremos uma função complexa $f(z)$ da variável complexa z, e um número complexo α qualquer. Diz-se que *a função f é contínua em α (ou no ponto α), quando se verificam as duas seguintes condições*:

1) *O número α pertence ao domínio D de f*;

2) *$f(z) \to f(\alpha)$ quando $z \to \alpha$ ou, ainda, com outra notação*:

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Assim, o dizer que f é contínua num ponto α do seu domínio significa que, a todo o $\delta > 0$, corresponde um $\varepsilon > 0$ tal que se tem

$$|f(z) - f(\alpha)| < \delta, \quad \textit{para} \quad |z - \alpha| < \varepsilon, \quad \textit{com } z \in D.$$

(É claro que a condição $z \neq \alpha$ torna-se agora inútil).

Note-se que a condição 1) implica que f toma um valor *finito* no ponto α (também finito), pois estamos a supor que f tem o domínio e o contradomínio em $\mathbf{C}$ e já sabemos que $\infty \notin \mathbf{C}$. Porém, a questão muda de aspecto quando substituímos $\mathbf{C}$ por $\overline{\mathbf{C}}$. Trataremos oportunamente deste caso.

As propriedades elementares da continuidade num ponto, para funções reais de variável real (em que não intervenha a relação de ordem), são imediatamente extensíveis a funções complexas de variável complexa, $w = f(z)$. Por outro lado, a continuidade de uma tal função $f(z)$ num ponto α reflecte-se na sua parte real e no seu coeficiente de i, segundo o

TEOREMA. *Condição necessária e suficiente para que $f(z)$ seja função contínua de $z=x+iy$ no ponto $\alpha=a+bi$, é que a parte real e o coeficiente da parte imaginária de $f(z)$ sejam funções de x, y, ambas contínuas no ponto (a, b).*

Diz-se que a função f é *contínua sobre um conjunto M,* contido no seu domínio, quando a *restrição* de f a M é contínua em todos os pontos de M.

7. Conceito de derivada. Funções monogéneas e funções holomorfas

Vamos tratar do conceito de derivada para funções complexas de variável complexa. A definição de derivada para estas funções é formalmente a mesma que se costuma dar para funções reais de variável real, como limite da razão incremental.

Consideremos uma função complexa $f(z)$, da variável complexa z, e seja z_0 um *ponto interior* do seu domínio de existência (quer isto dizer que existe, nele contida, pelo menos, uma vizinhança V, de z_0).

Posto isto, chama-se *razão incremental da função f relativa ao ponto* z_0 a função de z definida por

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, \quad \text{para } z \neq z_0 \ (z \in V).$$

Pode acontecer que exista o limite da *razão incremental* quando $z \to z_0$; então, esse limite é chamado a *derivada da função f no ponto* z_0 e representa-se por $f'(z_0)$. Assim, por definição:

$$(1) \qquad f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

O conceito de derivada assenta, pois, directamente, no conceito de limite de uma função, que foi atrás precisado e convém, portanto, ter aqui presente.[1]

(1) O conceito de derivada define-se não só para pontos z_0 interiores ao domínio da função, mas também para pontos fronteiros. Todavia, é só o primeiro caso que interessa no estudo que vai seguir-se.

Do mesmo modo se define “derivada de uma função” *complexa* de “variável *real*”.

Se pusermos

$$z - z_0 = h, \quad f(z) - f(z_0) = k$$

ainda podemos escrever (1) sob a forma

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{k}{h}.$$

Diz-se que a função f é diferenciável no ponto z_0 quando admite derivada finita neste ponto. Também se diz, então, que a função é monogénea em z_0, mas este termo aplica-se exclusivamente a funções de variável complexa, enquanto o termo “diferenciável” é geral. (Como dizia HENRI POINCARÉ, a Matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes na substância mas idênticas na forma).

Diz-se que a função f é diferenciável, num conjunto aberto A de números complexos, quando é diferenciável em todos os pontos de A[(1)]. *Também se diz, neste caso, que a função é holomorfa em A*; mas este termo aplica-se exclusivamente a funções de variável complexa. (Ainda com o mesmo significado se dirá que a função é *analítica em A*, mas este outro termo tem uma origem diferente que oportunamente será esclarecida).

Se a função $w = f(z)$ é holomorfa no conjunto A, a cada ponto $z \in A$ fica a corresponder o número complexo (único) $w' = f'(z)$.

Por outras palavras: fica assim definida em A uma nova função de z, que se chama a *função derivada* ou, simplesmente, a *derivada de f* nesse conjunto, e se representa por qualquer das notações já adoptadas no campo real

$$f'(z), \quad D_z f(z), \quad \frac{d}{dz} f(z), \quad \frac{dw}{dz}, \quad \text{etc.}$$

---

(1) Recordemos que um conjunto A se diz aberto quando todos os seus pontos lhe são interiores.

Mas não esqueçamos que uma função é uma correspondência f entre dois conjuntos e não uma variável! Assim, a função derivada de f será mais propriamente designada por qualquer das notações f', Df, etc.

Quanto à derivada de f no ponto z_0, podemos designá-la não só pela notação $f'(z_0)$, mas ainda por

$$D_{z=z_0} f(z), \quad \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_0}, \quad \text{etc.}$$

No que se refere a derivadas de ordem superior à primeira, toda a terminologia e notações adoptadas em Análise Real podem ser aplicadas, *mutatis mutandis*, no campo complexo.

Vamos agora provar que, tal como sucede no campo real, *diferenciabilidade implica continuidade*, isto é, vamos provar que:

Se uma função é diferenciável em z_0, também é contínua em z_0.

Com efeito, se f é diferenciável em z_0, existe e é finito o

$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = f'(z_0).$$

Portanto, se pusermos

$$\frac{k}{h} - f'(z_0) = \omega,$$

virá

(2) $$k = f'(z_0)\, h + \omega h, \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} \omega = 0.$$

Daqui, atendendo a que $f'(z_0)$ é finito, resulta imediatamente que $k \to 0$ quando $h \to 0$, isto é, que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

e isto significa, precisamente, que $f(z)$ é *contínua em z_0*.

Conceito de diferencial.

A fórmula (2) mostra-nos que o acréscimo k de $f(z)$ correspondente ao acréscimo h de z em z_0 difere de $f'(z_0)h$ por um *infinitésimo* com *h de ordem superior* à primeira. Tem-se, com efeito,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega h}{h} = \lim_{h\to 0} \omega = 0 .$$

Pois bem, ao infinitésimo $f'(z_0)h$ com h (equivalente a k) chama-se *diferencial de f relativo a h no ponto* z_0.

Suponhamos, agora, que a função $f(z)$ é diferenciável em todo um conjunto aberto A. *Então, para cada valor de h, o diferencial de f relativo a h no ponto z será, manifestamente, uma nova função de z definida no conjunto A, função* que poderemos designar por $d_h f$:

$$d_h f(z) = f'(z)h .$$

Aqui o acréscimo h poderá ser omitido no índice, desde que não haja perigo de confusão, escrevendo-se, então, df em vez de $d_h f$. Em particular, pode acontecer que $f(z) = z$; neste caso será

$$df(z) = dz = 1 \cdot h = h ,$$

ou seja, $h = dz$, o que nos permite escrever o diferencial de f com a sua forma corrente

$$df(z) = f'(z)dz ,$$

e o que justifica a notação de LEIBNIZ para designar derivadas

$$\frac{df(z)}{dz}, \quad \frac{d}{dz} f(z) , \quad \frac{dw}{dz}, \quad \text{etc.}$$

Nova forma da definição de função diferenciável (*ou monogénea*).

A igualdade (2) ainda poderá escrever-se:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0)\omega \quad \text{para} \quad z \in V,$$

o que torna evidente o seguinte facto:

Dizer que a função f é diferenciável em z_0 equivale a dizer que pode ser representada, numa vizinhança deste ponto, por uma função linear de z:

$$f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0)$$

à parte um infinitésimo com $z - z_0$ de ordem superior à primeira. O coeficiente de z desta função linear é a derivada de f no ponto z_0.

8. Regras de derivação

As regras de derivação estabelecidas para as funções de variável real mantêm-se quase todas para as funções de variável complexa. Isto é apenas consequência do facto, que já apontámos, de se conservarem no campo complexo os teoremas fundamentais sobre limites, tais como o do limite da soma, do produto, etc. Assim:

I. A derivada de uma constante continua a ser a função 0 e a derivada de z em relação a z continua a ser a função 1.

II. Se φ e ψ são funções diferenciáveis num ponto z_0, também são diferenciáveis nesse ponto as funções $f = \varphi + \psi$ e $g = \varphi \cdot \psi$, tendo-se:

$$f'(z_0) = \varphi'(z_0) + \psi'(z_0),$$

$$g'(z_0) = \varphi(z_0)\,\psi'(z_0) + \varphi'(z_0)\,\psi(z_0);$$

se, além disso, for $\psi(z_0) \neq 0$, também a função quociente $h = \varphi/\psi$ será diferenciável em z_0, tendo-se:

$$h'(z_0) = \frac{\varphi'(z_0)\,\psi(z_0) - \varphi(z_0)\,\psi'(z_0)}{[\psi(z_0)]^2}.$$

As demonstrações destas regras são formalmente as mesmas que se usam no campo real, com a aplicação dos referidos teoremas sobre limites.

Também continua a ser válida a

REGRA DE DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES COMPOSTAS. *Dadas duas funções* $w = f(z)$ *e* $z = \varphi(u)$, *se* φ *é diferenciável num ponto* u_0 *e* f *diferenciável no ponto correspondente* $z_0 = \varphi(u_0)$, *também a função composta de* f *por* φ

$$\psi(u) = f[\varphi(u)]$$

será diferenciável em u_0 *tendo-se* (1)

$$\psi'(u_0) = f'[\varphi(u_0)]\ \varphi'(u_0)\,.$$

Note-se que, neste enunciado, tanto faz que u seja variável complexa como variável real; o teorema é sempre verdadeiro. Observações análogas se podem fazer quanto às regras anteriores.

Finalmente, subsiste com o seguinte aspecto a

REGRA DA FUNÇÃO INVERSA. *Seja* $w = f(z)$ *uma função invertível numa vizinhança de* z_0 *e seja* $z = \varphi(w)$ *a função inversa de* f, *definida numa vizinhança do ponto correspondente* $w_0 = f(z_0)$. *Suponhamos, além disso, verificadas as seguintes condições:* 1) *a função* f *é diferenciável em* z_0; 2) $f'(z_0) \neq 0$; 3) *a função inversa* φ *é contínua no ponto* w_0. *Então, podemos afirmar que* φ *também é diferenciável em* w_0 *e que se tem*:

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'[\varphi(w_0)]}\,.$$

Para a demonstração, basta recordar que se tem

$$\frac{z - z_0}{w - w_0} = \frac{1}{\dfrac{w - w_0}{z - z_0}}\,, \quad \text{para} \quad z \neq z_0\,,$$

---

(1) Recordemos que a função composta de f por φ é também chamada o produto da aplicação f por φ. Modernamente, é frequente representá-la por $f \circ \varphi$.

(sendo, então, $w \neq w_0$) e que, quando $z \to z_0$, também $w \to w_0$, e reciprocamente, porque ambas as funções f e φ são contínuas nos pontos considerados[1]; donde

$$\lim_{w \to w_0} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}},$$

o que conduz imediatamente à tese.

É claro que, *aplicando as regras anteriores, estamos agora aptos a derivar qualquer função racional ou fraccionária.*

Assim, dada uma função racional inteira,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

ter-se-á para todo o valor de z

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}.$$

Portanto, uma função racional inteira será diferenciável em todos os pontos do plano, isto é, será holomorfa em todo o plano. Analogamente se reconhece que toda a função racional fraccionária, representada pelo quociente de dois polinómios primos entre si, é diferenciável em todos os pontos do plano, excepto naqueles em que se anula o denominador.

Vejamos, agora, como se deriva uma função representada por uma série de potências. Considerando a função $f(z)$ representada pela série de potências

$$(1) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

ocorre, naturalmente, perguntar se esta função é ou não diferenciável nos pontos interiores do seu círculo de convergência, e se a derivada

(1) Estamos a supor, é claro, que no primeiro membro se tem $\varphi(w)$ no lugar de z e, no segundo membro, $f(z)$ no lugar de w.

se obtém *derivando a série termo a termo*, isto é, se podemos usar para esses pontos a fórmula

$$(2) \qquad f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}.$$

A resposta é afirmativa, mas devemos ver primeiro se o raio de convergência da série derivada é igual ao raio de convergência da série dada. Ora, o raio de convergência desta é, como sabemos, $1/L$, sendo

$$L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Por outro lado, é fácil ver que o raio da segunda série não se altera multiplicando-a por z. Obtém-se, deste modo, a série

$$0 + a_1 z + 2a_2 z^2 + \cdots + na_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} na_n z^n$$

cujo raio de convergência é $1/L'$, sendo[1]

$$L' = \overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

visto que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Fica assim provado que as duas séries têm o mesmo raio de convergência.

---

(1) Convém recordar neste ponto que os teoremas do limite da soma e do produto são extensíveis ao conceito de “limite máximo”, visto que o limite máximo duma sucessão (de números reais) é o maior dos limites das sucessões convergentes que da primeira se podem extrair.

Posto isto, podemos demonstrar o teorema seguinte:

REGRA DE DERIVAÇÃO DAS SÉRIES DE POTÊNCIAS. *A soma $f(z)$ da série*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

tem por derivada, em cada ponto z interior ao seu círculo de convergência, a soma $\varphi(z)$ da série

$$a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Demonstração. Designemos por R o raio de convergência da série dada e seja z_0 um número complexo qualquer tal que $|z_0| < R$. O teorema relativo à diferença de duas séries habilita-nos a escrever:

$$f(z) - f(z_0) = a_1(z - z_0) + a_2(z^2 - z_0^2) + \cdots + a_n(z^n - z_0^n) + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^n - z_0^n), \quad \text{desde que seja} \quad |z| < R.$$

Recordemos, por outro lado, que se tem, *para todo o $z \neq z_0$*:

$$\text{(3)} \qquad \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + z_0^2 z^{n-3} + \cdots + z_0^{n-1}.$$

Logo será, para $z \neq z_0$ e $|z| < R$:

$$\text{(4)} \qquad \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + z_0^2 z^{n-3} + \cdots + z_0^{n-1}).$$

Pretende-se provar que quando $z \to z_0$, a razão incremental (4) tende para $\varphi(z_0)$. Ora, para $|z| < R$, tem-se:

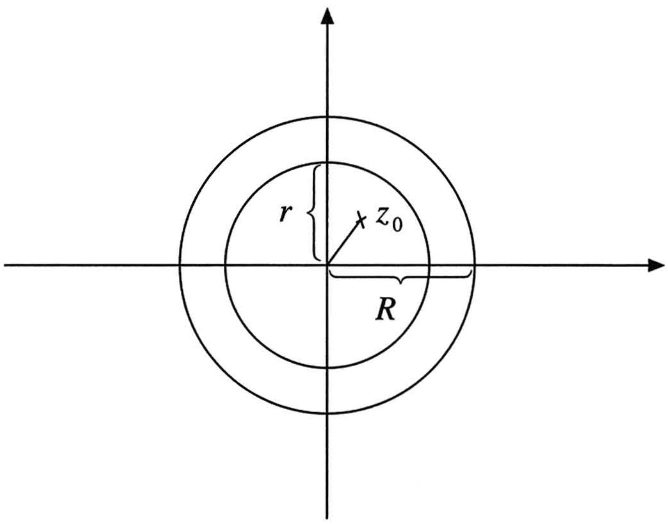
$$\text{(5)} \quad \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \varphi(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + z_0^2 z^{n-3} + \cdots + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}).$$

Observando agora que: $nz_0^{n-1} = z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1}$ (n vezes), a expressão que, em (5), figura a multiplicar por a_n pode escrever-se do seguinte modo:

$$z^{n-1} - z_0^{n-1} + z_0(z^{n-2} - z_0^{n-2}) + \cdots + z_0^{p-1}(z^{n-p} - z_0^{n-p}) +$$
$$+ \cdots + z_0^{n-2}(z - z_0) = \sum_{p=1}^{n-1} z_0^{p-1}(z^{n-p} - z_0^{n-p}).$$

Podemos agora dividir $z^{n-p} - z_0^{n-p}$ por $z - z_0$, aplicando novamente (3), e, assim, a referida expressão tomará o aspecto:

$$(z - z_0)\sum_{p=1}^{n-1} z_0^{p-1}(z^{n-p-1} + z_0 z^{n-p-2} + \cdots + z_0^{n-p-1}).$$



Posto isto, designemos por r um número qualquer compreendido entre $|z_0|$ e R, isto é, tal que

$$|z_0| < r < R.$$

Aplicando agora a conhecida propriedade do módulo da soma, é fácil verificar que o módulo da referida expressão, sendo $|z| < r$, será *inferior a*

$$|z - z_0| \sum_{p=1}^{n-1} r^{p-1}(n-p)r^{n-p-1} = |z - z_0| r^{n-2} \sum_{p=1}^{n-1} (n-p)$$
$$= \frac{1}{2}|z - z_0|\, n(n-1) r^{n-2},$$

visto que

$$\sum_{p=1}^{n-1}(n-p) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

(Trata-se de uma progressão aritmética).

Assim virá, finalmente, para a referida expressão que figura em (5), a majoração:

$$|z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}|z - z_0|\, n(n-1)\, r^{n-2},$$

e daqui, atendendo a (5), vem, para $|z| < r$:

$$(6) \qquad \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \varphi(z_0)\right| < \frac{1}{2}|z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| r^{n-2}.$$

Quando $z \to z_0$, também $|z - z_0| \to 0$; portanto, se a série que figura no 2.º membro de (6) for convergente (sendo, então, a sua soma finita, por definição), também o 1.º membro tende para 0. Ora, é fácil ver que a série do 2.º membro resulta da série das segundas derivadas,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n z^{n-2},$$

cujo raio de convergência é o mesmo da série dada (ou seja R); logo, para $|z| = r$ esta série é absolutamente convergente (visto ser $r < R$) e, portanto, é convergente a série do 2.º membro de (6). Tem-se, pois:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to \varphi(z_0) \quad \text{quando} \quad z \to z_0 \qquad \text{(q.e.d.)}.$$

Por conseguinte, toda a série de potências de z representa uma função holomorfa de z no interior do seu círculo de convergência.

Apliquemos estes resultados às funções atrás definidas:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Qualquer destas séries tem raio de convergência infinito; assim, aplicando o teorema anterior, virá:

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Analogamente se reconhece que

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z,$$

o que se pode, aliás, obter também pelas fórmulas de Euler aplicando o resultado anterior. Ainda, de modo análogo, se podem obter as derivadas das funções hiperbólicas, definidas, como no campo real, pelas fórmulas

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i},$$

tendo-se $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

Uma função $f(z)$ diz-se inteira, quando é definida e holomorfa em todo o plano da variável complexa.

Portanto, além das funções racionais inteiras, serão ainda inteiras (mas não racionais) as funções e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $e^{\operatorname{sen} z}$, $\cos(1 + e^z)$, etc. etc.

Mas já, por exemplo, a função

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

não é diferenciável nos pontos (em número infinito) que anulam o denominador; logo, não é inteira. Conclusão análoga para a função

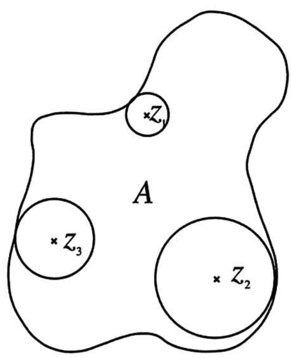
$$\frac{z-1}{z^2+1}, \text{ etc.}$$

Mais geralmente, o teorema anterior permite-nos afirmar o seguinte:

Sendo α *um número complexo qualquer, toda a série de potências de* $z-\alpha$ *representa, no interior do seu círculo de convergência (círculo com centro em* α *e com o raio de convergência), uma função holomorfa de* z*, cujas derivadas se obtêm derivando a série termo a termo.*

Para reconhecer a veracidade deste facto, basta aplicar a regra das funções compostas, derivando-a primeiro em ordem a $Z = z - \alpha$ e derivando-se depois $z-\alpha$ em ordem a z.

Diz-se que uma função é analítica num conjunto aberto A *de números complexos, quando é representável por uma série de potências numa vizinhança de cada ponto deste conjunto.*



Pelo teorema anterior conclui-se que, *toda a função analítica num conjunto aberto* A *é aí holomorfa*. Mais tarde demonstraremos que, reciprocamente, toda a função holomorfa num conjunto aberto A é representável por uma série de potências numa vizinhança de cada ponto de A.

Assim, os conceitos de função analítica e de função holomorfa num conjunto aberto resultam equivalentes: não há, por isso, inconveniente em tornar "analítica" como sinónimo de "holomorfa"[(1)].

No entanto como veremos, certos autores usam a expressão "função analítica" num sentido mais geral que o de "função holomorfa".

9. Condições de monogeneidade

Já vimos que uma função de variável complexa se diz *monogénea* ou *diferenciável* num ponto, quando admite derivada *finita* nesse ponto.

Também já relacionámos a convergência das sucessões de números complexos com a convergência da parte real e do coeficiente da parte imaginária. Outro tanto se fez para as séries de termos complexos, bem como para os conceitos de limite e de continuidade relativos a funções complexas de variável complexa.

Vamos ver agora como o facto duma função ser monogénea num ponto se reflecte na parte real e no coeficiente da parte imaginária da função. Consideremos uma função complexa de variável complexa, $w=f(z)$. Pondo w e z na forma algébrica: $w=u+iv$ e $z=x+iy$, as variáveis u e v vão ser expressas como funções de x e y:

$$u = \varphi(x,y) \qquad v = \psi(x,y)\,.$$

Suponhamos, agora, que a função f é diferenciável num ponto z_0. Como vimos, isto equivale a dizer que existe um número complexo α e um número $\rho > 0$ tais que se tem:

$$(1) \qquad f(z_0+h)-f(z_0)=\alpha h+\omega h \quad \text{para} \quad |h|<\rho^{(2)},$$

sendo α a derivada de f em z_0:

---

(1) Note-se, porém, que os conceitos são *distintos*, embora *equivalentes*. Outro tanto se dá, por exemplo, com os conceitos de "triângulo equilátero" e de "triângulo equiângulo", que distintos e contudo equivalentes, pelo menos em geometria euclideana.

(2) Recordemos que os pontos z_0+h tais que $|h|<\rho$ formam a vizinhança (ρ) de z_0.

$$\alpha = f'(z_0),$$

e sendo ω um infinitésimo com h. Pondo α, h e ω na forma algébrica:

$$(2) \qquad \alpha = A + iB, \qquad h = h_1 + ih_2, \qquad \omega = \omega_1 + i\omega_2,$$

virá

$$\alpha h = (Ah_1 - Bh_2) + i(Ah_2 + Bh_1),$$

$$\omega h = (\omega_1 h_1 - \omega_2 h_2) + i(\omega_1 h_2 + \omega_2 h_1),$$

$$z_0 + h = (x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2).$$

Então, igualando as partes reais e os coeficientes de i nos dois membros de (1), esta igualdade complexa desdobra-se nas duas igualdades reais:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \varphi(x_0, y_0) = Ah_1 - Bh_2 + \omega_1 h_1 - \omega_2 h_2 \\ \psi(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \psi(x_0, y_0) = Bh_1 + Ah_2 + \omega_1 h_2 + \omega_2 h_1 \end{cases}$$

com $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \rho$.

Mas, por hipótese, ω é um infinitésimo com h; isso equivale a dizer que ω_1 e ω_2 tendem para zero quando h_1 e h_2 tendem simultaneamente para zero(1). Então, conclui-se de (3) que as funções φ e ψ são *diferenciáveis* no ponto (x_0, y_0) e que, *além disso*, se tem:

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = A, \qquad \varphi'_y(x_0, y_0) = -B,$$

$$\psi'_x(x_0, y_0) = B, \qquad \psi'_y(x_0, y_0) = A,$$

e portanto

---

(1) Em virtude do teorema atrás apontado, que relaciona o limite de uma função complexa de variável complexa com os limites da parte real e coeficiente de *i*.

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi'_x(x_0, y_0) = \psi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) = -\psi'_x(x_0, y_0) \end{cases}.$$

Então, a derivada da função f no ponto z_0 será:

$$\begin{aligned} f'(z_0) = A + Bi &= \varphi'_x(x_0, y_0) + i\,\psi'_x(x_0, y_0) \\ &= \psi'_y(x_0, y_0) - i\,\varphi'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Por conseguinte, se a função é diferenciável em z_0, verificam-se estas condições (4), que são, pois, *condições necessárias de monogeneidade*. Como se vê, para que a função seja diferenciável em z_0, não basta que a parte real e o coeficiente de i sejam diferenciáveis no ponto (x_0, y_0): são ainda necessárias as condições (4).

Ora, todas essas condições, em conjunto, *são também suficientes*.

Com efeito, se φ e ψ são diferenciáveis em (x_0, y_0) e, além disso, se verificam as condições (4), podemos escrever relações de tipo (3) e estas duas igualdades reais, por meio de (2), equivalem à igualdade complexa (1), o que mostra ser a função diferenciável.

Assim, demonstrámos o seguinte

TEOREMA. *Condição necessária e suficiente para que a função f seja diferenciável no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, é que a sua parte real e o coeficiente da sua parte imaginária sejam diferenciáveis no ponto (x_0, y_0) e se verifiquem, além disso, as relações* (4). *Nesta hipótese a derivada da função em z_0 é dada por qualquer das fórmulas*

$$f'(z_0) = \varphi'_x(x_0, y_0) + i\,\psi'_x(x_0, y_0)$$
$$f'(z_0) = \psi'_y(x_0, y_0) - i\,\varphi'_y(x_0, y_0).$$

EXERCÍCIO – Aplicando o teorema anterior, provar que as funções de z definidas por $|z|$, Re z, Im z e $\bar{z} = x - iy$ (com $z = x + iy$) não são diferenciáveis em nenhum ponto do plano.

NOTA IMPORTANTE. Na demonstração deste teorema utilizou-se o conceito de "função diferenciável" que foi adoptado na cadeira de Matemáticas Gerais para funções de mais de uma variável real. Há, porém, muitos autores que adoptam um conceito mais geral de diferenciabilidade: neste sentido, uma função de 2 variáveis reais, $f(x, y)$, diz-se diferenciável num ponto (x_0, y_0) quando existem dois números reais A, B e um número $\rho > 0$ tais que se tem

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \varepsilon(h + k)$$

para $\sqrt{h^2 + k^2} < \rho$, sendo $\varepsilon(h, k)$ um infinitésimo com h e k de ordem superior à primeira, isto é, tal que:

$$\frac{\varepsilon(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0 \qquad \text{quando } (h, k) \to (0, 0).$$

Ora, é fácil ver que o teorema anterior continua a ser válido mesmo com este segundo conceito de "função diferenciável" (de duas variáveis).

Uma vantagem de tal conceito, devido ao matemático francês MAURICE FRÉCHET, está em se poder generalizar a espaços abstractos, como fez este matemático e como teremos ocasião de ver.

10. Condições de holomorfia

Das condições de monogeneidade deduzem-se imediatamente condições de holomorfia. Com efeito, diz-se que a função $w = f(z)$ é holomorfa num conjunto aberto A, quando é diferenciável em cada ponto de A. Pondo w e z na forma algébrica, $w = u + iv$, $z = x + iy$, vêm u e v como funções de x e y definidas em A:

(1) $$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}.$$

Do teorema anterior deduz-se imediatamente o seguinte

COROLÁRIO. *Condição necessária e suficiente para que a função $w = f(z)$ seja holomorfa em A é que a sua parte real $u = \varphi(x, y)$ e o coeficiente da sua parte imaginária, $v = \psi(x, y)$, sejam funções de x, y ambas diferenciáveis em A, e se tenha*

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \textit{para } (x, y) \in A.$$

Nesta hipótese será

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

para todo o ponto z de A.

Em notação mais significativa as condições de monogeneidade (2) podem ser apresentadas sob a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re} f = \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im} f,\ \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} f = -\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im} f\,.$$

O sistema de funções (1) define uma aplicação ou transformação do conjunto A do plano z sobre um conjunto A^* do plano w, conjunto este que é o contradomínio da função f. Oportunamente, estudaremos esta transformação do ponto de vista geométrico, quando verificadas as condições (2).

Entretanto, interessa-nos estudar o jacobiano desta transformação. Tem-se:

$$J\begin{pmatrix} u\ v \\ x\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Mas

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

logo:

$$J\begin{pmatrix} u\ v \\ x\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2 \geqslant 0\,.$$

Assim, o determinante funcional de tal transformação nunca é negativo. Interpretaremos oportunamente o significado geométrico deste facto.

Uma outra consequência importante do teorema anterior é a seguinte:

Se uma função $f(z)$ real da variável complexa z é holomorfa num conjunto aberto e conexo A do plano $\mathbf{C}$, *essa função reduz-se, necessariamente, a uma constante em A.*

Com efeito, pondo $f(z) = u + iv$, deverá ser

$$v = \operatorname{Im} f(z) = 0,$$

se a função é real. Então, de (2) deduz-se $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ e, portanto, u = constante real em A.

Demonstraremos mais tarde que uma função holomorfa admite derivadas de todas as ordens no domínio de holomorfia. Então, se f é holomorfa no aberto A, também a função

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

será holomorfa em A, e como, em virtude das condições (2), se tem

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

a derivada de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ em ordem a x há-de ser igual à derivada de $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ em ordem a y, em todo o ponto (x, y) de A, isto é, será:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ou

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

no aberto A, e analogamente para v.

A equação em derivadas parciais (3) diz-se *equação de Laplace* (para duas variáveis x e y); e pode escrever-se, abreviadamente,

$$\Delta u = 0,$$

em que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

é o operador diferencial chamado *laplaciano* (*em ordem a* x e y). Às soluções da *equação de Laplace* dá-se o nome de *funções harmónicas*. Então, como vimos, a parte real e o coeficiente de i *numa função holomorfa* são funções harmónicas de x e y.

Reciprocamente, prova-se que toda a função harmónica de duas variáveis tem assim origem numa função holomorfa.

11. Estudo de algumas funções pluriformes

Função $\sqrt[n]{z}$.

Sendo $n > 1$ um número natural, já sabemos que para cada número complexo, $z \neq 0$, existem ao todo n números complexos distintos w tais que

$$w^n = z. \tag{1}$$

Pondo $|z| = \rho$ e $\arg z = \varphi$, esses n números w são dados pela FÓRMULA DE MOIVRE

$$w = \rho^{\frac{1}{n}} \exp \frac{\varphi + 2k\pi}{n} i = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \tag{2}$$

com $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Para $w = 0$ a equação (1) admite unicamente a raiz $z = 0$ (múltipla de ordem n). Pondo

$$\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{n} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

(raiz primitiva de índice n da unidade), a fórmula (2) pode ainda escrever-se

(3) $$w = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}\right).\ \varepsilon^k, \quad k = 0,1, \ldots, n-1.$$

Como vimos, qualquer destes números w costuma ser designado, indistintamente, pela notação $\sqrt[n]{z}$. Mas esta é uma expressão plurívoca, representativa de uma função em sentido lato.

Note-se, porém, que a ambiguidade pode ser desfeita de vários modos.

Por exemplo, se convencionarmos, como é hábito, que arg z designa o *argumento reduzido* de z, a fórmula (2), ou a sua equivalente (3), já fornece, para cada valor particular de k, uma determinada função, *definida e uniforme em todo o plano* **C**. Pois bem, convencionaremos chamar *ramo* (k), e designar pela notação $\sqrt[n]{z}^{(k)}$, essa função uniforme correspondente a k. Será, pois, por convenção,

$$\sqrt[n]{z}^{(k)} = \sqrt[n]{|z|}\exp\left(i\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{para } k = 0,1, \ldots, n-1.$$

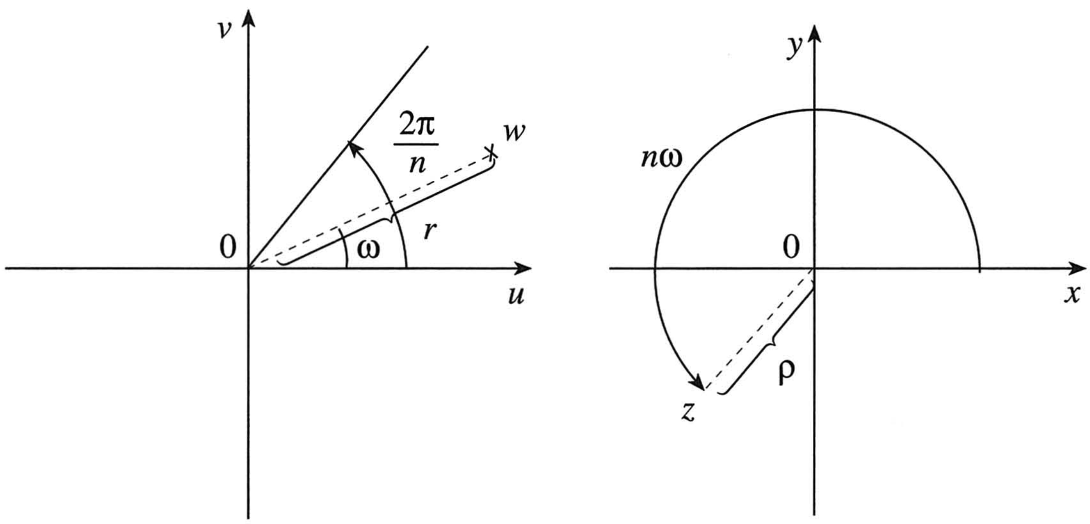
Para estudar estas funções, consideremos a função

$$z = w^n$$

tomando w para variável independente. O lugar geométrico dos pontos w do plano que verificam a condição

$$0 \leqslant \arg w < \frac{2\pi}{n},$$

é o ângulo de amplitude $2\pi/n$, que tem como primeiro lado o semi-eixo real positivo e do qual se exclui o segundo lado, excepto a origem (ângulo semi-aberto). Designaremos por A este conjunto de pontos.



Seja agora w um ponto qualquer de A e ponhamos

$$|w| = r, \quad \arg w = \omega \quad \left(0 \leqslant \omega < \frac{2\pi}{n}\right).$$

Então, quando r varia no intervalo $[0, +\infty[$, mantendo-se ω constante, o ponto w descreve uma semi-recta definida pela equação $\arg w = \omega$, enquanto o ponto z descreve outra semi-recta definida pela equação

$$\arg z = n\omega.$$

Além disso, a função $z = w^n$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos da semi-recta $0w$ e os pontos da semi-recta $0z$, visto que a correspondência é dada, neste caso, pela função $\rho = r^n$ que, como já sabemos, define uma aplicação biunívoca do conjunto $\mathbf{R}^+$ sobre si mesmo.

Por outro lado, quando ω varia no intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{n}\right[$, a semi-recta $0w$ descreve o ângulo A e a semi-recta $0z$ varre todo o plano.

Além disso, a correspondência assim estabelecida entre as primeiras semi-rectas e as segundas é biunívoca, pois que tal correspondência é definida pela relação

$$\arg z = n \arg w, \quad \text{ou seja,} \quad \varphi = n\omega,$$

e já sabemos que a função $\varphi = n\omega$ define uma aplicação biunívoca do intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{n}\right[$ sobre o intervalo $[0, 2\pi[$.

Assim, em conclusão, vemos que a função $z = w^n$ de w, restringida ao ângulo semi-aberto A, é uma aplicação biunívoca de A sobre $\mathbf{C}$. A sua função inversa, definida em $\mathbf{C}$ e de contradomínio A, é, evidentemente, o ramo (0) da função $\sqrt[n]{z}$, ou seja:

$$\sqrt[n]{z}^{(0)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right).$$

Notemos, desde já, que esta função é descontínua nos pontos do semi-eixo real positivo, distintos de 0. Com efeito, nesses pontos, o argumento reduzido de z salta bruscamente de valores próximos de

2π para o valor 0, quando z roda em torno da origem no sentido positivo, e, assim, o argumento reduzido de $\sqrt[n]{z}^{(0)}$ salta de valores próximos de $\frac{2\pi}{n}$ para 0.

Porém, esta função é contínua nos restantes pontos z do plano (aos quais correspondem os pontos w de A não situados no referido semi-eixo e também a origem). Este facto pode ser provado de três modos diversos: ou directamente, ou recorrendo ao teorema das funções implícitas aplicado às funções reais, $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, em que se desdobra $z = w^n$, ou por um teorema geral da Topologia que estudaremos oportunamente.

Uma vez estabelecido que a função $\sqrt[n]{z}^{(0)}$ é contínua nos referidos pontos, podemos finalmente aplicar a REGRA DE DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES INVERSAS (n.º 8):

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{z}^{(0)})^{n-1}} \quad (\text{com } z \neq 0).$$

Assim, concluímos que o ramo (0) de $\sqrt[n]{z}$ é uma função holomorfa no *plano* **C** *privado do semi-eixo* $\mathbf{R}^+$ (ou, mais precisamente, no complementar de $\mathbf{R}^+$ em **C**, conjunto aberto que designaremos por $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^+$)[(1)].

Analogamente se reconhece que qualquer dos ramos (k) da função $\sqrt[n]{z}$, definido em todo o plano **C**, tem por contradomínio o ângulo semi-aberto definido por

$$\frac{2k\pi}{n} \leq \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

e é uma função holomorfa em $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}^+$.

---

(1) Dado um conjunto A, contido em outro conjunto U, chama-se *complementar de A em U* o conjunto dos elementos de U não pertencentes a A; designá-lo-emos por $U\setminus A$. Quando U é o conjunto de *todos* os elementos considerados numa dada teoria (*universo lógico da teoria*), o complementar de A em U é chamado simplesmente *complementar de A* e designado por $\complement A$, por $\sim A$ ou, ainda, por outras notações.

Mais geralmente, ainda pode ver-se que:

A função em sentido lato $\sqrt[n]{z}$ *admite n ramos uniformes, funções holomorfas de z, em todo o conjunto aberto que se obtenha, suprimindo em* **C** *uma semi-recta qualquer emanada da origem ou, mais geralmente ainda, um ramo infinito de curva simples que parta da origem. A derivada de qualquer dessas funções será dada pela fórmula*

$$\frac{d}{dz}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{z})^{n-1}} \quad (z \neq 0),$$

subentendendo-se que, nos dois membros, se deve tomar sempre o mesmo ramo de $\sqrt[n]{z}$.

A questão muda de aspecto, quando se trata de conjuntos que circundam a origem(1). Na verdade, quando z roda em torno de 0 no sentido positivo, partindo do semi-eixo $\mathbf{R}^+$, o ponto $w = \sqrt[n]{z}^{(0)}$ varia continuamente com z antes de voltar ao ponto de partida; mas aí a continuidade só pode ser restabelecida, *se substituirmos o ramo* (0) *pelo ramo* (1); após outra volta completa, teríamos de passar ao ramo (2), e assim sucessivamente, *até regressar ao ramo* (0). *Não existe, portanto, conjunto nenhum que circunde a origem, no qual* $\sqrt[n]{z}$ admita um ramo uniforme que seja função contínua de z.

Exprime-se este facto dizendo que o ponto $z = 0$ é um *ponto de ramificação* da função pluriforme $\sqrt[n]{z}$.

NOTA. A função $\sqrt[n]{z}$ poderia ser concebida como uniforme, se substituíssemos o plano da variável complexa por uma certa superfície formada de n folhetos sucessivos, passando-se de cada um para o seguinte de maneira contínua (como num helicóide) e do último para o primeiro através do semi-eixo real positivo. O estudo correcto das superfícies deste tipo, chamadas *superfícies de Riemann*, só pode ser feito com conhecimentos aprofundados de Topologia. Para uma primeira ideia intuitiva das *superfícies de Riemann*, veja-se, por exemplo, VALIRON, obra citada, pág. 349.

---

(1) Só mais adiante, com noções de Topologia, podemos precisar o significado da expressão intuitiva "conjunto que circunda a origem".

Função logarítmica.

O estudo desta função é análogo ao anterior. Já vimos que, para cada número complexo $z \neq 0$, existe uma infinidade de números complexos w tais que

$$z = e^w,$$

dados pela fórmula

$$w = \log |z| + i(\arg z + 2k\pi),$$

em que k é um número inteiro relativo arbitrário. Qualquer desses números w é ainda designado por $\log z$; porém, como já observámos, esta notação é ambígua, representando, por isso, uma função em sentido lato (função pluriforme).

Se convencionarmos que $\arg z$ representa o argumento reduzido de z, é fácil ver que a referida expressão, para cada valor de k, representa uma função uniforme de z definida em todo o plano da variável complexa *excepto a origem.* Convencionamos, então, chamar ramo (k) da função $\log z$ a essa função uniforme correspondente a k, e designamo-la pela notação $\log_{(k)} z$.

Para fazer o estudo de tais funções uniformes, consideremos a função

$$z = e^w$$

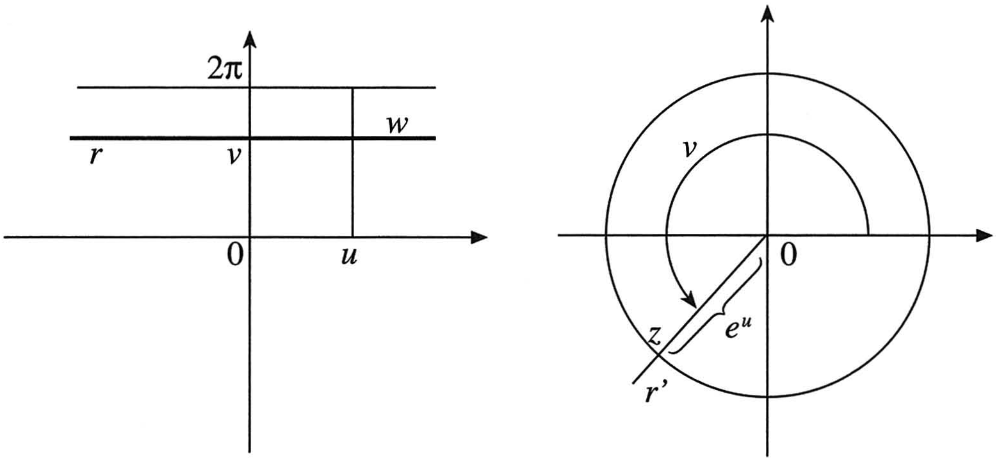
tomando w para variável independente. Já sabemos que se tem

$$(1) \qquad |z| = e^{\operatorname{Re} w}, \quad \arg z = \operatorname{Im} w.$$

É fácil ver que o lugar geométrico dos pontos w tais que

$$0 \leq \operatorname{Im} w < 2\pi,$$

é a faixa horizontal limitada pelo eixo real e pela recta paralela a este eixo, de ordenada 2π, excluindo esta segunda recta.



Designaremos esse conjunto por B. Posto isto, ponhamos:

(2) $$\operatorname{Re} w = u, \quad \operatorname{Im} w = v.$$

Será, então, $w = u + iv$. Suponhamos que o ponto w pertence a B; se a sua parte real u varia no intervalo $]-\infty, +\infty[$ *mantendo-se v constante*, o ponto w descreve uma recta paralela ao eixo real, de ordenada v. Designemos essa recta por r. Ora, segundo (1) e (2), tem-se

$$|z| = e^u, \quad \arg z = v.$$

Por conseguinte, enquanto w descreve a recta r, o ponto z descreve a semi-recta que parte da origem dos eixos e forma com o semi--eixo positivo o ângulo v, *excluída, porém, a origem* (quando $u \to -\infty$, $|z| = e^u \to 0$; mas este ponto não é atingido, visto que e^w não se anula para nenhum valor de $w \in \mathbf{C}$). Designemos por r' este conjunto de pontos descrito por z. Visto que a correspondência entre os pontos de r e os de r' é dada por

$$|z| = e^u,$$

imediatamente se reconhece que a função $z = e^w$ define entre os pontos de r e de r' uma correspondência biunívoca. Por outro lado, quando v varia no intervalo $[0, 2\pi[$, a recta r descreve a faixa B e r' varre o plano $\mathbf{C}$ menos a origem; a correspondência assim estabelecida entre as posições de r e r' é decerto biunívoca, visto ser fixada pela relação $\varphi = v$, em que $\varphi = \arg z$. Em particular, se v varia em $[0, 2\pi[$, mantendo-se u constante, o ponto w descreve um segmento semi-aberto de B paralelo ao eixo imaginário, e o ponto z descreve a circunferência de raio e^u com centro em 0; o raio desta circunferência será, pois, $=1$, <1 ou >1, conforme for $u=0$, <0 ou >0.

Deste modo se reconhece, enfim, que a função $z=e^w$ estabelece uma correspondência biunívoca entre a faixa B e todo o plano da variável complexa excepto a origem; portanto, a restrição da função $z=e^w$ a B é invertível, e a sua função inversa será a função

$$\log_{(0)} z = \log |z| + i \arg z,$$

definida e uniforme no complementar da origem.

Desde logo se reconhece, como no estudo anterior, que esta função é descontínua nos pontos de $\mathbf{R}^+$ (distintos de 0). Basta lembrar que $\arg z$ apresenta um salto nesses pontos.

Porém, a função $\log_{(0)}$ é contínua no conjunto $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, como se pode provar por qualquer dos métodos atrás indicados.

Podemos então aplicar, nos pontos de continuidade, a regra de derivação das funções inversas, que dá:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z},$$

ou seja:

$$\frac{d}{dz} \log_{(0)} z = \frac{1}{z}, \quad \text{para todo o } z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+.$$

Analogamente se reconhece que qualquer dos ramos (k) de $\log z$, definido no complementar da origem, tem por contradomínio a faixa horizontal $2k\pi \leqslant \operatorname{Im} w < 2(k+1)\pi$, e é uma função holomorfa de z em $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, tendo por derivada $1/z$.

Mais geralmente ainda, pode ver-se que:

A função pluriforme $\log z$ *admite uma infinidade numerável de ramos uniformes, funções holomorfas de* z*, em todo o conjunto* *aberto que se obtenha suprimindo em* $\mathbf{C}$ *os pontos de um ramo infinito de linha simples emanado da origem. Para qualquer desses ramos tem-se, no referido conjunto aberto:*

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}\,.$$

Não existe, porém, conjunto nenhum que circunde a origem, no qual a função $\log z$ *admita um ramo uniforme e contínuo. Diremos, por isso, que a origem é um "ponto de ramificação" da função pluriforme* $\log z$.

Note-se que também a função $\log z$ pode ser concebida como uniforme sobre uma *superfície de Riemann*, formada, neste caso, por uma infinidade de folhetos. Um modelo concreto de uma tal superfície poderá ser um helicóide, gerado por uma recta que corte perpendicularmente o eixo; é fácil ver, então, como se estabelece uma correspondência biunívoca, entre os pontos do helicóide que não pertencem ao eixo e os pares (ρ, φ) de números reais tais que $0<\rho<+\infty$ e $-\infty<\varphi<+\infty$. Então, pondo $z=\rho\, e^{i\varphi}$, podemos associar a cada ponto (ρ, φ) do helicóide o número complexo $\log z=\log \rho+i\varphi$, e assim definir a função logarítmica como função uniforme (e holomorfa) sobre o helicóide. Mas, como já se disse a propósito da função $\sqrt[n]{z}$, o estudo correcto deste assunto requer conhecimentos de Topologia que ainda não possuímos.

Funções analíticas em sentido lato.

As funções $\sqrt[n]{z}$ e $\log z$ pertencem a uma classe de funções pluriformes chamadas *funções analíticas em sentido lato* (ou *no sentido de Weierstrass*), cujo estudo sistemático só poderá ser feito mais adiante.

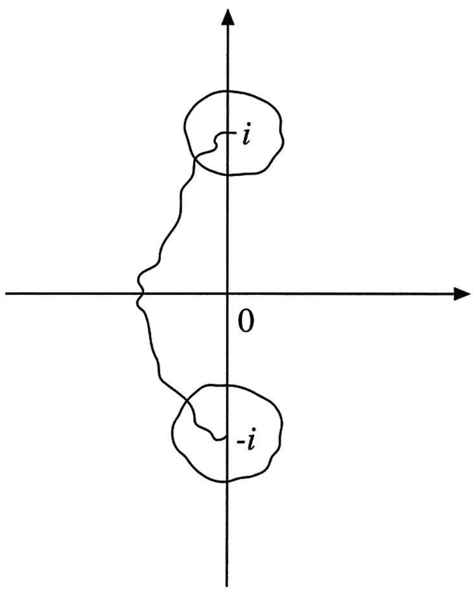
Registemos, no entanto, que vários autores, especialmente da escola francesa, chamam simplesmente *funções analíticas* às *funções analíticas em sentido lato* (uniformes ou pluriformes), reservando a designação *"função holomorfa"* para as *funções analíticas uniformes*; outros autores, ainda, chamam, a estas últimas, *funções analíticas regulares*.

A terminologia que adoptamos no nosso curso – talvez a mais seguida pelos autores contemporâneos – já ficou esclarecida.

Outros exemplos de funções analíticas em sentido lato.

Além das funções $\sqrt[n]{z}$ e log z, podemos citar ainda as funções $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$ (com α irracional ou imaginário), arc sen z, arc tg z, etc. Para o estudo destas, veja-se, por exemplo, VALIRON, obra citada, p. 343-358.

É claro que tais funções podem ainda combinar-se entre si ou com outras, para dar origem a novas funções analíticas uniformes, com um ou mais pontos de ramificação.



Seja, por exemplo, a função de z definida por $\sqrt{1+z^2}$, que resulta de compor $\sqrt{Z}$ com $1 + z^2$. Como $\sqrt{Z}$ tem um ponto de ramificação na origem e $1+z^2$ admite duas raízes (i e $-i$), a função $\sqrt{1+z^2}$ terá dois pontos de ramificação, precisamente i e $-i$. É fácil ver que esta função admite dois ramos holomorfos, em qualquer conjunto que se obtenha, cortando **C** por uma linha simples de extremos i e $-i$; mas não admitirá nenhum ramo uniforme e contínuo em qualquer conjunto que circunde um dos pontos i ou $-i$.

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

CAP. V – **Revisões e complementos sobre integrais impróprios e sobre integrais paramétricos**

CAP. VI – **Método dos resíduos**

CAP. VII – **Breves noções sobre medida e integral de Lebesgue**

CAP. VIII – **Transformação de Fourier**

CAP. IX – **Transformação de Laplace**