II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

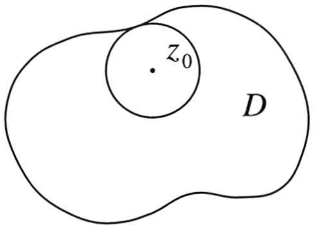
isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência [(1)].

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

---

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[1] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[2]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO III

NOÇÕES PRÉVIAS SOBRE ESPAÇOS VECTORIAIS ABSTRACTOS E SOBRE TOPOLOGIA

Para prosseguir o estudo das funções analíticas, torna-se conveniente (como os próprios exemplos anteriores nos mostram) introduzir alguns elementos de Topologia. E, antes disso, ainda, convém, por vários motivos, rever noções relativas a espaços vectoriais abstractos.

1. Espaços vectoriais: definição, axiomática e exemplos

Dados um conjunto E de elementos $u, v, x, \ldots$ quaisquer e um corpo Δ de elementos $\alpha, \beta, \ldots$ *diz-se que o conjunto E é um espaço vectorial sobre o corpo* Δ, *quando se verificam as seguintes condições:*

I. Está definida em E uma adição a respeito da qual este conjunto é um grupo comutativo. Quer isto dizer que, a cada par (u, v) de elementos de E, se faz corresponder um (e só um) elemento de E que se chama *soma de u com v* e se representa por $u + v$, de tal modo que a operação assim definida é comutativa, associativa e reversível.

II. A cada par (α, u) formado por um elemento α de Δ e um elemento u de E, corresponde um determinado elemento de E, que se chama *produto de* α *por* u e se representa por αu, de tal modo que:

1) $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$ (distributividade à esquerda),
2) $\alpha(u + \mathrm{v}) = \alpha u + \alpha v$ (distributividade à direita),
3) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)\, u$ (associatividade),
4) $1 . u = u$.

Aqui u e v representam elementos arbitrários de E, α, e β elementos arbitrários de Δ.

Nas aplicações à análise só interessa, geralmente, o caso em que Δ é o corpo real, **R**, ou o corpo complexo, **C**. No primeiro caso diz-se que E é um *espaço vectorial real* e, no segundo caso, um *espaço vectorial complexo*. Só destes dois casos nos ocuparemos em tudo o que se segue, salvo indicação expressa em contrário.

Aos elementos de E dá-se, em geral, o nome de *vectores* e aos de Δ o nome de *escalares*. O elemento neutro da adição em E é chamado *vector nulo*; representá-lo-emos por $\vec{0}$. Será, pois, por definição:

$$u + \vec{0} = u \qquad (\forall u \in E)^{(1)}.$$

Vamos provar agora que se tem

$$0u = \vec{0} \qquad (\forall u \in E).$$

Com efeito, aplicando a distributividade à esquerda, vem

$$1 . u + 0 . u = (1 + 0)\, u = 1 . u$$

donde, aplicando o axioma 4):

$$u + 0u = u$$

(1) A expressão "$\forall u \in E$" lê-se "qualquer que seja u pertencente a E" ou "para todo o u pertencente a E". O símbolo $\forall$ representa um operador lógico chamado *quantificador universal.*

e assim, por definição de $\vec{0}$:

$$0u = \vec{0}. \qquad (\forall u \in E).$$

Analogamente se reconhece que

$$(-1)u = -u \qquad (\forall u \in E),$$

representando por $-u$ o simétrico de u, isto é, o vector que somado com u dá o vector nulo: $u + (-u) = \vec{0}$.

Exemplos – 1) É fácil ver que os vectores livres do espaço ordinário formam um espaço vectorial real relativamente às operações usuais da adição e produto por números reais.

2) Como é sabido, chama-se *espaço numérico a n dimensões reais*, e representa-se por $\mathbf{R}^n$, o conjunto de todos os sistemas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

de n números reais (arranjos com repetição). Analogamente, chama-se *espaço numérico a n dimensões complexas*, e representa-se por $\mathbf{C}^n$, o conjunto de todos os sistemas

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

de n números complexos. Dados dois elementos de $\mathbf{R}^n$,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

chama-se *soma de x com y* o elemento de $\mathbf{R}^n$:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

e chama-se *produto de um número real* α *por x* o elemento de $\mathbf{R}^n$:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

É bem fácil reconhecer que o *conjunto* $\mathbf{R}^n$ *é um espaço vectorial real* relativamente às operações assim definidas.

Analogamente se define soma de dois elementos de $\mathbf{C}^n$ e produto dum número complexo por um elemento de $\mathbf{C}^n$, reconhecendo-se que este conjunto é um espaço vectorial complexo, relativamente às operações assim definidas. Podemos, assim, chamar *vector* a todo o sistema de n números, que serão chamados, então, as *componentes* ou *coordenadas* desse vector.

3) Designa-se por $\mathbf{R}^\infty$ (respectivamente $\mathbf{C}^\infty$) o conjunto de todas as sucessões infinitas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

de números reais (respectivamente $(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$ de números complexos). Definem-se, de modo análogo, neste conjunto, operações de soma e de produto por escalares, que os tornam espaços vectoriais, respectivamente, sobre o corpo real e sobre o corpo complexo.

4) *Dado um intervalo I qualquer de* $\mathbf{R}$, *designemos por F_I o conjunto de todas as funções reais $f(x)$ definidas em I.* Define-se *soma* $f+g$ de duas funções f, $g \in F_I$ e produto αf de um número $\alpha \in \mathbf{R}$ por uma função $f \in F_I$, como é usual, pondo:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (\forall x \in I)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha[f(x)] \qquad (\forall x \in I).$$

Também se pode reconhecer (como exercício) que F_I é um espaço vectorial real. Se, em vez de funções reais de variável real, considerássemos funções complexas de variável real, definidas em I, obtínhamos, analogamente, um espaço vectorial complexo. Nesta ordem de ideias, podemos chamar *vector* a cada função f e *coordenadas ou componentes* do vector f aos valores $f(x)$ que f toma nos diferentes pontos x de I.

5) O conjunto S_z de todas as séries de potências de z, de coeficientes complexos, constitui, manifestamente, um espaço vectorial complexo, relativamente às operações de soma e produto por números complexos anteriormente definidos para séries[1].

(1) Este espaço é, aliás, isomorfo ao espaço $\mathbf{C}^\infty$; mas só mais adiante recordaremos o conceito de isomorfismo para espaços vectoriais.

2. Dependência linear. Número de dimensões

Dados n vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de um espaço vectorial E, diz-se que um vector v é *combinação linear* dos primeiros, quando existem n escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n .$$

Diz-se que os vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ são *linearmente independentes,* quando nenhum deles é combinação linear dos restantes.

Chama-se *base algébrica* de E qualquer conjunto B, formado de vectores linearmente independentes de E, tal que todo o vector de E se pode exprimir como combinação linear de elementos de B.

Prova-se que duas bases algébricas de E têm sempre o mesmo número de elementos (finito ou infinito). Esse número é chamado a *dimensão* ou o *número de dimensões* de E.

Por exemplo, os vectores

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1),$$

formam uma base algébrica de $\mathbf{R}^n$. Com efeito, dado um vector x qualquer de $\mathbf{R}^n$, de componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tem-se, como é fácil ver:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

e também é evidente que os vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$, são linearmente independentes. Portanto, o espaço vectorial $\mathbf{R}^n$ (sobre $\mathbf{R}$) tem n dimensões (reais).

Analogamente se reconhece que os mesmos vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$, formam uma base algébrica do espaço vectorial $\mathbf{C}^n$ (sobre $\mathbf{C}$). Este tem, portanto, n dimensões (complexas). *Mas note-se que* $\mathbf{C}^n$ *também é um espaço vectorial sobre* $\mathbf{R}$ *e, como tal, tem 2n dimensões reais*. Assim, por exemplo, o vector $(1 + 2i, -i)$ de $\mathbf{C}^2$ vem a corresponder ao vector $(1, 2, 0, -1)$ de $\mathbf{R}^4$.

Por sua vez, o espaço $\mathbf{R}^\infty$ tem um número infinito de dimensões (superior a $\aleph_0$). O mesmo sucede com o espaço F_I das funções definidas num intervalo $I = [a, b]$ (sendo $a \neq b$), com o espaço das séries de potências, etc., etc.

A análise moderna ocupa-se principalmente de espaços com um número infinito de dimensões, reais ou complexos. Tal é propriamente o objecto da chamada *Análise Funcional,* de que trataremos mais tarde. Pertencem à Análise Funcional, entre outros, os seguintes assuntos: cálculo operacional, teoria dos espaços hilbertianos e teoria das distribuições, que são instrumentos essenciais em vários ramos da Física e da Técnica contemporâneas.

3. Noção de subespaço vectorial

Dados um espaço vectorial E e *um subconjunto V de E,* diz-se que *V é um subespaço vectorial de E,* quando constitui *um espaço vectorial relativamente às operações definidas em E e restringidas a V.*

Para que V seja um subespaço vectorial de E, é necessário e suficiente que se verifiquem as duas seguintes condições:

1) Dados dois elementos u e v quaisquer de V, também a soma pertence a V, isto é, em símbolos,

$$u, v \in V \Rightarrow u + v \in V;$$

2) Quaisquer que sejam $\alpha \in \Delta$ e $u \in V$, também $\alpha u \in V$, isto é,

$$\alpha \in \Delta \wedge u \in V \Rightarrow \alpha u \in V.$$

Estas duas condições equivalem a uma única que se pode assim enunciar:

Toda a combinação linear de elementos de V (*em número finito*) *é ainda um elemento de V.*

Por exemplo, designemos por C_I o conjunto de todas as funções (reais ou complexas) definidas e *contínuas* no intervalo I da recta. É fácil ver que C_I é um subespaço de F_I, atendendo a que a soma de duas funções contínuas é ainda uma função contínua, e igualmente para o produto de um número por uma função contínua.

Outros exemplos – O conjunto $\overline{S}_z$ de todas as séries de potências de z cujo raio de convergência é diferente de 0 constitui um subespaço vectorial do espaço das séries de potências atrás considerado, pois a soma de duas séries de potências de raio de convergência não nulo ainda tem raio de convergência não nulo, e analogamente para o produto de uma série de potências de raio de convergência não nulo por um número complexo. Por sua vez, o conjunto E_z das séries de potências de z de raio infinito é um subespaço vectorial de $\overline{S}_z$. Finalmente, o conjunto P_z de todos os polinómios em z é um subespaço vectorial de E_z. Tem-se, pois, a cadeia de inclusões:

$$S_z \supset \overline{S}_z \supset E_z \supset P_z \supset \dots .$$

Note-se que, enquanto o espaço E_z e os anteriores têm uma infinidade contínua de dimensões, o espaço P_z tem uma infinidade numerável de dimensões, (número $\aleph_0$), pois admite como base algébrica o conjunto de vectores $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$.

Se representarmos por $P_z^{(n)}$ o conjunto dos polinómios de grau $\leqslant n$, será $P_z^{(n)}$ um subespaço vectorial de P_z, com $n+1$ dimensões (isomorfo a $\mathbf{C}^{n+1}$, pois estamos a supor que os coeficientes são números complexos) e ainda um subespaço vectorial de $P_z^{(n+1)}$, qualquer que seja n.

4. Noção de semi-norma

Chama-se função semi-norma definida num espaço vectorial E, toda a função p que faça corresponder, a cada vector $u \in E$, um número real $p(u)$ não negativo, de acordo com as duas seguintes condições:

N 1) $p(u + v) \leqslant p(u) + p(v)$;

N 2) $p(\alpha u) = |\alpha| p(u)$;

sendo u e v vectores arbitrários de E e α um escalar arbitrário de Δ (número real ou *número complexo).*

Para cada $u \in E$, o número $p(u)$ é então chamado *semi-norma do vector u.*

Dos axiomas N 1) e N 2) deduz-se, desde logo, a desigualdade:

$$\text{N}'1)\ p(u - v) \geqslant |p(u) - p(v)| \quad (\forall u, v \in E).$$

Com efeito, pondo $u - v = x$, vem $u = v + x$ e

$$p(v + x) \leqslant p(v) + p(x)$$

donde,

$$p(x) \geqslant p(u) - p(v),$$

ou seja,

$$p(u - v) \geqslant p(u) - p(v).$$

Mas, como se tem

$$p(u - v) = p[(-1)\ (v - u)] = p(v - u),$$

será também

$$p(u - v) \geqslant p(v) - p(u),$$

o que, associado à relação anterior, conduz à conclusão N′1).

Por sua vez, de N 2) deduz-se que

$$p(\vec{0}) = 0.$$

Com efeito, tomando $\alpha = 0$, tem-se:

$$p(\vec{0}) = p(0\,.\,u) = 0\,.\,p(u) = 0.$$

Mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, suponhamos que a cada vector do plano, $x = (x_1, x_2)$, fazemos corresponder o número $p(x) = |x_1|$. Como simples exercício se vê que $p(x)$ é de facto uma semi-norma em $\mathbf{R}^2$. Mas pergunta-se: neste caso, se for $p(x) = 0$, será necessariamente $x = \vec{0}$? Não, porque pode ser $x_1 = 0$ sem o ser x_2, e então virá $x \neq 0$ com $p(x) = 0$.

5. Noção de norma

Diz-se que uma função semi-norma p definida num espaço vectorial E é uma função norma, quando verifica a seguinte condição suplementar:

N 3) $p(u) = 0 \;\Rightarrow\; u = \vec{0}$.

É claro que, como já se tinha $p(u) = 0$ quando $u = \vec{0}$, poderá escrever-se mesmo $p(u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$, em vez de N 3). Neste caso, o número $p(u)$ associado a cada $u \in E$ é chamado a *norma do vector u.*

Exemplos – 1) No espaço $\mathbf{R}^n$ podem definir-se normas dos seguintes modos:

$$p(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,,$$

$$q(x) = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

$$r(x) = \max\,\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\},$$

sendo evidentemente $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Como exercício pode reconhecer-se que as funções de x assim definidas são de facto funções norma em $\mathbf{R}^n$. Analogamente se definem funções norma em $\mathbf{C}^n$, mas neste caso é necessário substituir, na primeira expressão, os quadrados das componentes pelos quadrados dos módulos das componentes.

2) No conjunto C_I das funções (reais ou complexas) definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$ da recta, podem definir-se normas dos seguintes modos:

$$p(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}\,,$$

$$q(f) = \int_a^b |f(x)|\,dx\,,$$

$$r(f) = \max_{x \in I} |f(x)|\,,$$

correspondentes, respectivamente, aos três casos anteriores. Podemos ver, como exercício, que se trata de facto de normas.

Quando num espaço vectorial se adopta uma determinada função norma, o espaço diz-se normado, e a norma dum vector u de E representa-se geralmente por $\|u\|$. Em certos casos, a norma de u também se chama *módulo* ou *comprimento* de u e representa-se por $|u|$.

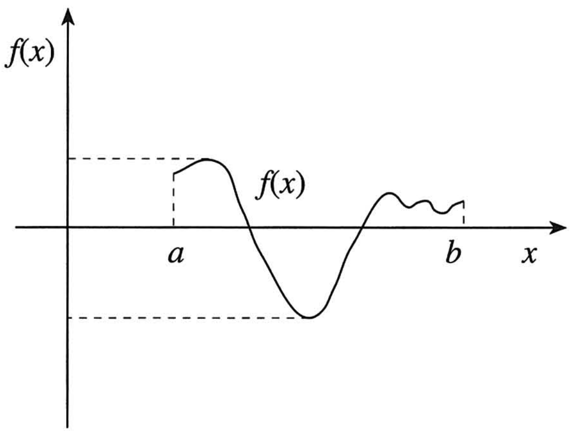
Em $\mathbf{R}^n$ costuma chamar-se módulo, ou comprimento dum vector, à primeira das normas atrás definidas. Esta notação não é aconselhável para as funções, pois $|f|$ pode confundir-se com a função assim definida:

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad \text{para todo o } x.$$

Esta é, obviamente, uma *função*, ao passo que $\|f\|$ é um *número* associado a f. *Para funções contínuas num intervalo limitado e fechado* $I = [a, b]$ usa-se, geralmente, a norma:

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

Recordemos que se f é contínua em I também a função de x definida por $|f(x)|$ é contínua em I, e portanto, segundo o TEOREMA DE WEIERSTRASS, tem aí um máximo e um mínimo. No caso da figura, a norma de f será o módulo do mínimo em $[a, b]$.



6. Noções de desvio, distância e espaço métrico

Seja E um espaço vectorial munido duma função semi-norma p. Relativamente a essa semi-norma, chama-se desvio de dois elementos u, v de E, e representa-se por d(u, v), a semi-norma de u – v, isto é:

$$d(u, v) = p(u, v).$$

Das propriedades axiomáticas das semi-normas resulta que a função de desvio possui as seguintes propriedades:

D 1) $d(u, v) = d(v, u)$ (simetria),

D 2) $d(u, w) \leqslant d(u, v) + d(v, w)$ (desigualdade triangular),

D 3) $u = v \Rightarrow d(u, v) = 0$,

sendo u, v e w elementos arbitrários de E.

Para demonstrar estes factos, basta atender às propriedades axiomáticas N 1) e N 2) das funções semi-norma e à definição de desvio. Assim, para demonstrar D 1), basta observar que

$$p(u - v) = p[(-1)\,(v - u)] = |-1|\,.\,p(v - u) = p(v - u),$$

em virtude de N 2). Para demonstrar D 2), notemos que

$$u - w = (u - v) + (v - w),$$

donde, por força de N 1),

$$p(u - w) \leq p(u - v) + p(v - w).$$

Para demonstrar D 3), basta notar que se $u = v$, vem $u - v = \vec{0}$ e portanto $p(u - v) = 0$.

A propriedade D 2) é chamada *desigualdade triangular*, porque generaliza o conhecido teorema da geometria elementar que relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo.

Suponhamos, agora, que a função p é mesmo uma função norma, isto é, que $p(u) = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$. Então, verifica-se também a recíproca da propriedade D 3):

$$\text{D}'\,3) \qquad d(u, v) = 0 \Rightarrow u = v.$$

Com efeito, tem-se, em virtude de N 3):

$$p(u - v) = 0 \Rightarrow u - v = \vec{0} \Rightarrow u = v.$$

Assim, *quando p é uma norma, as condições* D 3) *e* D′ 3) *podem fundir-se numa única:*

$$\text{D}^*\,3) \qquad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v.$$

Neste caso diz-se que a função desvio é uma função de distância e o número $d(u, v)$ associado ao par de vectores (u, v) é chamado distância de u a v.

Dum modo geral, dado um conjunto S formado de elementos quaisquer u, v, x, ... (mesmo que S não seja um espaço vectorial), chama-se função distância ou métrica definida em S toda a função d que faça corresponder, a cada par (u, v) de elementos de S, um número real $d(u, v) \geq 0$ (chamado distância de u a v), de acordo com as condições D 1), D 2) *e* D* 3). Aliás, é fácil ver que as propriedades axiomáticas da distância se podem reduzir a D* 3) e à desigualdade triangular, se escrevermos esta sob a forma:

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(v, w),$$

pois que, com $w = u$, se deduz daqui a simetria(1).

Dá-se o nome de espaço métrico a todo o conjunto S no qual se tenha adoptado uma determinada função distância. Neste caso, os elementos de S, quaisquer que eles sejam, podem chamar-se *pontos.* Em particular, todo o espaço vectorial normado será um espaço métrico e por isso os seus elementos poderão chamar-se, indistintamente, vectores ou pontos.

Vejamos um exemplo de espaço métrico que não seja espaço vectorial normado: Seja S uma superfície esférica; então, se chamarmos distância de dois pontos, x, y de S, ao comprimento do menor arco de círculo máximo de extremos x, y, é fácil ver que fica assim, de facto, definida em S uma métrica. O mesmo acontece ainda, se chamarmos distância de dois pontos de S ao comprimento do segmento de recta que os une no espaço. Mas é claro que S não é um espaço vectorial; não se define "soma de dois pontos de uma superfície esférica", nem "produto dum ponto por um escalar". Mais até, demonstra-se que é *impossível* definir em S uma estrutura de espaço vectorial normado, da qual se deduza esta métrica segundo a definição anterior.

(1) Note-se que mesmo a condição $d(u, v) \geqslant 0$ é implicada por aquelas, desde que se suponha que $d(u, v)$ é um número real.

7. Noções métricas

Seja E um espaço métrico qualquer e designemos por d a sua função distância. Dados um ponto a de E e um número $\delta > 0$, *chama-se bola de centro a e raio* δ *ao conjunto dos pontos x de E que verificam a condição* $d(a, x) \leqslant \delta$. Analogamente, *chama-se bola aberta de centro a e raio* δ, *ao conjunto de pontos x que verificam a condição* $d(a, x) < \delta$.

Para evitar confusões, às vezes, *às bolas propriamente ditas chama-se bolas fechadas para as distinguir das bolas abertas.*

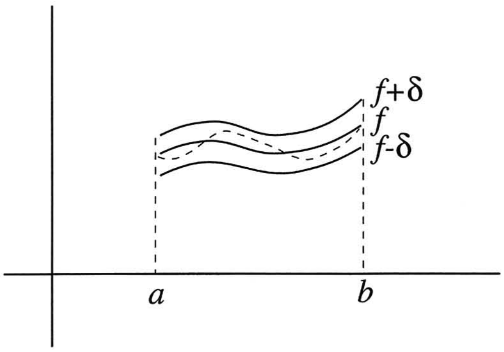
Exemplos – 1) Suponhamos que em $\mathbf{R}^n$ se toma para norma de um vector a raiz quadrada da soma dos quadrados das suas componentes. Então, se $n=3$, as bolas de centro a e raio ρ são as esferas de centro a e raio ρ, enquanto as bolas abertas são os interiores das primeiras. Se $n=2$ as bolas de centro a e raio ρ são os círculos de centro a e raio ρ. Se $n=1$, as bolas de centro a e raio ρ são os intervalos de centro a e raio ρ (ou amplitude 2ρ), etc.

Suponhamos, agora, que a norma de um vector $x \in \mathbf{R}^n$ é definida por:

$$\| x \| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| .$$

Então, para $n=3$, as bolas de centro a serão os octaedros regulares de centro a e cujos planos diagonais são paralelos aos planos coordenados; para $n=2$ serão quadrados com centro em a e diagonais paralelas aos eixos coordenados; etc.

2) Consideremos, agora, o espaço C_I das funções reais contínuas no intervalo $I=[a, b]$, limitado e fechado, com a definição de norma $\|f\| = \max\limits_{x \in I} |f(x)|$. Então, a bola de centro f e raio $\delta > 0$ será o conjunto de *todas as possíveis* funções contínuas cujo gráfico está situado na faixa limitada pelos gráficos das funções $f + \delta$, $f - \delta$, no referido intervalo.



Dados um ponto $a \in E$ e um conjunto $M \subset E$, chama-se distância de a a M ao extremo inferior das distâncias de a aos pontos x de M, isto é, em símbolos [1]:

$$d(a, M) = \inf_{x \in M} d(a, x).$$

Dados dois conjuntos M e N de pontos de E, chama-se distância de M a N ao extremo inferior das distâncias dos pontos de M aos pontos de N, isto é:

$$d(M, N) = \inf_{x \in M,\, y \in N} d(x, y).$$

Chama-se diâmetro do conjunto M ao extremo superior das distâncias de dois pontos variáveis de M,

$$d(M) = \sup_{x,\, y \in M} d(x, y).$$

O conjunto M diz-se limitado quando o seu diâmetro é finito; equivale isto a dizer que existe, pelo menos, uma bola de E que contém M.

(1) Recordemos que se chama *extremo superior (ou supremo) de um conjunto H de números reais ao menor dos majorantes de H e extremo inferior (ou ínfimo) de H ao maior dos minorantes de H.* O supremo e ínfimo de H designam-se, respectivamente, por $\sup H$ e $\inf H$.

De um modo geral, dá-se o nome de noções métricas em E a todas as noções que se podem definir logicamente a partir da função distância, própria de E. Assim, as noções de bola, distância de um ponto a um conjunto, conjunto limitado, etc., são noções métricas. Entre estas figura, obviamente, a noção de distância de dois pontos (noção métrica primitiva).

Mas já num espaço normado E a noção de norma não é uma noção métrica. É certo que se pode definir norma de um vector u como distância de u à origem, isto é, pondo $\|u\| = d(u, \vec{0})$; contudo, seria preciso definir "vector nulo" e este não se pode definir a partir de distância. Aliás, já vimos que há espaços métricos cuja distância não deriva de nenhuma norma (o caso da esfera). Mais geralmente ainda, podemos definir noções de bola, diâmetro dum conjunto, etc., partindo duma função desvio.

8. Isometrias

Dados dois espaços métricos, E e F, chama-se isometria (ou representação isométrica) de E sobre F toda a aplicação biunívoca φ de E sobre F que respeite as distâncias, isto é, tal que

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y) \qquad (\forall x, y \in E).$$

Por exemplo, no espaço $\mathbf{R}^3$ as isometrias são os *deslocamentos* (que se reduzem sempre a produtos de rotações por translações), bem como os deslocamentos seguidos de *reflexões* (isto é, de simetrias em relação a planos).

É fácil ver que o produto de duas isometrias ainda é uma isometria e que a inversa de uma isometria também é uma isometria. *Assim, o conjunto de todas as possíveis isometrias de um espaço métrico E sobre si mesmo é um grupo, relativamente ao produto (ou composição) usual de aplicações.*

É óbvio que as isometrias respeitam não só as distâncias (por definição), mas ainda todas as propriedades que se definam logicamente em termos de "distância" – isto é, todas as *propriedades métricas*. Reciprocamente, demonstra-se, por métodos da lógica matemática, que, se uma propriedade é respeitada por todas as isometrias, essa é, com certeza, uma propriedade métrica.

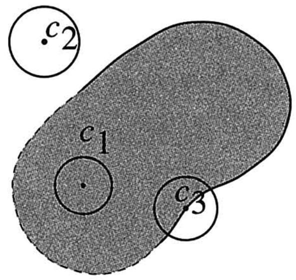
9. Noções topológicas em espaços métricos

Seja E um espaço métrico. Convencionaremos chamar vizinhanças de um ponto a qualquer de E, às bolas abertas com centro em a; mais precisamente uma bola aberta de centro em a e raio $\rho > 0$ *será chamada a vizinhança* (ρ) *de a e poderá ser designada pela notação* $V_\rho(a)$.

Posto isto, *dados um ponto c de E e um conjunto A qualquer de pontos de E*:

I. *Diz-se que c é interior a A, quando existe, pelo menos, uma vizinhança de c contida em A* (*isto é, formada só de elementos de A*). *O conjunto dos pontos interiores a A será chamado interior de A e designado por qualquer das notações* int A *ou* $\mathring{A}$.

Da definição resulta imediatamente que, se c é interior a A, c pertence a A, isto é, tem-se int $A \subset A$.



II. *Diz-se que c é exterior a A quando existe, pelo menos, uma vizinhança de c que não tem nenhum ponto de A, isto é, que está contida no complementar de A.* Dizer que c é exterior a A equivale, pois, a dizer que c é interior ao complementar de A. *O conjunto dos pontos exteriores a A será chamado exterior de A e designado pela notação* ext A.

Será, pois, em virtude da definição,

$$\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(\sim A).$$

Não confundir "exterior de um conjunto" com "complementar dum conjunto". Por exemplo, se A é uma esfera aberta em $\mathbf{R}^3$, o exterior de A é o conjunto dos pontos cuja distância ao centro é maior que o raio, enquanto o complementar é o conjunto dos pontos cuja distância ao centro é igual ou superior ao raio (inclui os pontos da superfície). Pode, no entanto, acontecer que o exterior dum conjunto coincida com o seu complementar.

III. *Diz-se que o ponto c é fronteiro a A, quando não é interior nem exterior a A.* Equivale isto a dizer que, em cada vizinhança de c, existe, pelo menos, um ponto de A e um ponto de $\sim A$. *O conjunto dos pontos fronteiros a A é chamado fronteira de A e designado por* front A.

IV. *Diz-se que c é aderente a A, quando não é exterior a A, ou seja, quando é interior ou fronteiro a A.* Equivale isto a dizer que em cada vizinhança de c existe, pelo menos, um ponto de A. *O conjunto dos pontos aderentes a A é chamado aderência ou fecho de A, e designado por qualquer das notações* ader A ou $\bar{A}$.

Ter-se-á pois, por definição:

$$\text{ader}\, A = A \cup \text{front}\, A$$

e

$$\sim (\text{ader}\, A) = \text{int}\, (\sim A).$$

Isto mostra que a operação de passagem ao complementar converte a aderência em interior, e vice-versa:

$$\sim (\text{int}\, A) = \text{ader}\, (\sim A).$$

Da 2.ª das fórmulas anteriores deduz-se:

$$\text{ader}\, A = \sim (\text{int}\, (\sim A)),$$

o *que define aderência em termos de interior.* Note-se que *também podemos definir fronteira em termos de aderência:*

$$\text{front}\, A = \text{ader}\, A \cap \text{ader}\, (\sim A)$$

(dizer que um ponto é fronteiro a A equivale a dizer que é aderente a A e aderente ao complementar de A).

V. *Diz-se que c é um ponto de acumulação de A, quando é aderente ao conjunto dos pontos de A distintos de c.* Equivale isto a dizer que em toda a vizinhança de c existe, pelo menos, um ponto de A distinto de c. *O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado conjunto derivado de A e designado geralmente pela notação* A'.

É preciso não confundir ponto aderente com ponto de acumulação. Por exemplo, seja A o conjunto formado por dois pontos distintos p, q do *plano*: $A = \{p, q\}$. É claro que qualquer destes pontos, por exemplo p, é aderente ao conjunto A, porque em qualquer vizinhança de p existe sempre um ponto de A que é o próprio p; mas não é um ponto de acumulação de A, porque podemos escolher uma vizinhança de p que não contenha q e assim existe uma vizinhança de p que não contém nenhum ponto de A distinto de p.

Todavia, *a aderência está relacionada com o conjunto derivado por meio da fórmula*:

$$\operatorname{ader} A = A \cup A'.$$

Mas note-se que não se tem *geralmente* $A \subset A'$ nem $A' \subset A$.

VI. *Diz-se que c é isolado de A quando não é ponto de acumulação de A.*

É claro que se c é exterior a A, c é isolado de A; mas a recíproca não é verdadeira, pois, no exemplo anterior, os pontos p e q são isolados de A e, contudo, não são exteriores a A, visto que pertencem ambos ao conjunto.

VII. *Diz-se que o conjunto A é aberto quando coincide com o seu interior, isto é, quando se tem* $\operatorname{int} A = A$. *Diz-se que A é fechado quando coincide com a sua aderência, isto é, quando* $\operatorname{ader} A = A$.

Por exemplo, *o espaço inteiro E é um conjunto ao mesmo tempo aberto e fechado, visto que* $\operatorname{int} E = E$ *e* $\operatorname{ader} E = E$.

Vamos agora demonstrar uma série de proposições, *todas relativas a conjuntos de pontos dum espaço métrico*. É, pois, necessário não perder de vista esta hipótese.

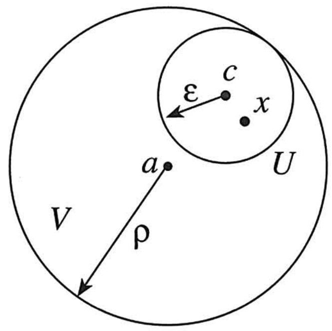
PROPOSIÇÃO 9.1. *Toda a bola aberta é um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja V a bola de centro a e raio ρ. Será, pois, V, por definição, o conjunto dos pontos x tais que $d(a, x) < \rho$. Queremos provar que o conjunto V é aberto. Seja c um ponto qualquer de V e ponhamos $\varepsilon = \rho - d(a, c)$, ou seja,

$$(1) \qquad d(a, c) = \rho - \varepsilon.$$

Seja agora U a vizinhança (ε) de c; para todo o ponto x de U tem-se, por definição:

$$(2) \qquad d(c, x) < \varepsilon .$$



Por outro lado, em virtude da desigualdade triangular,

$$d(a, x) \leqslant d(a, c) + d(c, x),$$

donde, atendendo a (1) e a (2):

$$d(a, x) < (\rho - \varepsilon) + \varepsilon = \rho.$$

Assim, todo o ponto x de U pertence a V, isto é: a vizinhança U de c está contida em V. Portanto, todo o ponto c de V é interior a V, o que significa que o conjunto V é aberto (q.e.d.).

NOTA IMPORTANTE. Veja-se como nesta demonstração intervém, essencialmente, a propriedade triangular da métrica.

PROPOSIÇÃO 9.2. *O complementar de todo o conjunto aberto é fechado e vice-versa.*

Com efeito, se A é aberto, tem-se, por definição, $\operatorname{int} A = A$, donde, pela passagem ao complementar, ader $(\sim A) = \sim A$, o que significa que $\sim$A é fechado. Analogamente se demonstra a recíproca.

Daqui se deduz que *o conjunto vazio $\varnothing$ é um conjunto simultaneamente aberto e fechado,* visto ser o complementar do espaço inteiro.

PROPOSIÇÃO 9.3. *Se $A \subset B$, também* $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$ *e* $\operatorname{ader} A \subset \operatorname{ader} B$.

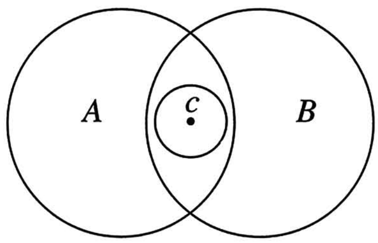
Com efeito, dizer que c é interior a A significa que existe uma vizinhança de c contida em A; mas, então, essa vizinhança também está contida em B, e, portanto, c será interior a B. Analogamente para a aderência.

PROPOSIÇÃO 9.4. *O interior da intersecção de dois conjuntos coincide com a intersecção dos interiores dos mesmos, isto é, em símbolos:*

$$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \qquad (\forall A, B \subset E).$$

Com efeito, suponhamos que $c \in \operatorname{int}(A \cap B)$; então, c também será interior a qualquer dos conjuntos A e B, visto que $A \cap B$ está contida em A e está contida em B (cf. PROPOSIÇÃO 9.3).

Reciprocamente, seja c um ponto interior a A e interior a B. Então, existe uma vizinhança U de c contida em A e uma vizinhança V de c contida em B. Como convencionámos chamar vizinhança de c às bolas abertas de centro c, há uma, pelo menos, que está contida na outra: designemo-la por W. Então, W será uma vizinhança de c contida ao mesmo tempo em A e em B, ou seja, na intersecção de A com B e, portanto, c é interior a $A \cap B$.



COROLÁRIO. *A intersecção de dois ou mais conjuntos abertos, em número finito, ainda é um conjunto aberto.*

Com efeito, se A e B são abertos, tem-se, por definição, $\operatorname{int} A = A$ e $\operatorname{int} B = B$, donde, pela PROPOSIÇÃO 9.4, $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B =$ $= A \cap B$. Ora, isto quer dizer que $A \cap B$ é aberto.

A conclusão estende-se imediatamente a um número finito qualquer de conjuntos abertos. Todavia, *a propriedade deixa de ser verdadeira para conjuntos abertos em número infinito.* Por exemplo, no plano, os círculos abertos de centro a e raios $1+1/n$, com $n = 1, 2, \ldots$, são conjuntos abertos cuja intersecção é o círculo fechado de centro a e raio 1.

Vamos, porém, demonstrar que:

PROPOSIÇÃO 9.5. *A reunião de conjuntos abertos (em número finito ou infinito) é sempre um conjunto aberto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{H}$ uma família qualquer de conjuntos abertos (finita ou infinita). Designemos por S a reunião destes conjuntos, isto é, ponhamos

$$S = \bigcup_{X \in \mathcal{H}} X.$$

Vamos provar que S também é aberto. Com efeito, seja c um ponto qualquer de S. Visto que S é a reunião de todos os conjuntos de $\mathcal{H}$, c pertence, pelo menos, a um conjunto X de $\mathcal{H}$. Então, como X é aberto, por hipótese, c é interior a X e, portanto, a S, pois X está contido em S. Assim, todo o ponto de S lhe é interior e S é, por definição, aberto (q.e.d.).

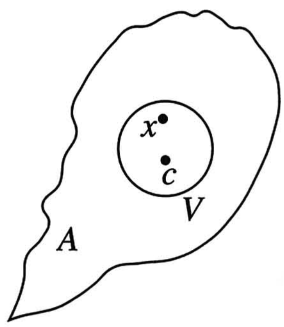
PROPOSIÇÃO 9.6. *O interior de um conjunto é sempre um conjunto aberto, isto é, tem-se:*

$$\text{int}\,(\text{int}\, A) = \text{int}\, A \qquad (\forall A).$$

Demonstração. É evidente que $\text{int}\,(\text{int}\, A) \subset \text{int}\, A$, visto que o interior de um conjunto está sempre contido nesse conjunto.

Basta, então, demonstrar a recíproca:

(3) $$\text{int}\, A \subset \text{int}\,(\text{int}\, A).$$



Seja c um ponto de int A. Quer isto dizer que existe, pelo menos, uma bola aberta V de centro c contida em A. Se provarmos que a vizinhança V também está contida no interior de A, fica provado que c é interior ao interior de A, e, portanto, fica demonstrado (3) (visto que c é um ponto interior *arbitrário* de A).

Seja, pois, x um ponto qualquer de V. Visto que V é um conjunto aberto, x é interior a V, e, por conseguinte, tem-se:

$$x \in V \Rightarrow x \in \operatorname{int} V \Rightarrow x \in \operatorname{int} A,$$

em virtude da PROPOSIÇÃO 9.3, visto que $V \subset A$. Tem-se, pois, $V \subset \operatorname{int} A$, como queríamos provar.

COROLÁRIO. *O interior de um conjunto A é o máximo conjunto aberto contido em A.*

Com efeito, já vimos que int A é um conjunto aberto contido em A. Por outro lado, qualquer outro conjunto aberto X contido em A é formado de pontos interiores a X, portanto, a A, e, assim, $X \subset \operatorname{int} A$.

10. Topologia e Lógica formal

De um modo geral, dá-se o nome de noção topológica a toda a noção que se possa definir logicamente a partir do conceito de interior. Assim, por exemplo, as noções de exterior, fronteira, ponto aderente, ponto de acumulação, conjunto aberto, conjunto fechado, etc., são noções topológicas. A própria noção de interior é, obviamente, uma noção topológica (*noção topológica primitiva*). Podíamos, igualmente, tomar como noção topológica primitiva a de ponto aderente, a de ponto fronteiro, a de conjunto aberto, etc., visto que, como é fácil verificar, todas as noções topológicas se podem definir logicamente a partir de qualquer destas. Há, por conseguinte, uma certa liberdade na escolha da noção topológica primitiva. Alguns autores tomam para noção topológica primitiva a de ponto aderente, outros a de conjunto aberto, etc. Tempos houve em que a noção topológica primitiva era a de ponto de acumulação.

Por outro lado, pode-se demonstrar que as noções de distância, de bola, de diâmetro de um conjunto, etc., não são noções topológicas. Embora as noções topológicas tivessem sido definidas, como vimos, a partir da noção de distância (num espaço métrico), a recíproca não é verdadeira. *As noções topológicas são, pois, mais gerais que as métricas.*

Mas há noções ainda mais gerais do que as topológicas: por exemplo, as noções lógicas, que são todas aquelas que se podem definir a partir das relações de identidade e de pertença: $x = y$, $x \in A$. São noções lógicas, por exemplo, a de inclusão, a de intersecção, a de reunião, a de conjunto complementar, etc.

O ramo da Matemática que estuda as noções topológicas é chamado TOPOLOGIA. O ramo da Matemática que estuda as noções lógicas é chamado LÓGICA FORMAL ou TEORIA DOS CONJUNTOS[1].

Como é sabido, existe um PRINCÍPIO DE DUALIDADE LÓGICA, na Teoria dos Conjuntos, que resulta do facto de *a passagem ao complementar converter a relação* $\subset$ *na relação* $\supset$ *e a operação de intersecção na de reunião.* Em virtude desse princípio, toda a proposição verdadeira da Teoria dos Conjuntos, formulada em termos de "inclusão", "intersecção", "reunião", etc., fornece imediatamente uma proposição *dual* ainda verdadeira, substituindo "contido em" por "contém", "reunião" por "intersecção", etc. Pois bem, o princípio de dualidade lógica prolonga-se num PRINCÍPIO DE DUALIDADE TOPOLÓGICA, que resulta do facto da passagem ao complementar transformar interior em aderência, isto é:

$$\sim (\operatorname{int} A) = \operatorname{ader}(\sim A) \qquad (\forall A).$$

Assim, toda a propriedade topológica verdadeira, enunciada em termos de interior, fornece, automaticamente, uma proposição dual ainda verdadeira, substituindo "interior" por "aderência", "reunião" por "intersecção", "contido em" por "contém", etc.

Por exemplo, vimos que se tem

$$\operatorname{int} A \subset A \qquad (\forall A). \tag{1}$$

(1) Segundo a terminologia mais moderna, a "Teoria dos Conjuntos" não inclui a Topologia.

Daqui resulta, por passagem ao complementar:

$$\text{ader}\,(\sim A) \supset \sim A.$$

Mas A é um conjunto arbitrário, o seu complementar $\sim A$ também é arbitrário e, assim, podemos escrever, em geral:

$$(2) \qquad \text{ader}\, A \supset A \qquad (\forall A).$$

Como se vê, passou-se de (1) para (2) mudando $\subset$ em $\supset$ e "interior" em "aderência", como foi dito.

Outro exemplo. Vimos que se tem:

$$\text{int}\,(\text{int}\, A) = \text{int}\, A\,.$$

Daqui vem, por passagem ao complementar,

$$\text{ader}\,(\text{ader}\,(\sim A)) = \text{ader}\,(\sim A)\,,$$

ou seja, atendendo à arbitrariedade de A:

$$\text{ader}\,(\text{ader}\, A) = \text{ader}\, A.$$

Analogamente se reconhece a partir da PROPOSIÇÃO 9.4 que

$$\text{ader}\,(A \cup B) = \text{ader}\, A \cup \text{ader}\, B.$$

Na dualidade topológica, os conjuntos abertos correspondem aos conjuntos fechados (PROPOSIÇÃO 9.2). Assim, do corolário da PROPOSIÇÃO 9.4 e da PROPOSIÇÃO 9.5 deduz-se imediatamente:

A reunião de conjuntos fechados em número finito é sempre um conjunto fechado, e a intersecção de conjuntos fechados em número qualquer (finito ou infinito) é sempre um conjunto fechado.

11. Noção geral de espaço topológico

Como vimos no número anterior, as noções topológicas foram introduzidas a partir de uma métrica, por intermédio de uma noção de vizinhança (bola aberta). Mas nem sempre assim sucede.

Consideremos, por exemplo, o espaço F_I (das funções reais ou complexas definidas num intervalo I da recta). Sendo X um conjunto finito qualquer de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, do intervalo I, convencionemos pôr:

$$p_X(f) = \max_{x \in X} |f(x)| = \max \{|f(x_1)|, \ldots, |f(x_n)|\}.$$

É fácil reconhecer que p_X é uma função semi-norma definida em F_I, mas não uma norma. Com efeito, pode existir uma função definida em I tal que $p_X(f)=0$, sendo $f \neq 0$; basta que a função f se anule nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e tome um valor diferente de zero num outro ponto qualquer de I, o que é evidentemente possível de muitos modos. Posto isto, sendo δ um número positivo, chamaremos *vizinhança* (X, δ), de uma função $f_0 \in F_I$, ao conjunto de todas as funções f tais que $p_X(f - f_0) < \delta$. Assim, tomaremos para vizinhança de f_0 todos os sub-conjuntos de F_I que se podem obter desta maneira, sendo δ um número positivo arbitrário e X um conjunto finito arbitrário de pontos de I. A partir desta noção de vizinhança, podemos introduzir uma noção de interior e várias outras noções topológicas, tal como se fez no número anterior para os espaços métricos. Assim, diremos que f_0 é interior a um conjunto $H \subset F_I$, quando existir, pelo menos, uma vizinhança de f_0 contida em H. Porém, como veremos adiante, prova-se que é impossível definir em F_I uma função distância, da qual se possam deduzir estas noções topológicas, como no número anterior.

Exemplos concretos como este obrigaram os matemáticos a introduzir uma noção geral de espaço topológico, independente da noção de espaço métrico.

Diz-se que um conjunto E, formado por elementos de natureza qualquer, é um espaço topológico, quando existe um critério pelo qual, a cada conjunto $A \subset E$, corresponde um outro conjunto, que se chama interior de A e se designa por int A *ou* $\mathring{A}$, *de acordo com as seguintes condições, quaisquer que sejam A, $B \subset E$:*

I 1) $\operatorname{int} A \subset A$,

I 2) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$,

I 3) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$,

I 4) $\operatorname{int} E = E$.

Também se diz, neste caso, que está definida em E uma *estrutura topológica* ou simplesmente uma *topologia*, e os elementos de E poderão chamar-se *pontos*. *Um espaço topológico diz-se metrizável, quando é possível definir a sua topologia a partir de uma métrica, tal como se indicou no n.º* 9.

No caso geral, podemos definir, a partir da noção de interior (tomada como primitiva), todas as noções topológicas, tal como se fez no caso dos espaços métricos para "exterior", "fronteira", etc.; em particular, a noção de aderência será definida pela fórmula:

$$\operatorname{ader} A = \sim (\operatorname{int}(\sim A))$$

que imediatamente garante o *princípio da dualidade topológica*. Assim, dos *axiomas* I 1) a I 4) deduzem-se automaticamente os *teoremas* para quaisquer $A, B \subset E$:

F 1) $A \subset \operatorname{ader} A$,

F 2) $\operatorname{ader}(A \cup B) = \operatorname{ader} A \cup \operatorname{ader} B$,

F 3) $\operatorname{ader}(\operatorname{ader} A) = \operatorname{ader} A$,

F 4) $\operatorname{ader} \varnothing = \varnothing$.

Reciprocamente, poderíamos tomar como primitiva a noção de aderência, definindo "interior" pela fórmula:

$$\operatorname{int} A = \sim (\operatorname{ader}(\sim A))$$

e considerando as condições F 1) a F 4) não como teoremas mas sim como *axiomas*; então, destes deduzem-se como *teoremas* as propriedades I 1) a I 4). Teremos, assim, dois *sistemas de condições* *equivalentes* ou, como também se diz, duas *axiomáticas equivalentes* da TOPOLOGIA GERAL.

Como anteriormente, diz-se que um *conjunto A é aberto, quando se tem* int $A = A$. Então, a partir das condições I 1) a I 4), demonstram-se facilmente, como no caso dos espaços métricos, as seguintes proposições:

A 1) *Toda a reunião de conjuntos abertos (em número finito ou infinito) é ainda um conjunto aberto.*

A 2) *Toda a intersecção de conjuntos abertos em número finito ainda é um conjunto aberto.*

A 3) *O conjunto* $\varnothing$ *e o espaço inteiro E são conjuntos abertos.*

Poderíamos, ainda, tomar para noção topológica primitiva a de "conjunto aberto", definindo "interior de um conjunto *A*" como o *máximo conjunto aberto contido em A* e tomando as propriedades de A 1) a A 3) como axiomas.

NOTA. A anterior axiomática de espaços topológicos em termos de aderência (ou fecho) foi introduzida pelo matemático polaco contemporâneo KURATOWSKI. Adoptando a notação $\overline{A}$ em vez de ader *A* para designar o fecho de *A,* os axiomas F 1) a F 4) tomam o aspecto:

F 1) $A \subset \overline{A}$,

F 2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

F 3) $\overline{\overline{A}} = A$,

F 4) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

A axiomática em termos de conjunto aberto é a adoptada pela escola francesa BOURBAKI. Porém, esta escola costuma eliminar o axioma A 3), considerando-o implícito em A 1) e A 2), de maneira um tanto subtil, em virtude de certas convenções que adopta na Teoria dos Conjuntos.

12. Sistemas fundamentais de vizinhanças

Como vimos, nem sempre uma estrutura topológica pode ser definida a partir de uma noção de distância; mas vamos ver que pode sempre sê-lo a partir de uma noção de vizinhança.

Seja E um espaço topológico qualquer e seja c um ponto qualquer de E; chamemos vizinhança de c a todo o conjunto $X \subset E$ *ao qual o ponto seja interior.* Então, é fácil ver que, a partir desta noção de vizinhança, se pode definir a estrutura topológica de E, mediante a definição adoptada no caso dos espaços métricos.

Diz-se que c é interior a um conjunto $A \subset E$*, quando existe, pelo menos uma vizinhança de c contida em A.*

Com efeito, se c é interior a A, existe, pelo menos, uma vizinhança de c contida em A: o próprio A. Reciprocamente, se existe uma vizinhança V de c contida em A, c é interior a A, visto ser interior a um conjunto $V \subset A$.

É claro que se pode obter o mesmo resultado, mais "economicamente", chamando vizinhanças de c aos conjuntos abertos que contêm c (*vizinhanças abertas de c*).

Pois bem, chamaremos sistema total de vizinhanças do ponto c, e designaremos por $\mathscr{Y}_c$*, à classe de todos os conjuntos a que c é interior. Chamaremos sistema fundamental de vizinhanças de c a toda a classe de conjuntos* $\mathscr{V}_c \subset \mathscr{Y}_c$*, que dê lugar à mesma topologia, mediante a definição anterior.* Por exemplo, a classe de todos os conjuntos abertos a que pertence c é um sistema fundamental de vizinhanças de c. Aliás, é fácil ver que:

Condição necessária e suficiente para que uma família $\mathscr{V}_c$ *de sub-conjuntos de E seja um sistema fundamental de vizinhanças de c é que cumpra as duas seguintes condições:*

1) *c é interior a todo o conjunto de* $\mathscr{V}_c$*, isto é,* $\mathscr{V}_c \subset \mathscr{Y}_c$.
2) *Para todo o conjunto A a que c é interior, existe, pelo menos, um conjunto* $V \in \mathscr{V}_c$ *contido em A.*

Por exemplo, no espaço $\mathbf{R}^3$, tínhamos chamado vizinhança dum ponto c às esferas abertas com centro em c; ora, em virtude da própria definição de interior dada nos espaços métricos, as esferas abertas de centro c constituem um sistema fundamental de vizinhanças de c. Mas outros sistemas fundamentais de vizinhanças podem ser adoptados em $\mathbf{R}^3$, por exemplo, as esferas fechadas de centro em c. Com efeito é fácil ver que:

1) Todo o ponto c é interior a qualquer esfera fechada com centro em c (pois que esta contém a esfera aberta com o mesmo centro e o mesmo raio).

2) Se o ponto c é interior a um conjunto A, existe um número $\delta > 0$ tal que a esfera aberta de centro c e raio δ está contida em A; mas, neste caso, também qualquer esfera fechada de centro c e raio $\varepsilon < \delta$ está contida em A.

Analogamente, se reconhece que os cubos de centro c e faces paralelas aos planos coordenados formam uma família fundamental de vizinhanças de c; etc.

Por este processo se reconhece que as três funções norma que definimos em $\mathbf{R}^3$ (ver n.º 5) conduzem à mesma topologia. Exprime-se este facto dizendo que são *normas topologicamente equivalentes*. Pelo contrário, demonstra-se que as normas definidas no espaço C_I, das funções contínuas num intervalo limitado e fechado I, não são topologicamente equivalentes, isto é, dão lugar a 3 topologias distintas.

Daqui por diante, salvo indicação em contrário, chamaremos vizinhanças de um ponto c num espaço topológico a todos os conjuntos a que c é interior, e *vizinhanças fundamentais de c* às do sistema fundamental adoptado.

Convém ainda registar o seguinte facto: *em todo o espaço métrico E pode tomar-se para sistema fundamental de vizinhanças de cada ponto c uma família numerável de conjuntos*. Basta tomar, por exemplo, para vizinhanças fundamentais de cada ponto c, as esferas de centro c e raios $1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots$.

Quando, *num espaço topológico E, se verifica esta circunstância, diz-se que o espaço satisfaz ao primeiro axioma da numerabilidade.* Por exemplo, o espaço F_I atrás considerado, com a topologia introduzida pelas vizinhanças (X, δ) não verifica o 1.º axioma da numerabilidade, porque a totalidade dos sub-conjuntos finitos X de I tem a potência do contínuo, e é fácil ver que este sistema não pode ser substituído por outro com a potência do numerável. Daqui resulta, em particular, que *o espaço topológico C_I não é metrizável,* como já tínhamos afirmado.

13. Filtros e bases de filtro

Os sistemas de vizinhanças dos pontos num espaço topológico sugeriram uma noção de Teoria dos Conjuntos muito útil em Topologia: a noção de filtro, devida ao matemático francês contemporâneo HENRI CARTAN.

Chama-se filtro sobre um conjunto E todo o conjunto F de sub-conjuntos de E que verifique as seguintes condições:

1) *Todo o conjunto que contém um conjunto de F pertence a F.*
2) *Toda a intersecção de conjuntos de F em número finito também pertence a F.*
3) *O conjunto vazio não pertence a F.*

Imediatamente se reconhece que, se E for um espaço topológico, o sistema total de vizinhanças $\mathscr{V}_c$ de um ponto c de E é um filtro *sobre E.*

Mas já um sistema fundamental de vizinhanças de c que não seja total (por exemplo, o sistema dos conjuntos abertos a que pertence c) não é um filtro, visto que nem todo o conjunto que contenha um conjunto do sistema pertence a este.

Diz-se que uma classe $\mathscr{B}$ de sub-conjuntos de E é uma base de filtro sobre E, quando os conjuntos de $\mathscr{B}$, juntamente com todos os sub-conjuntos de E que os contêm, formam um filtro sobre E.

É fácil reconhecer o seguinte facto:

Para que um conjunto $\mathscr{B}$ de partes de E seja uma base de filtro sobre E é necessário e suficiente que $\mathscr{B}$ possua as duas seguintes propriedades:

I) *A intersecção de dois quaisquer conjuntos de $\mathscr{B}$ contém, pelo menos, um conjunto de $\mathscr{B}$.*

II) *A classe $\mathscr{B}$ não é vazia e o conjunto vazio não pertence a $\mathscr{B}$.*

Podemos, agora, reconhecer que todo o sistema fundamental de vizinhanças dum ponto c num espaço topológico é uma base de filtro: a base do filtro das vizinhanças de c.

Outro exemplo. Consideremos uma sucessão qualquer a_n de elementos de E e, para cada número natural p, designemos por A_p *o conjunto de todos os elementos* a_n *da sucessão tais que* $n \geq p$. Então, é manifesto que os conjuntos A_n, para $n = 1, 2, \ldots$, formam uma base de filtro sobre E. O filtro correspondente, que desempenha um papel importante em Análise, é chamado *filtro de Fréchet* associado à sucessão a_n.

14. Noção de sub-espaço topológico

Seja E um espaço topológico qualquer. Todo o conjunto M de pontos de E será, ele mesmo, um espaço topológico, se dissermos, como é natural, que um ponto c de M é aderente a um conjunto $A \subset M$, quando c é aderente a A em E. Deste modo, a *aderência de A em M* será a intersecção com M da *aderência* de A em E, isto é:

$$\text{ader}\, A \ (\text{em}\ M) = M \cap \text{ader}\, A \ (\text{em}\ E).$$

Facilmente se reconhece que a noção de aderência assim definida em M verifica as condições F 1) a F 4) (n.º 11), para que M seja, de facto, um espaço topológico. A topologia assim definida diz-se *induzida em M pelo espaço E,* e o conjunto M munido dessa topologia diz-se um *sub-espaço topológico de E.*

Nestas condições, é evidente que *os conjuntos fechados em M são as intersecções com M dos conjuntos fechados em E.* Daqui se deduz, por sua vez, que os *conjuntos abertos em M são as intersecções com M dos conjuntos abertos em E.*

Em particular, vemos, deste modo, que, para vizinhanças fundamentais de cada ponto de M se podem tomar as intersecções com M das vizinhanças fundamentais do mesmo ponto em E.

Exemplo – Suponhamos que E é o plano com a sua topologia usual e M uma recta qualquer do plano. É fácil ver que a topologia induzida na recta pelo plano é a topologia usual da recta. (Tomando para vizinhanças de um ponto no plano os círculos abertos com centro nesse ponto, as vizinhanças de um ponto na recta serão os intervalos abertos com centro nesse ponto).

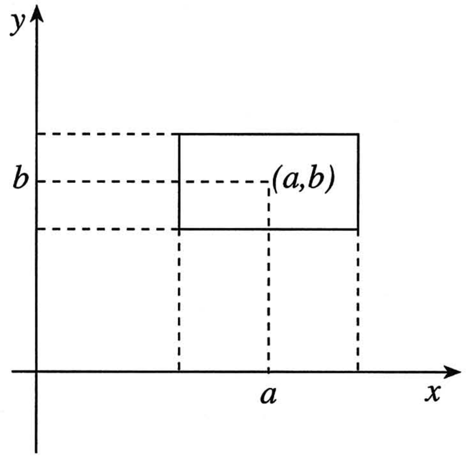
Mas é preciso notar que *as noções topológicas relativas a M nem sempre coincidem com as noções topológicas relativas a E.* Assim, no exemplo anterior, os conjuntos abertos na recta não são abertos no plano e um ponto interior a um conjunto de pontos da recta *nunca* é interior a esse conjunto segundo a topologia do plano.

Outro exemplo. Seja E o espaço **R** dos números reais e M o conjunto **Q** dos números racionais.

O espaço **R** induz em **Q** a topologia que deriva da métrica usual $d(x, y) = |x-y|$, com $x, y \in \mathbf{Q}$. Consideremos em **Q** o conjunto X dos números racionais x tais que $2 < x^2 < 3$. Em **R** o conjunto X é formado pelos números racionais do intervalo $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, que não é, portanto, aberto nem fechado. *Pelo contrário, em* **Q** *o conjunto X é aberto e fechado ao mesmo tempo: é um intervalo aberto de números racionais que não tem pontos fronteiros,* pois que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são irracionais.

15. Produto topológico

Dados dois conjuntos E e F já sabemos que se chama *produto cartesiano* de E por F, e se representa por $E \times F$, o conjunto de todos os possíveis pares ordenados (x, y) em que $x \in E$ e $y \in F$. *Se E e F são espaços topológicos, podemos definir em* $E \times F$ *uma topologia, tomando para vizinhanças fundamentais de cada ponto* (x, y) *de* $E \times F$ *os conjuntos do tipo* $U \times V$ *em que U é uma qualquer vizinhança fundamental de x e V uma qualquer vizinhança fundamental de y. Então, o conjunto* $E \times F$*, munido desta topologia, é um espaço topológico, que se diz o produto topológico de E por F.*



Por exemplo, se E e F coincidem com o espaço $\mathbf{R}$ dos números reais, tomando para vizinhanças fundamentais de cada ponto $a \in \mathbf{R}$ os intervalos de centro a, as vizinhanças fundamentais de cada ponto (a, b) do produto topológico $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ serão os rectângulos de centro (a, b) e lados paralelos aos eixos coordenados, os quais, como é fácil ver, introduzem no plano numérico $\mathbf{R}^2$ a topologia usual metrizável.

Consideremos agora, mais geralmente, n conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$. O produto cartesiano $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, que também se designa por

$$\prod_{i=1}^{n} E_i ,$$

é o conjunto de todos os sistemas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, em que $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$, são espaços topológicos, introduz-se no seu produto cartesiano uma topologia, tomando para vizinhanças fundamentais de cada ponto $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ os conjuntos do tipo $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$, em que $V_1, V_2, \ldots, V_n$, são vizinhanças fundamentais arbitrárias de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivamente. Munido desta topologia, o conjunto ΠE_i diz-se *produto topológico dos espaços* E_i. Por exemplo, o espaço $\mathbf{R}^n$, com a sua topologia usual, coincide com o produto topológico $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ (n vezes); analogamente para $\mathbf{C}^n$.

Mais geralmente ainda, seja J um conjunto qualquer, finito ou infinito, e suponhamos que, a cada elemento i de J, se faz corresponder um conjunto E_i. Teremos, assim, definido um *sistema* ou *família* (E_i) de conjuntos, dependentes do índice i variável em J. Posto isto, chama-se *produto cartesiano* deste sistema de conjuntos, e designa-se por

$$\prod_{i \in J} E_i ,$$

o conjunto de todos os sistemas (x_i) que se podem obter, fazendo corresponder a cada $i \in J$ um elemento x_i de E_i.

Suponhamos, além disso, que os E_i são espaços topológicos e tomemos para vizinhanças fundamentais de cada elemento (a_i) do produto dos E_i todos os conjuntos V que se podem obter do seguinte modo: escolhe-se um número finito qualquer de elementos i_1, i_2,

…, i_p de J e de vizinhanças V_{i_1}, V_{i_2}, …, V_{i_p}, respectivamente, dos pontos a_{i_1}, a_{i_2}, …, a_{i_p}, nos espaços E_{i_1}, E_{i_2}, …, E_{i_p}; então, V será formado por todos os elementos (x_i) do produto cartesiano tais que $x_{i_1} \in V_{i_1}$, …, $x_{i_p} \in V_{i_p}$, sendo as restantes coordenadas arbitrárias. Deste modo, é fácil ver que o produto cartesiano

$$\prod_{i \in J} E_i$$

fica a ser um espaço topológico, dito, então, o *produto topológico* dos espaços E_i.

Exemplos – 1) Se J é o conjunto dos números 1, 2, …, n, recaímos no caso do produto $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ de espaços em número finito.

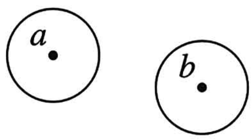
2) Se J é o conjunto $\mathbf{N}$ de todos os números naturais, e se os espaços E_i coincidem todos com $\mathbf{R}$, obtém-se o espaço topológico $\mathbf{R}^\infty$ das sucessões de números reais, como produto topológico de uma infinidade numerável de rectas. Analogamente para $\mathbf{C}^\infty$.

3) Se J é um intervalo I de $\mathbf{R}$ e todos os espaços E_i coincidem com $\mathbf{C}$, o produto topológico dos E_i é o espaço F_I das funções complexas f definidas em I (a cada $x \in I$ associa-se um elemento $f(x) \in \mathbf{C}$), munido da topologia a que já nos referimos no início do n.º 11.

16. Espaços separados

Dizemos que um *espaço topológico E* é um *espaço separado* ou que é um *espaço de Hausdorff,* quando verifica a seguinte

CONDIÇÃO DE SEPARAÇÃO DE HAUSDORFF: *Para cada par de pontos distintos a e b de E, existem, pelo menos, duas vizinhanças, uma de a e outra de b, que são disjuntas.*



De acordo com esta definição, é fácil ver que:

I) *Todo o espaço topológico metrizável é separado.*

Com efeito, sejam a e b dois pontos de um espaço métrico E tais que $a \neq b$, e designemos por δ a sua distância. *Por ser* $a \neq b$, *será* $\delta > 0$, *em virtude do axioma* D* 3) (ver n.º 6) *e, portanto, também* $\delta/2 > 0$. Designemos, então, por U e V as bolas abertas de centro em a e b, respectivamente, e de raio ε tal que

$$0 < \varepsilon \leq \delta/2;$$

digo que U e V são disjuntos. Na verdade, se existisse um ponto c comum a U e V, seria

$$d(c, a) < \varepsilon \leq \delta/2, \quad d(c, b) < \varepsilon \leq \delta/2$$

e portanto

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < \delta,$$

o que contradiz a hipótese $d(a, b) = \delta$.

Pelo contrário, se a topologia de E provém de uma função desvio que não verifique D* 3), o espaço E já não é separado. Com efeito, haverá, então, em E, pelo menos, dois pontos a, b distintos tais que $d(a, b) = 0$ e assim b pertencerá a toda a vizinhança de a; a aderência do conjunto $\{a\}$ será, então, formada por todos os pontos x tais que $d(a, x) = 0$.

II) *Num espaço separado todo o conjunto formado de um só ponto é fechado.*

É preciso não confundir *espaço separado* com *espaço separável.* Diz-se que um *espaço E é separável, quando existe, pelo menos, um conjunto denso em E, com a potência do numerável.* (*Diz-se que uma parte X dum conjunto A é densa em A, quando* $\overline{X} = A$). Por exemplo, *o espaço* $\mathbf{R}^n$ *é separável* (qualquer que seja n), visto que, por exemplo, o conjunto dos pontos de coordenadas racionais é denso em $\mathbf{R}^n$ e tem a potência do numerável.

17. Noção de limite de uma sucessão

É esta uma das noções topológicas mais importantes em Análise.

Diz-se que uma sucessão de pontos $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$, *de um espaço topológico E tem por limite um ponto a de E (tende para a ou converge para a), e escreve-se* $x_n \to a$ *ou* $\lim x_n = a$, *quando, para cada vizinhança V de a, existe um número natural p, tal que se tem* $x_n \in V$ *para todo o* $n > p$.

Uma sucessão de pontos de E diz-se convergente (em E), quando tende para um ponto de E.

Algumas propriedades gerais relativas a limites de sucessões são extensivas a espaços topológicos.

Assim:

I) *Se todos os termos da sucessão* x_n *coincidem com o ponto a, então* $\lim x_n = a$.

II) *Se* $x_n \to a$, *toda a subsucessão infinita de* x_n *tende para a.*

Porém, se o espaço for *separado* ainda será verdadeira a propriedade:

III) *Uma mesma sucessão não pode tender para dois pontos distintos.*

Demonstração. Suponhamos o espaço E separado e que existe uma sucessão x_n que tende ao mesmo tempo para dois pontos a, b de E, sendo $a \neq b$. Como, por hipótese, o espaço é separado, haverá, pelo menos, duas vizinhanças U e V, respectivamente, de a e b, sem nenhum ponto comum. Por outro lado, como $x_n \to a$ e $x_n \to b$, haverá uma ordem p depois da qual $x_n \in U$ e uma ordem q depois da qual $x_n \in V$. Designemos por r o maior dos números p, q; então, todos os termos da sucessão, depois da ordem r, deveriam estar em U e V, o que é impossível, visto U e V serem conjuntos disjuntos (q.e.d.).

Se o espaço E é metrizável, a noção de limite de sucessão pode ser dada em termos de distância. Diz-se que $x_n \to a$ *quando* $d(x_n, a) \to 0$.

Note-se que, *se E verifica o 1.º axioma da numerabilidade,* o conceito de ponto aderente pode ser definido em termos de limite duma sucessão (admitindo o axioma de Zermelo):

Dizer que um ponto a de E é aderente a um conjunto $X \subset E$ equivale a dizer que existe, pelo menos, uma sucessão de pontos de X que tem por limite a.

É fácil também reconhecer o seguinte:

Se o espaço E é o produto topológico de vários espaços E_i (em número finito ou infinito), a condição necessária e suficiente para que uma sucessão de pontos x_m de E tenda para um ponto a de E é que cada uma das coordenadas de x_m tenda para a coordenada correspondente de a.

Este critério aplica-se, em particular, aos espaços $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$.

Tipos de convergência no espaço C_I.

No espaço C_I das funções numéricas contínuas sobre um intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$, considerámos 3 normas que conduzem a 3 topologias distintas. Ainda podemos considerar em C_I uma quarta topologia, correspondente às vizinhanças (X, δ), sendo $\delta > 0$ e X um sub-conjunto finito de I, variável (cf. n.º 11).

I) No sentido desta última topologia, uma sucessão f_n de funções de C_I converge para uma função $g \in C_I$, quando se tem

$$\lim f_n(x) = g(x) \quad (\forall x \in I),$$

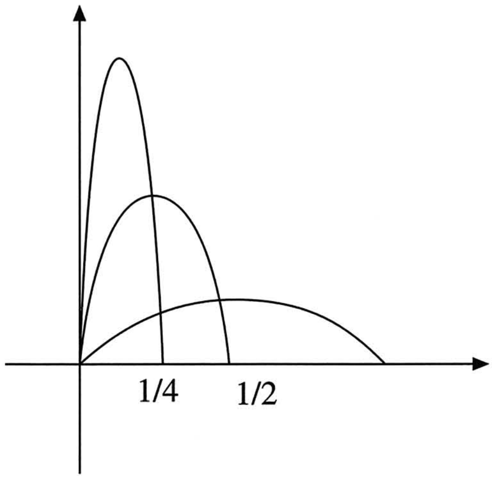
isto é, quando o valor $f_n(x)$ de f_n em cada ponto x de I tende para o valor $g(x)$ de g no mesmo ponto. Diz-se, então, que f_n *tende simplesmente* (ou *pontualmente*) para g.

II) No sentido da norma $\|f\| = \max\limits_{x \in I} |f(x)|$, a sucessão f_n converge para g, quando

$$\lim \left(\max_{x \in I} |f_n(x) - g(x)|\right) = 0 .$$

Diz-se, então, que f_n *tende uniformemente para g em I.* É fácil ver que, se isto sucede, f_n tende pontualmente para g, mas a recíproca não é verdadeira. Seja, por exemplo,

$$I = [0, 1] \text{ e } f_n(x) = \begin{cases} n^3 x \left(\dfrac{1}{n} - x\right), & \text{para } 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 0 & , \text{ para } \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$



Então, pode reconhecer-se que as funções assim definidas são, de facto, contínuas em I e que a sucessão f_n tende pontualmente para a função nula em I; mas esta sucessão não é uniformemente convergente em I. Basta notar que o seu máximo em I tende para ∞.

III) No sentido da norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

a sucessão f_n tende para g quando

$$\lim \int_a^b |f_n(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Diz-se, neste caso, que f_n *tende em média para g em I*. Pode f_n tender pontualmente para g sem tender em média (exemplo anterior). Mas é sabido que *se f_n tende uniformemente para g em I, f_n tende em média para g*. Todavia, a recíproca não é verdadeira: *pode mesmo tender em média, sem tender pontualmente,* como se pode ver por exemplos muito simples.

IV) No sentido da norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}\,,$$

a sucessão f_n tende para g, quando

$$\|f_n - g\|_2 \to 0.$$

Neste caso, diz-se que f_n *tende em média quadrática para g em I.* Este tipo de convergência tem particular importância em Matemática Aplicada, nomeadamente em Mecânica Quântica.

18. Limite dum filtro

Consideremos um espaço topológico E e um filtro ou mesmo uma base de filtro X sobre E. *Diz-se que X converge para um ponto a de E, e escreve-se* $a = \lim X$, *quando, para toda a vizinhança V de a, existe, pelo menos, um conjunto Y de X contido em V.*

Seja, por exemplo, E o espaço $\mathbf{R}^3$ e X a classe de sub-conjuntos de $\mathbf{R}^3$ formada por uma sucessão de cubos, cada um dos quais contém o seguinte e cujo diâmetro tende para zero. Imediatamente se reconhece que X é uma base de filtro que converge para um ponto de $\mathbf{R}^3$, contido em todos os cubos de X.

A noção de limite de uma sucessão x_n é um caso particular da noção de limite dum filtro. Com efeito, se considerarmos a base de filtro $\{X_n\}$, em que, para cada n, X_n é o conjunto de todos os termos da sucessão de ordem $\geq n$, dizer que x_n tende para a equivale a dizer que, para cada vizinhança V de a, existe, pelo menos, um conjunto $X_n \subset V$, e *que, portanto, o filtro de Fréchet da sucessão converge para a.*

Mais geralmente, *diz-se que um ponto a de E é aderente à base de filtro X, quando é aderente a todos os conjuntos de X.* Por exemplo, se X é uma base de filtro formada por cubos em $\mathbf{R}^3$ (ou por conjuntos fechados quaisquer), os pontos aderentes a X são os pontos da intersecção de todos os conjuntos de X.

Um ponto a de E diz-se aderente a uma sucessão de pontos x_n *de E, quando é aderente ao filtro de Fréchet associado à sucessão. Os pontos aderentes à sucessão* x_n *são os pontos limites das sucessões convergentes que dela se podem extrair;* em particular, se $E = \mathbf{R}$, o extremo superior (resp. inferior) do conjunto dos pontos aderentes a x_n é o limite máximo (resp. mínimo) da sucessão.

19. Limite duma função. Funções contínuas

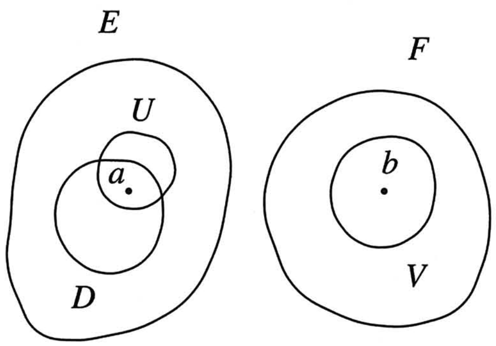
Sejam E e F dois espaços topológicos e D um sub-conjunto qualquer de E. Consideremos uma aplicação f de D em F; será, pois, f uma função de domínio D e com os valores em F. Nestas condições:

DEFINIÇÃO 19.1. *Sendo a um ponto de E e b um ponto de F, diz-se que a função f tem por limite b quando $x \to a$, e escreve-se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

quando, para toda a vizinhança V de b, existe uma vizinhança U de a tal que $f(x) \in V$, quando $x \in U$, com $x \in D$ e $x \neq a$.

Esta definição só terá interesse prático quando a for ponto de acumulação de D. Mas convém não impor esta restrição, para facilitar a definição de função contínua(1).



NOTA IMPORTANTE. *A* DEFINIÇÃO 19.1 *pode ser formulada de modo um pouco diverso (mas equivalente), considerando unicamente vizinhanças U e V fundamentais; por exemplo, bolas abertas, no caso em que E e F são espaços métricos.*

Neste último caso, a definição de limite de uma função pode mesmo ser dada directamente em termos de distância:

---

(1) A definição de limite duma função segundo BOURBAKI é um pouco diferente desta, não exigindo a condição $x \neq a$. Porém, num estudo inicial da topologia, é preferível a definição aqui adoptada, para evitar certas confusões.

Diz-se que $f(x) \to b$ quando $x \to a$, se, para todo o $\delta > 0$, existe um correspondente $\varepsilon > 0$, de tal modo que se tenha

$$d(f(x), b) < \delta,$$

quando $d(x, a) < \varepsilon$, com $x \in D$ e $x \neq a$.

Em particular, se $E = \mathbf{R}^m$ e $F = \mathbf{R}^n$, com m e n quaisquer, a função $y = f(x)$ definida em D equivale a um sistema de n funções reais de m variáveis reais todas definidas em D:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Neste caso, a condição necessária e suficiente para que

$$\lim_{x \to a} y = b,$$

é que cada coordenada de y tenda para a coordenada homóloga de b, quando $x \to a$.

Tornando ao caso geral:

DEFINIÇÃO 19.2. *Diz-se que a função f é contínua no ponto a, quando verifica as duas seguintes condições*:

1) *O ponto a pertence ao domínio de existência de f*;

2) *A função f tem limite quando $x \to a$ e esse limite é precisamente $f(a)$, isto é,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

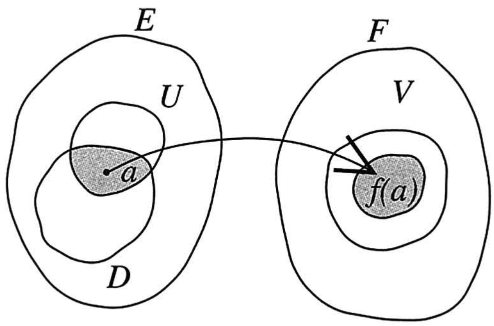
É claro que esta definição de continuidade pode ser dada directamente em termos de vizinhança, tal como se segue:

Diz-se que f é contínua em a, quando, para cada vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que:

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in V.$$

Esta implicação pode ainda escrever-se mais sucintamente sob a forma

$$f(U \cap D) \subset V.$$



É claro que podemos aqui limitar-nos a vizinhanças fundamentais (ver NOTA anterior).

A partir da definição, facilmente se reconhece que:

PROPOSIÇÃO 19.1. *Se a função f é contínua em a, toda a sucessão de pontos de D convergente para a é transformada por f numa sucessão de pontos de F convergente para $f(a)$; isto é, em símbolos:*

$$a = \lim x_n \Rightarrow f(a) = \lim f(x_n), \text{ com } x_n \underset{n}{\in} D^{(1)}.$$

Assim, as funções contínuas respeitam a noção de limite de uma sucessão. A recíproca desta proposição pode enunciar-se do seguinte modo:

Se toda a sucessão de pontos de D convergente para a é transformada por f numa sucessão de pontos de F, convergente para $f(a)$, a função f é contínua em a.

Porém, esta proposição recíproca em geral não é verdadeira, mas demonstra-se, admitindo o axioma de Zermelo, que é válida quando E for um *espaço metrizável* ou, mais geralmente, um espaço que verifique o 1.° *axioma de numerabilidade*. Todavia, *a situação muda de aspecto,* se *substituirmos o conceito de "limite duma sucessão" pelo de "limite dum filtro"* (como se pode verificar facilmente), ou ainda pelo conceito de ponto aderente, como resulta da seguinte

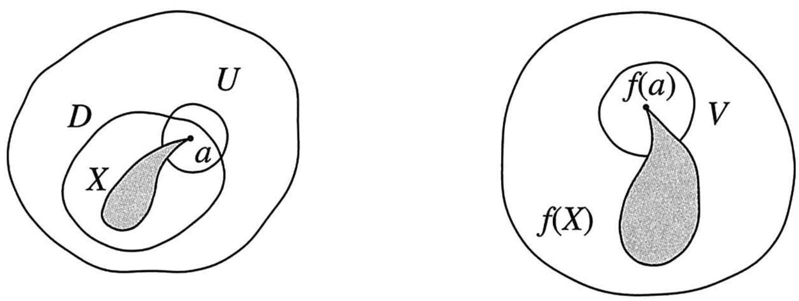
(1) Esta última expressão lê-se: x_n *pertencente a D qualquer que seja n. Uma variável sob sinal de relação indica quantificador universal.*

PROPOSIÇÃO 19.2. *Condição necessária e suficiente para que f seja contínua em a, é que todo o conjunto de pontos de D a que a é aderente, seja transformado por f num conjunto de pontos a que $f(a)$ é aderente; isto é, em símbolos:*

$$a \in \text{ader}\, X \Rightarrow f(a) \in \text{ader}\, f(X) \qquad (\forall X \subset D).$$

Vamos demonstrar que a condição é necessária:

Suponhamos que a função é contínua em a e seja X um conjunto de pontos de D a que a é aderente. Queremos provar que $f(a)$ é aderente a $f(X)$.



Seja, então, V uma vizinhança qualquer de $f(a)$. Como, por hipótese, f é contínua em a, existe uma vizinhança U de a, tal que todo o ponto de U situado em D é transformado por f num ponto de V. Por outro lado, como a é aderente a X (por hipótese), na vizinhança U de a existe, pelo menos, um ponto c de X, e este, portanto, é transformado num ponto $f(c)$ de $f(X)$ pertencente a V. Assim, em cada vizinhança V de $f(a)$, existe, pelo menos, um ponto de V; ora, isto significa que $f(a)$ é aderente a $f(X)$.

A demonstração de que a condição é suficiente pode fazer-se por redução ao absurdo, e deixa-se ao cuidado do leitor.

Assim, as funções contínuas respeitam a noção de ponto aderente, mas é fácil ver, com um exemplo simples, que não respeitam necessariamente a noção de ponto interior:

Seja a função de x definida no campo real por $y = x^2$. Esta função transforma o conjunto $[-1, 1]$ no conjunto $[0, 1]$; mas o ponto 0 que é interior ao primeiro é transformado no mesmo ponto 0, que *não* é interior ao segundo.

Demonstra-se, porém, o seguinte facto:

PROPOSIÇÃO 19.3. *Seja f uma aplicação de E em F. Condição necessária e suficiente para que f seja contínua num ponto $a \in E$, é que todo o conjunto $Y \subset F$ a que $f(a)$ é interior, tenha como imagem inversa $f^{-1}(Y)$ um conjunto a que a é interior.*

Demonstração. a) A condição é necessária. Com efeito, suponhamos f contínua em a e seja Y um conjunto qualquer de pontos de F, a que $f(a)$ é interior. Como é sabido, chama-se imagem inversa de Y por f, e representa-se por $f^{-1}(Y)$, o conjunto de *todos* os pontos x de E cujas imagens $f(x)$ estão em Y. Mas dizer que $f(a)$ é interior a Y equivale a dizer que *Y é uma vizinhança de $f(a)$* (ver n.º 12). Logo, como f é contínua em a, existe uma vizinhança U de a tal que

$$f(U) \subset Y$$

e, portanto, $U \subset f^{-1}(Y)$, o que significa que a é interior a $f^{-1}(Y)$.

b) A condição é suficiente. Com efeito, a condição implica que, para cada vizinhança V de $f(a)$, exista uma vizinhança U de a tal que $f(U) = V$, sendo essa vizinhança precisamente $f^{-1}(V)$ (q.e.d.).

NOTA. No enunciado da proposição suposemos $D = E$. Mas isto não restringe a generalidade da proposição, pois que, se $D \neq E$, basta substituir E pelo sub-espaço topológico D de E.

Em particular, se f é invertível, vê-se que a sua inversa respeita a noção de ponto interior.

Quando a função f é contínua em todos os pontos do seu domínio de existência D, diz-se, simplesmente, que é contínua. Em particular, pode acontecer que seja $D = E$ (f é definido em todo o espaço E); então, dir-se-á que f é uma aplicação contínua de E em F.

Tornando ao caso geral, *seja f uma aplicação do conjunto $D \subset E$ em F, e seja A um sub-conjunto qualquer de D.* Então:

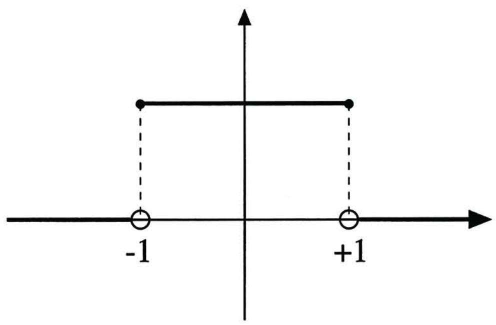
DEFINIÇÃO 19.3. *Diz-se que a função f é contínua sobre A (ou relativamente a A) quando a restrição de f a A é contínua em todos os pontos de A, isto é, quando define uma aplicação contínua do sub-espaço A de E em F.*

É fácil ver que uma função f pode ser contínua sobre um conjunto $A \subset D$, sem ser contínua nalgum ponto de A, ou mesmo em nenhum ponto de A.

Por exemplo, seja a função real de variável real f assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{nos outros pontos de } \mathbf{R}. \end{cases}$$

O domínio de existência desta função é o conjunto **R** dos números reais e o seu gráfico é o indicado na figura.



Como se vê imediatamente, a função é contínua sobre o intervalo $[-1, 1]$ e, contudo, não é contínua nos pontos 1 e -1.

Outros exemplo. Vimos no Capítulo II que a função

$$\log_{(0)} z = \log |z| + i \arg z,$$

definida em todo o conjunto **C**, excepto a origem, é descontínua nos pontos do semi-eixo real positivo, porque aí o coeficiente de i salta bruscamente de valores *próximos* de 2π para 0. Contudo, a sua restrição ao semi-eixo real positivo (excluindo a origem) é contínua em todos os pontos, porque se reduz aí à função logarítmica real definida no campo dos números positivos que, como se sabe, é contínua.

Da PROPOSIÇÃO 19.3, resulta imediatamente que:

PROPOSIÇÃO 19.4. *Para que uma aplicação f de E em F seja contínua, é necessário e suficiente que todo o conjunto aberto A em F, tenha como imagem inversa $f^{-1}(A)$ um conjunto aberto em E.*

NOTA. Daqui, por dualidade, deduz-se imediatamente uma proposição ainda verdadeira, substituindo "aberto" por "fechado".

Aplicando a definição ou as propriedades anteriores, facilmente se reconhece o seguinte facto:

PROPOSIÇÃO 19.5. *Dados três espaços topológicos E, F, G, se f é uma aplicação contínua de E em F e g uma aplicação contínua de F em G, a aplicação composta* $g \circ f$ *(também chamada aplicação "produto* gf*, de g por f") é uma aplicação contínua de E em G. Por outros termos: o produto de duas aplicações contínuas ainda é uma aplicação contínua.*

Deste modo, *o conjunto de todas as aplicações contínuas dum espaço topológico E em si mesmo é um semi-grupo com elemento neutro, visto que a identidade I é, evidentemente, uma aplicação contínua.*

20. Aplicações bicontínuas. Grupo da Topologia

Como vimos, toda a aplicação contínua f, respeita a noção de aderência. Se, além disso, f é invertível, a sua inversa respeita a noção de interior.

Pode, porém, acontecer que uma aplicação biunívoca de E sobre F seja contínua sem que a sua inversa o seja. Por exemplo, vimos no Capítulo II que a função e^z define uma aplicação biunívoca contínua da faixa

$$0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi$$

sobre o plano privado da origem e, contudo, a sua inversa (ramo zero da função logarítmica) não é contínua nos pontos do semi-eixo real positivo.

Pois bem, *diz-se que uma aplicação f de E sobre F é bicontínua quando é biunívoca e quando, além disso, tanto f como a sua inversa, são contínuas. As aplicações bicontínuas também se denominam homeomorfismos ou isomorfismos topológicos.*

Os homeomorfismos estão para os isomorfismos da álgebra assim como as aplicações contínuas estão para os homomorfismos.

Dois conjuntos de pontos de espaços topológicos dizem-se homeomorfos ou topologicamente equivalentes, quando existe, pelo menos, uma aplicação bicontínua de um deles sobre o outro.

Por exemplo, o intervalo $]-1, 1[$ é homeomorfo ao conjunto **R** de todos os números reais. Com efeito, a função

$$y = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

define, como é fácil ver, uma aplicação bicontínua do segundo sobre o primeiro.

Analogamente se reconhece que a circunferência é homeomorfa a qualquer linha fechada simples, mesmo que esta seja uma poligonal; porém, já não é homeomorfa a um segmento de recta ou a uma lemniscata. Por sua vez, no espaço $\mathbf{R}^3$, uma esfera (bola fechada) será homeomorfa a um cubo mas não, por exemplo, a um toro; etc.

Do que ficou atrás estabelecido, resulta que os *homeomorfismos respeitam a noção de aderência e de interior; e, como são aplicações biunívocas, respeitam, necessariamente, qualquer outra noção topológica. Assim, os homeomorfismos respeitam todas as propriedades topológicas.*

Reciprocamente, demonstra-se, por métodos da lógica matemática, que *as propriedades respeitadas por todos os homeomorfismos são propriedades topológicas.*

Da PROPOSIÇÃO 19.5 resulta que *o produto de duas aplicações bicontínuas ainda é bicontínuo.* Como, além disso, a inversa duma aplicação bicontínua ainda é bicontínua (por definição), podemos afirmar que:

O conjunto de todos os homeomorfismos dum espaço topológico sobre si mesmo é um grupo (*relativamente ao produto ou composição*).

Consideremos, por exemplo, o espaço $\mathbf{R}^3$. A cada grupo de aplicações biunívocas de $\mathbf{R}^3$ sobre si mesmo, corresponde uma determinada geometria, constituída pelas propriedades respeitadas pelas aplicações desse grupo. Assim, ao grupo G_m das isometrias corresponde a *geometria métrica* (que estuda as noções métricas em $\mathbf{R}^3$), ao grupo G_s das semelhanças corresponde a *geometria euclidiana*, ao grupo G_a das transformações afins corresponde a *geometria afim,* etc. De modo análogo, ao grupo G_h dos homeomorfismos corresponde a *topologia* (em $\mathbf{R}^3$) e ao grupo G de *todas* as aplicações biunívocas de $\mathbf{R}^3$ sobre si mesmo corresponde a *lógica formal* ou *teoria dos conjuntos* (*em* $\mathbf{R}^3$). Note-se que

$$G_m \subset G_s \subset G_a \subset \cdots \subset G_h \subset G.$$

21. Conjuntos compactos

Seja A um conjunto de pontos dum espaço topológico. Chama-se cobertura de A a toda a família de conjuntos cuja reunião contenha A. A cobertura diz-se aberta, se todos os conjuntos que a formam são abertos.

Recordemos o seguinte teorema fundamental da Análise:

TEOREMA DE BOREL-LEBESGUE. *Seja A um conjunto de pontos, limitado e fechado, de* $\mathbf{R}^n$ (ou de $\mathbf{C}^n$). *Então, qualquer que seja a cobertura aberta de A, é sempre possível escolher um número finito de conjuntos da mesma que forme ainda uma cobertura de A.*

Demonstração. Começaremos por demonstrar este teorema, no caso $n = 1$, pelo método da bissecção de intervalos. Seja A um conjunto de pontos, limitado e fechado, de $\mathbf{R}$, e seja $\mathcal{H}$ uma cobertura aberta de A. *Suponhamos que a tese do teorema não se verifica.* Por ser A limitado, existe, pelo menos, um intervalo $[a, b]$ limitado e fechado, que contém A. Designando por m o ponto médio de $[a, b]$, as intersecções de A com os intervalos $[a, m]$ e $[m, b]$ serão ainda conjuntos limitados e fechados, dos quais $\mathcal{H}$ é cobertura. Então, num desses conjuntos, pelo menos (designemo-lo por A_1), a tese não se verifica, pois que, se ambos fossem cobertos por um número finito de conjuntos de $\mathcal{H}$, o mesmo aconteceria com A. É claro que o diâmetro de A_1 será $\leq (b-a)/2$. Para A_1 podemos, agora, raciocinar como para A; obteremos, assim, um conjunto limitado e fechado $A_2 \subset A_1$, de diâmetro $\leqslant (b-a)/4$, em que não se verifica a tese. Ao fim de m operações deste tipo, obteremos um conjunto limitado e fechado A_m, contido nos anteriores e de diâmetro $\leq (b-a)/2^m$, em que não se verifica a tese.

Mas existe um ponto c comum a todos os conjuntos A_m. Como $\mathcal{H}$ é cobertura aberta de qualquer deles, há, pelo menos, um conjunto $H_c \in \mathcal{H}$, a que c é interior. Quer isto dizer que existe, pelo menos, um $\delta > 0$ tal que a vizinhança (δ) de c está contida em H_c e, como o diâmetro dos conjuntos A_m tende para zero, existe, pelo menos, um m tal que $A_m \subset H_c$. *Assim,* A_m *é coberto por um único conjunto* H_c *da família* $\mathcal{H}$ *e portanto* a tese verifica-se para A_m, contrariamente ao estabelecido. O absurdo resulta de supormos que a tese não se verifica para A (q.e.d.).

Esta demonstração estende-se facilmente ao caso de $\mathbf{R}^n$ com n qualquer, notando que, se A é limitado, existe um intervalo n-dimensional $a_i \leq x_i \leq b_i$ (com $i = 1, \ldots, n$) que contém A, decompondo depois este em 2^n intervalos n dimensionais pelos pontos médios de $[a_i, b_i]$, etc.

Quanto ao espaço $\mathbf{C}^n$, basta lembrar que se identifica a $\mathbf{R}^{2n}$ (q.e.d.).

DEFINIÇÃO 21.1. *Sendo A um conjunto de pontos dum espaço topológico E qualquer, diz-se que A é compacto quando, de toda a cobertura aberta de A, se pode extrair uma cobertura de A formada por um número finito de conjuntos da primeira. Também se diz, neste caso, que A é um compacto de E. Em particular, se A = E, diz-se que o espaço topológico é compacto.*

Com esta definição o TEOREMA DE BOREL-LEBESGUE pode enunciar-se do seguinte modo:

Todo o conjunto limitado e fechado de pontos de $\mathbf{R}^n$ *(ou* $\mathbf{C}^n$*) é compacto.*

É fácil, ainda, demonstrar a proposição recíproca, isto é:

Um conjunto de pontos de $\mathbf{R}^n$ *não será compacto, se não for limitado e fechado.*

Um exemplo: Consideremos em $\mathbf{R}$ o conjunto dos números naturais $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Este conjunto não é limitado, e é fácil ver que não é compacto. Com efeito, se considerarmos, por exemplo, os intervalos abertos de centros nesses pontos e raio 1, é evidente que formam uma cobertura aberta do conjunto, da qual não pode ser extraída nenhuma cobertura finita do mesmo.

Assim, em $\mathbf{R}^n$*, a noção de "compacto" equivale à de "limitado e fechado".* Por este facto, é frequente, na literatura matemática moderna, chamar aos conjuntos limitados e fechados de $\mathbf{R}^n$ *conjuntos compactos,* e dizer "intervalo compacto" em vez de "intervalo limitado e fechado". Porém, *a identidade entre a classe dos conjuntos compactos e a dos limitados e fechados deixa de se verificar nos espaços vectoriais normados de dimensão infinita.* Assim, demonstra-se que, nestes casos, uma bola fechada é um conjunto limitado e fechado, *mas nunca compacto.*

PROPOSIÇÃO 21.1. *Num espaço topológico separado E, todo o conjunto compacto é fechado.*

Demonstração. Seja E um espaço separado e A um sub-conjunto compacto de E. *Suponhamos que A não é fechado*. Então, existe, pelo menos, um ponto c aderente a A que não pertence a A. Por outro lado, sendo E separado, existe para cada ponto a de A uma vizinhança aberta V_a de a, disjunta de uma vizinhança U_a de c. Deste modo, os conjuntos V_a formam uma cobertura aberta de A e, como A é compacto, existirá um número finito de tais conjuntos, $V_{a_1}, V_{a_2}, \ldots, V_{a_p}$, que cobrem ainda A. Então, a intersecção das vizinhanças $U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_p}$, de c, será, ainda, uma vizinhança de c disjunta de todos esses conjuntos e portanto de A. Logo, c não é aderente a A, contrariamente ao que supusemos. O conjunto A é, pois, fechado, necessariamente (q.e.d.).

Mesmo em casos triviais, um conjunto pode ser fechado sem ser compacto (por exemplo, o conjunto dos números inteiros em $\mathbf{R}$). Mas vamos ver que:

PROPOSIÇÃO 21.2. *Todo o sub-conjunto fechado dum conjunto compacto também é compacto.*

Sejam, com efeito, A um compacto, B um sub-conjunto fechado de A e $\mathcal{H}$ uma cobertura aberta de B. É evidente que os conjuntos $\mathcal{H}$ e o complementar de B (que é aberto, visto B ser fechado) formam uma cobertura aberta $\mathcal{H}'$, do conjunto A e, como este é compacto, existe uma cobertura $\mathcal{K}$ de A, formada por um número finito de conjuntos de $\mathcal{H}'$. Se excluirmos de $\mathcal{K}$ o complementar de B (caso $\sim B$ pertença a $\mathcal{K}$), obtemos, manifestamente, uma cobertura de B formada por um número finito de conjuntos de $\mathcal{H}$. Logo, B é compacto.

É ainda fácil ver que:

PROPOSIÇÃO 21.3. *Num espaço topológico qualquer, todo o conjunto finito é compacto.*

DEFINIÇÃO 21.2. *Diz-se que um conjunto A é relativamente compacto, quando a sua aderência é um conjunto compacto.*

Assim, em $\mathbf{R}^n$, *os conjuntos relativamente compactos são os conjuntos limitados* (visto que a aderência dum conjunto limitado é um conjunto limitado e fechado).

Podem ainda demonstrar-se os seguintes factos:

PROPOSIÇÃO 21.4. *Num espaço métrico, todo o conjunto compacto é limitado.*

PROPOSIÇÃO 21.5. *Num espaço métrico, para que um conjunto A seja compacto, é necessário e suficiente que toda a sucessão infinita de pontos de A, contenha, pelo menos, uma subsucessão convergente para um ponto de A* (PROPRIEDADE DE BOLZANO-WEIERSTRASS).

Note-se que esta proposição se generaliza a espaços topológicos quaisquer, substituindo sucessões por filtros e "limite" por "ponto aderente". Assim, pode definir-se "conjunto compacto" deste outro modo (segundo BOURBAKI):

Diz-se que A é compacto, quando todo o filtro sobre A tem, pelo menos, um ponto aderente em A.

22. Funções contínuas sobre compactos

O conceito de conjunto compacto é um dos mais potentes recursos da Análise, como resulta dos importantes teoremas que vamos estabelecer.

TEOREMA 22.1. *Toda a função contínua transforma conjuntos compactos em conjuntos compactos.*

Demonstração. Sejam E e F dois espaços topológicos quaisquer, f uma aplicação contínua de E em F e C um compacto de E. Vamos provar que $f(C)$ é um compacto de F. Consideremos uma cobertura aberta $\mathcal{H}$ de $f(C)$. Como todo o conjunto $H \in \mathcal{H}$ é aberto, a sua imagem inversa por f também será um conjunto aberto (PROPOSIÇÃO 19.4) e é evidente que os conjuntos $f^{-1}(H)$ assim obtidos formam uma cobertura de C. Mas, como C é compacto, existirá um número finito de tais conjuntos,

$$f^{-1}(H_1),\ f^{-1}(H_2),\ \ldots,\ f^{-1}(H_n),$$

que ainda cobrem C. Logo os conjuntos $H_1, H_2, \ldots, H_n$, pertencentes a $\mathcal{H}$, cobrem $f(C)$, o que prova o teorema.

Pelas PROPOSIÇÕES 21.1 e 21.4, deduz-se, logo, do teorema que:

COROLÁRIO 1. *Se F é um espaço métrico, toda a aplicação contínua de E em F transforma conjuntos compactos em conjuntos limitados e fechados.*

Em particular, F pode ser o espaço $\mathbf{R}$ dos números reais. Então, a imagem dum compacto C de E por uma aplicação contínua f será um conjunto limitado e fechado em $\mathbf{R}$, e contém, portanto, os seus extremos superior e inferior (máximo e mínimo da função f no conjunto C).

Assim, em conclusão:

COROLÁRIO 2. *Toda a função real contínua sobre um compacto tem nesse conjunto um máximo e um mínimo (finitos).*

Vemos, assim, que o TEOREMA 22.1 é uma extensão, aos espaços topológicos mais gerais, do TEOREMA DE WEIERSTRASS relativo a funções contínuas.

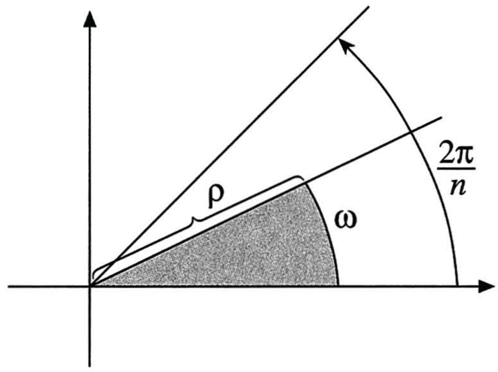
COROLÁRIO 3. *Toda a aplicação biunívoca contínua dum espaço compacto num espaço separado é bicontínua.*

Com efeito, sendo E compacto, todo o conjunto fechado de pontos de E também é compacto (PROPOSIÇÃO 21.2) e a sua imagem por f será um conjunto compacto em F, logo fechado (PROPOSIÇÃO 21.1). Assim, a função f transforma sub-conjuntos fechados de E em sub-conjuntos fechados de E. Ora, sendo f biunívoca, isto equivale a dizer que as imagens inversas, por f^{-1}, dos sub-conjuntos fechados de E são sub-conjuntos fechados de F. Logo, a função f^{-1} é contínua (ver PROPOSIÇÃO 19.4 e respectiva NOTA).

Exemplo – Podemos aplicar este corolário para demonstrar que os ramos uniformes das funções $\sqrt[n]{z}$ e $\log z$ atrás considerados são funções contínuas em todo o ponto z não situado no semi-eixo real positivo. Seja, por exemplo, a função $z = w^n$ de w, sendo n um número natural qualquer, e consideremos o sector circular definido pelas relações:

$$0 \leq \arg w \leq \varphi \quad \left(\text{com } 0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}\right),$$

$|w| \leq \rho$ (com ρ positivo qualquer).



Este sector circular é transformado, pela referida função, no sector definido por

$$0 \leq \arg z \leq n\varphi, \quad 0 \leq |z| \leq \rho^n,$$

e já sabemos que a função $z = w^n$, de w, define uma aplicação biunívoca e contínua do primeiro sector sobre o segundo. Mas o primeiro sector, como sub-espaço topológico de **C**, é compacto, visto ser limitado e fechado; o segundo é separado, visto ser um espaço métrico; logo, a aplicação inversa é contínua, segundo o corolário. Isto mostra que o ramo zero da função $\sqrt[n]{z}$ é uma função contínua em qualquer ponto $z = r\,e^{i\omega}$ não situado no semi-eixo real positivo, pois que, neste caso, podemos sempre escolher ρ e φ de modo que o ponto z fique interior ao segundo sector ($r < \rho^n$, $0 \leq \omega < n\varphi$).

23. Continuidade uniforme em espaços métricos

Sejam E e F dois espaços métricos quaisquer e f uma aplicação de um sub-conjunto D de E em F. A função f diz-se uniformemente contínua sobre um conjunto $A \subset D$, *quando, para cada* $\delta > 0$, *existe* *um correspondente* $\varepsilon > 0$ *tal que se tenha* $d(f(x), f(x')) < \delta$, *sempre que* $d(x, x') < \varepsilon$, *com* $x, x' \in A$. Em símbolos da lógica matemática, a continuidade uniforme de f sobre A pode exprimir-se do seguinte modo:

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \forall x, x' \in A \wedge d(x, x') < \varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \delta.$$

Note-se que, segundo esta definição, o número ε *depende unicamente de* δ *e não do par de pontos* x, x'.

É óbvio que, se f é uniformemente contínua sobre A, também é contínua sobre A, mas a recíproca não é verdadeira. Com efeito, segundo a DEFINIÇÃO 19.3, diz-se que f é contínua sobre A, quando a restrição de f a este conjunto é contínua em cada ponto x' de A, o que se traduz por uma condição análoga à anterior, mas em que ε depende não só de δ como também de cada ponto x' considerado. Todavia, demonstra-se o seguinte teorema:

TEOREMA DA CONTINUIDADE UNIFORME. *Se a função* f *é contínua sobre um sub-conjunto compacto* A *de* E, *também é uniformemente contínua sobre* A.

Demonstração. Suponhamos verificada a hipótese e seja δ um número positivo arbitrário. Então, $\delta/2$ também será um número positivo e assim, para cada ponto c de A, podemos fixar um número positivo $\rho(c)$ tal que se tenha:

$$(1) \qquad d(f(x), f(c)) < \frac{\delta}{2}, \text{ quando } d(x, c) < \rho(c),$$

com $x \in A$, visto f ser contínua sobre A (por hipótese).

Designemos por S_c a bola aberta de centro c e raio $\rho(c)/2$. Assim, a cada ponto c de A, fica a corresponder um conjunto aberto S_c, e tais conjuntos formam, portanto, uma cobertura aberta de A. *Então, como* A *é compacto podemos escolher um número finito das referidas bolas* $S_{c_1}, S_{c_2}, \ldots S_{c_p}$, *que ainda formem uma cobertura de* A *e, como estas são em número finito, haverá, pelo menos, uma que tem raio mínimo* (está aqui a ideia essencial da demonstração). Designando por ε o menor desses raios, ter-se-á, portanto:

$$(2) \qquad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}\rho(c_i), \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, p.$$

Sejam, agora, x, x', dois pontos de A tais que $d(x, x') < \varepsilon$. Então, x pertencerá a uma, pelo menos, das bolas escolhidas: seja essa bola S_{c_i}. Assim:

$$d(x, c_i) < \frac{1}{2}\rho(c_i)$$

e portanto

$$d(x', c_i) \leq d(x', x) + d(x, c_i) < \varepsilon + \frac{1}{2}\rho(c_i).$$

Então, em virtude de (2), virá $d(x', c_i) < \rho(c_i)$ e, como

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(c_i)) + d(f(x'), f(c_i)),$$

tem-se, atendendo a (1):

$$d(f(x), f(x')) < \delta.$$

Verifica-se, portanto, esta desigualdade para todo o par de pontos x, x', de A cuja distância seja menor que ε e, como δ é arbitrário, segue-se que a função f é uniformemente contínua sobre A, como queríamos demonstrar.

24. Imersão de um espaço localmente compacto num espaço compacto

Como se vê pelas considerações anteriores, o estudo das funções contínuas simplifica-se consideravelmente quando estas são definidas num espaço compacto. Haveria, portanto, todo o interesse em utilizar, tanto quanto possível, espaços compactos no estudo das funções contínuas.

DEFINIÇÃO 24.1. *Diz-se que um espaço topológico E é localmente compacto quando, para cada ponto p de E, existe, pelo menos, uma vizinhança de p que é um conjunto compacto.*

Por exemplo, o espaço $\mathbf{R}^n$, qualquer que seja n, é localmente compacto, visto que podemos tomar para vizinhanças dos seus pontos bolas fechadas, que são conjuntos limitados e fechados, e, portanto, compactos nesse espaço. Mas prova-se que, *pelo contrário, um espaço vectorial normado de dimensão infinita nunca é localmente compacto.*

Posto isto, demonstra-se em Topologia Geral o seguinte:

TEOREMA DE IMERSÃO. *Para todo o espaço E localmente compacto e não compacto, é possível construir um espaço compacto* $\dot{E}$, *do qual E seja um sub-espaço topológico denso em* $\dot{E}$. *Pode mesmo construir-se* $\dot{E}$ *com a adjunção de um único elemento a* E; *neste caso* $\dot{E}$ *é determinado a menos de um homeomorfismo.*

Assim, por exemplo, o espaço $\mathbf{R}^n$ que, como já sabemos, é localmente compacto, pode ser "mergulhado" num espaço compacto $\dot{\mathbf{R}}_n$, com a adjunção de um novo elemento de natureza qualquer (pode ser o que nós quisermos, excepto um elemento de $\mathbf{R}^n$); esse novo elemento passa a chamar-se *ponto impróprio* ou *ponto do infinito* e a designar-se por ∞. Neste caso, podemos tomar para vizinhanças fundamentais dos pontos de $\mathbf{R}^n$ em $\dot{\mathbf{R}}^n$ ainda as esferas abertas com centro nesses pontos e, para vizinhanças fundamentais do ponto impróprio, por exemplo, os complementares em $\dot{\mathbf{R}}^n$ das esferas fechadas com centro na origem. Mais precisamente, sendo $\delta > 0$, chamaremos vizinhança (δ) do ponto ∞ ao conjunto formado pelo próprio ponto ∞ e por todos os pontos x de $\mathbf{R}^n$ tais que

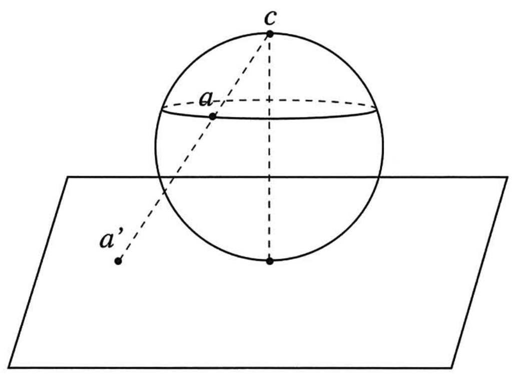
$$|x| > 1/\delta.$$

Note-se, porém, que pode tornar-se compacto um espaço localmente compacto pela adjunção de mais de um elemento impróprio. Por exemplo, a recta $\mathbf{R}$ pode tornar-se compacta pela adjunção de um único ponto impróprio (dando, neste caso, lugar à recta projectiva), mas também pela adjunção de dois pontos impróprios, $+\infty$ e $-\infty$, dando, então, lugar à *recta acabada* (segundo BOURBAKI) que se designa por $\overline{\mathbf{R}}$. Neste último caso, podemos tomar para vizinhanças fundamentais de $+\infty$ os intervalos da forma $]a, +\infty]$ e, para $-\infty$, os intervalos $[-\infty, a[$.

Por sua vez, o plano $\mathbf{R}^2$ pode tornar-se compacto não só pela adjunção de um único ponto impróprio, mas, ainda, pela adjunção dos pontos impróprios das suas rectas, considerando como idênticos ou distintos os pontos impróprios de duas rectas, conforme estas são paralelas ou não. Neste caso, obtém-se o plano projectivo, em que o conjunto dos pontos impróprios (identificáveis às direcções das rectas) se chama *recta imprópria* ou *recta do infinito*. Mas ainda poderíamos tomar para pontos impróprios do plano os pontos impróprios das suas rectas acabadas, com uma convenção análoga à anterior, e assim obteríamos um novo espaço compacto, homeomorfo a um círculo ou a um hemisfério.

No estudo das funções de variável complexa, é costume tornar compacto o espaço $\mathbf{C}$, pela adjunção de um único ponto impróprio. O espaço assim obtido é chamado a *recta projectiva complexa* ou o *plano-esfera* ou ainda a *esfera de Riemann,* por ficar homeomorfo a uma superfície esférica, como vamos indicar.

Consideremos uma superfície esférica qualquer, tangente ao plano da variável complexa, por exemplo, na origem. Designaremos por c o ponto diametralmente oposto ao de tangência. A cada ponto a da superfície esférica distinto de c faremos corresponder a sua



projecção a' sobre o plano a partir de c. Ao ponto c faremos corresponder o ponto impróprio de $\dot{\mathbf{C}}$. Então, pode ver-se, como exercício, que a correspondência biunívoca assim estabelecida entre os pontos da esfera e os do plano é bicontínua, portanto um homeomorfismo. Assim, em particular se reconhece que o plano-esfera é um espaço topológico metrizável, visto que o mesmo sucede com a superfície esférica. Podemos convencionar, então, chamar *distância esférica* de dois pontos de $\dot{\mathbf{C}}$ à distância dos pontos correspondentes sobre a superfície esférica.

É preciso notar, porém, que as noções topológicas relativas ao espaço $\dot{\mathbf{C}}$ nem sempre coincidem com as noções topológicas em **C**. Por exemplo, a sucessão dos números naturais 1, 2, ..., que em **C** é divergente, torna-se convergente em $\dot{\mathbf{C}}$, tendo por limite o ponto impróprio. Aliás, o mesmo sucedia já com a recta real **R**.

Torna-se por isso necessário, numa primeira fase de ensino (principalmente ensino liceal) tomar certas precauções ao introduzir os elementos impróprios ∞, $+\infty$ e $-\infty$. É por essa razão que, mesmo depois de introduzidos estes elementos, se continua a chamar sucessões convergentes *só* às que têm limite finito.

Análogos cuidados é preciso ter quanto aos domínios de existência das funções. Assim, antes de introduzir o ponto impróprio de $\dot{\mathbf{C}}$, a função $1/(z + 1)$ tinha como domínio de existência o conjunto de todos os pontos de **C**, excepto o ponto -1; mas, depois da adjunção do ∞, passa a ter como domínio de existência todo o espaço $\dot{\mathbf{C}}$; mais ainda, *fica a ser uma aplicação biunívoca de* $\dot{\mathbf{C}}$ *sobre* $\dot{\mathbf{C}}$.

NOTA IMPORTANTE. Como se viu, a correspondência entre os pontos a da superfície esférica e os pontos do plano foi estabelecida pela projecção de centro C. Esta transformação geométrica, chamada *projecção estereográfica* e utilizada em cartografia para a representação da superfície do globo terrestre sobre um plano, é uma *inversão* definida em todo o espaço, pois que, como é fácil ver, o produto das distâncias de c aos pontos a e a' é constante. As inversões transformam superfícies esféricas em superfícies esféricas ou planos, circunferências em circunferências ou rectas, etc. Assim, sendo c o Polo Norte do globo S, os paralelos são transformados em circunferências concêntricas e os meridianos em rectas.

Uma outra característica das inversões é a de conservarem os ângulos (*representação conforme*). As inversões geram com as semelhanças um grupo de transformações (do espaço $\mathbf{R}^3$ sobre si mesmo). As propriedades conservadas por essas transformações formam o objecto da chamada *geometria analagmática*.

25. Noção de linha

A noção de linha é também uma noção topológica muito importante. Intuitivamente, é-nos sugerida pelo movimento dos pontos;

assim, na iniciação à geometria elementar, costuma dizer-se que *todo o ponto móvel gera uma linha.* Designando por I o intervalo de tempo em que dura o movimento, a cada instante $t \in I$, fica a corresponder, então, um ponto P, que é a posição do ponto móvel nesse instante. Define-se, deste modo, uma função pontual $P = \varphi(t)$ no intervalo I, ou seja, uma aplicação do intervalo I no espaço $\mathbf{R}^3$. Esta função pontual equivale a um sistema de 3 funções reais,

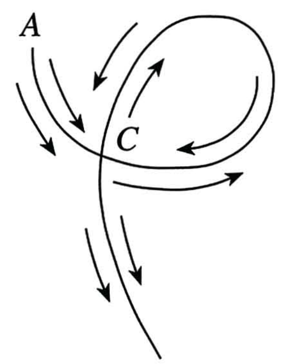
$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t),$$

definidas em I, sendo x, y, z, as coordenadas de P. Mas, para que se trate de um movimento, no sentido da mecânica clássica, é necessário, evidentemente, que a função pontual $P = \varphi(t)$ seja contínua, isto é, que as três funções reais correspondentes sejam contínuas no intervalo I, pois não se concebe, no sentido usual, que um ponto passe bruscamente de uma posição para outra.

Recordemos, a propósito, que, nos primeiros tempos do cinema, a imitação do movimento resultava imperfeita, porque as imagens não eram suficientemente próximas no tempo, o que dava, como efeito, uma sucessão de saltos, em vez da aparente continuidade do movimento.

É pois natural chamar *linha contínua* à trajectória do movimento de um ponto. Geralmente, chama-se *trajectória* ao *conjunto* (ou *lugar geométrico*) das posições do ponto móvel – ou seja ao contradomínio da função $P = \varphi(t)$. Mas esta definição é criticável, quando a linha tem pontos múltiplos.

Seja, por exemplo, a linha da figura, com um ponto duplo C. Podemos imaginar vários movimentos sobre esta linha. Consideremos, por exemplo, um movimento segundo as setas exteriores e outro



segundo as setas interiores. Não parece natural dizer que estes dois movimentos tenham a mesma trajectória, *e, no entanto, o conjunto de pontos é o mesmo*.

Pois bem, diremos que dois movimentos, definidos pelas equações

$$P=\varphi(t) \text{ com } t\in I, \quad Q=\psi(\tau) \text{ com } \tau\in J,$$

têm a mesma trajectória, quando se pode passar de uma equação para a outra por uma mudança de variável $t=\theta(\tau)$, sendo θ uma aplicação bicontínua (portanto, monótona) de J sobre I. Se a função θ é crescente, a trajectória é percorrida no mesmo sentido nos dois movimentos; se θ é decrescente, os movimentos têm sentidos contrários. As funções reais de t e τ que representam estes dois movimentos darão as *equações paramétricas da trajectória* e, assim, teremos uma mesma linha com equações paramétricas ou *parametrizações* diferentes.

Por exemplo, sabemos que as equações paramétricas $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$ representam no plano uma circunferência de centro na origem e raio 1, supondo, por exemplo, que t varia no intervalo $[0, 2\pi]$ ou no intervalo $[-\pi, \pi]$. Se pusermos $u = \operatorname{tg}(t/2)$, com t variando no segundo intervalo, u varia no intervalo $[-\infty, +\infty]$, e fica assim definida uma aplicação bicontínua de $[-\pi, \pi]$ sobre $[-\infty, +\infty]$. Efectuando esta mudança de variável, as novas equações paramétricas da circunferência serão:

$$x=\frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y=\frac{2u}{1+u^2}.$$

Passemos, agora, ao caso geral. Sendo E um espaço topológico qualquer, diremos que toda a função $u=\varphi(t)$, definida e contínua num intervalo I da recta, com valores em E, *representa parametricamente uma linha contínua de E.* Além disso, diremos que duas tais funções

$$x=\varphi(t) \text{ com } t\in I, \quad y=\psi(u) \text{ com } u\in J,$$

representam a *mesma linha* de E, se e só se podemos passar de uma para outra mediante uma mudança de variável $t=\theta(u)$, sendo θ

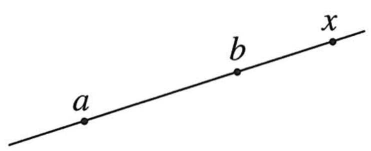
uma aplicação bicontínua de J sobre I. Se θ é crescente, diremos que x e y percorrem a linha no mesmo sentido; se θ é decrescente, diremos que percorrem a linha em sentidos contrários. Chama-se *linha orientada* toda a linha contínua sobre a qual se escolhe um determinado sentido de percurso.

Suponhamos, agora, que I é um intervalo compacto $[\alpha, \beta]$ da recta. Neste caso, os pontos $a=\varphi(\alpha)$ e $b=\varphi(\beta)$ serão chamados os *extremos* da linha. Uma linha contínua diz-se *fechada* quando tem extremos coincidentes; diz-se *aberta* quando tem extremos distintos ou quando não tem extremos (caso em que o intervalo I é aberto).

Pode acontecer, ainda, que existam dois ou mais valores distintos do parâmetro, que não sejam extremos de I e a que corresponda um mesmo ponto da linha. Este ponto diz-se, então, *múltiplo*, e chama-se *ordem de multiplicidade* do ponto ao número máximo de valores não extremos do parâmetro a que corresponde esse ponto. É claro que podem apresentar-se pontos numa linha cuja ordem de multiplicidade seja infinita. Uma linha fechada sem pontos múltiplos diz-se uma *linha fechada simples*, e uma linha com extremos distintos e sem pontos múltiplos diz-se *arco simples* ou *arco de Jordan.*

É fácil demonstrar (aplicando o COROLÁRIO 3 do TEOREMA 22.1) que duas linhas fechadas simples, em espaços topológicos *separados* E e F quaisquer, são sempre homeomorfas entre si; e o mesmo para arcos simples.

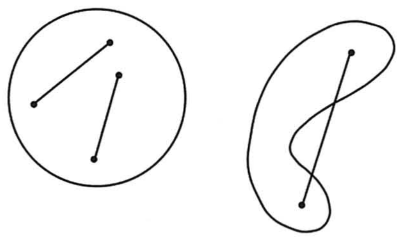
Se E é um espaço vectorial, chama-se *recta determinada por dois pontos distintos a, b de E* ao conjunto dos pontos x de E tais que $x=a+t(b-a)$ com $t\in]-\infty, +\infty[$. Por sua vez, chama-se *segmento de recta de extremos a, b,* e designa-se por $\overline{ab}$, o conjunto dos pontos x de E tais que $x=a+t(b-a)$, com $t\in[0, 1]$.



Se, além disso, o espaço vectorial E é normado, facilmente se verifica que toda a recta de E é uma linha aberta contínua (homeomorfa a $\mathbf{R}$) e que todo o segmento de recta é um arco simples, homeomorfo a um intervalo fechado de $\mathbf{R}$.

Dada uma sucessão finita de pontos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dum espaço vectorial E, chama-se *poligonal de extremos consecutivos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, à linha formada pelos segmentos $\overline{a_1a_2}$, $\overline{a_2a_3}$, $\ldots$, $\overline{a_{n-1}, a_n}$. Se E é normado, facilmente se reconhece que toda a poligonal em E é uma linha contínua.

Diz-se que *um conjunto A de pontos dum espaço vectorial E é convexo, quando contém todo o segmento de recta de extremos em A*. Assim, por exemplo, será um conjunto convexo do plano um círculo, mas não uma circunferência ou uma coroa circular.



EXERCÍCIO – Demonstrar que, *num espaço vectorial normado, toda a bola, aberta ou fechada, é um conjunto convexo.*

26. Conjuntos conexos

Seja E um espaço topológico qualquer. Diz-se que *dois conjuntos A e B de pontos de E são separados ou desconexos* (*entre si*), *quando cada um deles está contido no exterior de outro.*

Diz-se que A e B são *ligados ou conexos* (*entre si*), *quando não são separados;* equivale isto a dizer que existe pelo menos um ponto de um deles que é aderente ao outro.

Um conjunto A diz-se *desconexo* (*em si*), *quando for a reunião de* (*pelo menos*) *dois conjuntos separados não vazios.*

Diz-se que A é conexo (*em si*), *quando não for desconexo.* Equivale isto a dizer que, dados dois conjuntos quaisquer não vazios A_1 e A_2, tais que $A = A_1 \cup A_2$, estes dois conjuntos são necessariamente ligados.

PROPOSIÇÃO 26.1. *Condição necessária e suficiente para que um conjunto A de pontos da recta real seja conexo é que seja um intervalo* (*limitado ou ilimitado, fechado ou não*).

Demonstração. a) *A condição é suficiente.* Seja I um intervalo de **R**, e sejam A_1 e A_2 dois conjuntos não vazios quaisquer tais que $I = A_1 \cup A_2$. Um destes conjuntos, pelo menos (por exemplo A_1), terá algum ponto à esquerda do outro conjunto; seja λ o extremo superior dos pontos de A_1 situados à esquerda de A_2. Então, de duas uma: ou λ pertence a A_1, e nesse caso é aderente a A_2, visto que toda a vizinhança de λ contém pontos de A_2 (à direita); ou λ pertence a A_2, e nesse caso é aderente a A_1, por uma razão análoga. Os conjuntos A_1 e A_2 são, pois, ligados e, portanto, I é conexo.

b) *A condição é necessária.* Seja A um conjunto de pontos conexo, qualquer, da recta real. Designemos por a o seu extremo inferior (finito ou infinito) e seja b o seu extremo superior (finito ou infinito). Vamos provar que todo o ponto situado entre a e b pertence, necessariamente, a A, e, assim, ficará provado que A é um intervalo de extremos a e b, podendo estes pertencer ou não ao conjunto.

Com efeito, *suponhamos que existia um ponto c não pertencente a A tal que* $a<c<b$. Então, existiria, pelo menos, um ponto de A à esquerda de c, de contrário não seria a o extremo inferior de A e, analogamente, existiria um ponto de A à direita de c. Seja A_1 o conjunto dos pontos de A situados à esquerda de c e A_2 o conjunto dos pontos de A situados à direita de c. Viria, então, evidentemente, $A=A_1 \cup A_2$, sendo A_1 e A_2 dois conjuntos não vazios *separados* pelo ponto c. Mas nesse caso A não seria conexo, contrariamente à hipótese (q.e.d.).

Vemos, assim, que, no espaço **R**, *os únicos conjuntos de pontos conexos são os intervalos.*

TEOREMA 26.1. *Toda a função contínua transforma conjuntos conexos em conjuntos conexos.*

Demonstração. Sejam E e F dois espaços topológicos quaisquer, e f uma função contínua sobre um conjunto A contido em E e com valores em F. Suponhamos que A é conexo. Vamos provar que $f(A)$ também o é.

Sejam, então, B_1 e B_2 dois conjuntos não vazios quaisquer tais que $f(A) = B_1 \cup B_2$. Se pusermos

$$A_1 = f^{-1}(B_1) \quad \text{e} \quad A_2 = f^{-1}(B_2),$$

é claro que $A = A_1 \cup A_2$. Como, por hipótese, A é conexo, existe, pelo menos, um ponto de um dos conjuntos A_1 e A_2 que é aderente ao outro conjunto. Então, como as funções contínuas respeitam a noção de aderência, conclui-se que, um, pelo menos, dos conjuntos B_1 e B_2 tem um ponto aderente ao outro e, como estes conjuntos não vazios são arbitrários, segue-se que $f(A)$ é conexo (q.e.d.).

Em particular, o segundo espaço F pode ser a recta **R**. Então, aplicando a PROPOSIÇÃO 26.1, deduz-se do teorema:

COROLÁRIO 1. *Uma função real contínua sobre um conjunto conexo toma todos os valores possíveis entre o seu extremo superior e o seu extremo inferior.*

Vemos, assim, que este corolário, e portanto o teorema, constituem uma generalização, a espaços topológicos quaisquer, do TEOREMA ELEMENTAR DE CAUCHY, *relativo a funções reais contínuas duma variável real.*

COROLÁRIO 2. *O conjunto dos pontos de uma linha contínua é sempre conexo* (*e por isso mesmo a linha se diz contínua*).

Com efeito, uma linha contínua num espaço topológico E é, como vimos, definida por uma aplicação contínua de um intervalo da recta (conjunto conexo, segundo a PROPOSIÇÃO 26.1) no espaço E. Por conseguinte, o conjunto de pontos da linha será conexo, em virtude do teorema.

Convém notar que certas curvas de geometria elementar não são linhas contínuas. Por exemplo, uma hipérbole, no plano euclidiano é formada por duas linhas contínuas separadas entre si, embora no plano projectivo seja uma linha contínua, homeomorfa à circunferência, visto que os seus dois ramos se ligam entre si por meio de dois pontos impróprios. No plano esfera, $\dot{C}$, uma hipérbole também será uma linha contínua, mas neste caso a conexão é estabelecida mediante um único ponto impróprio, que ficará a ser, então, um ponto duplo (para o reconhecer, basta efectuar a projecção estereo-gráfica sobre a esfera).

PROPOSIÇÃO 26.2. *Condição suficiente para que um conjunto A seja conexo é que, para cada par de pontos, a_1 e a_2 de A, exista, pelo menos, uma linha contínua contida em A, de extremos a_1 e a_2.*

Demonstração. Suponhamos que a hipótese se verifica e que o conjunto A não é conexo. Então, existem dois conjuntos A_1 e A_2 não vazios e separados tais que A é a união de A_1 com A_2. Sejam a_1 um ponto de A_1 e a_2 um ponto de A_2; em virtude da hipótese, existe pelo menos uma linha contínua contida em A, de extremos a_1 e a_2. Designemos por C o conjunto de pontos dessa linha, por C_1 a intersecção de C com A_1 e por C_2 a intersecção de C com A_2. Então, será $C = C_1 \cup C_2$, sendo C_1 e C_2 conjuntos não vazios e separados, visto estarem contidos, respectivamente, nos conjuntos A_1 e A_2, que supomos separados entre si. Ora, isso é impossível, em virtude do COROLÁRIO 2 (q.e.d.).

Porém, a condição expressa na PROPOSIÇÃO 26.2 *não é necessária.* Consideremos, por exemplo, no plano, o gráfico da função sen $(1/x)$, com $x \neq 0$, acrescido do ponto (0, 0). É fácil ver que este conjunto é conexo, segundo a definição atrás dada, e, contudo, é impossível ligar a origem dos eixos com um outro ponto do gráfico, por meio de uma linha contida no mesmo.

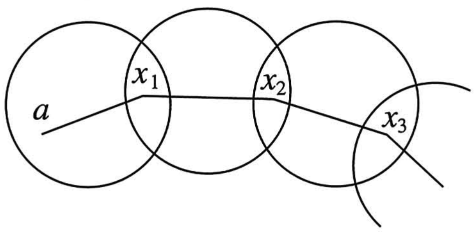
No entanto, *a referida condição torna-se necessária e suficiente, se nos restringirmos aos conjuntos abertos num espaço vectorial normado,* como vamos ver. Para isso, convém introduzir uma nova noção:

Chamaremos cadeia de conjuntos, a toda a sucessão finita de conjuntos tal que dois quaisquer conjuntos consecutivos da sucessão têm sempre, pelo menos, um ponto comum.

TEOREMA 26.2. *Sendo E um espaço vectorial normado, condição necessária e suficiente para que um conjunto aberto A de pontos de*

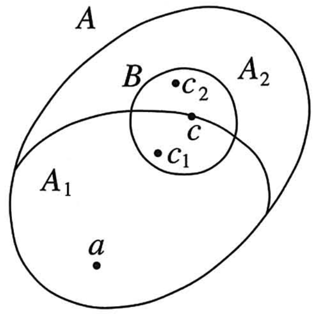
E seja conexo é que, para cada par de pontos a_1, a_2, de A, exista uma cadeia de bolas abertas, contidas em A, tal que a primeira contenha a_1 e a última contenha a_2.

Demonstração. a) *A condição é suficiente.* Com efeito, sejam a e b dois pontos quaisquer de A, e consideremos uma cadeia de bolas abertas, S_1, S_2, …, S_n, contidas em A tais que S_1 contenha a e S_n contenha b. Segundo a definição de cadeia, existirá, pelo menos, um ponto x_1, em $S_1 \cap S_2$, um ponto x_2 em $S_2 \cap S_3$, …, um ponto x_{n-1} em $S_{n-1} \cap S_n$. Como as bolas são conjuntos *convexos* (ver n.º 25, final), os segmentos de recta $\overline{a_1 x_1}$, $\overline{x_1 x_2}$, …, $\overline{x_{n-1} a_2}$ estão contidos nos referidos conjuntos; deste modo, a poligonal de extremos sucessivos a, x_1, x_2, …, x_{n-1}, b, está contida em A, e, portanto, em virtude da PROPOSIÇÃO 26.2, o conjunto A é conexo, visto que toda a poligonal num espaço vectorial normado é uma linha contínua, como atrás observámos.



b) *A condição é necessária.* Com efeito, suponhamos que o conjunto A é aberto e conexo, e seja a um ponto qualquer de A. Designemos por A_1 o conjunto dos pontos de A que podem ser ligados a a por meio de cadeias de bolas abertas contidas em a. *Trata-se, então, de provar que $A_1 = A$.*

Suponhamos que este facto não se verifica e seja A_2 o complementar de A_1 em A. Então, A_1 e A_2 são conjuntos não vazios tais que $A = A_1 \cup A_2$ e, como A é convexo, haverá, pelo menos, um ponto c dum destes conjuntos que é aderente ao outro conjunto. Nestas condições, dada uma bola qualquer aberta B de centro c contida em A, existirá em B, pelo menos, um ponto c_1 pertencente a A_1 e um ponto c_2 pertencente a A_2 (podendo, em particular, c_1 ou c_2 coincidir com o próprio c). Ora, pela maneira como foi definido A_1, existe uma cadeia de bolas abertas S_1, S_2, …, S_n, contidas em A, tais que



$a \in A_1$, $c_1 \in S_n$. Portanto, se ampliarmos esta cadeia com o conjunto B, ficaremos a ter uma cadeia de bolas abertas contidas em A, com $a \in S_1$, $c_2 \in B$, o que é impossível visto c_2 pertencer ao conjunto A_2 dos pontos de A que não se podem ligar a a por meio de tais cadeias. Logo, tem de ser $A_1 = A$ (q.e.d.).

COROLÁRIO. *Sendo E um espaço vectorial normado, condição necessária e suficiente para que um conjunto aberto A de pontos de E seja conexo é que, para cada par de pontos a_1 e a_2, exista uma linha contínua (que pode ser mesmo uma poligonal), de extremos a_1 e a_2 e contida em A.*

Com efeito, a condição é suficiente, em virtude da PROPOSIÇÃO 26.2. Para ver que é necessária, basta observar que, se A é conexo e aberto, qualquer par de pontos de A pode ser ligado por uma cadeia de bolas abertas contidas em A (em virtude do teorema) e, portanto, por uma poligonal contida em A, como se mostra na primeira parte da demonstração do teorema.

Assim, fica estabelecido que o conceito de conjunto conexo atrás definido, sendo mais geral que o conceito de conjunto conexo adoptado na cadeira de Cálculo Infinitesimal, equivale, no entanto, a este, quando se aplica somente a conjuntos abertos de $\mathbf{R}^n$.

DEFINIÇÃO 26.1. *Chamaremos domínio aberto dum espaço topológico E a todo o conjunto de pontos de E que seja aberto não vazio e conexo; e domínio fechado de E ao fecho de qualquer domínio aberto de E.*

Em particular, no espaço **R**, os domínios abertos serão os intervalos abertos. Note-se que o *domínio de existência* de uma função pode ser um conjunto qualquer e não precisa, portanto, de ser um *domínio*, segundo a definição topológica anterior. Por isso, alguns autores usam, neste último caso, o termo "região" em vez de "domínio", para evitar confusões.

Ainda se demonstra, em Topologia Geral, a seguinte proposição:

TEOREMA 26.3. *Num espaço topológico qualquer, todo o conjunto A de pontos é a reunião de conjuntos conexos "máximos", isto é, de conjuntos conexos que já não podem ser ampliados em outros conjuntos conexos contidos em A.*

Estes conjuntos conexos máximos dizem-se *componentes* de A. Em particular, *dizer que A é conexo equivale a dizer que tem uma única componente.*

Por exemplo, o complementar duma coroa circular no plano é um conjunto desconexo com duas componentes; o conjunto dos números inteiros em **R** é um conjunto formado por uma infinidade de componentes, que se reduzem a pontos; etc.

27. Espaços métricos completos. Espaços de BANACH

Seja E um espaço métrico. Como exercício, pode reconhecer-se que a distância $d(x, y)$ de dois pontos x e y de E é uma função contínua de x e y; quer isto dizer que a aplicação $(x, y) \rightarrow d(x, y)$ do produto topológico $E \times E$ em **R** é contínua. Em particular, se E é um espaço vectorial normado, vê-se que $\|x\|$ é uma função contínua de x em E.

DEFINIÇÃO 27.1. *Diz-se que uma sucessão de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, de pontos de E é uma sucessão de Cauchy, quando, para todo o número $\delta > 0$, existe uma ordem p tal que se tenha:*

$$d(x_m, x_n) < \delta, \quad \textit{desde que seja } m > p \textit{ e } n > p.$$

Aplicando a propriedade triangular da distância, facilmente se prova que, *se a sucessão x_n é convergente (isto é, se tem limite em* *em E*), *é uma sucessão de Cauchy*. Mas a recíproca nem sempre é verdadeira; por exemplo, no conjunto **Q** dos números racionais há *sucessões de Cauchy* que não são convergentes *em* **Q** (todas aquelas que tiverem limite irracional). Pois bem:

DEFINIÇÕES 27.2. *Diz-se que um espaço métrico E é completo, quando toda a sucessão de Cauchy em E é convergente neste espaço. Por sua vez, chama-se espaço de Banach todo o espaço vectorial normado que, como espaço métrico, é completo.*

São espaços métricos completos (e também *espaços de Banach*), além de **R**, os espaços $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$ para todo *n*, o espaço das funções numéricas contínuas sobre um compacto, etc., etc. Por exemplo, dada uma *sucessão* x_n *de Cauchy* em $\mathbf{R}^n$, a sucessão das primeiras coordenadas, a das segundas coordenadas, etc., dos pontos x_n também são, manifestamente, *sucessões de Cauchy,* logo, convergentes em **R**; os limites dessas sucessões são, pois, as sucessivas coordenadas de um ponto de $\mathbf{R}^n$, limite da sucessão x_n dada, que é, portanto, convergente.

Aliás, todo o espaço métrico não completo pode ser "completado", conforme o seguinte

TEOREMA DE IMERSÃO. *Para todo espaço métrico E não completo, existe um espaço métrico completo Ê, do qual E é um sub-espaço métrico denso em Ê. Este novo espaço* (*que se diz o completado de E*) *é determinado a menos de uma isometria que deixa fixos os elementos de E.* (Quer isto dizer que existe uma infinidade de espaços *Ê*, nas condições do enunciado, mas entre eles pode sempre estabelecer-se uma correspondência biunívoca que conserve as distâncias e deixe fixos os pontos de *E*).

A demonstração pode fazer-se por uma técnica semelhante à de CANTOR, na passagem do conjunto **Q** dos racionais para o conjunto **R** dos reais.

A definição de espaço métrico pode ainda ser formulada em termos de "filtro", do seguinte modo:

Diz-se que um filtro F sobre E é um *filtro de Cauchy,* quando, para todo o $\delta > 0$, existe, pelo menos, um conjunto $X \in F$ cujo diâmetro é $< \delta$. Posto isto, dizer que E é *completo* equivale a dizer que todo o filtro de Cauchy sobre E é convergente (em E).

Uma outra maneira equivalente de definir espaço métrico completo é a seguinte:

Um espaço métrico E é completo, se e só se, dada uma sucessão qualquer de subconjuntos fechados de E, cada um dos quais contenha o seguinte e cujo diâmetro tende para zero, existe sempre um ponto de E pertencente a todos eles.

28. Análise infinitesimal em espaços de BANACH

Observemos que, num espaço vectorial normado, estão definidas uma *estrutura algébrica* (de espaço vectorial) e uma *estrutura topológica* (proveniente da função norma). Trata-se, pois, de uma *estrutura algébrico-topológica.* Neste caso, a estrutura topológica é "compatível" com a estrutura algébrica, quer dizer: a soma $u+v$ de dois vectores é uma função contínua de u e v (aplicação contínua de $E \times E$ sobre E) e o produto αu de um escalar por um vector é também uma função contínua de α e de u (aplicação contínua de $\mathbf{K} \times E$ em E, sendo $\mathbf{K}$ o corpo real ou complexo), como facilmente se verifica.

Por esse facto, grande parte dos conceitos e das proposições da Análise clássica são generalizáveis ao campo dos espaços vectoriais normados, reais ou complexos. Mas é preciso lembrar que, em muitas dessas proposições, intervém o CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DE CAUCHY. Por isso mesmo, são os espaços normados completos (também chamados *espaços de Banach,* como se disse no número anterior) os que oferecem mais possibilidades de generalização.

Vejamos alguns exemplos:

Num espaço vectorial E em que não tenha sido especificada uma topologia, está definida "soma de um número finito de vectores" ou mesmo "combinação linear finita de vectores", mas não faz sentido falar de séries de vectores ou de integrais de funções vectoriais, visto que nestes conceitos intervém a *noção topológica de limite*.

Por sua vez, num espaço topológico E em que não esteja definida uma estrutura algébrica, pode-se falar, por exemplo, de limites de sucessões ou de funções contínuas, mas não faz sentido falar de séries, integrais, derivadas, etc., porque nestes conceitos intervêm as noções algébricas de "soma" e do "produto por escalares".

Séries de vectores.

Seja agora E um espaço vectorial normado. Neste caso já faz sentido falar de série de termos em E; será toda a expressão do tipo

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \dots \quad \text{ou, abreviadamente,} \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

sendo $u_0, u_1, \dots,$ elementos (vectores) quaisquer de E. A série diz-se *convergente*, quando a sua soma parcial de ordem n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

tender para um vector de E quando $n \to \infty$; este vector é chamado, então, a *soma da série*. Caso contrário, a série diz-se *divergente*.

Grande parte da teoria das séries estende-se aos espaços de Banach e as demonstrações são perfeitamente análogas às clássicas, com o emprego da função norma.

Assim, por exemplo, mantém-se o teorema:

Condição suficiente para que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

seja convergente é que o seja a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|,$$

e neste caso tem-se:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|.$$

Ainda, a título de exemplo, demonstraremos a 1.ª parte do teorema. Suponhamos que a segunda série é convergente. Então, pelo

CRITÉRIO DE CAUCHY, dado um número $\delta > 0$, existe, necessariamente, um inteiro ν tal que se tenha

$$\|u_n\| + \|u_{n+1}\| + \cdots + \|u_{n+p}\| < \delta$$

para $n > \nu$, sendo p um número natural qualquer. Mas, por outro lado, tem-se:

$$\|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\| \leq \|u_n\| + \cdots + \|u_{n+p}\| < \delta$$

para $n > \nu$, sendo p um número natural qualquer. Ora, o espaço E por hipótese é completo. Logo, como δ é arbitrário, segue-se que a série $\sum u_n$ também é convergente (visto a *sucessão* S_n ser *de Cauchy*).

Também as séries de potências de uma variável escalar e de coeficientes vectoriais serão definidas em E. Uma série de potências será, então, toda a expressão do tipo:

$$u_0 + u_1\lambda + u_2\lambda^2 + \cdots + u_n\lambda^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\lambda^n$$

em que $u_0, u_1, \ldots,$ são vectores quaisquer de E e λ é uma variável escalar (real ou complexa, conforme E for espaço vectorial real ou complexo). Para cada valor de λ os termos da série serão, evidentemente, produtos de vectores por escalares definidos em E.

Continua a ser válido o

TEOREMA. *Se* $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|u_n\|}$, *então a série* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n\lambda^n$ *é absolutamente convergente para* $|\lambda| < 1/L$, *e divergente para* $|\lambda| > 1/L$. *Diremos, então, que* $1/L$ *é o raio de convergência da série.*

Derivadas de funções vectoriais de uma variável real.

Seja ainda E um espaço normado e consideremos uma função $x = f(t)$, com valores em E, definida num intervalo I da recta; quer isto dizer que, a cada *número real* $t \in I$, a função f faz corresponder um determinado *vector* $x = f(t) \in E$.

Além das noções de limite e de continuidade para tais funções, poderemos definir a *noção de derivada*:

Dado um ponto t_0 interior a I, chamaremos *razão incremental de* f, *relativamente a* t_0, à função de t definida em todo o *ponto* t de I *distinto de* t_0, pela expressão

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\frac{1}{t-t_0}\,[f(t)-f(t_0)],$$

que, como se vê, indica o produto dum escalar pela diferença de dois vectores.

Então, se existe o *limite* desta função (razão incremental) quando $t \to t_0$, esse limite (vector de E) chama-se *a derivada de* f *em* t_0 e representa-se por $f'(t_0)$. Tem-se, pois, por definição:

$$f'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

Analogamente se definem as *derivadas laterais*.

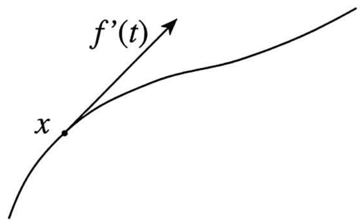
Em particular, se E é um espaço de dimensão finita ($\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$), a função $x=f(t)$ equivale a um sistema de n funções numéricas $x_i=f_i(t)$ da variável real t, definidas no intervalo I. *Neste caso, a derivada* $f'(t_0)$ *será manifestamente um vector, que tem por componentes as derivadas das componentes de* $f(t)$.

No caso geral, grande parte dos teoremas de derivação mantêm-se, *mutatis mutandis*, para este conceito de derivada. Assim, a REGRA DE DERIVAÇÃO DA SOMA *subsiste com a mesma forma.* A REGRA DE DERIVAÇÃO DO PRODUTO *estende-se ao caso do produto duma função escalar* $\alpha(t)$ *por uma função vectorial* $u(t)$, *e, analogamente, para o quociente de* $u(t)$ *por* $\alpha(t)$. A REGRA DE DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES COMPOSTAS generaliza-se com o seguinte aspecto:

Seja $x=f(t)$ *uma função de* t *com valores em* E, *definida no intervalo* I *da recta e seja* $t=\varphi(u)$ *uma função real de variável real* u *com valores em* I. *Nestas condições, se a função* φ *é diferenciável num ponto* u_0 *e a função* f *tem derivada no ponto correspondente* $t_0=\varphi(u_0)$, *a função composta* $f(\varphi(u))$ *tem derivada em* u_0, *que se calcula segundo a regra usual.*

Linhas regulares e linhas seccionalmente regulares.

Já vimos que, sendo $x=f(t)$ uma função de t com valores em E, contínua num intervalo I da recta, essa função define em E uma linha contínua. No caso particular em que $E = \mathbf{R}^3$ e t é a variável tempo, a função $x = f(t)$ representa um movimento, e a sua derivada em cada instante t é o *vector velocidade* nesse instante.



No caso em que E é um espaço normado qualquer, diremos que uma linha contínua em E é *regular*, quando admite uma representação paramétrica $x = f(t)$, com $t \in I$, em que f é uma função com derivada contínua sobre o intervalo I. Diremos que uma linha é *seccionalmente regular*, quando é formada por um número finito de arcos de linha regular.

Por exemplo, é fácil provar que *toda a poligonal é uma linha seccionalmente regular.*

Para as linhas em espaços normados, pode definir-se ainda a noção de comprimento. Em primeiro lugar, o comprimento de uma poligonal será a soma dos comprimentos dos seus lados (distância entre os vértices consecutivos). Posto isto, uma linha contínua qualquer diz-se *rectificável,* quando é finito o extremo superior dos comprimentos das poligonais nela inscritas, e esse extremo superior será chamado o *comprimento da linha.* É fácil então provar, como no caso clássico, que *se L é uma linha de E representada por uma função vectorial $x = f(t)$ continuamente derivável num intervalo compacto, $I = [a, b]$ de* $\mathbf{R}$, *a linha L é rectificável e o seu comprimento é dado pelo integral*:

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, dt.$$

Em particular, se $E = \mathbf{R}^3$, a função f decompõe-se em três funções reais f_1, f_2, f_3, e tem-se:

$$\|f'(t)\| = |f'(t)| = \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2}$$

o que conduz à bem conhecida fórmula de rectificação de curvas representadas parametricamente.

O conceito de integral de Riemann para as funções vectoriais duma variável real.

Seja f uma função com valores num *espaço de Banach E*, definida num intervalo compacto $I = [a, b]$ da recta, com $a < b$. Consideremos uma decomposição qualquer deste intervalo por meio dum número finito de pontos:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Designemos por Δ o diâmetro desta decomposição, isto é, ponhamos:

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ tomemos arbitrariamente um ponto τ_i e formemos a soma:

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\,(t_i - t_{i-1}).$$

Temos, assim, uma *soma de Riemann relativa à decomposição considerada.* Mas note-se que S_Δ não é uma função unívoca de Δ, pois há uma infinidade de decomposições com o diâmetro Δ e uma infinidade de maneiras de escolher os pontos τ_i em cada uma dessas decomposições. Neste caso, diremos que S_Δ *tende para um vector $S \in E$ quando* $\Delta \to 0$, se, para cada número $\delta > 0$, existir um correspondente número $\varepsilon > 0$ tal que $\|S - S_\Delta\| < \delta$, desde que seja $\Delta < \varepsilon$.

Quando existe esse limite S, a função f diz-se *integrável* (*ou somável*) *segundo Riemann no intervalo* $[a, b]$, e ao vector S dá-se o nome de *integral de f em* $[a, b]$, escrevendo-se

$$S = \int_a^b f(t)\,dt.$$

É claro que, em vez da letra t, se pode usar qualquer outra como *variável de integração,* desde que seja diferente das letras que designam os *extremos de integração*: o valor do integral não depende da variável de integração, e por isso se diz que esta é uma *variável muda* ou *variável aparente.*

No caso particular em que $E = \mathbf{R}^n$, a função f equivale a um sistema de n funções reais $f_1, f_2, \ldots, f_n$, definida em $[a, b]$; *então, f é integrável em $[a, b]$, se e só se o mesmo acontece com as funções componentes, e, nesse caso, o integral de f em $[a, b]$ é o vector de $\mathbf{R}^n$ que tem por componentes sucessivas os integrais*

$$\int_a^b f_1(t)\,dt, \quad \int_a^b f_2(t)\,dt, \ldots, \quad \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

No caso geral, em que E é um *espaço de Banach* qualquer, grande parte das propriedades do *integral de Riemann* generalizam-se a esta nova extensão do conceito. Assim, os teoremas relativos à decomposição do intervalo, ao integral da soma, etc., continuam a ser válidos. Também permanece o

TEOREMA. *Se a função f é contínua sobre $[a, b]$, é integrável segundo Riemann nesse intervalo.*

Na demonstração (que não faremos aqui) intervém, essencialmente, o facto de E ser completo (de contrário, o teorema pode não ser verdadeiro), e ainda o teorema da continuidade uniforme.

Assim, a teoria do integral para funções com valores num espaço normado E só tem real interesse quando este é completo (*ou seja, um espaço de Banach*).

Note-se que também subsiste a fórmula

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,dx,$$

supondo que os integrais existem. Em particular, tem-se a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL:

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} \|f(x)\|.$$

Daqui se deduz o TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL para as funções consideradas:

Se f é integrável em $[a, b]$, pondo

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)\,dx, \quad para \quad t \in [a, b],$$

a função Φ assim definida em $[a, b]$ é contínua e admite derivada em todo o ponto t_0 em que f é contínua, tendo-se, precisamente,

$$\Phi'(t_0) = f(t_0).$$

(Se t_0 é um dos extremos a, b, trata-se apenas de uma derivada lateral, *à direita de a* ou *à esquerda de b.*)

Assim, se f é contínua sobre $[a, b]$, admite, pelo menos, uma *primitiva* neste intervalo (a função Φ acima definida).

Demonstra-se igualmente a FÓRMULA DE BARROW:

Se f é integrável em $[a, b]$ e admite uma primitiva F neste intervalo, tem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

As demonstrações são semelhantes a demonstrações que se podem fazer nos casos correspondentes em Análise clássica.

Funções vectoriais de variável vectorial.

Oportunamente nos referiremos à análise infinitesimal para funções *vectoriais de variável vectorial,* definidas num conjunto de pontos A de um espaço normado E e com os valores no mesmo ou num outro espaço normado F.

29. Espaços vectoriais topológicos. Espaços localmente convexos

A teoria dos espaços vectoriais normados atingiu o seu máximo desenvolvimento no período entre as duas guerras mundiais, principalmente (mas não exclusivamente) por obra do matemático polaco S. BANACH, falecido durante a última guerra. Reconheceu-se, porém, que o conceito de espaço normado, embora muito geral, não basta para um estudo conveniente de várias questões da Análise moderna. Com efeito, vieram a apresentar-se, de modo inevitável, espaços de funções (de variáveis reais ou complexas) e, mais recentemente ainda, espaços de distribuições que não podem ser espaços normados. Daí, a necessidade de um novo alargamento de esquemas abstractos.

DEFINIÇÃO 29.1. *Chama-se espaço vectorial topológico todo o espaço vectorial E, real ou complexo, munido de uma topologia "compatível" com a sua estrutura algébrica, isto é, de uma topologia tal que a soma* $u+v$ *e o produto de u por escalares resultem funções contínuas das duas variáveis, respectivamente, u, v, e* α*, u.*

Todavia, o conceito de espaço vectorial topológico é, por sua vez, demasiado geral para as necessidades actuais da análise, o que levou a restringi-lo tal como se segue:

DEFINIÇÃO 29.2. *Chama-se espaço localmente convexo todo o espaço vectorial topológico em que se podem escolher para vizinhanças fundamentais dos seus pontos unicamente conjuntos convexos.*

Por exemplo, um espaço normado é um espaço localmente convexo, visto ser um espaço vectorial topológico em que podemos tomar para vizinhanças fundamentais de cada ponto, por exemplo, as bolas abertas com centro nesse ponto, as quais, como sabemos, são conjuntos convexos.

Mais geralmente, dada uma família qualquer de semi-normas p_α sobre um espaço vectorial E, para cada ponto a de E e cada número $\rho > 0$, o conjunto de pontos x de E tais que $p_\alpha(x-a) < \rho$ (bola aberta de centro a e raio ρ, correspondente à semi-norma p_α) é convexo. Deste modo, se tomarmos para vizinhanças de a todas essas bolas (com α e ρ variáveis), assim como as intersecções das mesmas em número finito, é fácil ver que fica definida em E uma topologia localmente convexa, compatível com a estrutura algébrica de E (facilmente se reconhece que a intersecção de dois ou mais conjuntos convexos ainda é um conjunto convexo).

Assim, por exemplo, o espaço F_I de todas as funções (reais ou complexas) definidas num intervalo I da recta, com as semi-normas

p_x atrás definidas, é um espaço localmente convexo, mas não um espaço normável, nem sequer metrizável, porque, como vimos, não verifica o 1.º axioma da numerabilidade.

Reciprocamente, prova-se que a topologia de um espaço localmente convexo E pode ser definida mediante uma família (finita ou infinita) de semi-normas p_α de E.

Nesta hipótese, diz-se que um filtro F sobre E é um *filtro de Cauchy,* quando, para todo o número $\delta > 0$ e toda a semi-norma p_α da família considerada, existe um conjunto $A \subset F$ tal que

$$x, y \in A \Rightarrow p_\alpha(x-y) < \delta.$$

Diz-se que o espaço E é *completo*, quando todo o *filtro de Cauchy* sobre E é convergente neste espaço.

A Análise Infinitesimal pode generalizar-se, de modo fecundo, aos espaços localmente convexos, especialmente aos que são completos, com o emprego das famílias de semi-normas que definem a topologia desses espaços.

A teoria dos espaços vectoriais topológicos, iniciada ainda antes da última guerra por J. VON NEUMANN e por J. WEHAUSEN, foi desenvolvida, no caso dos espaços localmente convexos, pelos americanos MACKEY e ARENS, pelo alemão G. KÖTHE e, mais tarde, pelos franceses J. DIEUDONNÉ e L. SCHWARTZ. Após 1950, a teoria recebeu um grande impulso por obra do jovem matemático hebreu A. GROTHENDIECK. Actualmente, constitui um dos temas de trabalho no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa.

As suas principais aplicações encontram-se na "Teoria das distribuições" e na moderna "Teoria dos funcionais analíticos".

ALGUMAS INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS

a) Sobre Topologia Geral:

N. BOURBAKI – *Topologie Générale,* Chapitres I et II. Actualités Scientifiques et Industrielles, n.º 1142. Hermann, Paris, 1951.

J. KELLEY – *General Topology.* Van Nostrand, New York, 1955.

C. KURATOWSKI – *Topologie I* (*espaçes métriques, espaces complets*). Monografias matemáticas. Varsóvia, 1933.

b) Sobre espaços vectoriais, análise infinitesimal em espaços de Banach e espaços vectoriais topológicos:

N. BOURBAKI – *Algébre Linéaire.* Act. Scient. Ind. n.° 1032, Hermann, Paris, 1947.

E. HILLE – *Functional Analysis and Semi-groups.* American Mathematical Society, New York, 1948.

N. BOURBAKI – *Espaces Vectoriels Topologiques*, Chapitres I et II. Act. Scient. et Ind., n.° 1189. Hermann, Paris, 1953.

OBSERVAÇÃO. No período de 1939 a 1943, foram publicados, na revista "Portugaliæ Mathematica" vários trabalhos de Topologia Geral, que reflectem a actividade do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa durante esse período. Foram seguidamente publicados vários cadernos de divulgação, sobre o mesmo assunto, pela Junta de Investigação Matemática do Porto. Veja-se, ainda, "Funções Contínuas", por A. MONTEIRO e A. PEREIRA GOMES.

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

CAP. III – **Noções prévias sobre espaços vectoriais abstractos e sobre topologia**

CAP. V – **Revisões e complementos sobre integrais impróprios e sobre integrais paramétricos**

CAP. VI – **Método dos resíduos**

CAP. VII – **Breves noções sobre medida e integral de Lebesgue**

CAP. VIII – **Transformação de Fourier**

CAP. IX – **Transformação de Laplace**