II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

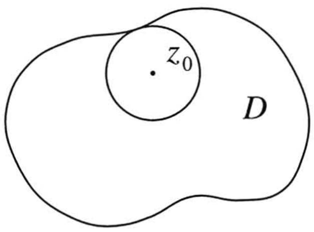
$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência (1).

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[1] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[2]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO IV

FUNDAMENTOS DA TEORIA DAS FUNÇÕES ANALÍTICAS

1. Noção de integral para as funções complexas de variável real

Consideremos uma função complexa qualquer, $z=f(t)$, da variável real t, definida num intervalo limitado e fechado $[a, b]$. Como sabemos, uma tal função equivale a um sistema de duas funções reais $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, definidas no mesmo intervalo, sendo $z=x+iy$; ou seja, a uma função de t, cujos valores são vectores do espaço $\mathbf{R}^2$. Podemos, portanto, aplicar a este caso particular o conceito geral de integral de uma função vectorial, atrás definido. Assim, o integral de f reduz-se a dois integrais de funções reais. Mais precisamente, a função f é integrável em $[a, b]$, se e só se o mesmo sucede com as funções f_1 e f_2, e tem-se, nesta hipótese:

(1) $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + i\int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Além disso, o TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL e a FÓRMULA DE BARROW continuam a ser aplicáveis neste caso. Assim:

Se for F uma primitiva de f, em $[a, b]$, ter-se-á:

(2) $$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

supondo que f é integrável em $[a, b]$.

Também podemos deduzir directamente esta fórmula: designando por $F_1(t)$ e $F_2(t)$, respectivamente, a parte real e o coeficiente da parte imaginária de $F(t)$, é claro que F_1 e F_2 serão primitivas de f_1 e f_2, respectivamente, e portanto será:

$$\int_a^b f_1(t)\,dt = F_1(b) - F_1(a)\,, \quad \int_a^b f_2(t)\,dt = F_2(b) - F_2(a)\,,$$

visto tratar-se de funções reais de variável real, para as quais a FÓRMULA DE BARROW já foi estabelecida. Daqui se deduz imediatamente (2), atendendo a (1).

A fórmula (1) também nos permite imediatamente verificar, neste caso, as propriedades do *integral duma soma* e do *integral do produto duma constante por uma função*:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

assim como a *propriedade da decomposição do intervalo*:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx\,.$$

Tem-se, ainda neste caso, a fórmula

$$(3) \qquad \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \quad (\text{com } a \leq b)\,,$$

que estende aos integrais a PROPRIEDADE DO MÓDULO DE UMA SOMA (supondo que os integrais existem, o que sucede, em particular, se f é contínua em $[a,\ b]$). Para estabelecer (3), basta notar que para as *somas de Riemann* se verifica relação análoga:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k)|\,(t_k - t_{k-1})\,,$$

a qual se mantém certamente na passagem ao limite, quando o diâmetro da decomposição tende para 0. De (3) resulta em particular a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq (b-a) \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|,$$

visto que o 2.º membro desta fórmula é um majorante do 2.º membro de (3), segundo o que já foi estabelecido no campo real.

OBSERVAÇÃO. Para revisões e complementos sobre a teoria do *integral de Riemann* no campo real, veja-se VICENTE GONÇALVES, *Compêndio de Álgebra Superior,* G. VALIRON, obra citada, e L. GRAVES, *The Theory of the functions of the real variable.*

2. Noção de integral para funções complexas de uma variável complexa

Consideremos, agora, uma função complexa $w = f(z)$, de variável complexa z, definida num domínio aberto D de **C** e seja L uma linha contínua contida em D, representada parametricamente por uma função complexa $z = \varphi(t)$ da variável real t, definida e contínua no intervalo $[a, b]$, com $a < b$. Como sabemos, esta última função equivale a um par de funções reais de variável real, $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, definidas e contínuas no mesmo intervalo, tendo-se $x = \text{Re}\, z$, $y = \text{Im}\, z$.

Pondo $\alpha = \varphi(a)$ e $\beta = \varphi(b)$, os números complexos α e β representam os *extremos* da linha L. *Consideremos esta orientada no sentido crescente dos valores do parâmetro.* Então, α será o *primeiro extremo* (ou *origem*) e β o *segundo extremo* (ou *extremidade*) *da linha orientada L.*

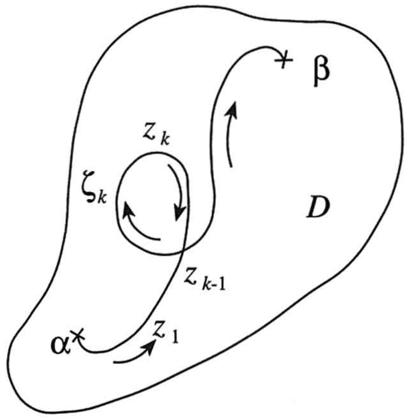
Consideremos, agora, uma decomposição do intervalo $[a, b]$ por meio de um número finito de pontos

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

e representemos por Δ o diâmetro desta decomposição, isto é, ponhamos

$$\Delta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (t_k - t_{k-1}).$$

Em cada um dos intervalos $[t_{k-1}, t_k]$, tomemos arbitrariamente um valor τ_k. A cada um dos valores t_k do parâmetro corresponde



um ponto $z_k = \varphi(t_k)$ de L (com $k = 0, 1, \ldots, n$) e, a cada um dos valores τ_k, corresponde um ponto $\zeta_k = \varphi(\tau_k)$, situado no arco da linha L de extremos z_{k-1}, z_k, ($k = 1, \ldots, n$). Posto isto, formemos a *soma de Riemann*:

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

É claro que há uma infinidade de decomposições com o mesmo diâmetro Δ e, para cada decomposição, há uma infinidade de maneiras diferentes de escolher os valores τ_k do parâmetro. Assim, S_Δ será uma *função infinitívoca* de Δ. Diremos que S_Δ tende para um limite finito S (número complexo) se, para todo o $\delta > 0$, existir pelo menos um $\varepsilon > 0$, tal que se tenha $|S - S_\Delta| < \delta$ desde que $\Delta < \varepsilon$. Neste caso, diz-se que a função f é integrável sobre L e que S é o *integral de f sobre a linha orientada L,* escrevendo-se então:

$$S = \int_L f(z)\,dz.$$

Diz-se ainda, neste caso, que L é o *caminho de integração*, que α e β são, respectivamente, o *primeiro* e o *segundo extremo* (ou *limite*) *de integração,* e que f é a *função integranda.* O integral S

depende de f e de L, mas não da variável de integração z, que pode, pois, ser substituída por qualquer outro símbolo (distinto de L, f, α e β), sem afectar o valor do integral:

$$S = \int_L f(z)\,dz = \int_L f(u)\,du = \int_L f(\lambda)\,d\lambda = \dots .$$

Exprime-se este facto dizendo que a variável de integração é uma variável *aparente* (ou *muda*), comparável aos *índices mudos* dos somatórios.

Há uma série de propriedades do integral assim definido que nos limitamos a enunciar, porque adoptaremos mais adiante uma outra definição mais cómoda de integral.

Assim:

Demonstra-se que *a existência do integral e o seu valor não dependem da representação paramétrica de L, desde que se conserve a orientação da linha: isto é, se o integral de f sobre L existe para uma dada representação paramétrica de L, também existe e tem o mesmo valor para outra representação de L que conserve o sentido da linha.* Porém, se mudarmos o sentido desta, é evidente que o integral muda de sinal, isto é, tem-se:

$$\int_{L^-} f(z)\,dz = -\int_L f(z)\,dz,$$

representando por L^- a mesma linha *orientada em sentido contrário.*

Também se demonstra a seguinte propriedade:

Se a linha L é formada por duas linhas L_1 e L_2 *tais que a extremidade de* L_1 *coincida com a origem de* L_2, *então, o integral de f sobre L existe, se e só se existem os integrais sobre* L_1 e L_2, *e tem-se, nesta hipótese:*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz.$$

Verificam-se, ainda, as propriedades relativas ao *integral de uma soma* e ao *integral do produto duma constante k por uma função*:

$$\int_L [f(z) + g(z)]\,dz = \int_L f(z)\,dz + \int_L g(z)\,dz,$$

$$\int_L kf(z)\,dz = k\int_L f(z)\,dz.$$

Prova-se, igualmente, aplicando o TEOREMA DA CONTINUIDADE UNIFORME, que, *se a função f é contínua sobre L e, se esta linha é rectificável, f é integrável sobre L.* Trata-se, pois, de uma condição suficiente de integrabilidade.

Uma condição necessária de integrabilidade é a seguinte: *Se f é integrável sobre L, então, f é limitada sobre L e esta linha é rectificável.*

Supondo f integrável sobre L e representando por $|L|$ o comprimento de L, tem-se a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL:

(1) $$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leq |L| \sup_{z\in L} |f(z)|.$$

Suponhamos, agora, que a linha L é *regular,* isto é, que admite uma representação paramétrica $z = \varphi(t)$, em que a função complexa φ tem derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Então, demonstra-se a seguinte fórmula fundamental:

(2) $$\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

que converte o integral de uma função de variável complexa no integral de uma função complexa de variável real, isto é, do tipo estudado no número anterior. Esta fórmula é, como se vê, análoga à que se usa na mudança de variáveis em integrais simples.

3. Nova definição de integral para funções complexas de variável complexa

Em vez de demonstrar todos os teoremas anteriormente enunciados, o que nos faria dispender muito tempo sem grande vantagem, é preferível, seguindo o exemplo de vários autores, tomar a fórmula (2) como ponto de partida para uma nova definição de integral, que, embora menos geral que a anterior, é suficiente para as aplicações da teoria das funções analíticas.

Como vimos atrás, diz-se que uma linha orientada L é *seccionalmente regular,* quando é formada por uma *cadeia* (finita) *de arcos regulares* $L_1, L_2, \ldots, L_n$, cada um dos quais, a partir do segundo, tenha por origem a extremidade do anterior.

Posto isto, seja L uma linha orientada, seccionalmente regular, definida parametricamente por $z = \varphi(t)$, com $t \in [a, b]$, e seja f uma função complexa de variável complexa, *contínua sobre* L. Definiremos, agora, o integral $\int_L f(z)\,dz$ de f sobre L do seguinte modo:

a) *Se L é regular, podemos escolher a função φ de modo que tenha derivada contínua em $[a, b]$ e, então, será, por definição*:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

b) *Se L é formada por uma cadeia de arcos regulares, $L_1, L_2, \ldots, L_n$, nas condições atrás indicadas, será, por definição*:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{L_n} f(z)\,dz. \tag{2}$$

Deste modo, só fica definido o integral na hipótese em que L é seccionalmente regular e f contínua sobre L; mas isso, como já dissemos, é suficiente para as aplicações.

Exemplo – Consideremos a curva Υ definida pela função complexa

$$z = e^{it}, \quad \text{com} \quad t \in [0, 2\pi],$$

equivalente às duas funções reais

$$x = \cos t, \ \ y = \operatorname{sen} t, \quad \text{com} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Como se vê, Υ é a circunferência de centro 0 e raio 1, orientada no sentido positivo (anti-horário). Dada, agora, uma função $f(z)$ contínua sobre Υ, será, por definição:

$$\int_\Upsilon f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\; ie^{it}\,dt\,.$$

Suponhamos que é $f(z) \equiv 1/z$. Então, virá:

$$\int_\Upsilon \frac{1}{z}\,dz = i\int_0^{2\pi} dt = i\,[t]_0^{2\pi} = 2\pi i\,.$$

EXERCÍCIO – Calcular o integral de $1/\sqrt{z}$ sobre a poligonal definida por $z = 1 + it$, para $0 \leq t \leq 1$, e $z = (2 - t) + i$ para $1 \leq t \leq 2$.

Vejamos, agora, como, usando a nova definição, se demonstra, por exemplo, a *propriedade da decomposição do caminho de integração.* Suponhamos, primeiramente, L regular. Seja c um ponto qualquer compreendido entre a e b, e designemos por L' e L'' os arcos da linha L determinadas pelos valores do parâmetro t, situados, respectivamente, nos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$. Então, virá, atendendo à definição anterior e ao que se disse no n.º 1:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_a^c f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt + \int_c^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_{L'} f(z)\,dz + \int_{L''} f(z)\,dz\,.$$

É claro que este resultado se estende imediatamente ao caso em que a linha é seccionalmente regular (mas não regular), aplicando a fórmula (3) da definição.

Analogamente se demonstram as propriedades relativas ao integral duma soma e ao integral do produto duma constante por uma função.

Demonstremos, agora, a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL. Basta considerar o caso em que L é regular. Tem-se, então, atendendo à fórmula correspondente, estabelecida no n.º 1 para funções complexas de variável real:

$$(4) \qquad \left|\int_L f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(\varphi(t))\,\varphi'(t)|\,dt.$$

Ora, designando por μ o supremo de $|f(z)|$ sobre L e observando que

$$|f(\varphi(t))\,\varphi'(t)| \leq \mu\,|\varphi'(t)|, \text{ para } a \leq t \leq b,$$

tem-se, pelas propriedades do integral no campo real:

$$(5) \qquad \int_a^b |f(\varphi(t))\,\varphi'(t)|\,dt \leq \mu \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt.$$

Por sua vez, pondo $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, vem

$$(6) \qquad \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[\varphi_1'(t)]^2 + [\varphi_2'(t)]^2}\,dt = |L|.$$

Então, será, atendendo a (4), (5) e (6):

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leq |L| \sup_{z \in L} |f(z)|.$$

Podíamos demonstrar, de modo análogo, que o integral sobre L não depende da parametrização da linha, mas apenas da sua orientação. Mas não vale a pena fazê-lo porque, na prática, o cálculo dos integrais no campo complexo se reduz quase sempre à aplicação do seguinte teorema, que estende a este campo a FÓRMULA DE BARROW:

TEOREMA 3.1. *Se a função f admite primitiva num domínio aberto D que contenha L, isto é, se existe uma função F tal que $F'(z) = f(z)$ para todo o $z \in D$, o integral de f sobre L não depende propriamente do caminho de integração L, mas apenas da sua origem α e da sua extremidade β, tendo-se, precisamente,*

$$\int_L f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha)\,.$$

Esta é a FÓRMULA DE BARROW *no campo complexo.*

Demonstração. 1.º Suponhamos L regular. Então, uma vez verificada a hipótese, tem-se, aplicando o estabelecido no n.º 1:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\varphi(t))\,dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(\beta) - F(\alpha)\,.$$

2.º Suponhamos L formada por uma cadeia de arcos regulares $L_1, L_2, \ldots, L_n$, e sejam $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \beta$, os extremos sucessivos destes arcos. Então, virá, evidentemente, atendendo à fórmula (3) e ao caso já demonstrado:

$$\int_L f(z)\,dz = [F(\alpha_1) - F(\alpha)] + [F(\alpha_2) - F(\alpha_1)] + \cdots + [F(\beta) - F(\alpha_{n-1})] =$$
$$= F(\beta) - F(\alpha)\,, \text{ (q.e.d.).}$$

Em particular, se L é fechada, tem-se $\alpha = \beta$ e $F(\beta) = F(\alpha)$, isto é:

COROLÁRIO 1. *Se f admite primitiva em D, é nulo o integral de f sobre qualquer linha fechada orientada, seccionalmente regular, contida em D.*

Uma outra consequência importante do teorema é a seguinte:

COROLÁRIO 2. *Se duas funções admitem como derivada uma mesma função f num domínio aberto D do plano, essas funções diferem necessariamente por uma constante em D.*

Com efeito, sejam F_1 e F_2 duas funções tais que

$$F_1'(z) = F_2'(z) = f(z)\,,$$

em todo o ponto z dum domínio aberto, D de $\mathbf{C}$, e sejam α, z dois pontos quaisquer de D. Como D é *conexo* (por definição de domínio), existe, pelo menos, uma poligonal P de extremos α e z contida em D. Supondo P orientada de α para z, virá, aplicando o teorema:

$$\int_P f(z)\,dz = F_1(z) - F_1(\alpha) = F_2(z) - F_2(\alpha)$$

e portanto

$$F_1(z) - F_2(z) = F_1(\alpha) - F_2(\alpha),$$

para todo o $z \in D$, o que prova a tese.

Note-se como neste corolário é essencial a hipótese de D ser conexo. Por exemplo, se D fosse um conjunto aberto desconexo, já a tese não seria verdadeira.

Em particular, este corolário pode apresentar-se nos seguintes termos:

Se uma função admite derivada nula num domínio D, essa função reduz-se a uma constante em D.

O TEOREMA 3.1 pode aplicar-se, por exemplo, a calcular o integral dum polinómio $p(z) \equiv a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, sobre qualquer linha orientada L (seccionalmente regular). Com efeito, a função $p(z)$ admite como primitiva, por exemplo, a função $F(z) \equiv a_0 z + a_1 z^2/2 + \cdots + a_n z^{n+1}/(n+1)$ *em todo o plano,* e, portanto, o integral de $p(z)$ sobre uma tal linha L de origem z_1 e extremidade z_2 será

$$(7) \qquad \int_L p(z)\,dz = a_0(z_2 - z_1) + \cdots + a_n \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}.$$

Mais geralmente, demonstraremos que toda a função holomorfa num domínio aberto D, admitirá primitiva em D, *desde que este domínio verifique certas condições topológicas que vamos estudar.*

4. Domínios simplesmente conexos e domínios multiplamente conexos

Começaremos por admitir o seguinte importante teorema da topologia do plano:

TEOREMA DE JORDAN. *No plano* $\mathbf{R}^2$, *toda a linha fechada simples L, que não se reduza a um ponto, é fronteira comum de dois domínios abertos, um limitado e outro ilimitado, separados entre si por L, sendo a reunião desses domínios e da linha o plano inteiro.*

Nestas condições, dado um ponto a qualquer do plano, verifica-se uma e só uma das três seguintes hipóteses:

1) O ponto a pertence ao domínio limitado D_1 de fronteira L: diz-se, então, que a é *interno* (ou *interior*) a L.

2) O ponto a pertence ao domínio ilimitado D_2 de fronteira L: diz-se, então, *externo* (ou *exterior*) a L.

3) O ponto a pertence à linha L.

Todavia, estes conceitos de ponto a interior ou exterior a uma linha não devem ser confundidos com as noções de ponto interior ou exterior a um conjunto, atrás definidas. Não se trata da mesma coisa e, por isso, as designações "interno" e "externo" são, neste caso, preferíveis.

Diremos, ainda, que a linha *L circunda* o ponto *a,* quando este é interno a L.

Todas as demonstrações do TEOREMA DE JORDAN até hoje propostas são demasiado longas e difíceis. Como se trata de um facto bastante intuitivo, dispensaremos a sua demonstração, seguindo o exemplo de muitos autores.

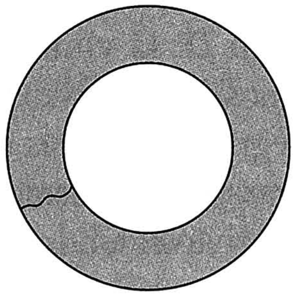
Convencionámos chamar *domínio aberto* do plano, a todo o conjunto aberto conexo e não vazio de pontos do plano e *domínio fechado* à aderência de todo o domínio aberto (isto é, a este *mais* a fronteira). Posto isto:

DEFINIÇÃO 4.1. *Diz-se que um domínio D do plano é simplesmente conexo, se, qualquer que seja a linha fechada simples L, contida em D, os pontos internos a L ainda pertencem a D.*

Por exemplo, é fácil ver que um círculo aberto ou fechado é simplesmente conexo. Mais geralmente, demonstra-se que o domínio aberto limitado por qualquer linha fechada simples é simplesmente conexo (homeomorfo ao círculo aberto).

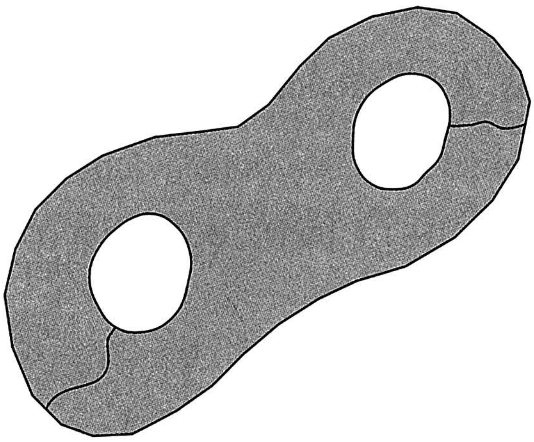
Por sua vez, uma coroa circular já não será um domínio simplesmente conexo; mas pode tornar-se simplesmente conexo suprimindo os pontos de qualquer arco simples que ligue a circunferência interior com a circunferência exterior.

Pois bem, diz-se que um domínio é *duplamente conexo,* quando não é simplesmente conexo, mas pode ser transformado num tal conjunto, pela supressão dos pontos de uma linha contínua simples (isto é, sem pontos múltiplos).



Mais geralmente, sendo p um número natural qualquer:

DEFINIÇÃO 4.2. *Diz-se que um domínio D do plano é multiplamente conexo de ordem* $p+1$, *quando se pode tornar simplesmente conexo pela supressão de* p *(e não menos de* p*) linhas contínuas simples.*



Por exemplo, o domínio indicado na figura acima é *triplamente conexo*. Dum modo geral, quando, do interior de um domínio aberto simplesmente conexo, se retiram p domínios fechados simplesmente conexos (os conjuntos reduzidos a pontos) separados entre si, obtém-se um domínio conexo de ordem $p+1$.

Também se pode dizer que um domínio D do plano é *conexo de ordem* $p+1$, quando se podem traçar nesse domínio p linhas fechadas simples (mas não mais de p), exteriores umas às outras, que circundem pontos não pertencentes a D.

5. Primeira forma do teorema fundamental de CAUCHY. Demonstração de RIEMANN

Seja f uma função complexa, definida e contínua num domínio aberto D do plano, e consideremos uma linha orientada L, seccionalmente regular, contida em D. Já vimos que existe, então, o integral de f sobre L. Procuremos, agora, as expressões da parte real e da parte imaginária desse integral. Basta-nos considerar o caso em que L é regular, representada parametricamente por uma função $z=\varphi(t)$, definida e continuamente derivável em $[a, b]$, com $a<b$. Então:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Ponhamos, agora, para cada ponto $z \in D$:

$$f(z) = u + iv, \text{ com } u = f_1(x, y),\ v = f_2(x, y)$$

$$\varphi(t) = x + iy, \text{ com } x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),$$

sendo x, y, u, v, reais. A função integranda do 2.º membro de (1) será, então:

$$\{f_1[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] + i\, f_2[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]\}\ [\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)],$$

ou, abreviadamente:

$$(u+iv)\left(\frac{dx}{dt} + i\,\frac{dy}{dt}\right) = \left(u\,\frac{dx}{dt} - v\,\frac{dy}{dt}\right) + i\left(u\,\frac{dy}{dt} + v\,\frac{dx}{dt}\right)$$

e portanto:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_a^b \left(u\,\frac{dx}{dt} - v\,\frac{dy}{dt}\right) dt + i\int_a^b \left(u\,\frac{dy}{dt} + v\,\frac{dx}{dt}\right) dt.$$

Mas o primeiro termo do segundo membro é o integral curvilíneo do diferencial $u\,dx - v\,dy$ sobre L:

$$\int_a^b \left(u \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_L (u\,dx - v\,dy)\,,$$

também chamado *circulação do vector* $(u, -v)$ *sobre* L, enquanto o segundo termo é o integral curvilíneo de $v\,dx + u\,dy$ sobre L. Será, pois, finalmente:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i \int_L (v\,dx + u\,dy)\,.$$

Este resultado estende-se imediatamente ao caso em que L é seccionalmente regular, atendendo à definição de integral curvilíneo, análoga à de integral de f sobre L.

Suponhamos, agora, que *o domínio* D *é simplesmente conexo* e que f *admite derivada* f' *contínua em* D. Então, u, v, também admitem derivadas parciais, em ordem a x e a y, contínuas em D e tem-se, atendendo às condições de holomorfia (Capítulo II):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\,.$$

Mas, como se viu na cadeira de Cálculo Infinitesimal, estas condições implicam que os diferenciais $u\,dx - v\,dy$, $v\,dx + u\,dy$ *são exactos em* D ou (o que é equivalente) *que os campos de vectores* $(u, -v)$ *e* (v, u) *são conservativos em* D. Logo, os respectivos integrais sobre L são nulos e portanto

$$\int_L f(z)\,dz = 0\,.$$

Assim, em conclusão:

TEOREMA 5.1. *Se a função complexa* f *admite derivada contínua num domínio simplesmente conexo* D, *o integral de* f *sobre qualquer linha fechada* L *(seccionalmente regular) contida em* D *é nulo.*

Esta proposição é denominada TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY e a demonstração anterior é atribuída a RIEMANN. Porém, o matemático francês GOURSAT conseguiu demonstrar a mesma tese com uma hipótese mais geral, isto é, supondo apenas que f *admite derivada finita em todo o ponto do domínio D.* Basta, portanto, supor que f *é holomorfa em D* (segundo a definição dada no Capítulo II), não se exigindo a hipótese da continuidade. A proposição assim obtida, embora mais geral que a anterior, continua a ser chamada TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY, e é um dos pilares da teoria das funções analíticas.

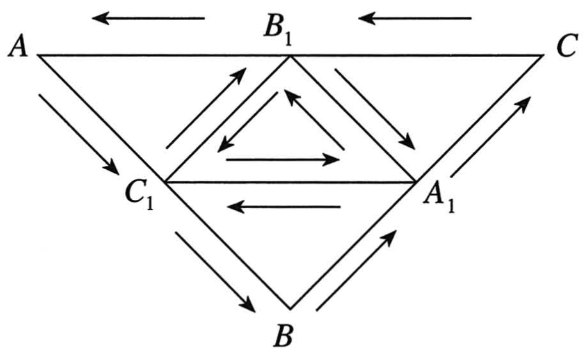
6. O teorema fundamental de CAUCHY para poligonais. Demonstração de GOURSAT

Começaremos por dar a demonstração de GOURSAT deste teorema no caso em que a linha L é uma poligonal. Vamos, pois, provar o seguinte:

TEOREMA 6.1. *Se* f é *uma função holomorfa num domínio aberto D, simplesmente conexo do plano, sendo P qualquer linha poligonal fechada, simples e orientada, contida em D, o integral de f sobre P é nulo, isto é, tem-se*

$$\int_P f(z)\,dz = 0\,.$$

Normalmente, as linhas fechadas simples do plano consideram-se orientadas no sentido positivo (sentido anti-horário).



Para a demonstração, suponhamos, em primeiro lugar, que P é um triângulo T, orientado positivamente. Trata-se, pois, de provar que

$$\int_T f(z)\,dz = 0\,.$$

Suponhamos que este integral não é nulo, e seja μ o seu módulo (será, pois, $\mu > 0$). Decomponhamos T em quatro triângulos unindo os pontos médios dos seus lados por meio de segmentos de rectas (ver figura junta). É fácil, então, ver que o integral de f sobre T é igual à soma dos integrais de f sobre os triângulos da decomposição percorridos no mesmo sentido; para isso, basta notar que, sobre qualquer lado comum (por exemplo, sobre A_1B_1), os integrais correspondentes a dois triângulos parciais são simétricos e, portanto, se anulam na soma. Daqui resulta que, sobre um desses triângulos, pelo menos (designemo-lo por T_1), o módulo do integral de f não pode ser inferior $\mu/4$. Designemos por s o perímetro de T; então, será $s/2$ o perímetro de T_1.

Podemos, agora, raciocinar para T_1 como fizemos para T; teremos, assim, um triângulo T_2 de perímetro $s/4$, sobre o qual o módulo do integral de f é $\geq \mu/16$. Ao cabo de n operações deste tipo, chegamos a um triângulo T_n de perímetro $s/2^n$ tal que

$$(1) \qquad \left| \int_{T_n} f(z)\,dz \right| \geq \frac{\mu}{4^n}\,.$$

Mas os triângulos T_n, com os respectivos interiores, formam uma sucessão de conjuntos fechados cujo diâmetro tende para 0. Logo, como o espaço **C** é completo, existe um ponto z_0 interior a todos esses triângulos. Por outro lado, como D é *simplesmente conexo* (por hipótese), os triângulos T_n e o ponto z_0 estarão todos nesse domínio[1]. Portanto, em virtude da hipótese, f admite derivada finita em z_0 e, assim, a cada $\delta > 0$, corresponde um $\varepsilon > 0$ tal que:

$$(2) \qquad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \delta \quad \text{para} \quad |z - z_0| < \varepsilon\,.$$

(1) Importa notar que é precisamente neste ponto da demonstração que intervém a hipótese de D ser simplesmente conexo.

Como z_0 é interior a todos os triângulos T_n e o diâmetro destes tende para zero, podemos escolher n de modo que T_n fique contido no círculo $|z-z_0|< \varepsilon$ e, portanto, teremos, sobre os lados desse triângulo:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0) + \rho(z),$$

em que, segundo (2),

(3) $$|\rho(z)| < |z - z_0|\, \delta.$$

Mas $f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0)$ é um polinómio em z e, portanto, o seu integral sobre T_n é nulo, segundo o estabelecido no n.º 3. Será, pois, para todo o n:

$$\int_{T_n} f(z)\, dz = \int_{T_n} \rho(z)\, dz.$$

Aplicando a fórmula de majoração dos integrais estabelecida no n.º 3 e atendendo a (3), virá

$$\left|\int_{T_n} f(z)\, dz\right| \leqslant |T_n|\, \delta \max_{z \in T_n} |z - z_0| = \frac{s}{2^n}\, \delta \max_{z \in T_n} |z - z_0|.$$

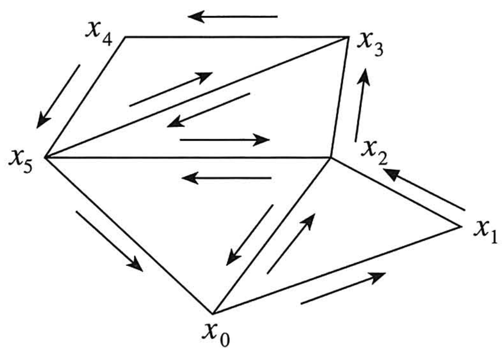
Mas é fácil ver que a distância máxima de z_0 aos lados do triângulo T_n não excede o perímetro deste, que é $s/2^n$. Por conseguinte virá:

$$\left|\int_{T_n} f(z)\, dz\right| \leqslant \frac{s^2 \delta}{4^n},$$

o que está em contradição com (1), visto que, como δ é arbitrário, podemos escolhê-lo de modo que seja $s^2 \delta < \mu$, isto é, podemos tomar $\delta < \mu / s^2$. A contradição resulta de supor que o integral de f sobre T não é nulo; tem-se, pois, necessariamente,

$$\int_T f(z)\, dz = 0.$$

Suponhamos, agora, que P é uma poligonal simples fechada qualquer, contida em D. Então, o polígono limitado por P é decomponível num número finito de triângulos e, aplicando o resultado



anterior, facilmente se chega à tese, observando mais uma vez que, sobre os lados comuns, os integrais de f correspondentes a dois triângulos são simétricos e, portanto, se anulam na soma: o integral sobre P será igual à soma dos integrais sobre os triângulos e portanto nulo.

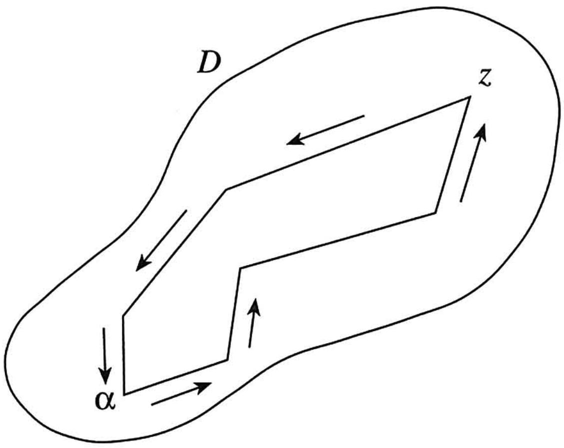
7. O teorema fundamental do cálculo integral no campo complexo. Forma geral do teorema fundamental de CAUCHY

Podemos começar por estender o TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL *ao campo complexo* com o seguinte aspecto:

TEOREMA 7.1. *Seja f uma função holomorfa num domínio aberto simplesmente conexo D, do plano, e seja α um ponto qualquer fixo de D. Então, o integral de f sobre uma linha poligonal P orientada e contida em D, com a origem em α e a extremidade num ponto variável z de D, não depende propriamente do caminho de integração P, mas apenas do ponto z (visto que α é fixo). Fica assim definida uma função $\Phi(z)$ em D; esta função é holomorfa em D e a sua derivada coincide com $f(z)$, isto é, tem-se:*

$$\Phi'(z) = f(z), \quad \textit{para todo o} \quad z \in D.$$

Para demonstrar a primeira parte do teorema, consideremos duas linhas poligonais, P_1 e P_2, orientadas e contidas em D, com a



origem em α e a extremidade em z. Suponhamos, primeiramente, que estas duas linhas só têm de comum os extremos. Então, formam uma linha poligonal fechada simples Γ, contida em D, que podemos supor orientada, por exemplo, percorrendo P_1 no mesmo sentido em que está orientada e P_2 em sentido contrário. Portanto, aplicando o TEOREMA DE CAUCHY para linhas poligonais, virá:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{P_1} f(z)\,dz - \int_{P_2} f(z)\,dz = 0,$$

ou seja,

$$\int_{P_1} f(z)\,dz = \int_{P_2} f(z)\,dz.$$

Suponhamos, agora, que P_1 e P_2 se encontram em sucessivos pontos

$$z_1, z_2, \dots z_n,$$

além dos extremos (é claro que estes pontos só podem ser em número finito, a não ser que as linhas tenham segmentos comuns). Então, aplicando o resultado anterior vê-se que os integrais de f sobre as porções de P_1 e P_2 situadas entre α e z_1 têm o mesmo valor, e o mesmo entre z_1 e z_2, entre z_2 e z_3, ..., entre z_n e z. Logo, os integrais de f sobre P_1 e P_2 (entre α e z) são iguais.

Finalmente, no caso em que as linhas têm segmentos comuns, pode raciocinar-se de modo análogo.

O integral não depende, pois, propriamente do caminho de integração e define, portanto, uma função uniforme $\Phi(z)$ em D.

Demonstremos, agora, a segunda parte do teorema. Seja z_0 um ponto qualquer de D; então, $\Phi(z_0)$ será o integral de f sobre uma linha poligonal P_0 contida em D, com origem em α e extremidade em z_0. Como o domínio D é aberto, por hipótese, z_0 é interior a D e, portanto, existe um número $\rho > 0$ tal que a vizinhança (ρ) de z_0 esteja contida em D. Seja, agora, z um ponto qualquer dessa vizinhança; então, o segmento de extremos z_0 e z estará contido em D. Se juntarmos à poligonal P_0 o segmento orientado $\overrightarrow{z_0 z}$, obteremos uma nova poligonal orientada P contida em D, com a origem em α e a extremidade em z. Logo, aplicando o teorema relativo à decomposição do caminho de integração, virá

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(u)\,du,$$

visto que $\Phi(z)$ é o integral de f sobre P e $\Phi(z_0)$ o de f sobre P_0.

Mas, como f é contínua em z_0, visto ser diferenciável nesse ponto (por hipótese), tem-se

$$f(z) = f(z_0) + r(z),$$

sendo $r(z)$ um infinitésimo com $z - z_0$. Será, pois, em virtude do estabelecido no n.º 3 (PROPOSIÇÃO 3.1 e sua aplicação aos polinómios):

$$\int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(u)\,du = f(z_0)(z - z_0) + \int_{\overrightarrow{z_0 z}} r(u)\,du,$$

e portanto, atendendo a (1):

$$\frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{\int_{\overrightarrow{z_0 z}} r(u)\,du}{z - z_0}. \tag{2}$$

Trata-se, agora, de provar que a derivada de Φ em z_0 é precisamente $f(z_0)$, isto é, que a razão incremental de Φ em z_0 tende para $f(z_0)$ quando $z \to z_0$, o que equivale a mostrar que o segundo membro de (2) tende para zero quando $z \to z_0$. Para isso, basta aplicar a fórmula de majoração do integral estabelecida no n.º 3, notando que o comprimento do segmento $\overrightarrow{z_0 z}$ é $|z - z_0|$. Com efeito, designando por $\mu(z)$ o supremo (aliás máximo) da função $|r(u)|$ sobre este segmento, virá:

$$\left| \frac{\int_{\overrightarrow{z_0 z}} r(u)\,du}{z - z_0} \right| \leq \frac{\mu(z)|z - z_0|}{|z - z_0|} = \mu(z)\,.$$

Mas $r(z)$ é um infinitésimo com $z - z_0$, isto é, a cada $\delta > 0$ corresponde um $\varepsilon > 0$ tal que $|r(z)| < \delta$ para $|z - z_0| < \varepsilon$. Então, o mesmo sucede com o supremo de $|r(u)|$ sobre $\overrightarrow{z_0 z}$ e assim fica provado o que pretendíamos.

Atendendo agora à PROPOSIÇÃO 3.1 e ao seu COROLÁRIO, imediatamente se reconhece o seguinte:

ESCÓLIO. *O* TEOREMA 6.1 *continua a ser válido se substituirmos poligonais por linhas seccionalmente regulares quaisquer, e, assim, o teorema de Cauchy ficará automaticamente generalizado a linhas fechadas seccionalmente regulares.*

Mas note-se que o TEOREMA DE CAUCHY ainda pode ser enunciado com a seguinte forma bastante mais geral:

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY. *Seja D um domínio limitado e fechado do plano, que tenha por fronteira uma linha fechada simples, rectificável e orientada* Γ*; então, se for* f *uma função holomorfa no interior de D e contínua sobre D* (*isto é, sobre o interior mais a fronteira*), *o integral de* f *sobre* Γ *é nulo.*

Neste enunciado intervém a definição mais geral de integral duma função de variável complexa, apresentada no n.º 2. Para a demonstração, pode ver-se, por exemplo, VALIRON (obra cit.). Todavia, nas aplicações, é em geral suficiente a forma anterior do TEOREMA DE CAUCHY, para linhas seccionalmente regulares, tal como se indica no escólio.

No que se segue, empregaremos algumas vezes a última forma do teorema, apenas para dar maior generalidade aos enunciados.

Em virtude do teorema fundamental do cálculo integral, *sendo D um domínio simplesmente conexo*, o integral duma função f holomorfa em D sobre uma linha de origem α e extremidade em β, contida em D, pode designar-se, simplesmente, pela notação já usada no campo real

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\, dz,$$

visto que o integral só depende dos limites de integração. *Mas, se D não é simplesmente conexo, esta notação pode tornar-se ambígua, como vamos ver.*

Aplicação ao estudo da função logarítmica.

Seja $f(z) \equiv 1/z$. Esta função é, evidentemente, holomorfa no conjunto $\mathbf{C}^*$ dos números complexos distintos de zero e desde logo se vê que $\mathbf{C}^*$ é um domínio aberto duplamente conexo. Porém, se for D um *domínio simplesmente conexo contido em* $\mathbf{C}^*$, a função $1/z$ *restringida* a D admite, segundo o TEOREMA 7.1, funções primitivas $\varphi(z)$ (uniformes), cuja expressão geral é:

$$\varphi(z) = c + \int_{a}^{z} \frac{1}{u}\, du, \tag{3}$$

sendo a e c números complexos arbitrários, com $a \in D$. *Tomemos para valor da constante c um dos logaritmos de a*. Será, então, $e^c = a$. Ora, facilmente se deduz de (3) que a derivada de $z e^{-\varphi(z)}$ é nula em D; logo, em virtude do COROLÁRIO 2 do TEOREMA 3.1, esta função é constante em D e como, para $z = a$, o seu valor é $a\, e^{-c} = a/e^c = a/a = 1$, tem-se:

$$z e^{-\varphi(z)} = 1,$$

ou seja,

$$e^{\varphi(z)} = z, \qquad \text{para todo o } z \in D.$$

A função φ, *holomorfa em D, é, pois, um ramo* (*uniforme*) *da função* log z *neste domínio. Por conseguinte, a função logarítmica admite uma infinidade de ramos holomorfos em todo o domínio simplesmente conexo do plano que não contenha a origem e, portanto, em todo o domínio que não circunde a origem.*

Assim, fica demonstrado rigorosamente um facto que tínhamos apresentado de modo intuitivo no Capítulo II. (Aliás, este resultado pode servir para demonstrar o facto análogo para a função $\sqrt[n]{z}$, com n qualquer (natural); basta notar que, sendo $\varphi(z)$ um ramo holomorfo de $\log z$ em D, a função

$$\theta(z) = e^{\frac{\varphi(z)}{n}}$$

é holomorfa em D e tem-se $[\theta(z)]^n = z$ para todo o $z \in D$).

Poderemos, pois, escrever sem ambiguidade:

$$\int_a^b \frac{1}{z}\, dz = \log b - \log a\,,$$

se nos restringirmos a um domínio *que não circunde a origem* e a *um só ramo* da função logarítmica nesse domínio. *Em particular, o integral da função* $1/z$ *sobre uma linha* Υ, *fechada, simples e rectificável, será nulo se* Υ *não circunda a origem.*

Porém, o mesmo já não acontece se a linha Υ (fechada simples) circunda a origem; *então, supondo a linha orientada no sentido positivo, o integral terá o valor* $2\pi i$, como já vimos em exemplo, no n.º 3, sendo Υ uma circunferência. Com efeito, neste caso, o argumento de z varia de 0 a 2π e portanto $\log z$ tem uma variação de $2\pi i$.

Assim, o integral de $1/z$ entre -1 e 1, por exemplo, terá como valor $-i\pi$ ou $i\pi$, conforme o caminho de integração estiver situado acima ou abaixo do eixo real, e pode ainda tomar outros valores, se o caminho der uma ou mais voltas em torno da origem.

Dum modo geral, se for a um número complexo qualquer e Υ uma linha fechada, simples e rectificável do plano, orientada positivamente, vê-se, de modo análogo, que:

$$\int_\Upsilon \frac{dz}{z-a} = 0 \quad \text{ou} \quad \int_\Upsilon \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\,,$$

conforme a for externo ou interno a Υ (se a for um ponto de Υ, não existe integral).

Mais geralmente, ainda, se for Υ uma linha *fechada rectificável qualquer* (simples ou não), tem-se, para todo o ponto a não situado em Υ:

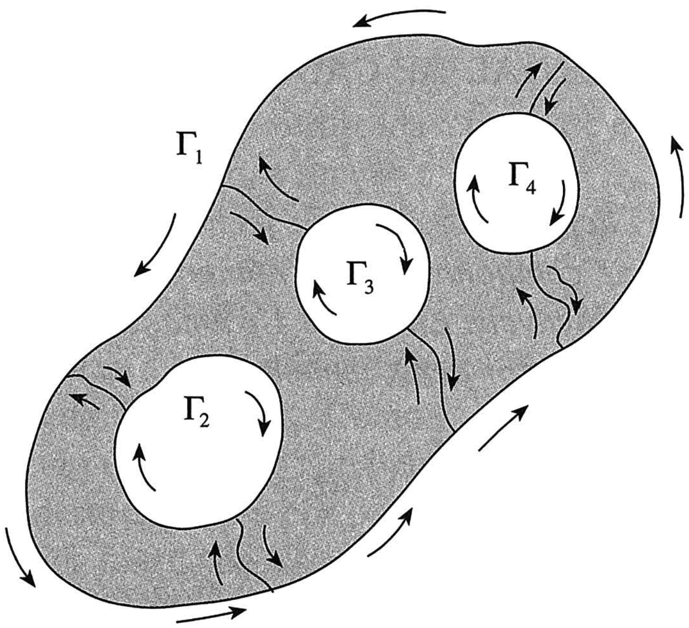
$$\int_{\Upsilon} \frac{dz}{z-a} = 2k\pi i,$$

sendo k um número inteiro não negativo, chamado o *índice do ponto a em relação a Υ* (intuitivamente, k *é o número de voltas que a linha Υ dá em torno do ponto a*).

8. Caso dos domínios multiplamente conexos

O estudo anterior mostra-nos que o TEOREMA DE CAUCHY, tal como foi enunciado, não é válido, em geral, para domínios multiplamente conexos.

Consideremos, agora, um domínio D limitado e *fechado,* cuja fronteira seja formada por $p+1$ linhas fechadas simples e rectificáveis $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$, sendo a primeira externa às restantes. Seja, por outro lado, f uma função holomorfa no interior de D e contínua sobre D (isto é, sobre o interior *mais* a fronteira).



Então, D é *conexo de ordem* $p+1$ e será sempre possível decompor D num número finito de domínios simplesmente conexos, ligando um par de pontos de cada curva interna com a curva Γ_1 por meio de arcos simples. Esta propriedade topológica é evidente em casos simples; admiti-la-emos no caso geral sem demonstração.

Considerando, agora, as fronteiras dos domínios parciais orientadas no sentido positivo, é fácil reconhecer que os integrais de f

correspondentes a estas diferentes linhas orientadas, são simétricos sobre as partes comuns das mesmas e, por conseguinte, anulam-se na soma. Como, em virtude do TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY, todos esses integrais são nulos, segue-se que também será

$$\int_{\Gamma_1^+} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\Gamma_n^-} f(z)\,dz = 0\,,$$

em que Γ_1^+ designa a linha externa orientada no sentido positivo e $\Gamma_2^-, \ldots, \Gamma_n^-$, as linhas internas orientadas no sentido negativo. Ora, é natural designar esta soma de integrais ainda pela notação

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz$$

e chamar-lhe *integral de f sobre a linha* Γ (*descontínua*) *orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de D.* Chegamos, assim, ao seguinte teorema, que podemos considerar como variante do TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY para domínios multiplamente conexos:

TEOREMA 8.1. *Seja D um domínio fechado e limitado do plano, cuja fronteira* Γ *se componha de um número finito de linhas fechadas, simples e rectificáveis. Então, se f é uma função contínua sobre D e holomorfa no interior de D, tem-se:*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0\,,$$

supondo Γ *orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de D.*

Diremos que uma função f é *holomorfa sobre um conjunto K* qualquer de pontos do plano, quando é holomorfa em algum conjunto aberto que contenha K. Deste modo, se uma função f é holomorfa sobre um domínio fechado D, será evidentemente holomorfa no interior de D e contínua sobre D, verificando, portanto, a hipótese do TEOREMA 8.1. Mas a recíproca não é verdadeira, como se pode mostrar com exemplos.

9. Fórmula integral de CAUCHY

A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY é uma consequência do TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY e constitui, juntamente com este, a chave de toda a teoria das funções analíticas:

TEOREMA 9.1. *Seja D um domínio limitado e fechado do plano, cuja fronteira Γ se componha de uma ou mais linhas fechadas, simples e rectificáveis. Então, se f é uma função contínua sobre D e holomorfa no interior de D, tem-se, para todo o ponto z interior a D:*

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du,}$$

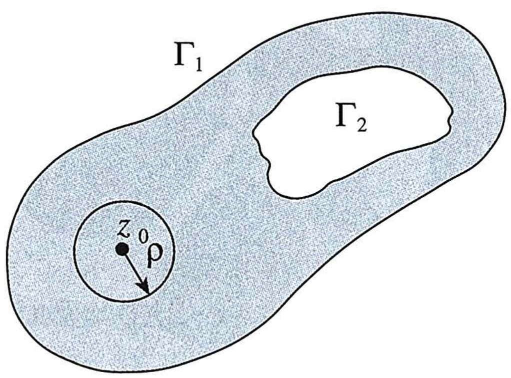
supondo a linha Γ orientada de modo a deixar à esquerda os pontos deste domínio.

Esta fórmula, como se vê, fornece o valor da função em qualquer ponto interior do domínio, uma vez conhecidos os valores da mesma sobre a fronteira.

Demonstração. Suponhamos verificada a hipótese e seja z_0 um ponto qualquer interior a D. Então, a função

$$\frac{f(u)}{u-z_0}$$

da variável complexa u será, evidentemente, holomorfa no interior do domínio D privado do ponto z_0. Como z_0 é interior a D, existe, pelo menos, um círculo C de centro z_0 e interior a D. Designemos por Υ a circunferência deste círculo e por ρ o seu raio. Então, em virtude da hipótese, a referida função de u será holomorfa no interior do conjunto $D \backslash C$ e contínua sobre o fecho do mesmo (que é um domínio fechado).



Podemos, portanto, aplicar a este caso o TEOREMA 8.1. Assim, será nulo o integral da referida função de u sobre a fronteira de $D\backslash C$, orientada de modo a deixar à esquerda os pontos deste conjunto. Mas esse caminho de integração é formado pela fronteira de D, orientada como se disse, e pela circunferência Υ, *orientada no sentido negativo.* Logo, tem-se

$$(1) \qquad \int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z_0}\,du = \int_\Upsilon \frac{f(u)}{u-z_0}\,du,$$

supondo Υ *orientada no sentido positivo.*

Notemos, agora, que a função f *é contínua em* z_0 (visto ser diferenciável nesse ponto, por hipótese). Tem-se, pois,

$$f(u) = f(z_0) + r(u),$$

sendo $r(u)$ um infinitésimo com $u-z_0$. Assim, para cada número $\delta > 0$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que se tem

$$(2) \qquad |r(u)| < \delta \text{ quando } \rho < \varepsilon\,, \text{ sendo } \rho = |u - z_0|\,.$$

Podemos supor o raio ρ de Υ escolhido já de modo a ser menor que ε. Então, virá, visto que $f(z_0)$ é constante:

$$(3) \qquad \int_\Upsilon \frac{f(u)}{u-z_0}\,du = f(z_0)\int_\Upsilon \frac{du}{u-z_0} + \int_\Upsilon \frac{r(u)}{u-z_0}\,du\,.$$

Segundo o que vimos no final do n.º 7, o primeiro integral do 2.º membro é igual a $2\pi i$. Quanto ao outro termo, basta aplicar a fórmula de majoração do integral, notando que o comprimento de Υ é $2\pi\rho$ e que, para todo o $u \in \Upsilon$, se tem, segundo (2):

$$\left|\frac{r(u)}{u-z_0}\right| = \frac{|r(u)|}{|u-z_0|} < \frac{\delta}{\rho}\,.$$

Portanto, será:

$$\left|\int_\Upsilon \frac{r(u)}{u-z_0}\,du\right| < \frac{\delta}{\rho}\cdot 2\pi\rho = 2\pi\delta\,.$$

Ora, o 2.º membro desta desigualdade tende para zero quando $\delta \to 0$. Logo, virá, atendendo a (1) e a (3):

$$\int_\Gamma \frac{f(u)}{u - z_0}\, du = 2\pi i\, f(z_0),$$

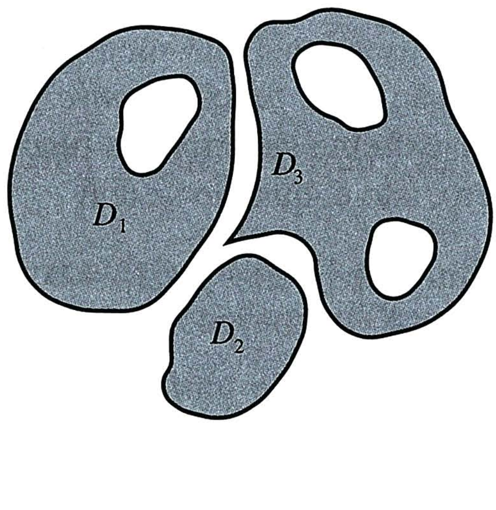
ou seja,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(u)}{u - z_0}\, du, \qquad \text{(q.e.d.)}.$$

Supusémos aqui z_0 *interior a D. Se* z_0 *for exterior a D, o integral é nulo, visto que, então, a função integranda é holomorfa no interior de D e contínua sobre D.*

Caso dos conjuntos abertos desconexos.

Até aqui, temos considerado, sistematicamente, funções holomorfas em *domínios abertos,* isto é, em *conjuntos abertos conexos* (não vazios). Consideremos agora, mais geralmente, uma função f holomorfa num conjunto aberto Ω de pontos de **C**, formado por m domínios D_1, D_2, ..., D_m, separados uns dos outros (*componentes de* Ω). Suponhamos a fronteira Γ de Ω, formada por um número finito de linhas fechadas simples e rectificáveis, e orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de Ω (no caso da figura, Ω tem 3 componentes e Γ tem 6 componentes). Suponhamos, ainda, f *contínua sobre o fecho de* Ω.



Então, para $k=1, 2, \ldots, m$, virá, designando por Γ_k a fronteira de D_k:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{f(u)}{u-z}\,du=\begin{cases} f(z), & \text{se } z\in D_k,\\ 0, & \text{se } z\in D_j \text{ com } j\neq k,\end{cases}$$

visto que, no 1.º caso, se aplica a FÓRMULA DE CAUCHY e, no 2.º caso, se aplica o TEOREMA DE CAUCHY, por a função integranda ser, então, holomorfa em D_k e contínua sobre $\overline{D}_k$.

A soma de todos estes integrais, para $k=1, \ldots, m$, poderá ainda chamar-se *integral da função* $f(u)/(u-z)$ *de* u *sobre* Γ e ser designada por notação análoga. Assim, teremos, finalmente:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(u)}{u-z}\,du, \quad \text{para todo o } z\in\Omega,$$

o que é a FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY *estendida a abertos desconexos, nas condições precisadas.*

Ainda é natural chamar *comprimento de* Γ e designar por $|\Gamma|$ a soma dos comprimentos das suas componentes.

10. Convergência uniforme no campo complexo

Para deduzir as primeiras consequências importantes da FÓRMULA DE CAUCHY, necessitamos de um estudo prévio sobre a *convergência uniforme* no campo complexo.

Seja K um conjunto qualquer de números complexos. Dada uma sucessão de funções complexas $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, todas definidas em K, diz-se que esta sucessão *converge pontualmente para uma função* φ *em* K, quando, em todo o ponto $z\in K$, a sucessão dos valores $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, dessas funções, tende para o valor $\varphi(z)$ de φ no mesmo ponto.

Diz-se que a sucessão f_n de funções *converge para* φ, *uniformemente em* K, quando o extremo superior das funções $|\varphi(z)-f_n(z)|$ de z em K tende para zero, isto é, quando se tem

$$\lim\,(\sup_{z\in K}|\varphi(z)-f_n(z)|)=0\,.$$

É evidente que convergência uniforme implica convergência pontual; mas a recíproca não é verdadeira

Tal como para as funções de variável real, verifica-se o seguinte:

Se uma sucessão f_n *de funções converge, uniformemente em K, e se essas funções são contínuas sobre K, a função limite* φ *também é contínua sobre K.*

Com efeito, sendo α um ponto *qualquer* de K, tem-se para todo o n:

$$(1) \quad \varphi(z)-\varphi(\alpha)=[\varphi(z)-f_n(z)]+[f_n(z)-f_n(\alpha)]+[f_n(\alpha)-\varphi(\alpha)].$$

Seja, então, δ um número positivo arbitrário. Se a sucessão f_n converge para φ uniformemente em K, existe, certamente, um valor ν de n tal que

$$(2) \qquad |f_\nu(z)-\varphi(z)|<\frac{\delta}{3}, \text{ para todo o } z\in K.$$

Se, além disso, as funções f_n são contínuas sobre K, existe um número $\varepsilon>0$ tal que

$$(3) \qquad |f_\nu(z)-f_\nu(\alpha)|<\frac{\delta}{3}, \text{ para } |z-\alpha|<\varepsilon \text{ com } z\in K.$$

Logo, virá, combinando (1), (2) e (3):

$$|\varphi(z)-\varphi(\alpha)|<\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}=\delta, \text{ para } |z-\alpha|<\varepsilon, \text{ com } z\in K,$$

o que significa que φ é contínua sobre K.

Na mesma hipótese subsiste o CRITÉRIO DE PERMUTABILIDADE ENTRE OS SÍMBOLOS DE LIMITE E DE INTEGRAL:

TEOREMA 10.1. *Condição suficiente para que se tenha*[1]

$$\lim \int_L f_n(z)\,dz = \int_L (\lim f_n(z))\,dz,$$

sendo L uma linha rectificável contida em K, é que a sucessão f_n *de funções seja uniformemente convergente em K.*

---

(1) Importa notar que esta condição não é necessária.

Demonstremos este importante teorema. Para isso, ponhamos

$$f_n(z) - \varphi(z) = r_n(z).$$

Será, pois, para todo o n:

$$(4) \qquad \int_L f_n(z)\,dz = \int_L \varphi(z)\,dz + \int_L r_n(z)\,dz.$$

Designemos por μ_n o *supremo de* $|r_n(z)|$ *em* K, para cada valor de n. Então, virá:

$$\left|\int_L r_n(z)\,dz\right| \leq \mu_n |L|.$$

Mas, em virtude da hipótese, $r_n(z)$ converge para zero uniformemente sobre K. Logo, $\mu_n \to 0$ e, portanto, segundo (4):

$$\lim \int_L f_n(z)\,dz = \int_L \varphi(z)\,dz = \int_L (\lim f_n(z))\,dz.$$

Consideremos, agora, uma *série de funções*

$$u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z),$$

todas definidas em K. Diz-se que esta série é *pontualmente convergente* sobre K, quando a série numérica que se obtém para cada valor de z pertencente a K, é convergente. Equivale isto a dizer que a sucessão das *somas parciais de ordem n*

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

converge pontualmente em K para uma função finita $S(z)$, que é a soma da série em cada ponto $z \in K$.

Diz-se que a série é *uniformemente convergente sobre K*, quando a sucessão de funções $S_n(z)$ converge para $S(z)$ uniformemente em K, segundo a definição anterior.

É claro que, se a série é uniformemente convergente sobre K, também é convergente em cada ponto de K; mas a recíproca não é verdadeira. *Se a série é pontualmente convergente em K, para que seja uniformemente convergente em K, é necessário e suficiente que o resto de ordem n*

$$R_n(z) = S(z) - S_n(z)$$

tenda para zero uniformemente em K.

Se as funções $u_n(z)$ são contínuas sobre K, o mesmo acontece, evidentemente, com as somas parciais $S_n(z)$ e, portanto, com o limite $S(z)$, *desde que a convergência seja uniforme sobre K.* Assim:

Se uma série de funções é uniformemente convergente em K e as funções são contínuas sobre K, a soma da série também é contínua sobre o mesmo conjunto.

Por sua vez, o anterior CRITÉRIO DE PERMUTABILIDADE DOS SÍMBOLOS DE LIMITE E DE INTEGRAL (TEOREMA 10.1) aparece-nos também com novo aspecto, quando se trata de séries de funções:

Se uma série de funções contínuas sobre um conjunto K

$$u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots$$

é uniformemente convergente em K, a série é integrável termo a termo, sobre qualquer linha rectificável L contida em K, isto é, tem-se, designando por S(z) a soma da série,

$$\int_L S(z)\,dz = \int_L u_0(z)\,dz + \int_L u_1(z)\,dz + \cdots + \int_L u_n(z)\,dz + \cdots .$$

Com efeito, designando por $S_n(z)$ a soma parcial de ordem n, a sucessão de funções $S_n(z)$ converge, então, para $S(z)$ uniformemente sobre K, e portanto tem-se, segundo o TEOREMA 10.1:

$$\lim \int_L S_n(z)\,dz = \int_L S(z)\,dz. \tag{5}$$

Mas, segundo a propriedade do integral duma soma (dum número finito de parcelas), vem

$$\int_L S_n(z)\,dz = \int_L u_0(z)\,dz + \int_L u_1(z)\,dz + \cdots + \int_L u_n(z)\,dz.$$

Portanto, como o limite do segundo membro é, por definição, a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_L u_n(z)\,dz,$$

tem-se, atendendo a (5):

$$\int_L \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_L u_n(z)\,dz.$$

Continua também a ser válido o seguinte critério de convergência uniforme:

CRITÉRIO DE WEIERSTRASS. *Condição suficiente para que a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$$

seja uniformemente convergente sobre K, é que exista uma série numérica convergente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

tal que se tenha:

$$|u_n(z)| \le a_n,$$

para todo o $z \in K$ *e todo o* $n = 0, 1, \ldots$.

Demonstração. Suponhamos esta condição verificada. Então, para cada $z \in K$, obtém-se uma série numérica tal que a série $\sum |u_n(z)|$ dos módulos dos seus termos é majorada pela série convergente $\sum a_n$. Logo, a série $\sum u_n(z)$ é absolutamente convergente para cada valor particular de z pertencente a K.

Designemos por $S(z)$ a soma desta série. Resta provar que a convergência da série é uniforme sobre K, o que equivale a dizer que o seu resto de ordem n converge para zero uniformemente sobre K. Ora, tem-se, designando por $R_n(z)$ este resto:

$$|R_n(z)| \leqslant |u_{n+1}(z)| + |u_{n+2}(z)| + \ldots \;(\forall z \in K,\, n = 0, 1, \ldots),$$

visto que $R_n(z)$ é a soma da série *absolutamente convergente*

$$u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots, \qquad (z \in K).$$

Logo, tem-se, em virtude da hipótese:

$$|R_n(z)| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \qquad (\forall z \in K, n=0, 1, \ldots)$$

e, por conseguinte, para cada valor de n, o extremo superior da função $R_n(z)$ em K obdece à condição:

$$\sup_{z \in A} |R_n(z)| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots .$$

Mas o 2.º membro é o resto de ordem n da série $\sum a_n$, convergente por hipótese; logo, tende para zero, e o mesmo acontece, portanto, com o 1.º (q.e.d.).

Este critério aplica-se em numerosos casos da prática, *e, em particular, às séries de potências*:

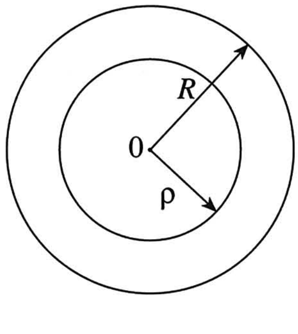
COROLÁRIO. *Toda a série de potências de z é uniformemente convergente sobre qualquer conjunto fechado interior ao seu círculo de convergência.*

Com efeito, consideremos uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

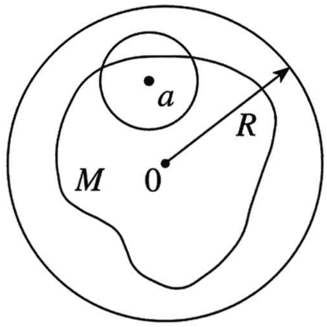
com o raio de convergência $R>0$. Sendo ρ um número positivo qualquer menor que R, começaremos por provar que a série é uniformemente convergente sobre o círculo C_ρ definido por $|z| \leqslant \rho$. É evidente que se tem

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \rho^n \qquad (\forall z \in C_\rho, n=0, 1, \ldots).$$



Mas a série $\sum |a_n| \rho^n$ é convergente, porque ρ é um valor de z interior ao círculo de convergência e já sabemos que a série de potências é *absolutamente convergente no interior desse círculo*. Então, aplicando aqui o CRITÉRIO DE WEIERSTRASS com $K = C_\rho$, concluímos que a série de potências é uniformemente convergente sobre C_ρ.

Seja agora M um conjunto fechado qualquer contido no interior do círculo de convergência. Então, para todo o ponto a de M, podemos escolher um círculo de centro a, contido no círculo de



convergência, e cujo raio r_a não excede, portanto, a distância de a à fronteira. Para cada $a \in M$, seja V_a o círculo aberto de centro a e raio $(1/2) r_a$. É evidente que os círculos V_a assim obtidos para *todos* os pontos a de M, formam uma cobertura aberta do conjunto M; e, como este é limitado e fechado (portanto compacto), é possível escolher um número finito de tais círculos que cubram ainda M. Designando por ε o *menor* dos raios desses círculos *em número finito*, é fácil ver que a distância dos pontos de M à circunferência do círculo de convergência não é inferior a ε. Então, podemos escolher o número ρ de modo que o círculo C_ρ contenha M (basta que seja $\rho > R - \varepsilon$ e $\rho < R$) e assim fica provado que a série é uniformemente convergente sobre M, visto que o é sobre C_ρ.

11. Primeiras consequências da fórmula integral de CAUCHY

Já na introdução e no Capítulo II tínhamos anunciado que, se uma função f é holomorfa num domínio aberto D (isto é, se admite derivada finita f' em todos os pontos de D), essa função admite necessariamente derivadas finitas de todas as ordens em D e é representável pela sua *série de Taylor* numa vizinhança de cada ponto de D (dizendo-se, então, que a função é analítica em D).

Vamos, agora, provar este facto, aplicando a FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY; mas para isso convém, primeiro, estabelecer o seguinte

LEMA. *Seja L uma linha contínua, orientada e rectificável do plano, com extremos distintos ou coincidentes, e seja g uma função complexa contínua sobre L. Nestas condições, a função de z definida pelo integral*

$$\int_L \frac{g(u)}{u-z}\,du, \quad \textit{para } z \notin L,$$

é representável, numa vizinhança de cada ponto z_0 do plano não pertencente a L, por uma série de potências de $z - z_0$ cujo raio de convergência é, pelo menos, igual à distância de z_0 a L.

Demonstração. Seja z_0 um ponto qualquer do plano não situado sobre L, e designemos por δ a distância de z_0 a L. Será, então, $\delta > 0$, de contrário z_0 pertenceria a L, visto ser fechado o conjunto de pontos desta linha[1]. Notemos, agora, que se tem, para todo o u diferente de z e de z_0:

$$(1) \qquad \frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{u-z_0} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{u-z_0}}$$

e que, por outro lado, é:

$$(2) \qquad \frac{1}{1-r} = 1 + r + \cdots + r^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

para todo o número complexo r tal que $|r| < 1$. Então, virá de (1), aplicando (2) com $r = (z-z_0)/(u-z_0)$:

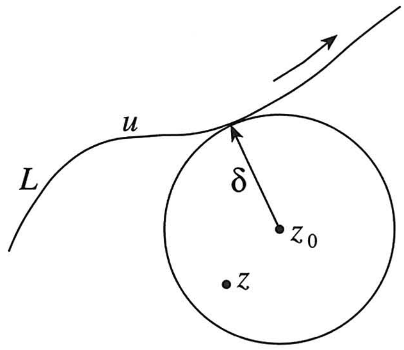
$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-z_0} + \frac{z-z_0}{(u-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(u-z_0)^3} + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}} + \cdots,$$

desde que seja $|z-z_0| < |u-z_0|$.

---

(1) Com efeito, este conjunto é o transformado de um intervalo compacto $[a, b]$ por uma aplicação contínua φ em $\mathbf{C}$ e, como tal, compacto, ou seja, *limitado e fechado*.

É claro que esta condição se verifica automaticamente, se u for um ponto qualquer de L e z um ponto interior do círculo C de centro z_0 e raio δ (distância de z_0 à linha).



Multiplicando a série anterior, termo a termo, por $g(u)$, obteremos um desenvolvimento em série de

$$\frac{g(u)}{u-z}$$

que ainda é válido nas referidas condições. *Consideremos, agora, z_0 e z fixos, com z interior a C, e u variável sobre L.* Como a função $g(u)$ é contínua sobre L (por hipótese), o mesmo sucede com a função $|g(u)|$, que atinge, portanto, um valor máximo μ (finito) sobre o conjunto de pontos de L (limitado e fechado). Então, o termo geral da série obtida verifica a condição:

$$\left|\frac{g(u)\,(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{\mu|z-z_0|^n}{\delta^{n+1}} \qquad (\forall u \in L).$$

Ora, o 2.º membro é o termo geral de uma série geométrica de razão $|z-z_0|\delta^{-1}$, portanto convergente, visto ser $|z-z_0|<\delta$. Então, aplicando o CRITÉRIO DE WEIERSTRASS (n.º 10) conclui-se que o referido desenvolvimento de $g(u)\,(u-z)^{-1}$ em série de funções de u é uniformemente convergente sobre L. Podemos, portanto, integrá-la, termo a termo, sobre L, o que dá:

$$\int_L \frac{g(u)}{u-z}\,du = \int_L \frac{g(u)}{u-z_0}\,du + (z-z_0)\int_L \frac{g(u)}{(u-z_0)^2}\,du + \cdots +$$

$$+\,(z-z_0)^n \int_L \frac{g(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du + \cdots$$

Assim, pondo $c_n = \int_L g(u)\,(u - z_0)^{-n-1}\,du$, para $n = 0, 1, \ldots$, vê-se que a função de z definida pelo primeiro integral é representável pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

no interior do círculo C, o que prova o Lema.

Podemos, agora, demonstrar o:

TEOREMA 11.1. *Toda a função f holomorfa num domínio aberto D do plano, admite derivadas finitas de todas as ordens em D, e é representável, numa vizinhança de cada ponto z_0 de D, por uma série de potências de $z - z_0$, cujo raio de convergência é, pelo menos, igual à distância de z_0 à fronteira de D.*

Com efeito, dado um ponto qualquer $z_0 \in D$, existe, pelo menos, um círculo C (fechado) de centro z_0 contido em D e, designando por Υ a circunferência de C orientada positivamente, virá, segundo a FÓRMULA DE CAUCHY, *para todo o z interior a C*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{f(u)}{u - z}\,du\,.$$

Então, o Lema aplica-se, visto que f, sendo holomorfa em D, é contínua sobre Υ. Assim, se pusermos

$$(3) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}}\,du\,, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

virá

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

para todo o z interior a C. E como C é *qualquer círculo de centro z_0 contido em D*, segue-se que o raio de convergência desta série é, pelo menos, igual à distância de z_0 à fronteira de D. Por outro lado, já atrás foi demonstrado que toda a série de potências é indefinidamente diferenciável no interior do seu círculo de convergência, o que, por ser z_0 um ponto arbitrário de D, acaba a demonstração do teorema.

Em particular, a derivada de ordem n de f no ponto z_0, deduzida do desenvolvimento

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

será $f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n$, donde, atendendo a (3), se deduz:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}}\, du, \text{ para } n = 0, 1, \ldots . \tag{4}$$

Suponhamos, agora, que a fronteira Γ de D (que supomos orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de D) é formada por um número finito de linhas fechadas simples, rectificáveis, e que a função f é contínua sobre o fecho de D (isto é, sobre D *mais* a fronteira). Pelo que vimos no n.º 8, tem-se, então:

$$\int_{\Upsilon} \frac{f(u)}{(u - z)^{n+1}}\, du = \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u - z)^{n+1}}\, du$$

e portanto

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u - z)^{n+1}}\, du, \quad n = 0, 1, \ldots,} \tag{5}$$

para todo o z interior a D, o que é uma *extensão da* FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY *para as derivadas de* f.

Note-se que, segundo as considerações finais do n.º 9, estas fórmulas continuam a ser válidas quando, em vez de um domínio D, se trata de um conjunto aberto Ω desconexo, formado por vários domínios $D_1, D_2, \ldots$ nas condições do primeiro.

Tornando ao caso da circunferência Υ, designemos por μ o máximo de $|f(u)|$ sobre Υ. Então, da fórmula (4), vem, pela FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL, lembrando que o comprimento de Υ é $2\pi\rho$:

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \leq n!\, \mu \rho^{-n}.} \tag{6}$$

Estas são as chamadas DESIGUALDADES DE CAUCHY. No caso particular $n = 1$, deduz-se daqui o seguinte importante teorema:

TEOREMA DE LIOUVILLE. *Se uma função é holomorfa e limitada em todo o plano da variável complexa, essa função reduz-se necessariamente a uma constante.*

Seja, com efeito, f uma função holomorfa e limitada em **C** e designemos por M o extremo superior do seu módulo em **C**. Então, pelas fórmulas (6) para $n = 1$, virá

$$|f'(z_0)| \leqslant \mu\rho^{-1} \leqslant M\rho^{-1},$$

sendo ρ um número positivo *qualquer*, pois agora D é todo o plano da variável complexa e, portanto, *qualquer* círculo de centro z_0 está contido em D. Mas $M\rho^{-1} \to 0$ quando $\rho \to \infty$; logo, como $f'(z_0)$ é constante, tem-se necessariamente $f'(z_0) = 0$, qualquer que seja o ponto z_0 de **C** e, portanto, a função f é constante em todo o plano (COROLÁRIO 2 do TEOREMA 3.1).

Este teorema permite-nos dar uma demonstração muito simples do TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA, *também chamado* TEOREMA DE D'ALEMBERT, segundo o qual *todo o polinómio de coeficientes numéricos e de grau $n > 0$ admite, pelo menos, uma solução no corpo complexo* **C**.

Com efeito, consideremos um polinómio de grau $n > 0$:

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0, n > 0)$$

e suponhamos que $p(z)$ não se anula em nenhum ponto de **C**. Então, segundo o estabelecido no Capítulo II, a função $1/p(z)$ de z é holomorfa e, portanto, contínua em **C**. Por outro lado, tem-se, para todo o $z \neq 0$:

$$p(z) = z^n \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right).$$

Daqui, por ser $a_0 \neq 0$, deduz-se que $p(z) \to \infty$ quando $z \to \infty$ e que, portanto, $1/p(z) \to 0$ quando $z \to \infty$; quer isto dizer que, dado um número $\delta > 0$, existe um número R tal que se tem

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| < \delta$$

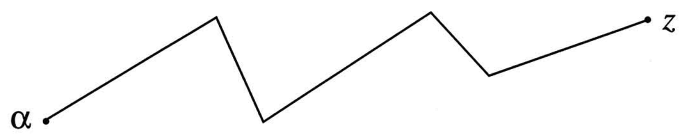
quando $|z|>R$. Assim, a função $1/p(z)$ será limitada no exterior do círculo $|z|\leqslant R$. Mas também é limitada sobre o círculo $|z|\leqslant R$, visto ser contínua sobre este, que é um conjunto limitado e fechado (TEOREMA DE WEIERSTRASS). Logo, $1/p(z)$ é limitada e holomorfa em todo o plano da variável complexa, e, portanto, segundo o TEOREMA DE LIOUVILLE, deve reduzir-se a uma constante. Mas isto é impossível, porque $p(z)\to\infty$ quando $z\to\infty$. A contradição proveio de supor que $p(z)$ não se anulava em $\mathbf{C}$.

12. Teoremas de MORERA e de WEIERSTRASS

O TEOREMA DE MORERA é recíproco do TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY e pode enunciar-se do seguinte modo:

Seja f uma função definida e contínua num domínio aberto qualquer do plano R. Se o integral de f sobre toda a linha poligonal fechada simples contida em R é nulo, f é holomorfa em R.

Com efeito, supondo verificada a hipótese e fixado um ponto α de R, o integral de f sobre uma poligonal orientada contida em R, com origem em α e extremidade num ponto z variável de R, não depende propriamente do caminho de integração e define, portanto, uma função $\Phi(z)$ tal que $\Phi'(z)=f(z)$, para todo $z\in R$, tal como vimos na demonstração do TEOREMA 7.1. Logo, a função Φ é holomorfa em R e o mesmo acontece com a sua derivada f, como queríamos provar.



TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Se uma sucessão de funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, holomorfas num mesmo domínio aberto R, converge uniformemente sobre todo o compacto (conjunto limitado e fechado) contido em R, a função limite g também é holomorfa em R e a sucessão $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n, \ldots$, das derivadas das primeiras também converge para a derivada g' de g, uniformemente sobre toda a parte compacta de R.*

Demonstração. Suponhamos verificada a hipótese e seja P uma poligonal fechada simples e orientada, contida em R; então, virá, pelo TEOREMA DE CAUCHY:

$$\int_P f_n(z)\,dz = 0 \qquad (\forall n = 1, 2, \ldots).$$

Por outro lado, como o conjunto de pontos de P é uma parte compacta de R, a convergência é uniforme sobre P e, portanto, será:

$$\lim \int_P f_n(z)\,dz = \int_P (\lim f_n(z))\,dz = \int_P g(z)\,dz = 0.$$

Logo, segundo o TEOREMA DE MORERA, a função g é holomorfa em R.

Seja agora M um compacto qualquer contido em R. Para cada ponto a de M podemos escolher um círculo *aberto* V_a de centro a e raio inferior à distância de a à fronteira de R. Então, os conjuntos V_a assim obtidos, com $a \in M$, formam uma cobertura de M, da qual podemos extrair uma cobertura finita de M. Ora, a reunião dos círculos desta cobertura finita, é, manifestamente, um conjunto aberto A, cuja fronteira se compõe dum número finito de curvas fechadas simples, seccionalmente regulares (formadas de arcos de círculo). Designemos por Υ a fronteira de A, orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de A. Então, pelas fórmulas (5) do n.º 11, vem

$$(1) \qquad f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon \frac{f_n(u)}{(u-z)^2}\,du \qquad (\forall z \in A,\ n = 1, 2, \ldots),$$

donde, pelo TEOREMA 10.1, atendendo a que a sucessão f_n converge uniformemente sobre Υ:

$$(2) \qquad \lim f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon \frac{g(u)}{(u-z)^2}\,du = g'(z) \qquad (\forall z \in A).$$

Finalmente, para provar que a convergência é uniforme sobre o compacto $M \subset A$, basta aplicar a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL. Designemos por μ_n o máximo de $|f_n(u) - g(u)|$ sobre Υ para $n = 1, 2, \ldots$, e por d a distância entre as fronteiras de M a A. Recorrendo a uma nova cobertura de M formada por círculos, é fácil ver que $d>0$. Aplicando a referida fórmula à diferença entre os integrais de (1) e de (2), virá, então:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon \frac{f_n(u)-g(u)}{(u-z)^2}\,du\right| \leqslant \frac{\mu_n|\gamma|}{2\pi d^2} \quad (\forall z\in M,\ n=1,2,\ldots).$$

Como $\mu_n \to 0$, em virtude da hipótese, segue-se que a referida convergência é uniforme sobre M (q.e.d.).

Assim, a sucessão f_n' das derivadas encontra-se nas mesmas condições da sucessão inicial f_n; portanto, a *sucessão f_n'' das segundas derivadas também converge para g'' uniformemente sobre todo o compacto $M\subset R$, e assim sucessivamente.* Podemos então escrever, dum modo geral,

$$D^p \lim f_n = \lim D^p f_n \qquad (\forall p = 1, 2, \ldots),$$

isto é:

Na hipótese do teorema, o operador D de derivação e todas as suas potências são permutáveis com a operação de passagem ao limite.

Este teorema de Weierstrass pode ainda aplicar-se às séries

$$u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots$$

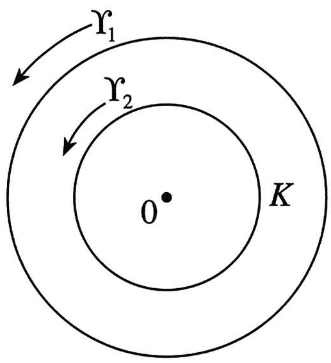
de funções holomorfas num domínio aberto R. *Se a série é uniformemente convergente sobre as partes compactas de R, o mesmo sucede com a sucessão das suas somas parciais, e, portanto, a série poderá ser derivada termo a termo nesse domínio, tantas vezes quantas se queira,* isto é, tem-se

$$D^p\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^p u_n(z)) \qquad (\forall z\in R,\ p = 1, 2, \ldots).$$

Daqui se deduz, em particular, que toda a série de potências é derivável termo a termo no interior do seu círculo de convergência, resultado este que já tínhamos demonstrado directamente no Capítulo II, por via elementar.

13. Série de LAURENT

Seja f uma função contínua sobre uma coroa circular K e holomorfa no interior da mesma. Designemos por r e R, respectivamente, os raios das circunferências que limitam a coroa, com $r<R$. Para



comodidade de exposição, podemos supor que o centro das circunferências é a origem, o que, como veremos, não diminui a generalidade das conclusões. Então, K será o lugar geométrico dos pontos z tais que $r<|z|<R$. Designemos por Γ a fronteira da coroa e por Υ_1, Υ_2, respectivamente, as circunferências externa e interna que formam Γ. Supondo Γ orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de K, virá, pela FÓRMULA DE CAUCHY, *para todo* o ponto z interior à coroa:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du\,.$$

Supondo, agora, as circunferências Υ_1 e Υ_2 orientadas no sentido positivo, é claro que o integral sobre Γ será igual ao integral sobre Υ_2 menos o integral sobre Υ_1 e, portanto, virá, para todo o z interior a K:

(1) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon_1} \frac{f(u)}{u-z}\,du-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon_2} \frac{f(u)}{u-z}\,du\,.$$

Mas o 1.º integral do 2.º membro, conforme o LEMA do n.º 11, define, no interior do círculo limitado por Υ_1, uma função holomorfa, representável por uma série de potências de z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ \text{ com } a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon_1} \frac{f(u)}{u^{n+1}}\,du \quad (n=0,\,1,\,\ldots)\,.$$

Quanto ao 2.º integral, notemos que, para $|u| = r$ e $|z| > r$, se tem:

$$\frac{1}{u-z} = -\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} - \cdots - \frac{u^n}{z^{n+1}} - \cdots . \tag{2}$$

Ora, supondo z fixo, o raio de convergência desta série de potências de u é $|z|$; então, a circunferência Υ_2 é um conjunto fechado interior ao círculo de convergência da série, e, portanto, esta é uniformemente convergente sobre Υ_2 (ver n.º 10, Corolário do CRITÉRIO DE WEIERSTRASS). O mesmo acontecerá, portanto, com a série de funções de u que se obtém, multiplicando os termos de (2) por $f(u)$. A série obtida será, pois, integrável, termo a termo, e assim teremos, *para todo o z exterior a Υ_2*:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon_2} \frac{f(u)}{u-z}\,du = \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots,$$

pondo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon_2} \frac{f(u)}{u^{n+1}}\,du, \quad \text{para } n = -1, -2, \ldots .$$

Atendendo a (1), vem, pois, finalmente, para $f(z)$ um desenvolvimento em *série de potências positivas e negativas de z*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{para todo o } z \text{ interior a } K.$$

Esta é a chamada *série de Laurent* da função f em K.

Seja agora Υ uma circunferência interior a K, orientada no sentido positivo. Aplicando o TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY, é fácil ver que se tem:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon} \frac{f(u)}{u^{n+1}}\,du, \quad \text{para todo o } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Se o centro da coroa K é um ponto α qualquer em vez da origem, imediatamente se reconhece que a conclusão anterior se aplica, substituindo z por $z-\alpha$ no desenvolvimento de $f(z)$ e u por $u-\alpha$ nas expressões dos coeficientes a_n. Assim, em conclusão:

TEOREMA 13.1. *Toda a função f holomorfa no interior duma coroa circular K de centro α, é representável, no interior de K, pela série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-\alpha)^n,$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{f(u)}{(u-\alpha)^{n+1}}\, du, \quad para \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

sendo Υ uma circunferência qualquer de centro α contida em K.

14. Zeros de uma função holomorfa

Seja f uma função definida e holomorfa num domínio aberto D do plano. Chama-se *zero* ou *raiz* de f, a todo o número complexo $\alpha \in D$ tal que $f(\alpha) = 0$. O estudo dos zeros duma função holomorfa f é dominado pelo seguinte teorema fundamental:

TEOREMA 14.1. *Se o conjunto de zeros de f tem, pelo menos, um ponto de acumulação em D, a função f anula-se em todos os pontos de D.*

Demonstração. Seja Z o conjunto de zeros de f e suponhamos que existe em D um ponto de acumulação z_0, de Z. Segundo o estabelecido no n.º 11, a função f é representável, numa vizinhança de z_0, por uma série de potências de $z - z_0$:

(1) $$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \ldots .$$

Mas z_0 é um ponto de acumulação de Z, e, portanto, limite duma sucessão z_n de pontos em que f se anula. Como f é contínua em z_0, tem-se

$$f(z_0) = \lim f(z_n) = 0 .$$

Logo, z_0 também é um zero da função f, o que obriga a ser nulo o coeficiente a_0 da série (1). Dividindo ambos os membros de (1) por $z - z_0$ com $z \neq z_0$, virá, então,

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = a_1 + a_2(z - z_0) + \cdots + a_{n+1}(z - z_0)^n + \cdots \quad (\forall z \neq z_0).$$

Designemos por $f_1(z)$ a função de z representada por esta nova série. Todo o ponto de Z distinto de z_0 é ainda um zero de f_1, visto que anula f sem anular $z - z_0$. Logo, f_1 tem um conjunto de zeros que ainda admite z_0 como ponto de acumulação, o que implica $a_1 = 0$, segundo o raciocínio anterior. E assim sucessivamente: *por indução matemática chegamos, deste modo, à conclusão de que todos os coeficientes da série* (1) *são nulos e que, portanto, f é identicamente nula no interior do respectivo círculo de convergência, que é um conjunto aberto não vazio.*

Designemos, agora, por A a reunião de todos os subconjuntos abertos de D em que f se anula. Então, A é um conjunto aberto (visto que a reunião de conjuntos abertos é sempre um conjunto aberto), não é vazio, visto que contém, pelo menos, o referido círculo de convergência, e é claro que f se anula em A. Resta, pois, provar que $A = D$.

Suponhamos que isto não se verifica e designemos por B o complementar de A em D. Então, D é a reunião dos dois conjuntos não vazios, A e B; como D é conexo (visto ser um domínio), pelo menos um dos conjuntos A, B, tem um ponto c que é aderente ao outro conjunto. Mas c não pode pertencer a A, porque, sendo este um conjunto aberto, todo o ponto de A é interior a A e não pode, portanto, ser aderente a B. Logo, c pertence a B, e, por ser aderente a A, em cada vizinhança de c existe, pelo menos, um ponto de A distinto de c. Deste modo, c é um ponto de acumulação do conjunto A em que f se anula. Portanto, segundo o raciocínio anterior, a função f anula-se no interior de um círculo de centro c, e assim A não seria o máximo sub-conjunto aberto de D em que f se anula (q.e.d.).

O teorema anterior também se pode enunciar dizendo:

Se f é uma função holomorfa não identicamente nula em D, então, todo o zero de f em D é um ponto isolado.

Ou ainda:

Se f é uma função holomorfa não identicamente nula em D, o conjunto dos zeros de f só pode ter pontos de acumulação na fronteira de D.

Exemplos de conjuntos *Z*, que têm pontos de acumulação em *D*: um sub-domínio qualquer de *D*, uma linha contínua contida em *D* que não se reduza a um ponto, o conjunto formado por uma sucessão de pontos distintos convergentes para um ponto de *D*, etc., etc.

O teorema anterior é, por assim dizer, uma generalização do PRINCÍPIO DAS IDENTIDADES PARA OS POLINÓMIOS, que se pode enunciar do seguinte modo:

Um polinómio em z, de grau não superior a n, que se anula para mais de n valores distintos de z, é identicamente nulo.

Tal como para os polinómios, o teorema anterior admite um corolário, que se pode enunciar do seguinte modo:

COROLÁRIO 1. *Se duas funções f, g, holomorfas num domínio aberto D, coincidem num sub-conjunto de D que admite, pelo menos, um ponto de acumulação em D, as duas funções tomam o mesmo valor em todos os pontos de D.*

Para reconhecer este facto, basta aplicar o teorema à função $f-g$.

Este corolário também se pode enunciar do seguinte modo:

Uma função holomorfa num domínio D, fica determinada quando se conhecem os seus valores em qualquer conjunto de pontos que admita um ponto de acumulação em D. Assim, por exemplo, uma função f, holomorfa num domínio *D*, fica determinada pelos valores que toma num sub-domínio qualquer de *D*, *tão pequeno quanto se queira*, ou numa linha contida em *D*, de comprimento não nulo, por menor que seja. *É este um facto muito importante, que é preciso ter presente quando tratarmos, mais adiante, do conceito de "função analítica global".* É ainda bastante sugestiva a seguinte variante do mesmo teorema:

COROLÁRIO 2. *Uma função holomorfa em D, fica determinada pelo seu valor e pelos de todas as suas derivadas num ponto z_0 qualquer de D.*

Com efeito, esses valores dão-nos os coeficientes de desenvolvimento de f em série de potências de $z - z_0$, e assim f' fica conhecida numa vizinhança de z_0.

Notemos, agora, que a noção de *ordem de multiplicidade de um zero* se estende aos zeros duma função f de variável complexa. Com efeito, sendo α um zero de f e μ um número positivo qualquer, consideremos a função

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{\mu}}, \qquad \text{com } z \neq \alpha.$$

Se $\varphi(z)$ tende para um limite *finito* e *diferente de zero,* quando $z \to \alpha$, $f(z)$ é um infinitésimo de ordem μ com $z-\alpha$; diz-se, então, que α é um *zero de ordem* μ de f.

Se $\varphi(z)$ tende para zero, quando $z \to \alpha$, $f(z)$ é um infinitésimo com $z-\alpha$ de ordem superior a μ; diz-se, então, que α é um zero de f de *ordem superior a* μ.

Se $\varphi(z)$ tende para ∞, quando $z \to \alpha$, $f(z)$ é um infinitésimo com $z-\alpha$ de ordem inferior a μ; diz-se, então, que α é um zero de f de *ordem inferior a* μ.

Por exemplo, se $f(z)$ for um ramo uniforme da função $\sqrt{1+z^2}$ no plano **C**, é fácil ver que os pontos i e $-i$ são zeros de ordem 1/2 de f.

Pode acontecer que um zero α, duma função f, tenha ordem superior a qualquer número positivo μ: diz-se, então, que é α um zero de *ordem infinita.*

Pode ainda acontecer que a função $\varphi(z)$ acima considerada não tenha limite quando $z \to \alpha$, mas não nos interessa agora este caso.

Posto isto, suponhamos que f é uma função holomorfa, não identicamente nula, num domínio aberto D do plano, e seja α um zero de f. Como f não é identicamente nula em D, os coeficientes da sua série de potências de $z-\alpha$ não podem ser todos nulos (em virtude do teorema anterior). Então, se for a_k o primeiro coeficiente dessa série que não se anula, virá para f, numa vizinhança de α, um desenvolvimento do tipo:

$$f(z) = a_k(z-\alpha)^k + a_{k+1}(z-\alpha)^{k+1} + \ldots \text{ (com } a_k \neq 0),$$

ou seja,

$$(2) \qquad f(z) = (z-\alpha)^k f_k(z),$$

pondo

$$f_k(z) = a_k + a_{k+1}(z-\alpha) + \dots .$$

Ora, $f_k(z)$ tende para a_k (limite finito e diferente de zero), quando $z \to \alpha$. Logo, α é um zero de ordem k de f. Assim, chegamos ao seguinte corolário do TEOREMA 14.1:

COROLÁRIO 3. *Uma função holomorfa não identicamente nula num domínio D, só admite zeros de ordem inteira (e portanto finita) nesse domínio.*

Daqui resulta que:

Uma função holomorfa em D, com um zero de ordem infinita em D, é identicamente nula nesse domínio.

Ora, interessa observar que o mesmo já não sucede com as funções de variável real indefinidamente diferenciáveis. Por exemplo, a função igual a

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

para $x \neq 0$ e igual a 0 para $x = 0$, tem derivadas finitas de todas as ordens em **R** e admite, como é fácil de ver, um zero de ordem infinita na origem – sem contudo ser identicamente nula.

Analogamente, a função igual a

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2-1}\right)$$

para $|x| < 1$ e igual a 0 para $|x| \geqslant 1$, também é indefinidamente derivável em toda a recta e anula-se nos intervalos $x \leq -1$, e $x \geq 1$, sem ser identicamente nula.

Segundo o COROLÁRIO 3, uma função holomorfa em *D,* também não pode ter zeros de ordem fraccionária ou irracional em *D.* Mas, por exemplo, a função de variável real $\sqrt[4]{x^3}$, continuamente derivável na recta, tem um zero de ordem 4/3 no ponto 0.

As funções reais (ou complexas) indefinidamente diferenciáveis na recta formam um sub-anel do anel das funções contínuas em $\mathbf{R}$, visto que a soma e o produto de duas tais funções ainda são indefinidamente diferenciáveis. *Porém, este anel não é um domínio de integridade,* isto é: existem pares de funções φ, ψ, indefinidamente diferenciáveis, não identicamente nulas, tais que $\varphi(x)\,\psi(x)=0$ em toda recta (*divisores de zero*). Por exemplo, definimos atrás uma função indefinidamente diferenciável φ, que é diferente de zero para $-1<x<1$ e nula fora deste intervalo; analogamente se define uma função indefinidamente diferenciável ψ, que seja nula para $-1<x<1$ e diferente de zero fora deste intervalo; então, o produto $\varphi\psi$ será identicamente nulo sem que os factores φ e ψ o sejam.

As funções complexas, holomorfas num domínio aberto D do plano, também formam um anel, como facilmente se verifica. *Mas este anel não tem divisores de zero*, isto é:

COROLÁRIO 4. *As funções holomorfas num domínio aberto D do plano, formam um domínio de integridade.*

Com efeito, suponhamos que existem duas funções holomorfas f, g, em D, não identicamente nulas, tais que

$$f(z)\,g(z)\equiv 0$$

sobre D. Então, em virtude do teorema, existe, pelo menos, uma vizinhança V, de um ponto de D, em que f não se anula e será, portanto,

$$\frac{1}{f(z)}\,[\,f(z)\,g(z)\,] = g(z) = 0, \quad \text{para todo o } z\in V,$$

o que implica $g(z)\equiv 0$ sobre D, contrariamente ao que supusemos a respeito de g.

15. Pontos singulares de uma função

Começaremos por demonstrar o seguinte:

TEOREMA 15.1. *Seja f uma função holomorfa no domínio D que resulta de excluir um ponto a de outro domínio aberto D^* do plano.*

Condição necessária e suficiente para que exista uma função g holomorfa em D que coincida com f em D* é que*

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0 .$$

Nesta hipótese, a função g é univocamente determinada.

A condição é evidentemente necessária. Com efeito, se existe uma tal função g, esta é contínua em a e, portanto,

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} g(z) = g(a) ,$$

donde se deduz, atendendo a que $g(a)$ é finito:

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = \lim_{z \to a} (z - a) g(a) = 0 .$$

Por sua vez, a unicidade do prolongamento resulta imediatamente de se ter

$$g(a) = \lim_{z \to a} f(z) .$$

Demonstremos, agora, que a condição é suficiente. Suponhamo-la verificada e consideremos um círculo fechado C de centro a, contido em D. Então, a circunferência Υ de C também estará contida em D. Se considerarmos uma segunda circunferência Υ' de centro a e raio r menor, virá, segundo o estabelecido no n.º 13:

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \frac{f(u)}{u - z} du - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon'} \frac{f(u)}{u - z} du$$

para todo o z interior à coroa, supondo Υ e Υ' orientadas no sentido positivo. Mas, se designarmos por M o máximo de $|f(u)|$ sobre Υ' e por δ a distância a Υ' de um dado ponto z (fixo) interior à coroa, virá:

$$(2) \qquad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon'} \frac{f(u)}{u - z} du \right| < \frac{Mr}{\delta} .$$

Ora, quando $r \to 0$, $\delta \to |z-a|$ e, por outro lado, $Mr \to 0$, visto que $f(u)(u-a) \to 0$ quando $|u-a| = r \to 0$ (por hipótese). Logo, o 2.º membro de (2) tende para 0 quando $r \to 0$, e, portanto, virá:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon}\frac{f(u)}{u-z}\,du$$

para todo o ponto z interior a Υ, *distinto de a.* Mas, por outro lado, em virtude do LEMA do n.º 11, o segundo membro desta fórmula representa uma função holomorfa de z no interior do círculo C, *incluindo, portanto, o ponto a*. Existe, por conseguinte, uma função holomorfa em D^*, que coincide com f em D.

A condição expressa neste teorema será em particular verificada, se a função f é limitada numa vizinhança de a e, mais particularmente ainda, se existe e é finito o limite de f quando $z \to a$.

Seja ainda f uma função definida e holomorfa no domínio D que resulta de suprimir um ponto a de outro domínio aberto D^*. Então, existe um $\delta > 0$ tal que f é holomorfa para $0 < |z-a| < \delta$, *mas não definida em a.* Diz-se, então, que a é um *ponto singular isolado* (ou uma *singularidade isolada*) da função f. Nestas condições, verifica-se sempre um, e um só, dos três seguintes casos:

PRIMEIRO CASO: *Existe e é finito o limite de f quando* $z \to a$. Então, segundo o TEOREMA 15.1, existe uma função g holomorfa no círculo $|z-a| < \delta$, que coincide com f em todos os pontos do mesmo *distintos* de a. Podemos convencionar representar ainda por $f(a)$ o valor da função g em a. Diz-se, neste caso, que a é uma *singularidade removível* de f.

SEGUNDO CASO: $f(z) \to \infty$ *quando* $z \to a$. Então, é fácil ver que a singularidade não é removível e diz-se que a é um *pólo* de f. Convenciona-se escrever, neste caso, $f(a) = \infty$. Aplicando o TEOREMA 14.1, é fácil ver que existe uma vizinhança V de a em que f não se anula; *assim, a função* $1/f(z)$ *admite um zero isolado no ponto a.* Designando por k a ordem desse zero, ter-se-á, portanto, para todo o $z \in V$:

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^k \varphi_k(z), \quad \text{com} \quad \varphi_k(a) \neq 0,$$

donde

$$f(z) = (z-a)^{-k} f_k(z), \quad \text{para} \quad z \in V,$$

sendo $f_k(z) = 1/\varphi_k(z)$ *uma função de z holomorfa em V* e, portanto, desenvolvível em série de potências de $(z-a)$:

$$f_k(z) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \ldots, \quad \text{para} \quad z \in V.$$

Tem-se, pois, finalmente, na vizinhança V de a, a seguinte expressão para f:

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^k} + \frac{c_1}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{z-a} + c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots .$$

Trata-se, como se vê, duma *série de Laurent* em que é finito o número de termos, não nulos de expoente negativo.

Diz-se, então, que a é um *pólo de ordem k* de f.

TERCEIRO CASO: *A função f não tende para limite algum finito ou infinito quando* $z \to a$. Neste caso o ponto a não é pólo nem singularidade removível: diz-se, então, que a é uma *singularidade essencial isolada de* f. Esta função será, pois, representável, no domínio $0 < |z-a| < \delta$, por uma *série de Laurent*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

em que é infinito o número de termos não nulos de expoente negativo.

Em resumo:

TEOREMA 15.2. *Se f é uma função holomorfa no domínio D que resulta de excluir um ponto a de outro domínio aberto D* do plano, o ponto a é uma singularidade de f cuja natureza se relaciona com a série de Laurent de f em torno de a:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n .$$

Se os termos de grau negativo desta série são todos nulos, a é uma singularidade removível de f. Se a série tem termos não nulos de grau negativo, o ponto a será um pólo ou uma singularidade essencial de f, conforme o número desses termos é finito ou infinito.

Demonstra-se, ainda, o seguinte teorema devido a WEIERSTRASS:

Se a é uma singularidade essencial isolada de f, *então, qualquer que seja o número complexo* ζ, *existe uma sucessão de pontos* $z_n \to a$ *tal que* $f(z_n) \to \zeta$.

Por outras palavras: *nas vizinhanças dum ponto singular essencial isolado, a função f é completamente indeterminada, isto é, toma valores tão próximos quanto se queira de qualquer número complexo* α.

Por exemplo, a função exp $(1/z)$ tem uma singularidade essencial na origem, visto que o seu desenvolvimento em série de Laurent em torno deste ponto é

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots$$

e apresenta, como se vê, uma infinidade de termos de grau negativo com coeficientes não nulos. Observe-se, ainda, que esta função tende para ∞ ou para 0, conforme z tende para 0 sobre o semi-eixo real positivo ou sobre o semi-eixo real negativo, e que não tende para limite algum, quando $z \to 0$ sobre qualquer dos semi-eixos imaginários.

Funções meromorfas.

Diz-se que uma função f é *meromorfa* num domínio aberto D do plano, quando é diferenciável em todos os pontos de D, excepto, quando muito, em pontos isolados de D que sejam pólos de f. Assim, segundo a definição, se f é meromorfa em D, os pontos singulares de f em D, se existem, só podem ser *pólos isolados*, e a função é holomorfa no domínio D privado desses pontos; mas também pode não ter pólos em D, e, então, será holomorfa em todo este domínio. Assim, posta e esclarecida a definição, é fácil reconhecer como exercício que:

TEOREMA 15.3. *Dadas duas funções* f *e* g *meromorfas em D, a soma* $f+g$ *e o produto* fg *reduzem-se sempre a funções meromorfas em D e o mesmo sucede com o quociente* f/g, *se* g *não é identicamente nula.*

Mas é preciso notar o seguinte: pode acontecer que, numa destas operações, um pólo comum às funções dadas dê lugar a uma singularidade removível, que pode, então, ser eliminada. Por exemplo, se forem f, g, duas funções meromorfas num domínio D, com um pólo comum a em D, da mesma ordem k, tem-se

$$f(z) = (z-a)^{-k} f_k(z), \quad g(z) = (z-a)^{-k} g_k(z),$$

sendo f_k e g_k funções holomorfas numa vizinhança V de a, *que não se anulam neste ponto.* Então, será para todo o ponto z de V distinto de a:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_k(z)}{g_k(z)}$$

e, como g_k é contínua em a e $g_k(a) \neq 0$, existe toda uma vizinhança W de a contida em V, onde $g_k(z) \neq 0$. Por conseguinte, o último quociente é uma função holomorfa em W e, *assim, a é uma singularidade removível de f/g.*

Dum modo geral, se for a um pólo de ordem h para f e de ordem k para g, então, para o quociente f/g, o ponto a será um pólo de ordem $h-k$, uma singularidade removível ou um zero de ordem $k-h$, conforme for $h>k$, $h=k$ ou $h<k$. Por sua vez, para o produto fg, será um pólo de ordem $h+k$.

Estes resultados, aliás, estendem-se aos zeros, que podemos considerar como *pólos de ordem negativa.*

O TEOREMA 15.3 pode resumir-se dizendo que *o conjunto das funções meromorfas num mesmo domínio D, é um corpo.*

É manifesto que as funções racionais são meromorfas em todo o plano. *Assim, as funções racionais formam um subcorpo do corpo das funções meromorfas em qualquer domínio D.*

Quanto às funções holomorfas num domínio D, essas formam apenas um anel, visto que o produto e a soma de duas funções holomorfas em D ainda são funções holomorfas em D, mas, em geral, o quociente de uma função holomorfa em D por outra nas mesmas condições não é uma função holomorfa em D. Porém, já vimos (COROLÁRIO 4 do TEOREMA 14.1) que este anel é um domínio de integridade; pode, portanto, ser ampliado num corpo, que, neste caso, será constituído por funções meromorfas em D.

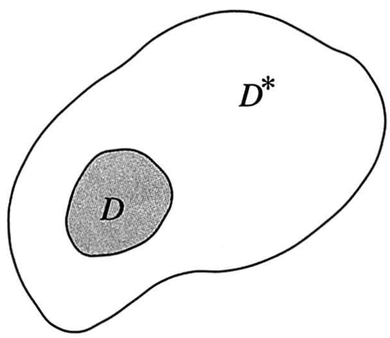
Recordemos, ainda, que os polinómios representam funções holomorfas em todo o plano, isto é, *funções inteiras,* segundo se disse no Capítulo II. *As funções racionais inteiras formam, pois, um sub-anel do anel das funções holomorfas em qualquer domínio.*

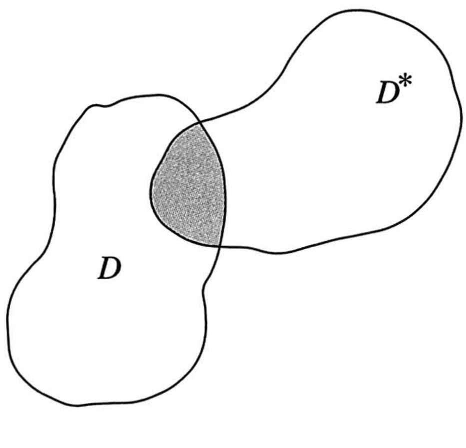
16. Funções analíticas globais (ou funções analíticas no sentido de WEIERSTRASS)

Extensão analítica e continuação analítica.

Dados dois domínios abertos D e D^* do plano, com $D \subset D^*$ e $D \neq D^*$, e uma função complexa f definida em D, já sabemos que se chama *prolongamento ou extensão* de f a D^*, toda a função f^* que tenha por domínio D^* e tal que $f^*(z) = f(z)$ para todo o $z \in D$.

É claro que, sem mais condições, existe sempre uma infinidade de prolongamentos de f a D^*: assim o problema do prolongamento duma função é sempre *possível* mas largamente *indeterminado*. Se queremos torná-lo determinado, há que impor condições às funções f e f^*. Por exemplo, se a função f é holomorfa em D e se se pretende que f^* seja holomorfa em D^*, *o problema nem sempre é possível, mas*





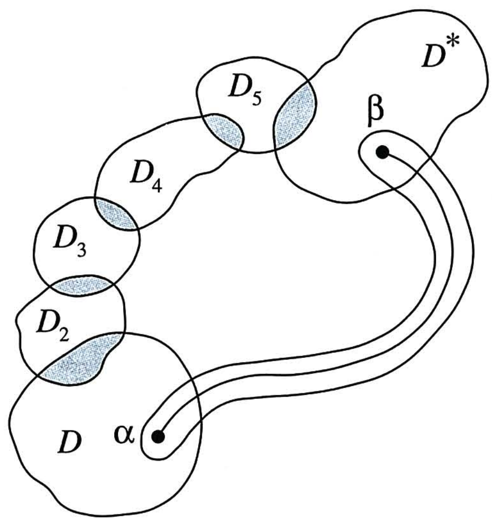
quando possível, é sempre determinado, em virtude do PRINCÍPIO DAS IDENTIDADES PARA FUNÇÕES HOLOMORFAS *estabelecido no n.º* 14. Com efeito, se f^* é uma função holomorfa em D^* que coincide com f em D, fica determinada pelos seus valores em D (COROLÁRIO 1 do TEOREMA 14.1); não pode, portanto, existir mais de um prolongamento analítico de f a D^*. Nisto consiste o PRINCÍPIO DA UNICIDADE DA EXTENSÃO ANALÍTICA, que podemos, mais geralmente, enunciar nos seguintes termos:

Dados dois domínios abertos D e D^* do plano com pontos comuns, e uma função f holomorfa em D, não pode existir mais de uma função f^* holomorfa em D^*, que coincida com f em $D \cap D^*$.

Com efeito, uma tal função f^* fica determinada pelos valores que toma na intersecção $D \cap D^*$, que é um conjunto aberto contido em D^*.

Posto isto, é natural introduzir os seguintes conceitos:

DEFINIÇÕES 16.1. *Dadas duas funções f e f^*, holomorfas em domínios abertos, respectivamente D e D^* do plano, diz-se que f^* é uma continuação analítica directa de f a D^*, quando D e D^* têm pontos comuns e as funções f e f^* tomam o mesmo valor em cada ponto da intersecção $D \cap D^*$. Por outro lado, diz-se que f^* é uma continuação analítica indirecta de f a D^*, quando existe uma sucessão finita de funções holomorfas $f_1, f_2, \dots, f_n$, cada uma das quais, a partir da segunda, é continuação analítica directa da anterior, sendo a primeira a função $f (f_1 = f)$ e a última a função $f^* (f_n = f^*)$.*



É claro que, em qualquer dos casos, os domínios $D_1, D_2, \dots, D_n$, das referidas funções (com $D_1 = D$ e $D_n = D^*$) formam uma cadeia, isto é, uma sucessão finita de conjuntos, cada um dos quais, a partir do segundo, intersecta o anterior (no caso da figura, $n = 6$).

Também diremos que as funções $f_1, f_2, \dots, f_n$, nas referidas condições, formam uma *cadeia.*

Dada uma linha L orientada, com a origem α em D e a extremidade β em D^*, pode acontecer que exista uma continuação analítica f^* de f a D^*, mediante uma função g intermédia, holomorfa num domínio aberto que contenha L. Diz-se então que f^* é uma *continuação analítica de f a D* ao longo da linha L.*

Chama-se *continuação analítica de f a um ponto do plano,* a toda a possível continuação de f a uma vizinhança desse ponto.

Assim, em resumo, há que distinguir *"extensão analítica"* de *"continuação analítica"*. A continuação analítica só é extensão analítica quando o segundo domínio D^* contém o primeiro domínio D. Além disso, há dois modos distintos (mas equivalentes) de obter a continuação analítica: um, ao longo de cadeias de domínios, outro, ao longo de linhas.

É de notar, porém, que, enquanto o problema da continuação analítica directa só pode conduzir a um resultado (*em virtude da unicidade do prolongamento analítico*), *o mesmo já não acontece com a continuação analítica indirecta. Quer dizer: a continuação analítica de f a D*, ao longo duma certa linha, pode não coincidir com a continuação analítica de f a D* ao longo de outra linha.*

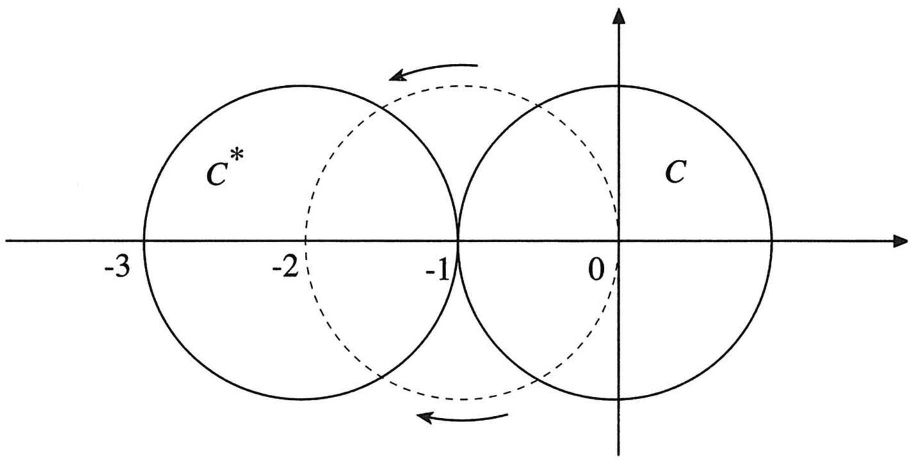
Consideremos, por exemplo, o desenvolvimento em série

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \dots$$

válido, como é sabido, no círculo aberto C de centro em zero e raio 1. Uma primitiva da soma desta série é dada, evidentemente, pela série

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots .$$

Por outro lado, segundo o estabelecido no final do n.º 7, uma primitiva da função $1/(1+z)$ no círculo aberto C será, por exemplo, o ramo da função log $(1+z)$ que para $z=0$ toma o valor 0; esta primitiva coincide com a anterior, visto que duas primitivas da mesma função num domínio simplesmente conexo diferem necessariamente por uma constante. Se efectuarmos, agora, a continuação analítica desta função no círculo aberto C^* de centro -2 e raio 1, ao longo da semi-circunferência orientada de centro -1, situada acima do eixo real, com a origem em zero e a extremidade em -2, obtemos uma



função holomorfa em C^*, que pode aí ser representada por uma série de potências de $z+2$.

Porém, se efectuarmos a continuação analítica ao longo da semi--circunferência orientada, simétrica desta em relação ao eixo real, obtemos um resultado diferente, visto que, no primeiro caso, a função obtida toma no ponto -2 o valor $i\pi$ e, no segundo caso, a função obtida toma no mesmo ponto o valor $-i\pi$.

Conceito de função analítica global.

Dadas duas funções f e f^*, definidas e holomorfas em domínios abertos D e D^* do plano, diremos que *f^* é equivalente a f*, quando f^* é continuação analítica (directa ou indirecta) de f. É fácil ver que se trata, efectivamente, de uma *relação de equivalência.* Com efeito, esta relação:

1) É *reflexiva*: se $D^*=D$, f é, evidentemente, uma continuação analítica (trivial) de f a D^*.

2) É *simétrica:* se podemos passar de f a f^* mediante uma cadeia de funções $f_1=f$, f_2, ..., $f_n=f^*$ (podendo ser $n=2$), também podemos passar de f^* a f mediante a cadeia inversa.

3) É *transitiva*: se podemos passar de f a f^* mediante uma cadeia de funções, e de f^* a f^{**} mediante outra cadeia de funções, é claro que podemos passar de f a f^{**} mediante a cadeia resultante.

Pois bem:

DEFINIÇÃO 16.2. *Chamaremos função analítica global* Φ *representada pela função holomorfa* f *à classe de todas as funções holomorfas (em domínios abertos do plano) que são equivalentes a* f, *isto é, que são continuações analíticas de* f. *Escreveremos, então*:

$$\Phi = [f].$$

Assim, duas funções f e g, holomorfas em domínios do plano, representam uma mesma função analítica global, quando (e só quando) são continuação analítica uma da outra. Pode, então, escrever-se:

$$[f] = [g],$$

o que não quer dizer que $f = g$.

Chamaremos *ramos duma função analítica global* às funções holomorfas que a representam. Assim, uma função analítica global poderá ser representada indiferentemente por qualquer dos seus ramos, *por menor que seja o domínio deste* (do mesmo modo que, por exemplo, uma substância química pode ser representada por qualquer pequeníssima porção dessa substância).

Às funções analíticas globais chamaremos também *funções analíticas em sentido lato* ou ainda *funções analíticas no sentido de Weierstrass*.

Por sua vez, às funções f definidas e holomorfas em domínios abertos D do plano, podemos chamar *funções analíticas locais* (ou simplesmente *funções analíticas,* como já ficou atrás estabelecido).

Cada ramo f duma função analítica global Φ, tem por campo de existência um domínio aberto D_f do plano, em que é holomorfa. Designemos por D_Φ a reunião dos domínios de *todos os possíveis* ramos de f. Então, o conjunto D_Φ é aberto e não vazio (visto ser a reunião de conjuntos abertos não vazios) e é conexo (visto que se pode passar de um ponto para outro de D_Φ mediante uma cadeia de domínios ou uma linha contínua). Por conseguinte, D_Φ é também um domínio aberto do plano. Chamar-lhe-emos *domínio de analiticidade* de Φ e também *domínio da analiticidade de qualquer dos ramos de* Φ.

Pode acontecer, em particular, que exista um ramo f de Φ cujo domínio seja precisamente D_Φ; neste caso, os outros ramos possíveis de Φ serão as restrições de f a sub-domínios de D_Φ e f *será, portanto, o ramo de* Φ *de domínio máximo*. Diz-se, então, que a função analítica global Φ *é uniforme*, e podemos, sem inconveniente, identificá-la ao próprio ramo f, escrevendo $\Phi = f$. Por exemplo, a expressão $1/z$ representa uma função analítica global uniforme, no plano privado da origem.

Mas note-se que *nem toda a função definida e holomorfa num domínio aberto* D *do plano, pode assim considerar-se como função analítica global, mesmo que não possa prolongar-se analiticamente a um outro domínio* $D^* \supset D$. Para isso, é necessário (e suficiente) que não tenha continuação analítica *em nenhum outro domínio* D^* *distinto de* D (o que não obriga a ser $D \subset D^*$). Por exemplo, sabemos que há um ramo de $\log z$, definido e holomorfo no plano privado do semi-eixo real positivo; mas esse não pode ser identificado à própria função analítica global que representa, pois há ramos da mesma em domínios que contêm esse semi-eixo, e até ramos diferentes no domínio do primeiro. Trata-se, pois, aqui de uma função analítica global (chamada *função logarítmica* e designada por $\log z$) cujo domínio de analiticidade é o plano inteiro menos a origem, mas que não admite nenhum ramo (função holomorfa) nesse domínio.

Quando isto sucede, isto é, quando não existe nenhum ramo de Φ cujo domínio seja D_Φ, diz-se que a função analítica global Φ é *pluriforme*, atendendo a que pode ter ramos diferentes num mesmo domínio. *Neste caso,* Φ *não é uma função no sentido usual, mas antes, como vimos, uma classe de funções*.

No entanto, uma função pluriforme Φ pode sempre conceber-se como função propriamente dita (uniforme), recorrendo à sua representação sobre uma *superfície de Riemann.*

Noção intuitiva de superfície de Riemann. Germes de função analítica.

Já no Capítulo II se nos apresentou intuitivamente este conceito, ao fazer o estudo elementar das funções $\sqrt[n]{z}$ e $\log z$.

Quando uma função analítica global Φ tem dois ou mais ramos *distintos* num mesmo domínio D, convenciona-se dizer que esse domínio do plano é formado por vários folhetos sobrepostos mas distintos, correspondentes aos diferentes ramos de Φ existentes em D. Quando se passa de um desses ramos para outro, mediante uma cadeia de funções, os respectivos folhetos como que se "colam" uns aos outros, e é à reunião dos folhetos assim "colados" entre si, correspondentes a todos os ramos de Φ, que se chama *superfície de Riemann da função analítica global* Φ.

Porém, este desdobramento do plano ou "folhetos distintos sobrepostos" é um processo intuitivo, desprovido de coerência lógica. Na verdade, dizer que dois pontos do plano estão sobrepostos, equivale a dizer que são *um mesmo* ponto e, portanto, é absurdo falar de pontos distintos onde existe um só ponto.

Por exemplo, no caso da função log z, é-se levado a considerar como distintos dois pontos (ρ, φ_1) e (ρ, φ_2) do plano, em coordenadas polares, quando $\varphi_1 \neq \varphi_2$, mesmo que a diferença seja um múltiplo de 2π. Isto equivale a considerar o plano desdobrado numa infinidade de folhetos distintos sobrepostos. Ora, a verdade é que, quando $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, com k inteiro, os pares (ρ, φ_1) e (ρ, φ_2) representam *um mesmo ponto* e não *pontos distintos sobrepostos*.

Para definir logicamente o conceito de superfície de Riemann, associada a uma função analítica global, convém introduzir previamente o conceito de "germe de função analítica":

Dado um ponto α qualquer do plano, chamaremos *germe de função analítica em* α, a todo o sistema

$$(\alpha, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$$

que se obtém, associando a α uma sucessão qualquer c_n de números complexos tal que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-\alpha)^n}{n!}$$

tenha raio de convergência não nulo. Então, esta série define uma função holomorfa $g(z)$ numa vizinhança de α, tendo-se $c_n = g^{(n)}(\alpha)$.

Reciprocamente, se for f uma função holomorfa num domínio aberto D e z_0 um ponto qualquer de D, os valores $f^{(n)}(z_0)$ da função f e de todas as suas derivadas no ponto z_0 formam, juntamente com z_0, um germe de função analítica, a que é natural chamar *germe de f no ponto z_0*. Designá-lo-emos, abreviadamente, por $\{z_0, f\}$. Assim, o COROLÁRIO 2 do TEOREMA 14.1 pode agora enunciar-se, dizendo:

Uma função holomorfa num domínio D fica determinada por um qualquer dos seus germes em D.

Mas é evidente que duas funções holomorfas f e g, definidas em domínios D e D^* distintos com pontos comuns, podem ter um mesmo germe num ponto z_0 da intersecção $D \cap D^*$. Para isso é suficiente (e necessário) que coincidam numa vizinhança de z_0. Tem-se, então,

$$\{z_0, f\} = \{z_0, g\}$$

e diz-se que f e g são *equivalentes em z_0*. Assim, para que f e g sejam equivalentes em z_0, não basta que tenham o mesmo valor nesse ponto; é necessário, além disso, que seja

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0), \quad \text{para todo o } n = 1, 2, \dots .$$

Dado um germe $\zeta = \{z, f\}$ de função analítica num ponto z do plano, chama-se *projecção de ζ sobre o plano* esse ponto z e escreve-se

$$z = \mathrm{p}(\zeta).$$

Conceito rigoroso de superfície de Riemann.

Recordemos que uma função holomorfa f representa, juntamente com todas as suas continuações analíticas, uma função analítica global Φ. Então, ao germe de f num ponto z qualquer do seu domínio é natural chamar também *germe de Φ em z*. Na verdade, a função analítica global Φ é determinada por um qualquer dos seus ramos e, portanto, por um qualquer dos germes desses ramos. Todavia, há uma diferença importante a assinalar:

Enquanto uma função holomorfa f só pode ter um germe em cada ponto z do seu domínio D_f, uma função analítica global Φ pode ter vários ou mesmo uma infinidade de germes distintos num mesmo ponto z do seu domínio D_Φ de analiticidade (se for pluriforme).

As funções $\log z$ e $\sqrt[n]{z}$ atrás estudadas fornecem-nos exemplos simples deste facto.

Mas é precisamente esta circunstância que nos indica o caminho natural para definir com rigor *superfície de Riemann duma função analítica global*:

DEFINIÇÃO 16.3. *Chamaremos superfície de Riemann duma função analítica global Φ, e designaremos por S_Φ, ao conjunto de todos os germes ζ de Φ nos diferentes pontos z do seu domínio de analiticidade D_Φ.*

Assim, a cada elemento ζ de S_Φ corresponde um e um só ponto z de D_Φ, que é a projecção $\mathrm{p}(\zeta)$ de ζ no plano. Reciprocamente, para cada ponto z de D_Φ existe, *pelo menos,* um elemento ζ de S_Φ, cuja projecção no plano é z; mas pode existir mais de um, se Φ não for uniforme. Portanto, *a operação* p *de projecção define uma aplicação unívoca $\zeta \to z$ de S_Φ; mas esta aplicação só será biunívoca se Φ for uniforme.*

A DEFINIÇÃO 16.3 precisa, ainda, de ser completada, com a introdução de uma topologia conveniente em S_Φ:

DEFINIÇÃO 16.4. *Dado um ponto ζ_0 de S_Φ, sejam z_0 a projecção de ζ_0 em D_Φ e f uma função holomorfa de domínio D que tenha por germe ζ_0 no ponto $z_0 \in D$. Então, chamaremos vizinhança (D) de ζ_0 ao conjunto Δ dos germes ζ da função f existentes em todos os pontos de D.*

Prova-se facilmente que, tomando estes conjuntos Δ para *vizinhanças fundamentais* de cada elemento ζ_0 de S_Φ, a *superfície de Riemann S_Φ* fica a ser, efectivamente, um espaço topológico. Prova-se, mesmo, que *este espaço topológico é metrizável.*

Vimos que a aplicação p de S_Φ sobre D_Φ, não é invertível se Φ for pluriforme. Mas facilmente se reconhece, agora, que é *localmente invertível*: isto é, para cada ponto ζ_0 de S_Φ, existe, pelo menos, uma vizinhança Δ, tal que a projecção p define uma aplicação biunívoca (e até bicontínua) de Δ sobre um domínio D do plano. Na verdade, a DEFINIÇÃO 16.4 foi escolhida, precisamente, para que se verificasse esta propriedade.

Modelos concretos das superfícies de Riemann.

Segundo as definições anteriores, os pontos ζ duma superfície de Riemann S_Φ, são germes de funções analíticas, portanto, sucessões de números complexos

$$\zeta = (z, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots).$$

Deste modo, S_Φ identifica-se a um sub-espaço topológico do espaço $\mathbf{C}^\infty$ de tais sucessões, espaço este que, como vimos no Capítulo III, tem uma infinidade de dimensões.

Surge aqui, naturalmente, a ideia de averiguar se, para uma dada superfície de Riemann S_Φ, existe uma superfície Σ do espaço $\mathbf{R}^3$ ou de um espaço $\mathbf{R}^n$ (com n finito), que seja homeomorfa a S_Φ. A uma tal superfície Σ chamaremos *modelo concreto de* S_Φ.

Se a função analítica global Φ é uniforme, o problema está imediatamente resolvido, visto que a projecção p define, neste caso, uma aplicação biunívoca e bicontínua de S_Φ sobre o domínio D_Φ do plano. O domínio D_Φ será pois, neste caso, uma superfície de $\mathbf{R}^3$ biomeomorfa a S_Φ e pode identificar-se à superfície de Riemann de Φ.

O problema só se levanta, verdadeiramente, para as funções Φ pluriformes. Consideremos, por exemplo, a função analítica global $\log z$; como já foi indicado intuitivamente no Capítulo II, um modelo concreto da superfície de Riemann desta função é um *helicóide recto* (ou *superfície de parafuso*). Imagine-se uma semi-recta OA animada de movimento de rotação uniforme em torno de O, num plano α, que, por sua vez, está animado de movimento de translação uniforme perpendicularmente a α. Então, a superfície gerada pela semi-recta é um helicóide recto, que tem por eixo a recta que passa por O e é perpendicular a α.

Analiticamente, o helicóide associado a $\log z$ pode ser definido, considerando, para cada ponto $z = x + iy$ do plano, os pontos $\zeta = (x, y, u)$ do espaço $\mathbf{R}^3$, cujas abcissa x e ordenada y são, respectivamente, $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$, e cujas cotas u são todos os valores possíveis φ do argumento de z entre $-\infty$ e $+\infty$.

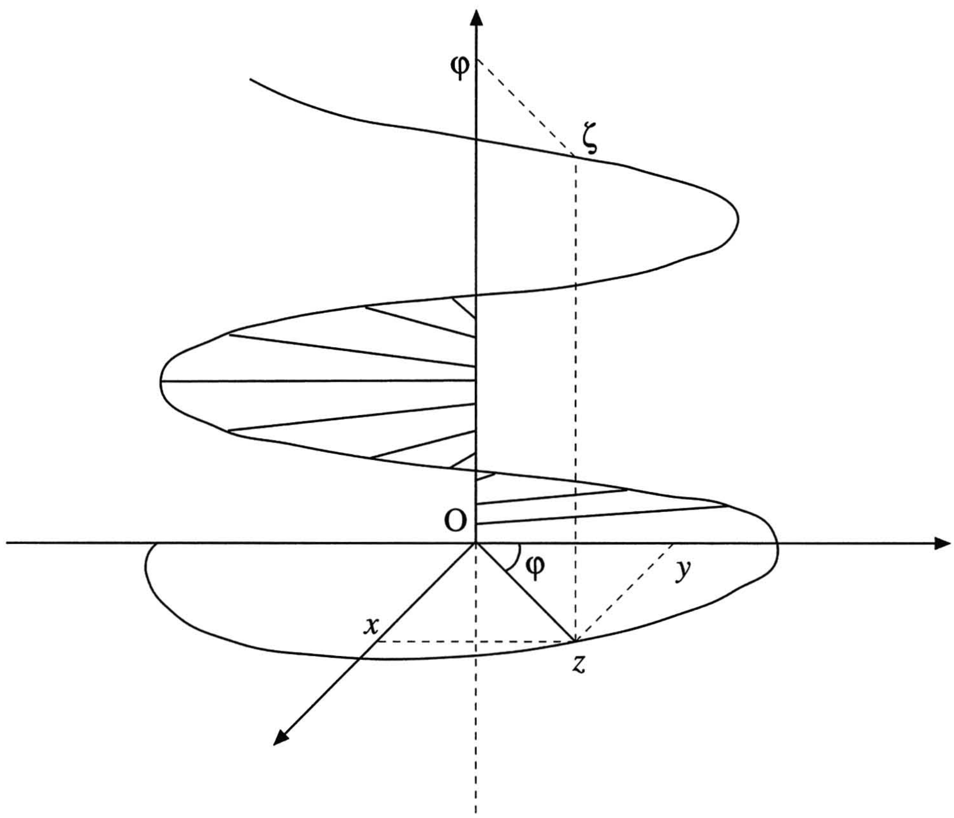
Teremos, assim, designando por ρ o módulo de z:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \\ u = \varphi \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \leqslant \rho < +\infty \\ -\infty < \varphi < +\infty \end{cases} .$$

Ora, considerando ρ e φ como parâmetros, as igualdades (1) serão, manifestamente, equações paramétricas dum helicóide que tem por eixo o eixo dos *uu* (excluídos da superfície os pontos deste).

Quando, por exemplo, ρ é constante e φ varia entre $-\infty$ e $+\infty$, o ponto $z=x+iy$ roda em torno da origem sobre uma circunferência de raio ρ e o ponto ζ descreve no espaço uma hélice cilíndrica sobre o helicóide; o helicóide é precisamente o lugar geométrico de todas estas hélices quando ρ varia entre 0 e $+\infty$.

Aos valores de ρ e φ que determinam ζ chamaremos, como é uso, *coordenadas curvilíneas* do ponto ζ sobre o helicóide.



As linhas $\rho=$constante (hélices cilíndricas) e $\varphi=$constante (semi-rectas) são as *linhas coordenadas* desta superfície.

As semi-rectas geratrizes do helicóide podem intuitivamente assimilar-se a arestas dos degraus de uma *escada em caracol*.

É fácil ver que esta superfície fornece efectivamente um modelo concreto da *superfície de Riemann* da função log z. Esta pode ser uniformizada sobre o helicóide, pondo

$$\log \zeta = \log \rho + i\varphi .$$

A projecção do ponto ζ da *superfície de Riemann* sobre o plano será, neste caso, precisamente a projecção (no sentido usual) ortogonal de ζ sobre o plano xy.

Como se vê, a *superfície de Riemann* da função logarítmica tem uma infinidade de folhetos.

Para a função $\sqrt[n]{z}$, com n natural qualquer, podemos procurar uma *superfície de Riemann* concreta, de modo análogo. A superfície deverá ter, neste caso, n folhetos; mas não é possível encontrar no espaço $\mathbf{R}^3$ uma superfície que a realize sem evitar que tenha pontos múltiplos, pelo menos sobre uma semi-recta (que pode ser o semi--eixo real positivo). Assim, recaímos na incoerência lógica, atrás apontada, de considerar como distintos pontos coincidentes.

No entanto, prova-se que *uma tal superfície de Riemann é isomorfa a uma superfície sem pontos múltiplos, de um espaço* $\mathbf{R}^n$, *com* n *finito*.

As *superfícies de Riemann* pertencem à classe das chamadas *variedades analíticas complexas*, as quais, por sua vez, estão incluídas na categoria das *variedades diferenciáveis,* que são estudadas na moderna Geometria Diferencial.

Entre as variedades diferenciáveis, são particularmente importantes aquelas em que se introduz uma métrica, por meio de uma fórmula quadrática diferencial (chamadas *espaços de Riemann*).

Demonstra-se que, em particular, uma *superfície de Riemann* é um *espaço de Riemann.* O estudo dos *espaços de Riemann* é essencial na teoria da Relatividade Geral.

Superfície de Riemann subordinada a uma outra derivada duma função analítica global.

Dadas duas *superfícies de Riemann* S e S^*, diz-se que S^* é *subordinada a* S, quando existe uma aplicação contínua π de S sobre S^*, que faz corresponder a cada ponto ζ da primeira, o ponto ζ^* da segunda que tem a mesma projecção sobre o plano.

É fácil ver que, se a aplicação π é reversível, será, neste caso, bicontínua. Então, S^* é homeomorfa a S e pode identificar-se a esta *superfície de Riemann.*

Mas pode acontecer que π não seja reversível, como vamos ver.

Chama-se *derivada* de uma função analítica global Φ, e designa-se por Φ', a função analítica global cujos ramos são as derivadas dos ramos da primeira.

É fácil ver, então, que, a todo o germe de Φ num ponto z_0, corresponde *um e um só* germe de Φ' nesse ponto. Com efeito, um germe de Φ em z_0 será uma sucessão

$$(z_0, f(z_0), f'(z_0), \dots f^{(n)}(z_0), \dots)$$

em que f é um ramo de Φ. Ora, se eliminarmos o segundo termo, $f(z_0)$, desta sucessão, obteremos um germe de Φ' em z_0, que é univocamente determinado pelo primeiro.

Mas a recíproca não é verdadeira: pode haver germes diferentes de Φ num mesmo ponto, que dêem lugar a um só germe da derivada. Por exemplo, a derivada da função analítica global $\log z$ é a função $1/z$; a primeira é pluriforme, a segunda uniforme; em cada ponto $z \neq 0$ existe uma infinidade de germes da função logarítmica e um único da sua derivada.

Destas considerações resulta claramente que *a superfície de Riemann de Φ' é subordinada à superfície de Riemann de Φ.*

Também é fácil ver que, por exemplo, a *superfície de Riemann* da função $\sqrt[n]{z}$ (com n folhetos) é subordinada à *superfície de Riemann* de $\log z$ (com uma infinidade de folhetos).

Funções holomorfas num domínio duma superfície de Riemann.

Consideremos uma *superfície de Riemann* S_Φ e seja Δ um domínio aberto neste espaço. Diz-se que uma função complexa $F(\zeta)$ definida em Δ é *holomorfa neste domínio,* quando para cada ponto ζ_0 de Δ existe uma vizinhança U de ζ_0 tal que o operador de projecção p define um homeomorfismo de U sobre um domínio V do plano e a função $F(p^{-1}(z))$ é holomorfa no domínio V do plano.

É fácil ver que, segundo esta definição, a própria função analítica global Φ se pode considerar como uma função holomorfa em toda a sua *superfície de Riemann* S_Φ. O mesmo podemos dizer para a sua derivada Φ', e, de um modo geral, para qualquer outra função analítica global cuja *superfície de Riemann* seja subordinada a S_Φ.

Mudanças de variável.

Seja Φ uma função analítica global e seja $z=h(\lambda)$ uma função complexa definida e holomorfa num domínio do plano, cujo transformado por h contenha o domínio de analiticidade de Φ.

Nestas condições, para cada ramo f de Φ, podemos definir a função composta $f(h(\lambda))$ ou abreviadamente $f\circ h$ que, como se pode verificar, é ainda definida e holomorfa num domínio do plano, imagem inversa do domínio de f por h.

Por outro lado, dados dois ramos f_1 e f_2 de Φ, pode acontecer que as funções $f_1\circ h$ e $f_2\circ h$ não sejam continuação analítica uma da outra, representando, neste caso, funções analíticas globais distintas.

Às funções analíticas globais, a que Φ dá origem por este processo, é natural chamar *funções analíticas globais compostas de Φ com h.*

Por exemplo, seja a função $w=\sqrt[6]{z}$ que pode mais correctamente ser representada sob forma implícita pela equação binómia $w^6-z=0$. Efectuando a mudança de variável $z=\lambda^2$, esta equação é substituída por $w^6-\lambda^2=0$, equivalente a

$$(w^3-\lambda)(w^3+\lambda)=0$$

que se decompõe nas duas seguintes equações

$$w^3-\lambda=0, \qquad w^3+\lambda=0.$$

Assim, como se vê, a mudança de variável considerada transforma a função $w=\sqrt[6]{z}$ em duas funções analíticas globais:

$$w=\sqrt[3]{\lambda}, \qquad w=\sqrt[3]{-\lambda}.$$

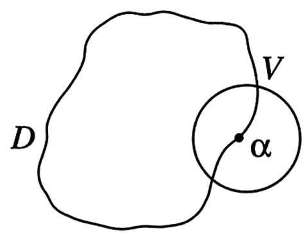
É claro que não se pode passar de uma para outra por continuação analítica.

Analogamente, a função $w=\log z$ pela mudança de variável $z=e^\lambda$ dá lugar a uma infinidade de funções uniformes:

$$w=\log e^\lambda=\lambda+2k\pi i, \qquad \text{com } k=0,\pm 1,\dots\,.$$

Singularidade de uma função analítica global.

Consideremos uma função analítica global Φ. Sendo f um ramo de Φ de domínio D, diz-se que um ponto α da fronteira de D é um *ponto singular de* Φ *relativo ao ramo* f, quando não é possível efectuar a continuação analítica de f a nenhuma vizinhança de α.



Um ponto singular α de Φ relativo a f, diz-se *isolado*, quando existe uma vizinhança V de α tal que se pode efectuar a continuação analítica de f a qualquer ponto de V distinto de α. Então, há a distinguir 2 casos:

1.º caso. *Existe uma vizinhança* V *de* α *tal que se pode fazer a continuação analítica de* f *à vizinhança* V *privada do ponto* α.

Quer isto dizer que existe uma função g, holomorfa na vizinhança V privada de α, que coincide com f em $V \cap D$. Então, α pertence a um dos tipos estudados no número anterior, e, como não pode ser uma singularidade removível (porque então existiria uma continuação analítica de f na vizinhança de α, contrariamente à hipótese), α só pode ser um *pólo* ou uma *singularidade essencial.*

2.º caso. *O ponto* α *é um ponto singular isolado em relação a* f *mas não existe nenhuma continuação analítica de* f *a uma vizinhança de* α *privada deste ponto.*

Então, se efectuarmos uma continuação analítica ao longo de uma circunferência de centro α, partindo dum germe de f, ao voltar ao ponto de partida não se reencontra o mesmo germe, pois que, de contrário, haveria uma continuação analítica de f a uma vizinhança de α privada deste ponto e estaríamos no caso estudado anteriormente. Exprime-se este facto dizendo que α é um *ponto de ramificação* ou um *ponto crítico* de Φ (relativo ao ramo f).

Mas há ainda dois sub-casos a distinguir agora.

1.º sub-caso. *Efectuando uma continuação analítica de f ao longo de uma circunferência de centro α, partindo dum germe de f, reencontra-se o mesmo germe após um número finito de voltas.*

Seja p o número mínimo de voltas necessário para reencontrar o mesmo germe e consideremos a mudança de variável $z=\alpha+\lambda^p$. Então, enquanto λ dá uma volta em torno da origem, z dá p voltas em torno de α. Assim, pela referida mudança de variável, obtém-se p funções *uniformes* de λ em torno da origem, que é, portanto, uma singularidade removível, um pólo ou uma singularidade essencial dessas funções. Podemos, então, desenvolver uma qualquer das referidas funções em *série de Laurent*,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \lambda^n$$

e assim, desfazendo a mudança de variável, obtemos o desenvolvimento

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\sqrt[p]{z-\alpha})^n$$

para a função inicial numa vizinhança de α. Mas, como vimos, há ainda aqui três hipóteses a distinguir:

1) *A origem é uma singularidade removível das funções de λ obtidas.* Então, os coeficientes das potências negativas no desenvolvimento de Laurent são todos nulos. Diz-se, neste caso, que α é um *ponto crítico algébrico ordinário* de Φ relativo a f.

2) *A origem é um pólo das funções de λ obtidas.* Então, só há na série de Laurent um número finito de termos não nulos em que o expoente é negativo, e diz-se que α é um *pólo algébrico* de Φ em relação a f.

3) *A origem é um ponto singular essencial das funções de λ obtidas.* Diz-se, então, que α é um *ponto de ramificação* (ou *ponto crítico*) *transcendente* de Φ em relação a f.

2.º sub-caso. *Efectuando uma continuação analítica ao longo de uma circunferência de centro α, nunca se reencontra o germe inicial por maior que seja o número de voltas que se dê em torno de α. Diz-se, então, que α é uma singularidade transcendente logarítmica de Φ em relação a f.*

Neste caso ainda se pode fazer uniformização dos ramos de Φ considerados junto de α, mediante a mudança de variável

$$z = \alpha + e^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Importa salientar que: *Um ponto α pode ser ponto singular de Φ em relação a um ramo f de Φ, e não o ser em relação a um outro* (*existindo, então, um germe de Φ em α*).

Também pode acontecer que α seja, por exemplo, um pólo de Φ em relação a um ramo e um ponto de ramificação em relação a outro ramo, etc.

Daqui resulta que as singularidades de Φ não estão necessariamente situadas sobre a fronteira de D_Φ, embora a recíproca seja verdadeira.

A classificação anterior pode resumir-se no seguinte quadro:

Singularidades duma função analítica global:

1. *Pólos*
2. *Pontos singulares essenciais*
3. *Pontos de ramificação ou pontos críticos*:

a) *Pontos críticos algébricos* $\begin{cases} \textit{Singularidades algébricas ordinárias} \\ \textit{Pólos algébricos} \end{cases}$

b) *Pontos críticos transcendentes*

c) *Singularidades transcendentes logarítmicas*

Exemplos – No plano $\mathbf{C}$, a expressão

$$\frac{1}{1+z^2} \exp \frac{1}{z}$$

representa uma função analítica uniforme, com dois pólos simples (i e $-i$) e um ponto singular essencial (a origem). Por sua vez, a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \exp \frac{1}{\sqrt{z}}$$

representa uma função analítica global, pluriforme, com dois pólos algébricos (i e $-i$) e um ponto crítico transcendente (a origem). Finalmente, a expressão

$$\sqrt[3]{z} \log (1-z^2)$$

representa uma função analítica global, pluriforme, com um ponto crítico algébrico ordinário (a origem) e duas singularidades logarítmicas (1 e –1).

Distinção entre "função analítica" e "função representável analiticamente".

Chamam-se *operações fundamentais da Análise* as operações racionais (adição, subtracção, multiplicação e divisão), as extracções de raiz de índice inteiro e a operação de passagem ao limite. Por sua vez, chamam-se *expressões analíticas* as expressões que se obtêm ligando entre si variáveis (reais ou complexas) e símbolos numéricos, por sinais das operações fundamentais da análise, segundo os devidos preceitos, que incluem o emprego de parênteses.

Uma expressão analítica diz-se *algébrica,* quando não indica nenhuma operação de passagem ao limite em que intervenha alguma variável. Caso contrário, diz-se *transcendente.* Assim, a expressão analítica

$$\frac{z^2}{\sqrt[3]{1-z^2}}$$

é algébrica, enquanto as expressões analíticas

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$z\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}$$

são transcendentes. Nas duas últimas, a operação de passagem ao limite é indicada pelos símbolos $+\infty$ e $-\infty$; assim, a segunda é apenas uma abreviatura da expressão

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}.$$

Uma função de variável real ou de variável complexa diz-se *representável analiticamente,* quando pode ser representada por uma expressão analítica em todo o seu domínio de existência. Por exemplo, as funções e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, etc., são funções representáveis analiticamente, como, desde logo, se reconhece.

É preciso não confundir o conceito de "função representável analiticamente" com o de "função analítica". Havemos de conhecer exemplos de funções representáveis analiticamente que não admitem derivada em nenhum ponto. Havemos também de conhecer casos em que uma mesma expressão analítica em z representa duas funções holomorfas não equivalentes, definidas em domínios diferentes do plano.

O facto de as funções e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{tang} z$, z^α, etc., serem representáveis analiticamente, e se apresentarem correntemente em Análise, leva a chamar expressões analíticas também às expressões em que, além dos sinais das operações fundamentais da Análise, figuram símbolos das referidas funções.

Por último, estende-se a mesma designação às expressões em que, a par desses sinais ou símbolos, figuram os símbolos de derivação e de integração, atendendo a que estes são definidos por meio de operações racionais e da operação de passagem ao limite. Assim, por exemplo, a expressão

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

que representa a função Γ (função *gama*) chamar-se-á também uma expressão analítica, atendendo a que se tem, *por definição*

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T t^{z-1} e^{-t} dt,$$

sendo, por outro lado,

$$\int_0^T t^{z-1} e^{-t} dt$$

o limite de *somas de Riemann* da função integranda, quando o diâmetro da decomposição do intervalo $[0, T]$ tende para zero. Por exemplo:

$$\int_0^T t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{h \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu h)^{z-1} e^{-\nu h} h,$$

com $h = T/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Também é preciso não confundir "função algébrica" com "função representável por uma expressão algébrica" e, analogamente, "função transcendente" com "função representável por uma expressão transcendente". Só mais adiante será precisado o conceito de função algébrica. Mas notemos que, por exemplo, se tem

$$\lim \frac{n+z}{nz} = \frac{1}{z}, \qquad \forall z \neq 0,$$

o que mostra que a função racional $1/z$ (função algébrica) pode ser representada por uma expressão transcendente. Reciprocamente, a teoria das equações algébricas mostra que, *em geral, uma função algébrica não pode ser representada, explicitamente, por uma expressão algébrica.*

Singularidades das funções representadas por séries de potências: séries lacunares.

Já sabemos que toda a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n,$$

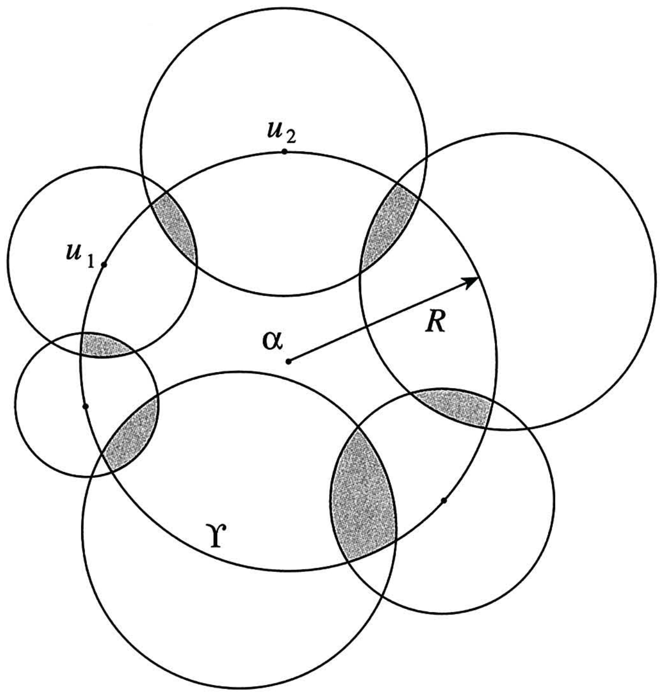
com raio de convergência $R > 0$, representa uma função $g(z)$, holomorfa no círculo aberto $|z - \alpha| < R$, que designaremos por C. Ora, vamos demonstrar que:

TEOREMA 16.1. *Na circunferência do círculo de convergência de uma série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

existe, pelo menos, uma singularidade não removível da função $g(z)$ representada por essa série.

Suponhamos que não existe nenhuma tal singularidade na circunferência $|z - \alpha| = R$, que designaremos por Υ. Então, cada ponto u de Υ é centro dum círculo aberto C_u de raio R_u, no qual é definida uma função $g_u(z)$ holomorfa, continuação analítica directa de $g(z)$. Os círculos C_u assim obtidos formam uma cobertura do conjunto compacto Υ, que pode, portanto, ser coberto por um número finito de tais círculos, $C_{u_1}, C_{u_2}, \ldots, C_{u_n}$. A reunião destes com o círculo C inicial é manifestamente um domínio aberto D, cuja fronteira é formada por um número finito de arcos de círculo, que não tocam a circunferência Υ. Assim, a distância ρ de α a D será maior que R.



Por outro lado, as funções

$$g_{u_k}(z),$$

além de coincidirem com $g(z)$ nas intersecções dos círculos C_{u_k} com C, coincidem umas com as outras nas intersecções dos respectivos domínios, visto que tomam o mesmo valor na parte destas intersecções situada em C (TEOREMA 14.1). Portanto, essas funções definem, juntamente com g, uma função única f, holomorfa no domínio aberto D. Assim, a série de potências de $z-\alpha$ que representa g (e portanto f), numa vizinhança de α, terá um raio de convergência R' pelo menos igual à distância ρ de α à fronteira de D (TEOREMA 11.1), logo superior a R. Mas isto é contrário à hipótese. Existe, pois, pelo menos, uma singularidade não removível de g em Υ.

Este teorema pode ainda enunciar-se do seguinte modo:

ESCÓLIO. *Se for f um ramo de uma função analítica global Φ, e α um ponto do domínio de f, o raio de convergência da série de potências que representa f em torno de α é exactamente a distância de α ao ponto singular de Φ mais próximo de α, relativo a f ou a uma extensão deste ramo* (*o que não quer dizer que não existam singularidades de Φ mais próximas de α, relativas a ramos que não são extensões de f*).

Consideremos, por exemplo, a função (uniforme) de z

$$f(z) \equiv \frac{1+z}{5-2z+z^3}.$$

A origem é um ponto regular (isto é, um ponto não singular) de f, visto que não anula o denominador. Podemos, pois, desenvolver f em série de potências de z (para o que basta dividir o polinómio numerador pelo polinómio denominador, ordenados como estão). O raio de convergência dessa série será, então, o *módulo* da raiz do denominador mais próxima da origem, visto que os dois polinómios são primos entre si.

Pode acontecer, em particular, que *todos* os pontos da circunferência Υ do círculo de convergência duma série de potências sejam singularidades da função $g(z)$ representada por essa série. Diz-se, então, que esta é uma série *lacunar.* É claro que, neste caso, a função $g(z)$ não admite continuação analítica a nenhum domínio que não esteja contido no círculo aberto de convergência: *portanto, g identifica-se a uma função analítica global* Φ *uniforme, cujo domínio de analiticidade* D_Φ *é o referido círculo aberto.*

As séries lacunares têm sido estudadas por vários autores (veja-se VALIRON, obra citada, p. 408).

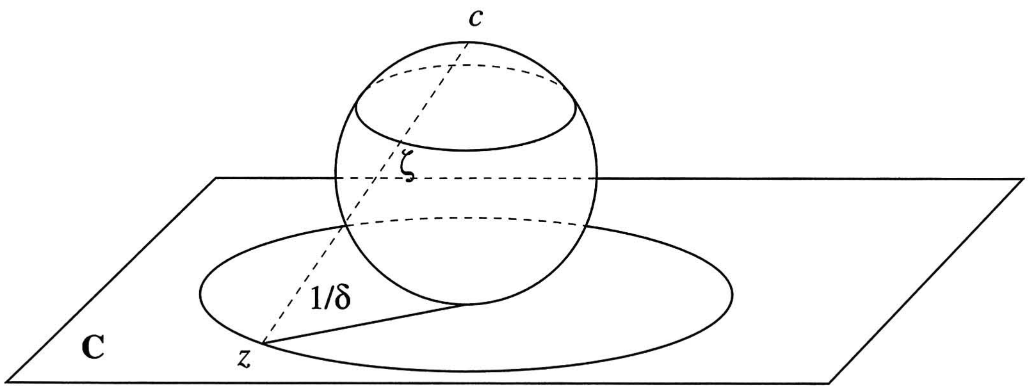
Pode ainda acontecer que as singularidades da função g formem um ou mais arcos de círculo de comprimento não nulo, mas não toda a circunferência Υ. Neste caso, a função g é prolongável para além do círculo de convergência, dando origem a uma função analítica global, uniforme ou pluriforme.

Mas em qualquer dos casos as singularidades de g não são isoladas e pode a função ser limitada em vizinhanças desses pontos, apesar de estes serem singularidades não removíveis: o TEOREMA 16.1 *só é, pois, válido para singularidades isoladas.*

Pode mesmo acontecer que uma série lacunar seja absoluta e uniformemente convergente sobre a circunferência do círculo de convergência, definindo, portanto, uma função contínua (mas não holomorfa) sobre o fecho deste conjunto. Mas disto trataremos mais adiante.

17. Funções holomorfas em domínios da esfera de RIEMANN

Já vimos no Capítulo III que o plano **C** pode ser ampliado num espaço compacto $\dot{\mathbf{C}}$, mediante a adjunção de um único *ponto impróprio* (ou *ponto do infinito*) que se designa ∞. A topologia de $\dot{\mathbf{C}}$ é definida tomando para vizinhanças fundamentais de cada ponto próprio



a de $\dot{\mathbf{C}}$, por exemplo, os círculos abertos com centro a e, para vizinhanças fundamentais do ponto ∞, os complementares em $\dot{\mathbf{C}}$ dos círculos com centro na origem. Mais precisamente, sendo δ um número positivo qualquer, chama-se *vizinhança* (δ) *do ponto* ∞ ao conjunto formado pelo próprio ∞ e por todos os pontos de $\mathbf{C}$ de módulo superior a $1/\delta$. O espaço compacto $\dot{\mathbf{C}}$ assim obtido é chamado *plano-esfera* ou *esfera de Riemann*, atendendo a que, por projecção estereográfica, se define um homeomorfismo entre $\dot{\mathbf{C}}$ e uma superfície esférica S. Nesse homeomorfismo, ao ponto ∞ de $\dot{\mathbf{C}}$ fica a corresponder o centro de projecção c em S e, à vizinhança (δ) de ∞, uma calote esférica (aberta) de centro c. Aliás, este homeomorfismo mostra imediatamente que o espaço $\dot{\mathbf{C}}$ é, de facto, compacto e, além disso, *metrizável*, visto que o mesmo sucede com o espaço S, subespaço métrico limitado e fechado – logo compacto – de $\mathbf{R}^3$. Podemos, então, chamar *distância esférica* de dois pontos z_1 e z_2 de $\dot{\mathbf{C}}$, à distância dos pontos correspondentes ζ_1 e ζ_2 de S.

Posto isto, seja D um domínio do plano-esfera (isto é, um conjunto aberto, não vazio e conexo, de pontos de $\dot{\mathbf{C}}$) e seja f uma função definida em D *e com os valores em* $\dot{\mathbf{C}}$ (*função complexa generalizada*). Diremos que f é *diferenciável num ponto próprio a de D*, quando é diferenciável em a no sentido usual, isto é, quando tem derivada finita em a; diremos que f é *diferenciável no ponto* ∞ (supondo que este pertence a D), quando a função $\varphi(z) \equiv f(1/z)$ é diferenciável no ponto $z=0$. Posto isto, a função f diz-se *diferenciável* (ou *holomorfa*) no domínio D, quando é diferenciável em todos os pontos de D. Do TEOREMA 11.1 e das definições anteriores resulta imediatamente a generalização do mesmo teorema ao caso das funções holomorfas em domínios D de $\dot{\mathbf{C}}$:

Se f é holomorfa num domínio D de $\dot{\mathbf{C}}$, é indefinidamente diferenciável em D. Mais ainda: a função f pode, então, ser representada, numa vizinhança de cada ponto próprio z_0 de D, por uma série de potências de $z-z_0$ cujo raio de convergência é, pelo menos, igual à distância de z_0 à fronteira de D, e, numa vizinhança do ponto ∞ (se este pertencer a D), por uma série de potências de $1/z$,

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}\,.$$

Assim, como se vê, o estudo de funções holomorfas em domínios de $\dot{\mathbf{C}}$ pode reduzir-se ao estudo de funções holomorfas em domínios de $\mathbf{C}$, mediante a mudança de variável $z \to 1/z$. Esta define uma aplicação biunívoca (e bicontínua) do espaço $\dot{\mathbf{C}}$ sobre si mesmo, que transforma o ponto ∞ no ponto 0.

Note-se que o TEOREMA DE JORDAN (n.º 4) se aplica, ainda, a $\dot{\mathbf{C}}$ no seguintes termos:

Na esfera de Riemann, toda a linha fechada simples L, que não se reduza a um ponto, é fronteira comum de dois domínios separados entre si por L e cuja reunião com esta linha é $\dot{\mathbf{C}}$.

Mas não têm significado sobre a esfera as expressões "ponto interno" e "ponto externo" relativamente a L, e a expressão "sentido anti-horário", embora se possa falar de "linha orientada". Por exemplo, uma recta (ampliada com o ponto ∞) é, sobre a *esfera de Riemann*, uma linha fechada simples, fronteira comum de dois domínios separados por essa recta: mas não faz sentido dizer que um deles seja interno e o outro externo à recta, e também não tem significado a expressão "sentido anti-horário" aplicado a essa linha, aliás, homeomorfa à circunferência.

A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY pode estender-se ao caso presente, nas seguintes condições:

Seja D um domínio fechado de $\dot{\mathbf{C}}$, *cuja fronteira se componha de um número finito de linhas fechadas simples e rectificáveis, que não passem pelo ponto* ∞. *Então, se for f uma função contínua sobre D, holomorfa em D e nula no ponto* ∞ (*se este pertence a D*), *tem-se*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(u)}{u - z}\, du, \quad \textit{para todo o } z \in \operatorname{int} D,$$

supondo Γ *orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de D.*

Note-se que são agora exigidas duas condições que não se punham no plano ordinário: 1) o ponto ∞ não pertence a Γ; 2) $f(\infty) = 0$ se $\infty \in D$.

Para a demonstração, começaremos por considerar o caso em que $\infty \in D$ e $0 \notin D$. Efectuemos no anterior integral a mudança de variável $u \to 1/u$, *supondo z fixo e interior a D*[1]. Para isso, notemos que, sendo f holomorfa em D e $f(\infty)=0$, se tem para $f(1/u)$, em torno da origem, um desenvolvimento da forma

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = c_1 u + c_2 u^2 + \ldots,$$

o que permite reconhecer que a função $\varphi(u) \equiv (1/u)\, f(1/u)$ é holomorfa no interior do domínio D', imagem de D pela transformação $u \to 1/u$. Então, virá, designando por Γ' a imagem de Γ por essa transformação:

$$\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\, du = -\int_{\Gamma'} \frac{f(1/u)}{\frac{1}{u} - z} \frac{1}{u^2}\, du$$

$$= \frac{1}{z} \int_{\Gamma'} \frac{(1/u)\, f(1/u)}{u - \frac{1}{z}}\, du = \frac{1}{z} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(u)}{u - \frac{1}{z}}\, du$$

$$= \frac{1}{z}\, 2\pi i \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}\, 2\pi i z f(z) = 2\pi i f(z),$$

atendendo a que estando a linha orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de D, a sua imagem Γ' fica orientada de modo a deixar à esquerda os pontos de D', o que permite aplicar a FÓRMULA DE CAUCHY no caso já estudado (n.º 9). Como se vê, o resultado obtido prova a afirmação feita.

Se D contivesse ao mesmo tempo ∞ e 0, bastaria tomar um ponto α exterior a D e efectuar a mudança $u \to 1/(u-\alpha)$, em vez da mudança $u \to 1/u$.

Note-se que, se ∞ é interior a D, o TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY *só continua a ser válido com a restrição suplementar da função $z f(z)$ se anular no ponto ∞, como facilmente se verifica pelo anterior método da mudança de variável.*

(1) É fácil verificar, adoptando a definição de integral dada no n.º 3, que a mudança de variável em integrais, para funções de variável complexa, se efectua como no caso das funções de variável real.

Do TEOREMA DE LIOUVILLE (n.º 11) deduz-se, agora, o seguinte corolário:

Se uma função é holomorfa em todo o plano-esfera $\dot{\mathbf{C}}$, *essa função reduz-se, necessariamente, a uma constante.*

Com efeito, se f é uma função holomorfa em $\dot{\mathbf{C}}$, essa função é contínua no *espaço compacto* $\dot{\mathbf{C}}$ e o mesmo sucede com o seu módulo, $|f(z)|$, que atinge, portanto, em $\dot{\mathbf{C}}$ um máximo (finito); logo, f é limitada em $\mathbf{C}$ e, portanto, segundo o TEOREMA DE LIOUVILLE, reduz-se a uma constante.

Do TEOREMA 15.1 deduz-se, por sua vez, o corolário:

Se f é holomorfa e limitada numa vizinhança V de ∞ privada deste ponto, existe uma (*e uma só*) *função holomorfa que é prolongamento de f a V.*

Pontos singulares duma função holomorfa num domínio da esfera de Riemann.

Sejam D um domínio aberto de $\dot{\mathbf{C}}$, f uma função definida e holomorfa em D, e α um ponto isolado da fronteira de D. Diz-se, então, que α é um *ponto singular isolado* (ou uma *singularidade isolada*) de f.

Se α é próprio, verifica-se um (e um só) dos três casos estudados no n.º 15. Se $\alpha = \infty$, basta efectuar a mudança de variável $z \to 1/z$ para transformar α no ponto próprio 0. Assim se reconhece que a função f é, então, representável, numa vizinhança V de ∞, por uma *série de Laurent*:

$$(1) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = \cdots + c_{-2}z^2 + c_{-1}z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} \cdots$$

e três casos se podem dar:

1.º *Os termos de grau positivo em* (1) *são todos nulos* (isto é, $c_n = 0$ para $n = -1, -2 \ldots$). Então, f estende-se como função holomorfa a V, incluindo o ponto ∞, e convenciona-se escrever

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \mathrm{c}_0 .$$

Exprime-se este facto dizendo que o ponto ∞ é uma *singularidade removível* de f. Em particular, se for $f(\infty)=0$, sendo c_k o primeiro coeficiente não nulo, diz-se que o ponto ∞ é *um zero de ordem k de f.*

2.º *Existem termos de grau positivo não nulos em* (1), *mas em número finito.* Seja k o maior dos graus desses termos. Então, quando $z \to \infty$, $f(z)$ é um *infinitamente grande de ordem k.* Exprime-se esse facto dizendo que ∞ é um *pólo de ordem k* de f e convenciona-se escrever $f(\infty)=\infty$.

3.º *Existe uma infinidade de termos não nulos de grau positivo em* (1). Então, quando $z \to \infty$, a função $f(z)$ é completamente indeterminada e diz-se que o ponto ∞ é uma *singularidade essencial de f.*

Por exemplo, uma função racional inteira de grau *n,* que, como sabemos, é holomorfa em todo o plano **C** ("função inteira"), tem um pólo de ordem n no ponto ∞. Mais geralmente, consideremos uma função racional $R(z)$, que podemos supor sempre representada pelo quociente de duas funções racionais inteiras.

$$R(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)},$$

sendo $Q(z)$ não identicamente nula. Designando por *m, n,* respectivamente o grau de $P(z)$ e o de $Q(z)$, facilmente se reconhece que *o ponto ∞ é um pólo de ordem $m-n$ ou uma singularidade removível de $R(z)$, conforme se tem $m-n>0$ ou $m-n \leqslant 0$, e, neste último caso, o ponto ∞ será um zero de ordem $n-m$ de $R(z)$ se $n-m>0$.*

Por outro lado, é evidente que, *se f é uma função inteira não racional* (*função inteira de grau infinito*), *como, por exemplo,* e^z, sen z, etc., *o ponto ∞ é uma singularidade essencial de f.* Com efeito, neste caso, f é representável em todo o plano **C** por uma série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

que não se reduz a um polinómio. Então, quando $z \to \infty$, f é completamente indeterminada; por exemplo, e^z tende para ∞ ou para 0, conforme z tende para ∞ sobre o semi-eixo real positivo ou sobre o semi-eixo real negativo.

Chama-se *parte principal de um pólo próprio* α *de ordem* k de uma função f à soma

$$\frac{c_{-k}}{(z-\alpha)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha}$$

dos termos de grau negativo da *série de Laurent* de f em torno de α. Se o ponto ∞ é um pólo de f de ordem k, chama-se *parte principal de* ∞ *em* f à soma

$$\sum_{n=1}^{k} c_{-n} z^n$$

dos termos de grau positivo da sua *série de Laurent* em torno de ∞.

A parte principal de um pólo próprio α *de ordem* k *de* f *pode determinar-se, calculando os* k *primeiros termos do desenvolvimento de* $(z-\alpha)^k f(z)$ *em série de potências de* $z-\alpha$ *e dividindo-os depois por* $(z-\alpha)^k$. No caso das fracções racionais há um processo bem conhecido que facilita esse cálculo: põe-se $z=\alpha+\lambda$ e divide-se o numerador pelo denominador, ordenados segundo as potências crescentes de λ.

Funções meromorfas em domínios da esfera de Riemann.

Diz-se que uma função f *é meromorfa num domínio aberto* D de $\dot{\mathbf{C}}$, quando é holomorfa no domínio D privado de pontos isolados, que são pólos de f. Por exemplo, toda a função racional $R(z)$ é uma função meromorfa no plano-esfera, com um número finito de pólos; com efeito, $R(z)$ é representável pelo quociente $P(z)/Q(z)$ de dois polinómios primos entre si, em que o segundo não é identicamente nulo; então, excluídos os zeros do denominador (que são pólos de $R(z)$ em número finito) e, eventualmente, o ponto ∞ (que só pode ser um pólo ou uma singularidade removível), a função $R(z)$ é manifestamente diferenciável em qualquer outro ponto de $\dot{\mathbf{C}}$. Reciprocamente:

TEOREMA. *Se uma função* f *é meromorfa em todo o plano-esfera, com um número finito de pólos,* f *é necessariamente racional. Em* *particular, se f é holomorfa em* $\mathbf{C}$ *(função inteira) e tem como pólo o ponto ∞, é racional inteira.*

Com efeito, se f verifica a primeira hipótese, designando por $A(z)$ a soma das partes principais dos seus pólos *próprios*, a função $A(z)$ é racional e a diferença $f(z) - A(z)$ é holomorfa em $\mathbf{C}$, tendo quando muito, um pólo no infinito. Então, o desenvolvimento de $f(z) - A(z)$ em *série de Laurent* em torno do ponto ∞ será válido em todo o plano[1] e, como só tem termos de grau positivo, $f(z) - A(z)$ é racional inteira, o que demonstra o teorema.

Assim, as funções racionais ficam completamente determinadas pelas partes principais dos seus pólos no plano-esfera. Em particular, reencontramos, assim, o conhecido teorema relativo à decomposição duma fracção racional própria em fracções simples.

Há ainda outras funções meromorfas que ficam determinadas pelas partes principais dos seus pólos (em número infinito); nesse caso, a soma das partes principais é uma série (ver, por exemplo, VALIRON, obra citada, TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER, p. 382-384). Por exemplo, demonstra-se que, para todo o $z \in \dot{\mathbf{C}}$:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \quad \text{(pólos: } 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots\text{)},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}\right] \quad \text{(pólos } 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\text{)},$$

e outras fórmulas análogas, com importantes aplicações.

Também a conhecida decomposição dos polinómios em factores lineares (uma vez conhecidos os seus zeros), se pode estender a certas funções inteiras de grau infinito. Por exemplo, demonstra-se que se tem, para todo o $z \in \mathbf{C}$ (obra cit. pág. 385):

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}} \quad \text{(zeros: } 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots\text{)}.$$

(1) Com efeito, a função $f(1/z) - A(1/z)$ é holomorfa em todo o plano privado da origem e, portanto, o seu *desenvolvimento de Laurent* em torno de zero é válido para todo o $z \neq 0$.

18. Funções homográficas. Geometria analagmática e geometria projectiva da recta projectiva complexa

Entre as funções racionais, merecem especial menção as da forma:

$$(1) \qquad f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{com} \quad ad - bc \neq 0,$$

chamadas *funções homográficas*. Se fosse $ad - bc = 0$, o numerador seria divisível pelo denominador e a função reduzia-se a uma constante $k = a/c = b/d$ (com uma singularidade removível no ponto $-d/c$). Excluído este caso, a função é sempre invertível e a sua inversa ainda é uma função homográfica:

$$f^{-1}(z) \equiv \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Por outro lado, é fácil ver que a composta (ou produto lógico) de duas funções homográficas ainda é uma função homográfica. Com efeito, dadas duas funções homográficas

$$f(z) \equiv \frac{az+b}{cz+d}, \quad g(z) \equiv \frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

tem-se

$$(f \circ g)(z) \equiv f(g(z)) \equiv \frac{a\,\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\,\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}+d} \equiv \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')},$$

sendo fácil ver que os dois termos da fracção ainda são primos entre si. Em conclusão:

As funções homográficas formam um grupo, a respeito da composição (*ou produto lógico*).

O elemento neutro deste grupo é, evidentemente, a função identidade $f(z) \equiv z$, correspondente a tomar $a = d = 1$, $b = c = 0$ na fórmula (1).

Aliás, a cada matriz quadrada de 2.ª ordem invertível

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(isto é, com determinante $ad-bc\neq 0$) corresponde uma função homográfica f, definida por (1); reciprocamente, cada função homográfica f corresponde, deste modo, a uma matriz quadrada de 2.ª ordem invertível *e a qualquer outra matriz que resulte dessa multiplicando-a por uma constante* $\gamma\neq 0$. Ora, as matrizes quadradas de 2.ª ordem invertíveis formam um *grupo* e, como acabamos de ver, a correspondência estabelecida entre tais matrizes e funções homográficas é um *homomorfismo*, visto que, ao *produto das funções* f, g correspondente às matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

corresponde o *produto destas matrizes,* na ordem em que estão escritas

$$\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, a correspondência

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \frac{az+b}{cz+d}$$

é um homomorfismo do grupo das matrizes quadradas de 2.ª ordem invertíveis sobre o grupo das funções homográficas, e o núcleo desse homomorfismo (conjunto das matrizes a que corresponde a função identidade) é formado pelas matrizes escalares

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

identificáveis à constante γ.

Como vimos, toda a função homográfica é uma aplicação biunívoca (e bicontínua) do plano-esfera $\dot{\mathbf{C}}$ sobre si mesmo. *É ainda* *evidente que a função homográfica* (1) *tem um único zero* (o zero $-b/a$ do numerador) *e um único pólo* (o zero $-d/c$ do denominador). Quanto ao pólo, dois casos há a distinguir:

1.º caso: *o pólo é o ponto* ∞. Então, $c=0$ (com $d\neq 0$), e a função homográfica f reduz-se a uma *função linear*:

$$f(z) \equiv \alpha z + \beta \quad \left(\text{com } \alpha = \frac{a}{d} \neq 0,\ \beta = \frac{b}{d}\right).$$

Como já vimos no Capítulo I, a aplicação f, neste caso, traduz-se geometricamente por uma *transformação de semelhança directa,* isto é, uma aplicação do plano sobre si mesmo que conserva a *forma das figuras* e a *orientação dos ângulos* (ao contrário da transformação $z \to \bar{z}$, que muda a orientação dos ângulos). É claro que, como transformação de semelhança, *f transforma rectas em rectas e circunferências em circunferências.*

Note-se que as translações estão incluídas entre as transformações homográficas ($\alpha = 1$).

Em resumo: *o grupo das funções homográficas contém como sub-grupo o grupo das funções inteiras do 1.º grau, que se traduzem por semelhanças directas.*

2.º caso: *o pólo é um ponto próprio* $z_0 = -d/c$. Então, $c\neq 0$ e a função f poderá ser representada sob a forma

$$f(z) = \alpha \frac{1}{z - z_0} + \beta, \quad \text{pondo} \quad \alpha = \frac{bc - ad}{c^2}, \quad \beta = \frac{a}{c}.$$

Em particular, pode ser $f(z) = 1/z$ (então, $a=d=0$, $b=c=1$). Como o módulo de $1/z$ é o inverso de $|z|$ e $\arg(1/z) = -\arg z + 2\pi$, a transformação $z \to 1/z$ traduz-se geometricamente por uma inversão de centro 0 seguida duma simetria em relação ao eixo real; chamar-lhe-emos *inversão complexa* (de centro 0).

Portanto, em geral, no 2.º caso considerado, a aplicação f traduz-se por uma *inversão complexa de centro* z_0 seguida de uma semelhança $\alpha z + \beta$, que pode, eventualmente, reduzir-se à identidade ($\alpha = 1$, $\beta = 0$). É fácil ver que, *então, só as rectas que passam por* z_0

são transformadas em rectas: todas as outras são transformadas em circunferências. Analogamente, as circunferências que passam por z_0 são transformadas em rectas e todas as outras são transformadas em circunferências.

Assim, em resumo: *o grupo das funções homográficas é gerado, geometricamente, pelas inversões complexas e pelas semelhanças directas.*

Aliás, é fácil ver que pode ser gerado exclusivamente pelas inversões complexas.

Chama-se *geometria analagmática* do plano-esfera $\dot{\mathbf{C}}$ ao estudo das propriedades invariantes para as inversões (reais) seguidas ou não de semelhanças (directas ou inversas). Análoga definição para o espaço $\dot{\mathbf{R}}^3$, que se obtém de $\mathbf{R}^3$ pela adjunção de um único ponto impróprio. Em geometria analagmática não se faz distinção entre "ponto impróprio" e "ponto próprio", pois que todos se podem transformar uns nos outros; por isso, também as rectas não se distinguem das circunferências, os planos não se distinguem das superfícies esféricas, etc. Aliás, tínhamos já visto que a projecção estereográfica da esfera S sobre o plano é uma inversão do espaço, que transforma precisamente S num plano (acrescido de ponto impróprio).

Porém, uma vez que se distinga o ponto impróprio dos pontos próprios, as rectas podem ser distinguidas das circunferências propriamente ditas; *poderá dizer-se, então, que uma recta é uma circunferência que passa pelo ponto* ∞.

Suponhamos, agora, que, em (1), os coeficientes a, b, c, d são reais e consideremos uma variável real x em vez duma variável complexa z. Virá, pois:

$$f(x) \equiv \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Então, as funções homográficas identificam-se às *transformações projectivas da recta projectiva real* $\dot{\mathbf{R}}$ *sobre si mesma*. Chama-se *geometria projectiva de* $\dot{\mathbf{R}}$ (ou *geometria projectiva real numa dimensão*) ao estudo das propriedades invariantes para o grupo dessas transformações.

Uma propriedade projectiva fundamental é, precisamente, a *razão anarmónica* ou *razão dupla* de quatro pontos x_1, x_2, x_3, x_4, na ordem por que estão escritos, definida pela fórmula:

$$(x_1, x_2, x_2, x_4) = \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

É fácil ver que a razão dupla de um quaterno de pontos é de facto conservada por todas as transformações projectivas (e só por essas).

Mas já a *razão simples* de três pontos x_1, x_2, x_3:

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$$

é conservada unicamente pelas transformações projectivas que deixam fixo o ponto impróprio (transformações de semelhança). *Por isso, a noção de razão simples não é uma noção projectiva, mas sim uma noção euclideana* (*e, em particular, uma noção métrica*). Finalmente, a noção de distância $|x_1 - x_2|$ entre dois pontos é uma noção métrica, mas não uma noção euclideana (conservada unicamente pelas isometrias da recta, que são translações seguidas ou não de simetrias em relação a um ponto).

Ora, por analogia, também se chama ao plano-esfera $\dot{\mathbf{C}}$ *recta projectiva complexa,* e transformações projectivas de $\dot{\mathbf{C}}$ às funções homográficas. Neste caso, o estudo das propriedades em $\dot{\mathbf{C}}$ invariantes para as transformações homográficas chama-se *geometria projectiva complexa unidimensional.* É claro que o conceito de razão dupla se estende imediatamente ao campo complexo e continua a ser conservada por todas as transformações projectivas (e só por essas).

Chamam-se *pontos duplos, pontos fixos* ou *pontos invariantes* duma transformação projectiva f aos pontos z de $\dot{\mathbf{C}}$ que coincidem com os seus transformados por f, isto é, tais que $f(z) = z$. Segundo (1), estes pontos são as raízes da equação em z:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

As *potências* ou *iteradas* de uma transformação projectiva f definem-se da maneira usual:

$$f^2 = f \circ f, \ldots, \quad f^n = f^{n-1} \circ f, \ldots, \quad f^{-n} = (f^{-1})^n.$$

Pode acontecer, em particular, que se tenha $f^2 = f$; equivale isto a ser $f = f^{-1}$. Neste caso, a transformação projectiva f chama-se *involução* e os seus pontos duplos dizem-se *pontos focais*.

19. Funções analíticas globais em domínios da esfera de RIEMANN

O princípio da unicidade do prolongamento analítico, assim como os conceitos de continuação analítica, são imediatamente generalizáveis ao caso de funções holomorfas em domínios da *esfera de Riemann.* Outro tanto se pode dizer relativamente ao conceito de função analítica global.

Como sabemos, no plano ordinário $\mathbf{C}$, uma função analítica global Φ é representada indistintamente por qualquer dos seus ramos f, função holomorfa num domínio aberto de $\mathbf{C}$. Mas, ampliando o plano com o ponto ∞, a mesma função f representa, ainda, uma função analítica global $\tilde{\Phi}$, cujos ramos são todos os de Φ e, eventualmente, as suas continuações analíticas a domínios que contenham ∞ (caso essas continuações existam). Reciprocamente, para cada função analítica global $\tilde{\Phi}$ relativa a $\dot{\mathbf{C}}$, existe uma (e uma só) função analítica global Φ, relativa a $\mathbf{C}$, cujos ramos são todos aqueles de $\tilde{\Phi}$ cujos domínios não contêm ∞. *Esta correspondência biunívoca* $\Phi \to \tilde{\Phi}$ *induz-nos a identificar* $\tilde{\Phi}$ *com* Φ.

Por exemplo, é natural identificar a função analítica uniforme $1/z$, *definida no conjunto dos números complexos* z *distintos de* 0, com o seu prolongamento analítico ao conjunto desses números *acrescido do elemento* ∞ (pondo $1/\infty = 0$).

É óbvio que o conceito de *superfície de Riemann* se estende automaticamente às funções analíticas globais referidas à *esfera de Riemann.* Aliás, a própria *esfera de Riemann* é, como vários dos seus domínios, uma *superfície de Riemann* (das funções constantes).

Dada uma função analítica global Φ, pode acontecer que o ponto ∞ seja uma singularidade de Φ relativamente a alguns dos seus ramos.

É-se, então, conduzido a uma discussão inteiramente análoga à do n.º 16, recorrendo, mais uma vez, à substituição $z \to 1/z$. Além dos casos simples dos pólos e das singularidades essenciais isoladas, já estudados, pode ainda o ponto infinito apresentar-se como ponto de ramificação.

Consideremos, por exemplo, a função analítica pluriforme $\log z$. A inversão $z \to 1/z$ transforma esta na função $\log 1/z = -\log z$, que tem um ponto de ramificação logarítmica na origem. Por conseguinte, a função analítica global $\log z$ apresenta, na *esfera de Riemann*, duas (e só duas) singularidades, que são ambas pontos de ramificação logarítmica: uma no 0 e outra no ∞.

Outro exemplo: Seja a função $\sqrt{z}$. Esta, pela referida inversão, é transformada na função $1/\sqrt{z}$ que apresenta um pólo algébrico na origem. Assim, a função analítica global $\sqrt{z}$ tem duas singularidades na *esfera de Riemann*: o ponto 0 (singularidade algébrica ordinária) e o ponto ∞ (pólo algébrico).

20. Funções algébricas

Chama-se *equação algébrica em duas variáveis complexas* toda a equação que, pelos princípios algébricos de equivalência, se possa reduzir à forma:

$$(1) \qquad P(z, w) = 0,$$

em que $P(z, w)$ é um polinómio em z e w de coeficientes complexos, isto é, uma expressão do tipo

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} z^j w^k,$$

em que a_{jk} são números complexos quaisquer. É claro que uma tal expressão será sempre equivalente a um polinómio em w, cujos coeficientes são polinómios em z (ou vice-versa), e, assim, a expressão poderá ainda apresentar-se com a forma:

$$(2) \qquad a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(z)w + a_n = 0,$$

em que, nos lugares de $a_0(z)$, $a_1(z)$, ..., $a_n(z)$, figuram polinómios em z e em que supomos $a_0(z)$ não identicamente nulo: $a_0(z) \not\equiv 0$.

Note-se, porém, que, na passagem de (1) para (2), há uma escolha que confere a z e a w papéis diferentes: a z o de *variável independente* (ou *parâmetro da equação*) e a w o de *variável dependente* (ou *incógnita da equação*). Em vez de pares de números (z, w) que verifiquem a equação proposta, o que se procura agora são funções $w = f(z)$, se possível analíticas, que a convertam numa identidade.

O conjunto dos polinómios em z de coeficientes complexos é, como se sabe, um *domínio de integridade*, que se costuma designar por $\mathbf{C}[z]$. Podemos, pois, dizer que (2) é *uma equação algébrica de grau n em w, com os coeficientes em* $\mathbf{C}[z]$; o seu primeiro membro é um *polinómio em w, com os coeficientes em* $\mathbf{C}[z]$, *de grau n*, visto supormos $a_0(z) \not\equiv 0$.

Diz-se que um tal polinómio é *redutível* (em $\mathbf{C}[z]$), quando é o produto de dois polinómios de *grau superior a* 0 com os coeficientes em $\mathbf{C}[z]$; caso contrário, diz-se *irredutível.* Por sua vez, a equação (2) diz-se *redutível* ou *irredutível* (em $\mathbf{C}[z]$), conforme o seu primeiro membro for redutível ou não. Por exemplo, o polinómio *em w*

$$w^6 - z^2 + 4z - 4$$

é decomponível nos factores irredutíveis $w^3 - z + 2$ e $w^3 + z - 2$, e tem-se[1]

$$w^6 - z^2 + 4z - 4 = 0 \iff w^3 - z + 2 = 0 \ \vee \ w^3 + z - 2 = 0.$$

Posto isto, seja D um domínio aberto da *esfera de Riemann.* Dada uma equação algébrica $P(z, w) = 0$, com w no papel de incógnita, chama-se *solução analítica local da equação* no domínio D, *a* toda a função f holomorfa em D tal que se tenha

$$P(z, f(z)) = 0 \quad \text{para todo o } z \in D.$$

(1) O símbolo "$\vee$", que se pode ler "ou" é o sinal da operação lógica de *disjunção.* Escrito entre duas proposições ou fórmulas, indica que uma, pelo menos, se verifica.

Pode acontecer que a equação tenha uma só solução analítica local em D, várias ou nenhumas. Por exemplo, a equação $w^3 - z = 0$ em w, tem três soluções analíticas locais em qualquer domínio que não circunde a origem, mas não tem nenhuma num domínio que circunde a origem.

Consideremos, agora, dois domínios abertos D e D^* de $\dot{\mathbf{C}}$, e seja f uma solução analítica local em D da equação

$$P(z, w) = 0$$

na incógnita w. Suponhamos que existe uma função holomorfa f^* que seja prolongamento de f a D^*. Pergunta-se: *f^* também será solução analítica local da equação*?

A resposta é afirmativa. Com efeito, a função

$$P(z, f^*(z))$$

de z é manifestamente holomorfa em D^* e, como se anula em D, anula-se necessariamente em D^*, em virtude do TEOREMA 14.1. Deste modo, é fácil ver que:

TEOREMA 20.1. *Se f é uma solução analítica local de uma equação algébrica, todas as continuações analíticas de f são soluções analíticas locais da mesma equação.*

Justificam-se, deste modo, as seguintes

DEFINIÇÕES 20.1. *Chama-se solução analítica global de uma equação algébrica, a toda a função analítica global cujos ramos sejam soluções analíticas locais dessa equação. Dá-se o nome de funções algébricas às soluções analíticas globais das equações algébricas.*

Por sua vez, às soluções analíticas locais das equações algébricas é natural chamar funções algébricas locais (*ramos de funções algébricas*).

Uma equação algébrica em w, de coeficiente em $\mathbf{C}[z]$, qualquer que seja o seu grau n, pode ter uma ou mais soluções analíticas globais, mas nunca mais de n. Demonstra-se, ainda, o seguinte

TEOREMA 20.2. *Condição necessária e suficiente para que uma equação algébrica em w, com os coeficientes em* $\mathbf{C}[z]$, *tenha uma única solução analítica global é que seja irredutível.*

Para a demonstração, veja-se, por exemplo, AHLFORS, obra citada, p. 224-229.

Assim, a todo o factor irredutível de um polinómio em w, com os coeficientes em $\mathbf{C}[z]$, corresponde uma função algébrica; dois tais factores correspondem à mesma função algébrica, se e só se diferem por um factor independente de w. Por exemplo, a equação $w^6 - z^2 = 0$ tem duas soluções analíticas globais, que são as funções analíticas triformes $w = \sqrt[3]{z}$, $w = \sqrt[3]{-z}$, soluções globais, respectivamente, das equações $w^3 - z = 0$, $w^3 + z = 0$, em que a primeira se decompõe.

Note-se que *entre as funções algébricas figuram as funções racionais*. Com efeito, toda a função racional

$$w = \frac{a(z)}{b(z)}$$

em que $a(z)$ e $b(z)$ são polinómios, com $b(z)$ não identicamente nulo, é solução analítica global da equação $b(z)w - a(z) = 0$. *Aliás, para que a solução analítica global de uma equação em w, irredutível em* $\mathbf{C}[z]$, *seja uma função racional, é necessário e suficiente que a equação seja do* 1.º *grau (em w).*

Singularidades das funções algébricas.

Consideremos uma equação algébrica de grau n em w, com os coeficientes em $\mathbf{C}[z]$:

$$(3) \qquad a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(z)w + a_n(z) = 0.$$

Suponhamos que esta equação é irredutível em $\mathbf{C}[z]$ *e que os seus coeficientes são primos entre si* (se o não fossem, bastaria dividi-los pelo seu máximo divisor comum).

Ora, o polinómio $a_0(z)$ tem um número finito de raízes (de contrário, seria identicamente nulo e o grau da equação resultaria $< n$); designemos por $p_1, p_2, \ldots, p_r$, essas raízes.

Por outro lado, consideremos o sistema formado pela equação dada e pela que se obtém derivando o seu primeiro membro em relação a w:

$$\begin{cases} a_0(z)w^n + \cdots + a_{n-1}(z)w + a_n(z) = 0 \\ na_0(z)w^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(z) = 0 \end{cases}.$$

Eliminando w entre estas duas equações, obtém-se uma equação em z, também com um número finito de raízes, de contrário a equação dada seria redutível. Designemos por $c_1, c_2, \ldots, c_s$, essas raízes. Como é sabido, quando z toma um destes valores, a equação em w correspondente tem, pelo menos, uma raiz múltipla.

Seja, agora, z_0 um valor finito qualquer de z, distinto dos pontos p_j e c_k, e designemos por w_0 uma das raízes da equação numérica em w que se obtém, fazendo $z = z_0$ na equação (3). Então, representando por $P(z, w)$ o primeiro membro desta equação, tem-se

$$P(z_0, w_0) = 0, \text{ com } P'_w(z_0, w_0) \neq 0.$$

Ora, demonstra-se que o TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS se estende às equações algébricas no campo complexo. Deste modo, se for D um domínio aberto simplesmente conexo que contenha z_0 sem conter nenhum dos pontos p_j e c_k, conclui-se que existe em D uma solução analítica local f da equação dada tal que $f(z_0) = w_0$. Aliás, como, para $z = z_0$, a equação numérica em w tem n raízes, segue-se que, *no domínio D, existem n ramos de função algébrica definida por* (3).

Suponhamos, agora, que o domínio aberto D é escolhido de modo que a sua fronteira contenha, pelo menos, um ponto c_k. Ora, para $z = c_k$, a equação correspondente em w tem, pelo menos, uma raiz múltipla α. Deste modo, se designarmos por μ o seu grau de multiplicidade, há-de haver μ ramos distintos $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, da função algébrica no domínio D, que tendem para α quando $z \to c_k$. E, como esses ramos são necessariamente continuações analíticas uns dos outros, prova-se que, *quando se faz a continuação analítica de um deles, por exemplo,* f_1, *ao longo de uma circunferência de centro* α *e* *raio suficientemente pequeno, só ao fim de* μ *voltas se regressa ao ramo* f_1*, depois de ter passado por todos os outros.* Assim, uma rotação completa em torno de c_k traduz-se por uma permutação cíclica dos ramos considerados; c_k é, pois, um ponto crítico da função algébrica considerada, e prova-se, facilmente, que é *um ponto de ramificação algébrica* (singularidade algébrica ordinária ou pólo algébrico).

Quanto aos pontos p_j, raízes de $a_0(z)$, observemos que, pela substituição $w \to 1/w$, a equação (3) se transforma em

$$a_n(z)w^n + \cdots + a_1(z)w + a_0(z) = 0.$$

Atribuindo a z um dos valores p_j, a equação em w obtida tem uma raiz nula, cujo grau de multiplicidade ν_j é igual ao número de termos finais consecutivos da equação cujos coeficientes se anulam (tem de ser $\nu_j < n$, de contrário todos os coeficientes teriam o factor comum $z - p_j$ e não seriam, portanto, primos entre si). Deste modo se conclui que p_j *é um pólo de ordem* ν_j, se não coincidir com nenhum dos pontos c_k, ou *um pólo algébrico,* se coincide com um destes pontos.

Finalmente, para estudar o comportamento da função algébrica no ponto ∞, basta utilizar a substituição $z \to 1/z$. Se multiplicarmos ambos os membros da equação obtida pela máxima potência de z que figura em denominador, obtém-se uma equação equivalente do mesmo tipo. Conclui-se, então, que, se o ponto ∞ é uma singularidade da função algébrica, só pode ser um pólo ou uma singularidade algébrica.

Em resumo:

Uma função algébrica só pode ter um número finito de singularidades na esfera de Riemann e essas singularidades só podem ser pólos ou pontos críticos algébricos.

Ora, demonstra-se que a recíproca deste teorema ainda é verdadeira. Assim, obtemos a seguinte caracterização das funções algébricas pelas suas singularidades:

TEOREMA 20.3. *Condição necessária e suficiente para que uma função analítica global seja uma função algébrica é que tenha um* *número finito de singularidades na esfera de Riemann e que essas singularidades sejam, quando muito, pólos e pontos críticos algébricos.*

Consideremos, por exemplo, a função algébrica de z definida pela equação $zw^2 - 1 = 0$, em w. Esta função, que também é costume representar por $1/\sqrt{z}$, tem duas únicas singularidades na esfera de Riemann: um pólo algébrico (ponto 0) e uma singularidade algébrica ordinária (ponto ∞).

Note-se que *um ponto singular de uma função algébrica pode ser singular em relação a um ramo e não em relação a outro, e pode ainda ser uma singularidade de tipos diferentes, conforme o ramo que se considerar.* Seja, por exemplo, a função algébrica de z definida pela equação em w (irredutível):

$$P(z, w) \equiv w^3 - 3w + z = 0 .$$

Derivando o primeiro membro em relação a w, obtém-se a equação

$$P'_w(z, w) \equiv 3w^2 - 3 = 0 .$$

Para eliminar w entre esta equação e a anterior, basta introduzir as suas raízes (1 e -1) como valores de w na primeira, o que conduz, respectivamente, aos valores 2 e -2 de z. Pondo $z = 2$ na equação dada, obtém-se a equação

$$w^3 - 3w + 2 = 0$$

com a raiz dupla 1 e a raiz simples -2. Por conseguinte, o ponto $z = 2$ é ponto crítico para dois ramos da função algébrica definida pela equação (ramos que tendem para 1 quando $z \to 2$), mas existe ainda um outro ramo da mesma função numa vizinhança do ponto $z = 2$, em que toma o valor -2. Com efeito, a derivada

$$P'_w(z, w) \equiv 3w^2 - 3$$

não se anula neste ponto, o que nos permite, aplicando o TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS, estabelecer a existência de uma solução local analítica f da equação, numa vizinhança do ponto 2, tal que $f(2)=-2$. *Este ponto não é, portanto, singular para esse terceiro ramo.* No ponto $z=-2$ a situação é análoga; aí o terceiro ramo considerado vai confundir-se com um dos primeiros, por continuação analítica, e resta um para o qual o ponto -2 não é singular.

Funções transcendentes.

Dá-se o nome de *funções transcendentes* às funções analíticas globais que não são algébricas (aos ramos de tais funções é natural chamar *funções transcendentes locais*).

Aplicando o TEOREMA 20.3, é fácil reconhecer, em muitos casos, se uma dada função analítica global é algébrica ou transcendente. Por exemplo, as funções e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, etc., são transcendentes, visto que têm uma singularidade essencial no infinito; também a função $\log z$ é transcendente, visto que tem um ponto de ramificação transcendente (logarítmico) na origem.

Curvas algébricas.

Dá-se o nome de *curva algébrica real* ao conjunto dos pontos (x, y) do plano $\mathbf{R}^2$ que verificam uma equação algébrica $F(x, y)=0$ de coeficientes reais. Como é sabido, uma curva algébrica real pode não ser contínua (caso da hipérbole), ter pontos isolados ou mesmo reduzir-se ao conjunto vazio (caso da equação $x^2+y^2+5=0$). O estudo das curvas algébricas reais pode ser esclarecido com a adjunção da recta imprópria, que faz passar do *plano euclidiano* $\mathbf{R}^2$ ao *plano projectivo real*, mediante o emprego de coordenadas homogéneas x, y, t (pondo x/t, y/t, respectivamente, nos lugares de x e de y). Assim, por exemplo, a hipérbole $x^2-y^2=1$ passa a ter por equação, em coordenadas homogéneas, $x^2-y^2=t^2$ e deixa de ser desconexa, visto que a recta imprópria $t=0$ a encontra em dois pontos, $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, 0)$, que estabelecem a continuidade entre os dois ramos. (Recordemos que as coordenadas homogéneas são determinadas a menos de um factor comum; por exemplo, o ponto impróprio $(1,-1,0)$ é o mesmo que o ponto $(3,-3,0)$, que o ponto $(-1,1,0)$, etc., etc.).

Para um conhecimento mais profundo das curvas algébricas, torna-se conveniente passar ao campo complexo. Chama-se *curva algébrica complexa* ao conjunto dos pontos (z, w) do *plano eucli-*

diano complexo $\mathbf{C}^2$ que verificam uma equação algébrica $F(z, w)=0$ de coeficientes complexos: a curva será identificável a uma curva algébrica real $F(x, y)=0$ (com $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Re} w$), se e só se os coeficientes da equação forem reais.

Note-se que não há, agora, distinção entre "variável independente" ou "parâmetro" e "variável dependente" ou "incógnita da equação": as soluções são *pares ordenados de números complexos* (pontos da curva) e não *funções* $w=f(z)$. Chama-se *ordem da curva* ao grau da equação $F(z, w)=0$ que a representa; supondo que $F(z, w)$ é um polinómio

$$\sum_j \sum_k a_{jk} z^j w^k,$$

o grau da equação é o grau deste polinómio, isto é, o maior dos graus $j+k$ dos seus termos de coeficiente $a_{jk} \neq 0$. Por exemplo, as curvas algébricas de 1.ª ordem são as *rectas*, as de 2.ª ordem as *cónicas*, as de 3.ª ordem as *cúbicas*, as de 4.ª ordem as *quárticas*, etc.

A curva diz-se *degenerada* quando a sua equação $F(z, w)=0$ é *redutível* em $\mathbf{C}$, isto é, quando o polinómio $F(z, w)$ é decomponível no produto de dois polinómios de *grau superior a* 0 *em* z, w. Demonstra-se que:

Toda a curva algébrica complexa não degenerada é conexa.

Pelo contrário, no campo real, há curvas algébricas não degeneradas que são desconexas, mesmo depois de introduzidos os pontos impróprios.

Tal como no caso real, é conveniente, para o estudo das curvas algébricas complexas, a adjunção da *recta imprópria complexa*, que faz passar do *plano euclidiano complexo* $\mathbf{C}^2$ para o *plano projectivo complexo*, mediante o emprego de coordenadas homogéneas z, w, λ (pondo z/λ, w/λ, nos lugares de z e w, respectivamente). Chamam-se transformações projectivas do plano projectivo complexo as aplicações biunívocas deste espaço sobre si mesmo, definidas por sistemas de funções lineares homogéneas:

$$\begin{cases} z^* = a_{11}z + a_{12}w + a_{13}\lambda \\ w^* = a_{21}z + a_{22}w + a_{23}\lambda \\ \lambda^* = a_{31}z + a_{32}w + a_{33}\lambda \end{cases}$$

sendo o determinante da matriz $[a_{jk}]$ dos coeficientes diferente de zero; ou seja, em coordenadas não homogéneas:

$$\begin{cases} z^* = \dfrac{a_{11}z + a_{12}w + a_{13}}{a_{31}z + a_{32}w + a_{33}} \\[2ex] w^* = \dfrac{a_{11}z + a_{12}w + a_{13}}{a_{31}z + a_{32}w + a_{33}} \end{cases}.$$

Demonstra-se facilmente que:

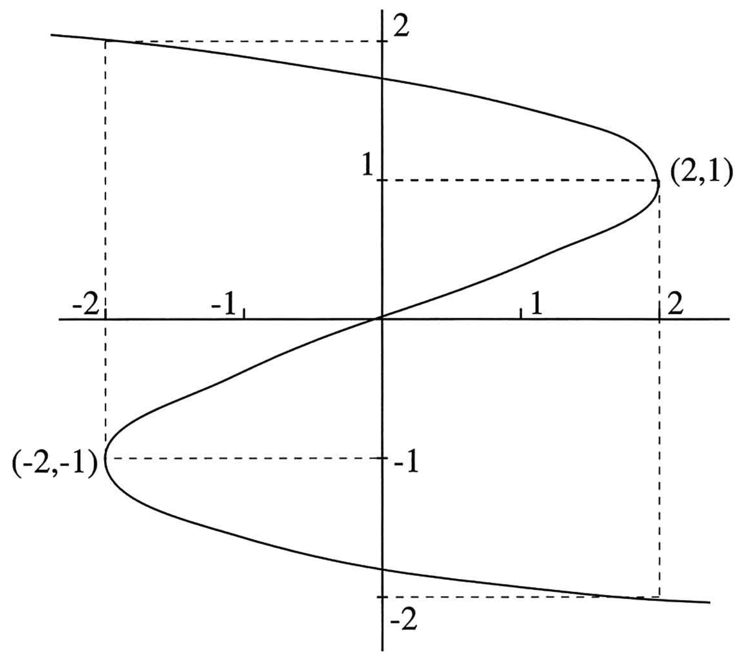
A ordem de uma curva algébrica é invariante em relação a todas as transformações projectivas.

Podemos, então, dizer que a ordem é uma *propriedade projectiva* das curvas algébricas.

É claro que só no campo real se pode ter uma representação intuitiva das curvas algébricas reais. Por exemplo, a equação em x, y,

$$y^3 - 3y + y = 0$$

já atrás considerada no campo complexo, representa uma cúbica, esboçada na figura junta. Considerando y como função (algébrica) de x, é fácil, agora, interpretar o que se passa junto do ponto $x = 2$.



Como se vê directamente pela figura, este ponto é singular para dois ramos da função (tangente vertical no ponto (2,1), derivada infinita para $x=2$), mas não é singular para um terceiro ramo, que toma o valor –2 nesse ponto. À direita da recta $x=2$ não há *ramos reais* da função que sejam continuação analítica dos dois primeiros; mas já sabemos que há *ramos imaginários* que continuam aqueles, visto que se trata de um ponto crítico (ou de ramificação), para esses ramos.

(É óbvio que o emprego das letras x, y, como variáveis reais e das letras z, w, como variáveis complexas é mera convenção, que pode ser abandonada sempre que deixe de ser cómoda.)

O estudo das curvas algébricas, que, na sua essência, se pode identificar ao das funções algébricas, faz parte de um ramo da matemática chamado GEOMETRIA ALGÉBRICA, e é hoje uma das teorias mais desenvolvidas, à qual deu uma contribuição apreciável o matemático português F. GOMES TEIXEIRA, com o seu "Tratado das curvas" (infelizmente, não há em Portugal nenhum cultor da Geometria Algébrica, de que a Geometria Projectiva não é senão um capítulo elementar).

Na teoria das curvas algébricas desempenha um papel essencial a Topologia, precisamente numa das suas formas hoje em pleno desenvolvimento: a TOPOLOGIA ALGÉBRICA.

21. Breves noções sobre representação conforme

Consideremos uma função f complexa de variável complexa. Como vimos no Capítulo II, dizer que esta função é diferenciável num ponto z_0 equivale a dizer que, numa vizinhança do ponto z_0, a função f é dada, em primeira aproximação, por uma função linear $\alpha+\beta(z-z_0)$, à parte um infinitésimo $R(z)$ com $z-z_0$, de ordem superior a 1. Tem-se, então, $\alpha=f(z_0)$ e $\beta=f'(z_0)$, isto é:

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+R(z),$$

numa vizinhança de z_0, com

$$\lim_{z\to z_0}\frac{R(z)}{z-z_0}=0\,.$$

Por outro lado, vimos que a função linear $\alpha+\beta(z-z_0)$ se traduz, geometricamente, por uma *semelhança directa*, isto é, por uma aplicação biunívoca do plano sobre si mesmo, que transforma rectas em rectas e *conserva a grandeza, bem como o sentido dos ângulos orientados*.

Seja, agora, f uma função holomorfa num domínio aberto D do plano e designemos por D^* a imagem de D por f: então, f é uma aplicação de D *sobre* D^*. Pondo $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$, com x, y, u, v reais, a mesma aplicação será definida por um sistema de duas funções reais

$$u=\varphi(x, y), \qquad v=\psi(x, y),$$

indefinidamente diferenciáveis em D, pois que, como já demonstrámos (TEOREMA 11.1), se f é holomorfa, em D, é indefinidamente diferenciável neste domínio. Mas também vimos que o jacobiano das funções φ, ψ, em relação às variáveis x, y, em cada ponto $z=x+iy$ de D, é igual ao quadrado de $|f'(z)|$, isto é, que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2 \quad (\forall z \in D)\,.$$

Em particular, se $f'(z) \neq 0$ num ponto z_0 de D, podemos concluir, pelo TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS, que existe uma vizinhança V de z_0 tal que f define uma aplicação biunívoca (e bicontínua) de V sobre um subdomínio V^* (em virtude da regra de derivação da função inversa).

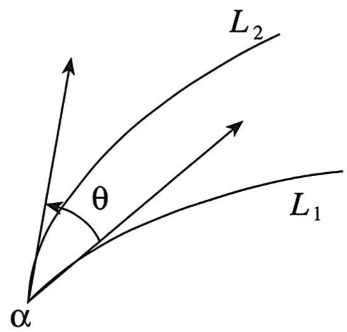
Assim, numa vizinhança de cada ponto z_0 de D, a função holomorfa D comporta-se, *em primeira aproximação*, como uma função linear $f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)$, que se traduz geometricamente por uma semelhança directa. Porém, exceptuando o caso em que f é exactamente uma função linear, os coeficientes $f(z_0)$ e $f'(z_0)$ variam de ponto para ponto de D. A transformação geométrica de D sobre D^* assim definida já não é uma semelhança, pois que *transforma, geralmente, rectas em curvas.* Mas vamos ver que *conserva, ainda, a grandeza e o sentido dos ângulos orientados,* desde que generalizemos, de modo natural, a noção de "ângulo" no caso de linhas curvas.

Para isso, adoptaremos as duas seguintes definições:

DEFINIÇÃO 21.1. *Diz-se que um arco simples orientado L do plano tem semi-tangente na sua origem* α, *quando admite uma representação paramétrica*

$$z=\varphi(t), \qquad com \quad t\in[a, b], \qquad \alpha=\varphi(a),$$

tal que $\varphi(t)$ *tenha derivada finita e não nula no ponto* $t=a$. *Nesta hipótese, chama-se semi-tangente de L em* α *à semi-recta de origem* α, *que tem a direcção e o sentido do vector* $\varphi'(a)$.



DEFINIÇÃO 21.2. *Chama-se ângulo de dois arcos simples* L_1 *e* L_2, *com origem comum* α, *à medida* θ *não negativa e inferior a* π *do ângulo formado pelas semi-tangentes a* L_1 *e a* L_2 *em* α. *O ângulo ficará orientado se tomarmos uma das semi-tangentes para primeiro lado e a outra para segundo lado; então, podemos fixar a sua medida* θ *no intervalo* $]-\pi, \pi]$.

DEFINIÇÃO 21.3. *Dados dois domínios abertos D e D* do plano* $\mathbf{C}$, *chama-se aplicação conforme de D sobre D*, a toda a aplicação contínua f do primeiro sobre o segundo que conserve os ângulos definidos por arcos simples de D. Se, além disso, f conserva o sentido dos ângulos orientados, a aplicação diz-se directa; caso contrário, diz-se inversa. Se a aplicação conforme f é biunívoca, diz-se uma representação conforme de D sobre D** [1].

(1) Muitos autores chamam *representações conformes* a todas as aplicações conformes e *representações conformes simples* às aplicações conformes biunívocas (ou univalentes).

Posto isto, podemos demonstrar o seguinte

TEOREMA 21.1. *Toda a função f, definida e holomorfa em D, de contradomínio D^*, é uma aplicação conforme directa de D sobre D^*, se $f'(z) \neq 0$ em todo o ponto de D.*

Demonstração. Seja f uma tal função. Sendo α um ponto qualquer de D, consideremos dois arcos orientados L_1 e L_2 de origem α, representados por duas funções complexas

$$z_1 = \varphi_1(t), \qquad z_2 = \varphi_2(t),$$

definidas e contínuas num intervalo $[a, b]$ da recta, com

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = \alpha.$$

Então, L_1 e L_2 serão transformados por f em dois arcos orientados L_1^* e L_2^*, de origem $f(\alpha)$, representados pelas funções complexas

$$w_1 = f(\varphi_1(t)), \quad w_2 = f(\varphi_2(t)), \quad \text{com} \quad t \in [a, b].$$

Suponhamos, agora, que φ_1 e φ_2 têm derivada finita no ponto $t = a$. Então L_1 e L_2 admitem semi-tangentes em α, definidas pelos vectores $\varphi_1'(a)$, $\varphi_2'(a)$, e, portanto, os arcos L_1^* e L_2^* também admitem semi-tangentes em $f(\alpha)$, pois que, pela regra de derivação das funções compostas, as funções $f(\varphi_1(t))$, $f(\varphi_2(t))$, admitem derivadas finitas e não nulas em ordem a t, dadas por

$$f'(\alpha)\varphi_1'(a) \quad \text{e} \quad f'(\alpha)\varphi_2'(a).$$

Ora, se designarmos por ρ e β, respectivamente, o módulo e o argumento reduzido do número complexo $f'(\alpha)$, a multiplicação dos vectores $\varphi_1'(a)$ e $\varphi_2'(a)$ por $f'(\alpha)$ consiste em multiplicá-los por $\rho > 0$ (o que não lhe altera a direcção e o sentido) e em fazê-los rodar seguidamente de β radianos no sentido positivo. Assim, o ângulo orientado θ dos arcos L_1^*, L_2^*, considerados por esta ordem, será igual ao dos arcos L_1, L_2 de que são imagens por f (q.e.d.).

Reciprocamente, demonstra-se que:

TEOREMA 21.2. *Dada uma aplicação conforme directa de D sobre D*, definida por duas funções reais* $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, *diferenciáveis em D, com determinante funcional não nulo, a função complexa f definida por* $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, *com* $z = x + iy$, *é holomorfa em D.*

Para demonstração, ver, por exemplo, VALIRON, obra cit., págs. 326-327.

Observando que as simetrias em relação a rectas são aplicações conformes inversas, concluímos que, sob certas condições naturalmente exigíveis, *todas as representações conformes são fornecidas pelas funções holomorfas, seguidas ou não de simetrias – isto é, pelas funções holomorfas* $f(z)$ *e pelas suas conjugadas* $\overline{f(z)}$.

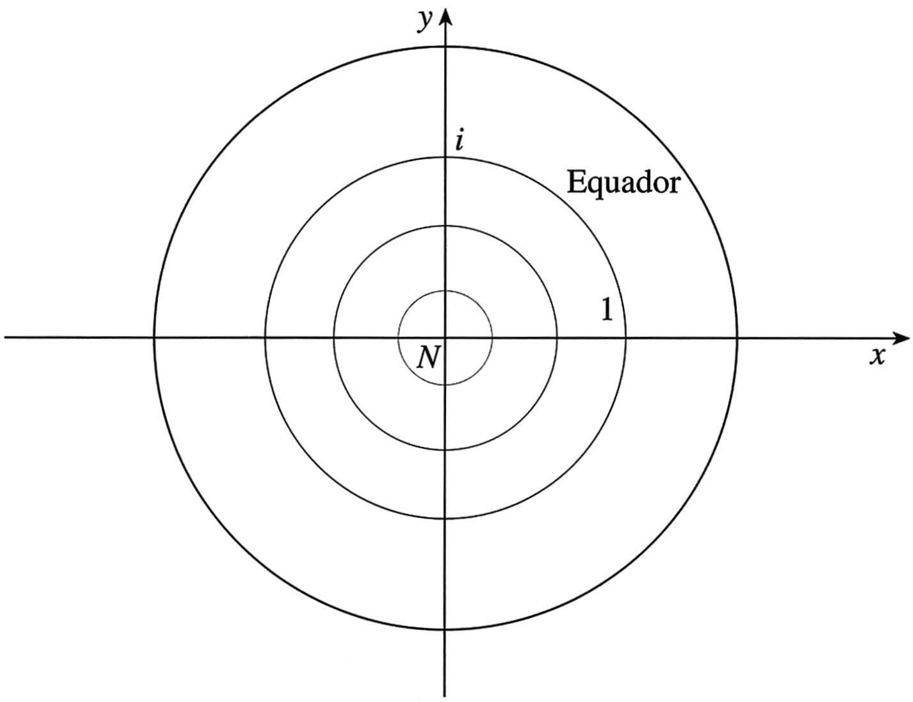
A representação conforme em cartografia.

Historicamente, o problema da representação conforme apresentou-se, pela primeira vez, em cartografia, ao procurar representar sobre um plano regiões extensas do Globo. Especialmente, quando se trata de cartas para navegação, é essencial que a representação seja conforme (e directa), para que o rumo do navio possa ser marcado com exactidão na carta, relativamente aos meridianos e paralelos.

É claro que o conceito de representação conforme se estende imediatamente ao espaço ordinário tridimensional. Intuitivamente, poderíamos dizer que, "em pequeno" (isto é, em regiões reduzidas), as aplicações conformes se confundem, praticamente, com as transformações de semelhança, se bem que, "em grande" (isto é, em regiões mais extensas), já assim não sucede, em geral.

Ora, precisamente, um exemplo de aplicações conformes espaciais são as inversões e, em particular, a projecção estereográfica, a que várias vezes temos aludido. Suponhamos, por exemplo, que se faz a projecção da superfície esférica, representativa do Globo Terrestre, sobre um plano tangente à esfera do Pólo Norte, tomando para centro de projecção o Pólo Sul. Então, este projecta-se no infinito, os paralelos são transformados em circunferências com centro no Pólo Norte e os meridianos em rectas que passam por estes pontos. Como é sabido, as representações conformes deste tipo são muitas vezes usadas em cartografia, para representar, por exemplo, dois hemisférios, com escolha conveniente dos centros de projecção.

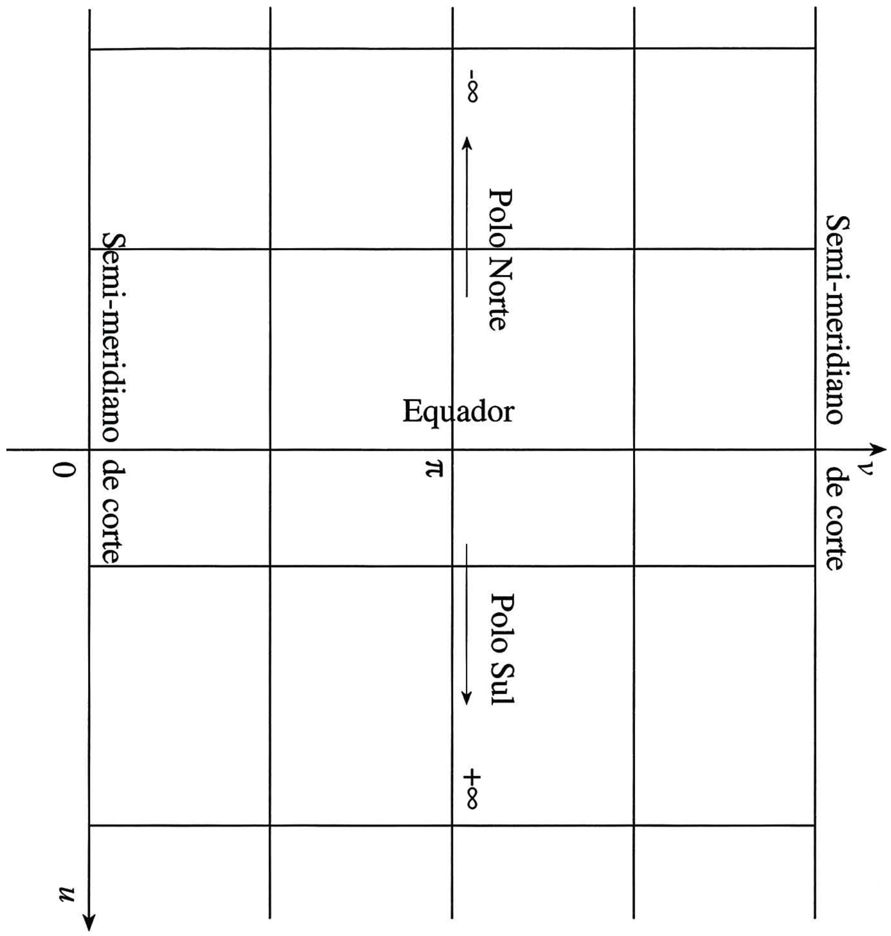
Todavia, para a navegação, seria muito cómoda uma representação conforme que transformasse em rectas (ou porções de recta) tanto os meridianos como os paralelos. Ora, uma tal representação é possível, como vamos ver, recorrendo à função logarítmica.



Com efeito, suponhamos efectuada a referida projecção estereográfica da esfera, a partir do Pólo Sul, sobre um plano. Tomemos este para plano da variável complexa z, escolhendo para semi-eixo real positivo um determinado semi-meridiano (a que chamaremos *semi-meridiano de corte*) e, para unidade de comprimento, o raio da circunferência representativa do Equador. Posto isto, é fácil ver que o ramo zero da função logarítmica (Capítulo II):

$$w = \log_{(0)} z$$

nos fornece uma representação conforme do plano dos z, privado do semi-eixo real positivo, sobre a faixa do plano dos w, definida por $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$.



Na figura, para maior comodidade, considerou-se o plano dos w rodado de $-90°$ relativamente à posição habitual.

Os paralelos que, no primeiro plano, são os lugares geométricos dos pontos z, tais que $|z| = constante$ (circunferências de centro 0), são transformados nos lugares geométricos dos pontos w tais que

$$\operatorname{Re} w = constante, \quad \text{com } 0 \leq \operatorname{Im} w < 2\pi,$$

ou seja, em segmentos rectilíneos paralelos ao eixo imaginário, privados de um extremo. Assim, por exemplo, o Equador de equação $|z| = 1$, vai dar origem ao segmento do eixo imaginário de extremos 0 e 2π, privado, porém, do segundo extremo.

Por sua vez, os semi-meridianos que, no primeiro plano, são os lugares dos pontos z, tais que arg $z = constante$ (semi-rectas de origem 0), são transformados, à parte a origem, nos lugares dos pontos w tais que $\operatorname{Im} w = constante$, ou seja, em rectas paralelas ao eixo real, situadas na faixa $0 \leq \operatorname{Im} w < 2\pi$.

A aplicação definida (ramo zero da função logarítmica) é, como já sabíamos, *descontínua nos pontos do semi-eixo real positivo,* ao longo do qual se efectuou, por assim dizer, um *corte* do primeiro plano. Porém, no plano privado desse semi-eixo (domínio simplesmente conexo), a função $\log_{(0)} z$ é, como sabemos, holomorfa, e define, portanto, uma aplicação conforme (bicontínua) do referido domínio sobre a faixa $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$.

Assim, como se vê, é satisfeito o requisito de serem rectilíneas as imagens dos meridianos e dos paralelos. Este sistema de representação conforme da superfície terrestre (cortada ao longo dum semi-meridiano) é chamado *projecção de Mercator,* em homenagem ao geógrafo matemático flamengo que a descobriu. Muito usada em planisférios, tem só o inconveniente de projectar os Pólos para o infinito, dilatando excessivamente as regiões próximas desses pontos, tais como os países escandinavos, a Groenlândia, etc.

A grande vantagem deste processo está em serem rectilíneas as imagens das *linhas de rumo constante*, que tanto interessam à navegação. Sobre a superfície esférica, as linhas de rumo constante, quando não se reduzem a arcos de paralelo ou de meridiano (direcção Leste-Oeste ou Norte-Sul), são linhas transcendentes, chamadas *loxodromias esféricas,* estudadas pelo matemático e cosmógrafo português PEDRO NUNES, que, pelos métodos empregados nesse estudo, pode ser considerado um percursor da análise infinitesimal.

Para completo esclarecimento deste assunto, convém notar que há dois tipos principais de navegação: *loxodrómica* (para percursos relativamente pequenos, por exemplo, de Lisboa à Madeira) e *ortodrómica* (para viagens maiores, por exemplo, de Lisboa ao Rio de Janeiro). No primeiro caso, procura-se manter constante o rumo do navio, durante a viagem. No segundo caso, procura-se seguir o caminho mais curto (*linha geodésica*), que, no caso da superfície esférica, é um arco de círculo máximo. Porém, como é impossível, em rigor, uma navegação ortodrómica, por impossibilidade de mudar a cada instante o rumo do navio, adopta-se, em navegação de longo curso, um processo misto, que consiste em substituir a geodésica por uma linha formada de sucessivos arcos de loxodromia.

É claro que, na *projecção de Mercator,* a linha assim obtida é representada por uma poligonal (com lados rectilíneos).

A representação conforme e o problema de Dirichlet.

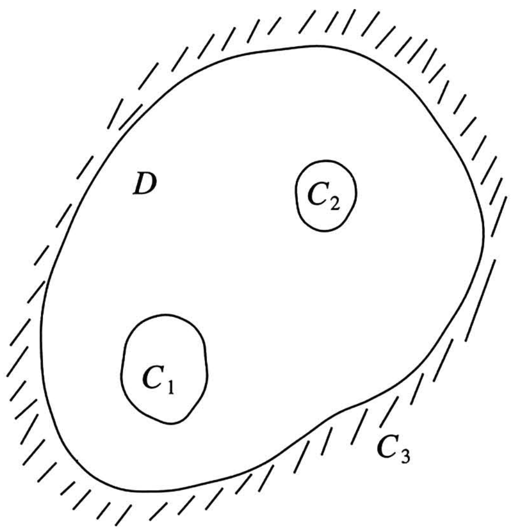
Como se disse no Capítulo II, chama-se *equação de Laplace com duas variáveis x, y,* à equação em derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,, \tag{1}$$

ou seja, abreviadamente, $\Delta u=0$, em que Δ é o operador *laplaciano* em relação a x e a y. Diz-se que uma função real $u=\varphi(x, y)$, definida (univocamente) num domínio aberto D do plano, é *harmónica* em D, ou uma *função potencial*, quando é uma solução de (1) que admita, pelo menos, derivadas parciais de 1.ª e de 2.ª ordem contínuas em D (demonstra-se, depois, que, nestas condições, será mesmo indefinidamente diferenciável em D).

Analogamente se define *equação de Laplace* e *função harmónica*, para mais de duas variáveis.

As funções harmónicas apresentam-se em numerosas questões de Física e da Técnica. Por exemplo, o potencial dum campo electrostático, produzido por um ou mais condutores electrizados C_1, C_2, …, C_n, é uma função harmónica no domínio aberto D de $\mathbf{R}^3$ formado pelos pontos exteriores a esses condutores (supondo D ocupado por um



dieléctrico homogéneo). O domínio D pode ser limitado ou não, simplesmente conexo ou multiplamente conexo. No caso da figura junta trata-se de três condutores, dos quais dois estão situados numa cavidade do outro; o domínio a considerar será, então, *limitado* e *triplamente conexo*; mas se o campo fosse devido, unicamente, aos dois condutores C_1 e C_2 (não circundados por nenhuns outros), tratar-se-ia de um domínio *ilimitado triplamente conexo.*

O problema de Dirichlet.

Para a *equação de Laplace*, com duas ou mais variáveis $x, y, \ldots$, num domínio D, consiste em achar uma função $u = \varphi(x, y, \ldots)$ que verifique a equação no interior de D e tome valores *dados* na fronteira de D. É este um problema de grande importância, que deu origem a toda uma teoria da Física-Matemática, chamada TEORIA DO POTENCIAL.

A teoria do potencial está intimamente relacionada com a das funções analíticas. Assim, por exemplo, já vimos no Capítulo II que a parte real e o coeficiente da parte imaginária de toda a função f holomorfa num domínio D do plano, são funções harmónicas neste domínio. Reciprocamente:

TEOREMA 21.3. *Se D é um domínio aberto simplesmente conexo do plano, toda a função φ harmónica em D é a parte real duma função f holomorfa em D, determinada a menos de uma constante aditiva.*

Demonstração. Seja $u = \varphi(x, y)$ uma tal função. Procuremos determinar uma função $v = \psi(x, y)$, duas vezes continuamente derivável em D, tal que a função $f(z) = u + iv$ seja holomorfa em D. Para isso, é necessário e suficiente que se tenha

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Assim, o diferencial de $v = \psi(x, y)$ deverá ser

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Ora, a última expressão é, de facto, um diferencial exacto, visto que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\Delta u=0$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Então, como é sabido, existe uma infinidade de funções $v=\varphi(x, y)$, diferindo entre si por constantes arbitrárias, que têm esse diferencial, e satisfazem, portanto, ao problema – *visto que D é simplesmente conexo* (por hipótese) (q.e.d.).

Daqui se deduz, desde logo, o

COROLÁRIO. *Se φ é uma função harmónica num domínio D qualquer do plano e g uma aplicação conforme de outro domínio aberto D* sobre D, a função composta $\varphi\circ g$ é harmónica em D*.*

Com efeito, suponhamos verificada a hipótese, sendo g uma aplicação conforme *directa*. Então, φ é a parte real de uma função f holomorfa em D, e g identifica-se, nas condições do TEOREMA 21.2, a uma função holomorfa em D^* de contradomínio D. Logo, a função composta

$$f(g(z))=(f\circ g)(z)$$

será também holomorfa em D^* e a sua parte real

$$\operatorname{Re} f(g(z))=\varphi(g(z)), \qquad \text{com} \quad \varphi(z)=\varphi(x, y),$$

que, como se vê, é a função composta $\varphi\circ g$, será harmónica em D^*.

Se g é uma aplicação conforme inversa, basta compô-la com uma simetria em relação ao eixo real, para obter uma directa.

Deste corolário, precisamente, resulta o grande interesse da representação conforme para a resolução do problema de Dirichlet (*com duas variáveis*).

Por exemplo, havemos de ver noutro Capítulo como se resolve o *problema de Dirichlet* para o círculo. Ora, uma vez resolvido para o círculo C, o *problema de Dirichlet* fica virtualmente resolvido para todo o domínio fechado D que possa ser representado sobre C por uma aplicação bicontínua g, que seja *conforme no interior de D.* Com efeito, em virtude do corolário anterior, toda a solução φ do *problema de Dirichlet* relativo a C fornece a solução $\varphi \circ g$ relativa a D (e reciprocamente); basta, então, transportar os dados nos pontos fronteiros de D para os pontos correspondentes da fronteira de C, resolver o problema para o círculo e compor, finalmente, a solução com g.

Um domínio fechado simplesmente conexo D da *esfera de Riemann* pode, sob condições muito gerais, ser representado sobre o círculo $|z| \leqslant R$[1]. Basta, por exemplo, que a fronteira de D seja uma linha fechada simples (segundo um TEOREMA DE CARATHEODORY); em particular, um semi-plano verifica essa condição *na esfera de Riemann.*

No caso dos domínios duplamente conexos, começa-se por resolver o *problema de Dirichlet* para a coroa circular; ficará, assim, virtualmente resolvido para todo o domínio fechado D (duplamente conexo) que possa ser representado sobre a coroa $0 < r \leqslant |z| \leqslant R$ por uma aplicação bicontínua, conforme no interior de D.

Dum modo geral, o *problema de Dirichlet* e a representação conforme tornam-se cada vez mais difíceis, à medida que aumenta a ordem de conexão dos domínios considerados.

Para um estudo mais desenvolvido deste assunto, veja-se, por exemplo, CARATHEODORY, obra citada, vol. II, ou ainda AHLFORS e VALIRON, obras citadas.

22. Funções vectoriais analíticas

Já no Capítulo III vimos como a Análise Infinitesimal se pode estender, em grande parte, ao caso das funções com valores num *espaço de Banach* ou, mesmo, com valores num espaço vectorial topológico localmente convexo. Mas limitámo-nos, então, a funções de variável real. *Ora, a generalização pode fazer-se, ainda, no caso de funções vectoriais de variável complexa.*

---

(1) Por uma representação conforme.

Comecemos por considerar um *espaço de Banach complexo,* isto é, um *espaço vectorial E sobre o corpo complexo*, que seja *normado e completo* (agora, a hipótese de E ser um espaço vectorial *sobre o corpo complexo* é manifestamente essencial). Seja f uma função de variável complexa, definida num domínio aberto D do plano, *com os valores no espaço de Banach E.* Podemos definir *derivada de f num ponto z_0 de D*, exactamente como se fez no caso das funções numéricas complexas; ter-se-á, neste caso, por definição:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

se este limite existe, sendo um vector de E (em vez de um número complexo). A função f diz-se *diferenciável* (ou *monogénea*) no ponto z_0, se tem derivada em z_0 pertencente a E (portanto finita); diz-se *diferenciável* (ou *holomorfa*) no domínio D, se é diferenciável em todos os pontos de D. Todas as regras de derivação subsistem, com as modificações que as hipóteses actuais requerem; assim, só faz sentido falar, agora, de *produto* (ou *quociente*) *de uma função escalar* $\varphi(z)$ *por uma função vectorial* $f(z)$, a não ser em casos especiais em que estejam definidos outros produtos. *Todas as demonstrações são formalmente idênticas às que são dadas no caso clássico, e, por isso, nos abstemos de as apresentar aqui.*

Em particular, mantém-se o teorema relativo à derivação das séries de potências, com as suas consequências (já tínhamos visto no Capítulo II que subsistem as propriedades fundamentais das séries de potências de z, com os coeficientes num *espaço de Banach E*). *Deixam, porém, de ter significado as condições de monogeneidade, pois não faz sentido agora, em geral, falar de parte real e coeficiente da parte imaginária do vector* $f(z)$, *para cada valor de* z.

Pelo contrário, mantêm-se as definições de integral sobre uma linha, bem como o TEOREMA FUNDAMENTAL DE CAUCHY *e a* FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY, *com as suas consequências.* Importa notar que é a *demonstração de Goursat, e não a de Riemann*, que pode agora aplicar-se.

Mantém-se ainda o *princípio das identidades das funções analíticas* (n.º 14), o que permite, imediatamente, generalizar a este caso o conceito de *função analítica global.* Subsistem, igualmente, as considerações relativas a funções analíticas em domínios da *esfera de Riemann.*

Porém, o estudo das singularidades já não é, neste caso, perfeitamente análogo ao clássico. Por outro lado, é evidente que as relações entre funções holomorfas e aplicações conformes se restringe ao caso das funções numéricas.

Finalmente, importa salientar que *todas estas considerações relativas a funções com valores num espaço de Banach se estendem, de maneira quase imediata, ao caso das funções com valores num espaço vectorial topológico E sobre o corpo complexo, que seja localmente convexo e completo.* Neste caso, a única diferença é que, em vez de se trabalhar com uma única norma, se deve utilizar um sistema de semi-normas definidor da topologia de E.

Página em branco

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

BIBLIOGRAFIA INICIAL 111
INTRODUÇÃO 113

CAP. I – **Preliminares**

1. Números complexos 117
2. Representação geométrica 121
3. Representação trigonométrica dos números complexos 124
4. Interpretação geométrica da multiplicação 127
5. Outro tipo de interpretação geométrica dos números complexos 128
6. Limites de sucessões de números complexos 130
7. Séries de termos complexos 136
8. Soma e produto de séries 139
9. Séries de potências 141
10. Função exponencial 143
11. Logaritmação no campo complexo 148
12. Senos e cosenos de números complexos 149

CAP. II – **Estudo elementar das funções de variável complexa**

1. Generalidades sobre funções de mais de uma variável 151

2. Funções complexas de variável complexa 155
3. Funções reais da variável complexa e funções complexas de variável real 157
4. Noção de limite para funções complexas da variável complexa 159
5. Propriedades dos limites das funções 161
6. Continuidade para funções complexas de variável complexa 163
7. Conceito de derivada. Funções monogéneas e funções holomorfas 164
8. Regras de derivação 168
9. Condições de monogeneidade 173
10. Condições de holomorfia.. 180
11. Estudo de algumas funções pluriformes 183

CAP. III – **Noções prévias sobre espaços vectoriais abstractos e sobre topologia**

1. Espaços vectoriais: definição, axiomática e exemplos 193
2. Dependência linear. Número de dimensões 197
3. Noção de subespaço vectorial 197
4. Noção de semi-norma.. 199
5. Noção de norma.. 200
6. Noções de desvio, distância e espaço métrico....................... 202
7. Noções métricas 205
8. Isometrias 207
9. Noções topológicas em espaços métricos 208
10. Topologia e Lógica formal 214
11. Noção geral de espaço topológico 217
12. Sistemas fundamentais de vizinhança 220
13. Filtros e bases de filtros 222
14. Noção de subespaço topológico 223
15. Produto topológico 224
16. Espaços separados 226
17. Noção de limite de uma sucessão 228
18. Limite de um filtro 231

19. Limite de uma função. Funções contínuas 232
20. Aplicações bicontínuas. Grupo da Topologia 238
21. Conjuntos compactos 240
22. Funções contínuas sobre compactos 243
23. Continuidade uniforme em espaços métricos 245
24. Imersão de um espaço localmente compacto num espaço compacto 247
25. Noção de linha 250
26. Conjuntos conexos 254
27. Espaços métricos completos. Espaços de BANACH 260
28. Análise infinitesimal em espaços de BANACH 262
29. Espaços vectorais topológicos. Espaços localmente convexos 269

ALGUMAS INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS 271

CAP. IV – **Fundamentos da teoria das funções analíticas**

1. Noção de integral para as funções complexas de variável real 273
2. Noção de integral para as funções complexas de uma variável complexa 275
3. Nova definição de integral para funções complexas de variável complexa 278
4. Domínios simplesmente conexos e domínios multiplamente conexos 283
5. Primeira forma do teorema fundamental de CAUCHY Demonstração de RIEMANN 286
6. O teorema fundamental de CAUCHY para poligonais. Demonstração de GOURSAT 288
7. O teorema fundamental do cálculo integral no campo complexo. Forma geral do teorema fundamental de CAUCHY 291
8. Caso dos domínios multiplamente conexos 297
9. Fórmula integral de CAUCHY 299
10. Convergência uniforme no campo complexo 302

11. Primeiras consequências da fórmula integral de CAUCHY 308
12. Teoremas de MORERA e de WEIERSTRASS 314
13. Série de LAURENT 317
14. Zeros de uma função holomorfa 319
15. Pontos singulares de uma função 324
16. Funções analíticas globais (ou funções analíticas de WEIERSTRASS) 330
17. Funções holomorfas em domínios da esfera de RIEMANN ... 352
18. Funções homográficas. Geometria analagmática e geometria projectiva da recta projectiva complexa 360
19. Funções analíticas globais em domínios da esfera de RIEMANN 365
20. Funções algébricas 366
21. Breves noções sobre representação conforme 376
22. Funções vectoriais analíticas 387

CAP. V – **Revisões e complementos sobre integrais impróprios e sobre integrais paramétricos**

1. Integrais com extremos infinitos para funções reais 391
2. Integrais de funções ilimitadas 405
3. Mudança de variáveis em integrais impróprios 411
4. Funções de EULER 413
5. Integrais impróprios de funções vectoriais e de funções complexas 415
6. Convergência uniforme relativa a parâmetros contínuos 417
7. Integrais paramétricos 425

CAP. VI – **Método dos resíduos**

1. Definição e teorema fundamental 437
2. Aplicação à contagem dos zeros duma função meromorfa 439
3. Resíduos no ponto impróprio 443
4. Aplicação do método dos resíduos ao cálculo de integrais impróprios 444

CAP. VII – **Breves noções sobre medida e integral de Lebesgue**

1. Medida de LEBESGUE sobre a recta 454
2. Funções em escada. Funções fundamentais 457
3. Funções mensuráveis 458
4. Funções somáveis. Integral de LEBESGUE 459
5. Propriedades do integral de LEBESGUE 463
6. Integrais indefinidos. Funções absolutamente contínuas 468
7. Integração por partes e integração por substituição 471
8. Integral duma função sobre um conjunto mensurável 473
9. Espaço das funções localmente somáveis num intervalo 473
10. Espaços L^p. Espaços de HILBERT 479
11. Medida e integral em $\mathbf{R}^n$ 484

CAP. VIII – **Transformação de Fourier**

1. Definição e notações 495
2. Campo de existência. Primeiras propriedades 498
3. Efeito da transformação de FOURIER sobre a derivação e sobre a multiplicação por x 501
4. Inversão. Teorema de FOURIER 503
5. Demonstração do teorema integral de FOURIER 511
6. Efeito da transformação de FOURIER sobre a multiplicação. Convolução 515
7. Efeito da transformação de FOURIER sobre as translações .. 518
8. Aplicações às equações diferenciais 519
9. A transformação de FOURIER para funções de mais de uma variável 526

ALGUMAS INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS 531

CAP. IX – **Transformação de Laplace**

1. Definição e notações 533
2. Campo de existência. Funções de tipo exponencial à direita . 535
3. Linearidade da transformação de LAPLACE 541

4. Efeito da transformação de LAPLACE sobre a derivação 542
5. Efeito da transformação de LAPLACE sobre as translações . 545
6. Inversão 547
7. Convolução no intervalo [0, +∞[.... 550
8. Aplicações às equações diferenciais 552

BIBLIOGRAFIA 566