II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

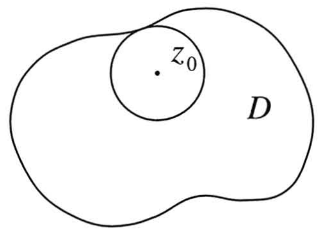
$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência [(1)].

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[(1)] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[(2)]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO V

REVISÕES E COMPLEMENTOS SOBRE INTEGRAIS IMPRÓPRIOS E SOBRE INTEGRAIS PARAMÉTRICOS

1. Integrais com extremos infinitos para funções reais

Recordemos que o conceito de integral riemanniano duma função f num intervalo $[a, b]$ é definido na hipótese de a e b serem finitos. Para abranger o caso em que o intervalo de integração é ilimitado, torna-se necessária uma extensão do anterior conceito de integral.

Caso do extremo superior infinito.

Seja f uma função real definida num intervalo $[a, +\infty[$ e suponhamos que f é *integrável, no sentido de Riemann*, em todo intervalo limitado $[a, X]$, com $X > a$. Posto isto:

DEFINIÇÃO 1.1. *Se o integral de f em $[a, X]$ tende para um limite L finito, quando $X \to +\infty$, o número L chama-se integral de f entre a e $+\infty$ e representa-se pelo símbolo*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{1}$$

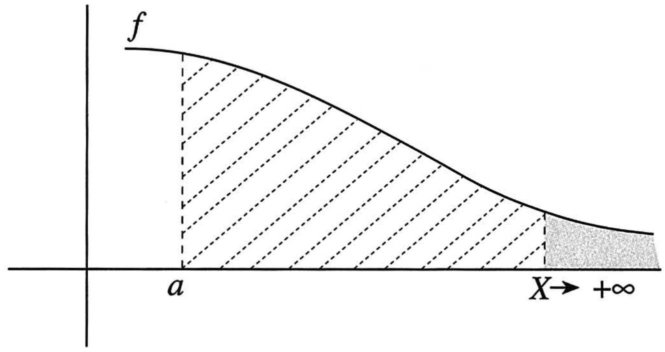
Diz-se ainda, nesta hipótese, que o integral (1) *existe ou que tem signifcado.*

Ter-se-á, pois, por definição:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(x)dx,$$

quando este limite *existe e é finito.*

Já sabemos que, geometricamente, o integral de f em $[a, X]$, quando $f(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$, é a área do domínio limitado pelo gráfico de f, pelo eixo dos x e pelas rectas $x = a$, $x = X$. Então, *se o integral* (1) *existe, o seu valor é a área do domínio ilimitado, compreendido entre o gráfico de f, o eixo dos x e a recta $x = a$.*



Há uma estreita analogia entre os integrais do tipo (1) e as séries numéricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n;$$

assim, quando se passa da série para o integral, o símbolo de somatório é substituído pelo símbolo de integral, a variável inteira n é substituída pela variável contínua x e o termo geral da série (que é uma função de n, podendo escrever-se $u(n)$, em vez de u_n) é substituído pela função integranda $f(x)$. Aliás, tem-se também, por definição

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n,$$

quando este limite existe *e é finito.*

Foi este paralelismo que orientou o estudo do novo tipo de integrais, fornecendo a própria terminologia: por exemplo, diz-se que o integral (1) é *convergente* quando tem significado, e *divergente* no caso oposto.

Fórmula de Barrow. Integração por decomposição.

Se for F uma primitiva de f, tem-se

$$\int_a^X f(x)dx = F(X) - F(a) \qquad \text{(FÓRMULA DE BARROW).}$$

Portanto, o primeiro membro tenderá para um limite finito, ao tender X para $+\infty$, se e só se o mesmo acontecer com $F(X)$, e, então, uma vez que esse limite exista, será

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$

em que, como de costume, se põe

$$F(+\infty) = \lim_{X \to +\infty} F(X).$$

Assim, a FÓRMULA DE BARROW *subsiste para o novo tipo de integrais.*

Também é imediato que se tem

$$\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx,$$

desde que existam os integrais do segundo membro: *o método de decomposição é, pois, aplicável a este tipo de integrais.*

Exemplo – Estudar o integral

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha},$$

com α real qualquer e $a > 0$.

(Este integral corresponde à chamada *série de Dirichlet*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

que se demonstra ser convergente se e só se $\alpha > 1$).

Ora, tem-se, para todo o $u > a$, como é fácil verificar:

$$\int_a^u \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{u^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right), & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \log u - \log a, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Daqui se conclui que:

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{u\to+\infty} \displaystyle\int_a^u \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}, & \text{se } \alpha > 1, \\ \\ \lim\limits_{u\to+\infty} \displaystyle\int_a^u \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty, & \text{se } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Assim, em conclusão: *o integral proposto é convergente, se e só se* $\alpha > 1$, *sendo o seu valor dado por* (2).

Por exemplo, o integral de $1/x$ entre 1 e $+\infty$ é divergente, enquanto o integral de $1/\sqrt{x^3}$ no mesmo intervalo existe e é igual a 2.

Critérios de convergência.

O estudo dos integrais deste tipo pode decalcar-se do estudo análogo feito para as séries numéricas.

Um critério geral de convergência é o que se deduz do CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DE CAUCHY PARA FUNÇÕES:

Condição necessária e suficiente para que o integral de f entre a e $+\infty$ seja convergente, é que, para todo o número $\delta > 0$, *exista um número L tal que se tenha*

$$\left|\int_u^v f(x)dx\right| < \delta, \qquad \textit{para} \quad u > L \quad e \quad v > L.$$

Porém, na prática usam-se critérios particulares (condições suficientes mas não necessárias de convergência ou de divergência), um dos quais é o

CRITÉRIO DE CONFRONTO. *Dados dois integrais*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \qquad \int_a^{+\infty} g(x)dx,$$

sendo f *e* g *funções não negativas tais que* $f(x) \leqslant g(x)$ *para todo o* $x > a$, *o primeiro integral será convergente, se o segundo o for, sendo, então, o seu valor menor ou igual ao do segundo; e o segundo será divergente se o primeiro o for.*

Este critério é uma consequência do critério geral anterior. Quando se verifica a hipótese do critério, diz-se que o segundo integral é *majorante* do primeiro.

Em particular, pode utilizar-se para confronto a função $1/x^{\alpha}$ estudada no exemplo anterior, o que conduz ao seguinte critério muito usado na prática:

TEOREMA 1.1. *Sendo* f *não negativa, o integral de* f *entre* a *e* $+\infty$ *é convergente, se existem constantes* M *e* α *tais que, para todo o* x *positivo* $> a$, *se tem:*

$$\text{(3)} \qquad f(x) \leqslant \frac{M}{x^{\alpha}}, \quad \textit{com} \quad \alpha > 1 \quad \textit{e} \quad M \textit{ finito};$$

o integral é divergente, se existem constantes M *e* α *tais que, para* $x > 0$ *e* $x > a$:

$$f(x) > \frac{M}{x^{\alpha}}, \quad \textit{com} \quad \alpha \leqslant 1 \quad \textit{e} \quad M \textit{ não nulo}.$$

A condição (3) pode servir para calcular o integral de f entre a e $+\infty$ *com a aproximação que se quiser.* Com efeito, sendo x_0 um número $> a$, tal que (3) se verifique para $x > x_0$, virá

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ora, supondo $x_0 > 0$, ter-se-á, atendendo ao resultado (2) do exemplo anterior:

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int_{x_0}^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha} dx = \frac{M}{(\alpha - 1)x_0^{\alpha-1}}$$

e, como o último membro tende para zero quando $x_0 \to +\infty$, o mesmo acontece com o primeiro. *Assim, podemos sempre escolher x_0 suficientemente elevado, de modo que o integral de f entre a e x_0 seja um valor aproximado do integral de f entre a e $+\infty$ com erro inferior a um número $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado.*

A condição (3) ainda se pode apresentar com outro aspecto. Com efeito, pondo

$$x^\alpha f(x) \equiv \varphi(x)$$

e, portanto,

$$f(x) \equiv \frac{\varphi(x)}{x^\alpha},$$

a condição (3) equivale a dizer que a função $\varphi(x)$ é limitada e assim a primeira parte do critério pode enunciar-se do seguinte modo:

O integral de f entre a e $+\infty$ é convergente, se a função f for da forma

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}, \quad \text{com} \quad \alpha > 1,$$

sendo φ uma função limitada no intervalo $[a, +\infty[$.

Exprime-se este facto dizendo que *a função $f(x)$ é infinitésima de ordem superior a* 1, *quando $x \to +\infty$.*

Por sua vez, a segunda parte do teorema pode, agora, enunciar-se do seguinte modo:

O integral considerado é divergente, se f for da forma:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}, \quad \textit{com} \quad \alpha \leqslant 1,$$

sendo $\varphi(x)$ superior a uma constante $M > 0$, pelo menos a partir de certo valor de x.

Assim, por exemplo, dados os dois integrais

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^3}\,dx \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

desde logo se vê, por simples inspecção, que o primeiro é convergente e o segundo divergente.

Em particular, a função $\varphi(x) = x^\alpha f(x)$ será limitada em $[a, +\infty[$, se existir e for finito o seu limite, quando $x \to +\infty$ (visto f ser *integrável à Riemann*, e, portanto, limitada, em cada intervalo $[a, X]$ limitado). Por conseguinte:

O integral considerado será convergente, se existir e for finito

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)\,, \qquad \textit{com} \qquad \alpha > 1\,.$$

Analogamente: O integral considerado será divergente, se existir e for maior que zero

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)\,, \qquad \textit{com} \qquad \alpha \leqslant 1\,.$$

Sejam, por exemplo, os integrais

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3-1}\,dx\,, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

No primeiro caso tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \frac{x+1}{x^3-1} \right) = 1 \qquad (\alpha = 2 > 1)\,,$$

e, portanto, o integral é convergente. No segundo tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 > 0 \qquad (\alpha = 1)\,,$$

e o integral é, portanto, divergente.

Caso em que figura uma exponencial na função integranda.
Neste caso, há que ter em consideração o seguinte facto:

Quando $x \to +\infty$, a exponencial e^{kx}, com k constante >0, tende para $+\infty$ mais rapidamente que qualquer potência de expoente positivo de x (e, portanto, mais depressa que qualquer polinómio ou função algébrica).

Para o reconhecer, basta calcular o limite da razão e^{kx}/x^n, com n natural. Derivando n vezes ambos os termos, segundo a REGRA DE L'HÔPITAL, vem:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{k^n e^{kx}}{n!} = +\infty .$$

Daqui resulta, desde logo, que:

Quando $x \to +\infty$, a exponencial e^{-kx}, com $k>0$, tende para 0 mais rapidamente que qualquer potência de expoente negativo de x (e, portanto, mais depressa que qualquer função algébrica).

É claro que, se, nos enunciados anteriores, substituirmos x no expoente por uma potência x^β de x, com $\beta > 0$, ou, mais geralmente, por qualquer função que tenda para $+\infty$, tão depressa ou mais que x^β, a conclusão será a mesma.

Exemplo – Achar os valores reais de λ para os quais é convergente o integral:

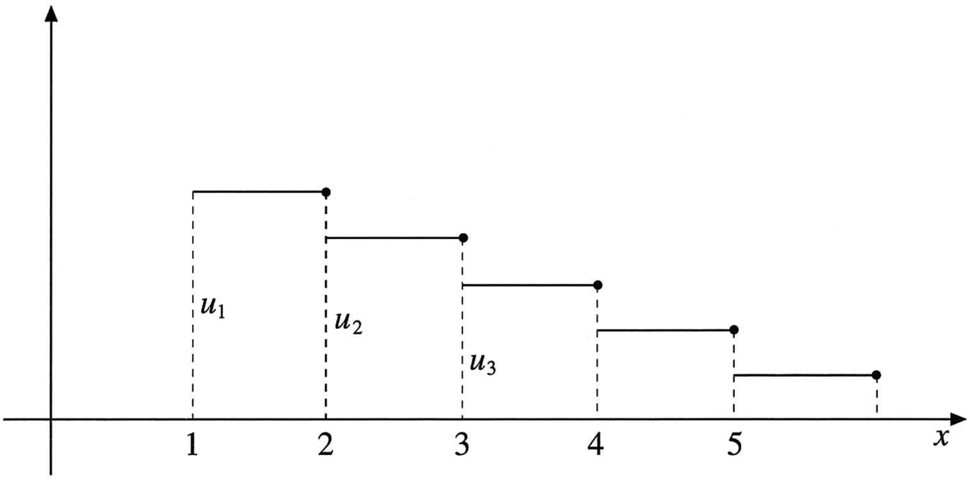
$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sqrt{1 + x^2}\, dx .$$

Se $\lambda \leqslant 0$, a função integranda tende para ∞ quando $x \to +\infty$. Se $\lambda > 0$, o produto da função integranda por qualquer potência de x (por exemplo, x^2) tende para zero quando $x \to +\infty$. *Logo, o integral é convergente, se e só se $\lambda > 0$.*

As séries como caso particular de integrais impróprios.
Vamos ver como é possível escrever uma série numérica qualquer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

sob a forma de integral entre 1 e $+\infty$.



Pondo $f(x) = u_n$, para $n \leqslant x < n+1$, $n = 1, 2, \ldots$, ficará, assim, definida uma função em escada, com um gráfico do tipo indicado na figura anterior. Ora, é evidente que a soma parcial de ordem N da série será:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \int_1^N f(x)dx.$$

Então, como é fácil ver, *a série considerada será convergente, se e só se o integral de* f *entre* 1 *e* $+\infty$ *for convergente, tendo-se nesta hipótese, precisamente*,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Isto permite-nos deduzir critérios de convergência para as séries, a partir de critérios estabelecidos para os integrais. Seja, por exemplo, a *série de Dirichlet*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \text{ com } \alpha \text{ real}.$$

É claro que se tem

$$\frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{(x-1)^\alpha}, \quad \text{para} \quad n \leqslant x < n+1, n = 2, 3, \ldots .$$

Então, aplicando o critério de confronto para integrais e o resultado anterior sobre a função $1/x^\alpha$, conclui-se que *a série de Dirichlet é convergente, se* $\alpha > 1$, *e divergente, se* $\alpha \leqslant 1$.

Como se sabe, este critério pode ser estabelecido directamente, mas com menor simplicidade, na teoria das séries.

Integrais absolutamente convergentes.

Até aqui, os critérios particulares de convergência que temos apresentado referem-se *ao caso em que a função integranda é não negativa.* Se a função é não positiva, basta multiplicar o integral por -1, para recair no caso anterior. Se a função é ora positiva ora negativa, pode ainda usar-se o seguinte critério particular, que se deduz do critério geral de convergência:

O integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

será convergente, se o integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

o for, e tem-se, nesta hipótese:

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Com efeito, suponhamos que o segundo integral é convergente; então, para cada número $\delta > 0$, existe um número x_0 tal que

$$\int_u^v |f(x)|dx < \delta, \quad \text{se} \quad u > x_0 \quad \text{e} \quad v > x_0.$$

Mas, como

$$\left|\int_u^v f(x)dx\right| \leqslant \int_u^v |f(x)|dx, \qquad \forall u \text{ e } v > u,$$

será também

$$\left|\int_u^v f(x)dx\right| < \delta \text{ para } u > x_0 \text{ e } v > x_0,$$

o que, pelo critério geral, implica que o primeiro integral também é convergente.

A demonstração da segunda parte do teorema é quase imediata, atendendo à definição de integral entre a e $+\infty$ e às propriedades do *integral de Riemann.*

Posto isto, o integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

diz-se *absolutamente convergente*, quando é convergente o integral de $|f(x)|$ no mesmo intervalo.

Atendendo ao teorema anterior, o critério de convergência em que intervêm as potências x^α pode aplicar-se a funções f com sinal variável, desde que se considere $|f(x)|$, em vez de f. Por exemplo, é fácil ver que o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

é absolutamente convergente.

Critério de Abel.

O recíproco do teorema anterior não é verdadeiro: o integral de f entre a e $+\infty$ pode ser convergente, sem que o seja o integral de $|f|$. Diz-se, neste caso, que o primeiro integral é *simplesmente convergente*. Pode, então, ser útil o seguinte critério, devido a ABEL, que corresponde, de certo modo, ao conhecido critério de convergência das séries de termos alternadamente positivos e negativos:

Se f é uma função decrescente e tendente para zero quando $x \to +\infty$, e g uma função cujo integral em $[u, v]$ se mantém inferior a um número fixo, quaisquer que sejam os pontos u, v, do intervalo $[a, +\infty[$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

é convergente.

Para a demonstração, ver, p. ex., VALIRON, obra cit., p. 113.

Por exemplo, o integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

é convergente, segundo o CRITÉRIO DE ABEL.

Caso em que é infinito o extremo inferior de integração.
Seja f uma função definida num intervalo $]-\infty, a]$, com a finito, e suponhamos f integrável em todo o intervalo limitado $[X, a]$, com $X < a$. Então, será, por definição:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{X \to -\infty} \int_X^a f(x)dx,$$

quando este limite existe e é finito (diz-se, então, que o integral do 1.º membro *existe, tem significado* ou *é convergente*).

É óbvio que as considerações anteriores se estendem, *mutatis mutandis,* a este caso. Mas podemos também reduzi-lo, imediatamente, ao anterior, por uma simples mudança de variável. Tem-se, com efeito:

$$\int_X^a f(x)dx = \int_{-a}^{-X} f(-x)dx, \qquad \forall X < a,$$

e, portanto,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{-X \to +\infty} \int_{-a}^{-X} f(-x)dx = \int_{-a}^{+\infty} f(-x)dx.$$

Caso em que são infinitos ambos os extremos de integração.

Seja, agora, f uma função definida na recta inteira e integrável em qualquer intervalo limitado $[u, v]$. Então, chama-se *integral de f entre $-\infty$ e $+\infty$* e representa-se por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

o limite de

$$\int_{u}^{v} f(x)dx,$$

quando u e v tendem, respectivamente, para $-\infty$ e para $+\infty$, *se este limite existe e é finito*; também se diz, então, que o integral de f entre $-\infty$ e $+\infty$ *existe, tem significado* ou *é convergente*.

Este caso reduz-se imediatamente aos anteriores, como vamos ver. Tomemos arbitrariamente um ponto a fixo (finito); então, como $u \to -\infty$ e $v \to +\infty$, podemos já supor $u < a < v$, e, assim, virá:

$$\int_{u}^{v} f(x)dx = \int_{u}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{v} f(x)dx,$$

donde se deduz, passando ao limite com $u \to -\infty$, $v \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Seja, por exemplo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Atendendo ao que foi dito atrás sobre exponenciais, conclui-se que existem os integrais

$$\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2} dx$$

e, portanto, o integral proposto, soma destes dois.

É claro que a FÓRMULA DE BARROW se mantém para este tipo de integrais. Por exemplo, para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

basta notar que uma primitiva da função integranda é o ramo de $\operatorname{arctg} x$ cujos valores estão entre

$$-\frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{\pi}{2}.$$

Será, portanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \pi.$$

Mas, em geral, não é fácil achar uma primitiva da função integranda e, então, o integral deverá ser calculado por outros métodos ou mesmo numericamente, com a aproximação que se deseje.

NOTA IMPORTANTE. Se existe o integral de f entre $-\infty$ e $+\infty$, é evidente que

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u \to +\infty} \int_{-u}^{u} f(x)dx.$$

Mas a recíproca não é verdadeira: pode acontecer que exista este limite e seja finito, sem que exista o integral do 1.º membro, isto é, sem que seja convergente um, pelo menos, dos integrais

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

A anterior definição de integral entre $-\infty$ e $+\infty$ exige que u e v tendam para $-\infty$ e $+\infty$ *de maneira independente*, ao passo que, no caso presente, se impõe a u e a v a condição de tenderem para ∞ por valores simétricos. Quando existe e é finito o segundo membro de (4), sem que exista necessariamente o primeiro, diz-se que esse limite é o *valor principal de Cauchy* do integral de f entre $-\infty$ e $+\infty$, e é designado pela notação

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\,.$$

O integral diz-se *semi-convergente* (não confundir com "simplesmente convergente"), quando não é convergente, mas existe o seu *valor principal de Cauchy.*

Por exemplo, tem-se

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} x\,dx = \lim_{u\to+\infty} 0 = 0$$

e, contudo, o integral não é convergente, visto que não são convergentes os integrais

$$\int_{0}^{+\infty} x\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{0} x\,dx\,.$$

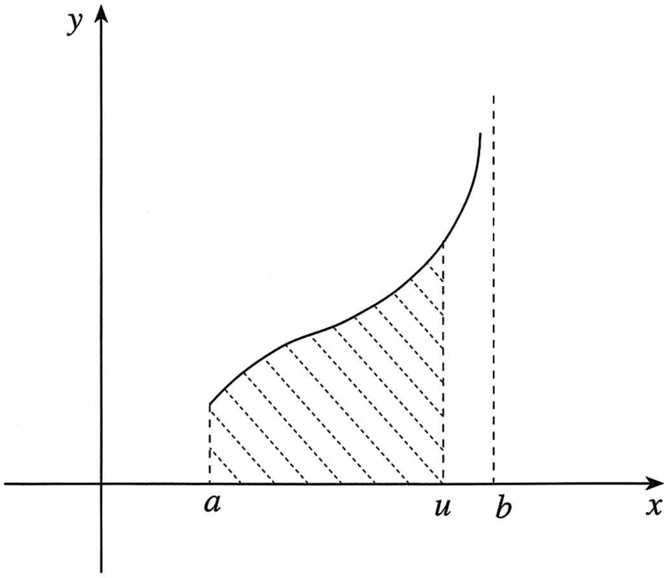
2. Integrais de funções ilimitadas

Demonstra-se que, para uma função ser *integrável à Riemann* num dado intervalo, é condição necessária que a função seja limitada nesse intervalo. Caso contrário, há que fazer uma nova extensão do conceito de integral, de modo a incluir este caso.

Seja f uma função real, definida num intervalo limitado $[a, b]$, e *integrável à Riemann* em todo o intervalo $[a, u[$ com $a<u<b$. *Se a função f é limitada no intervalo $[a, b[$, prova-se que ainda é integrável à Riemann neste intervalo, tendo-se, precisamente,*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{u\to b^-} \int_{a}^{u} f(x)dx\,. \tag{1}$$

Se f não é limitada em $[a, b[$, não é integrável à Riemann neste intervalo, mas, se o limite do 2.º membro existe e é finito, continua a usar-se a fórmula (1) *para definir integral (generalizado) de f entre a e b, dizendo-se, então, que esse integral "existe", "é convergente" ou "tem significado". Caso contrário, diz-se que o integral de f entre a e b é divergente, não existe ou não tem significado.*



Para a interpretação geométrica deste conceito, suponhamos f não negativa em $[a, b[$, sendo contínua mas não limitada neste intervalo (por exemplo, tende para ∞ quando $x \to b^-$). Então, o valor de

$$\int_a^u f(x)dx$$

dá-nos a área do trapezóide determinado pela função f no intervalo $[a, u]$; se existe e é finito o limite deste integral, quando $u \to b^-$, é natural dizer que o integral de f entre a e b representa a área do domínio ilimitado, compreendido entre a curva $y = f(x)$, o eixo dos x e as rectas $x = a$, $x = b$.

É fácil ver que também para este novo conceito de integral subsiste a FÓRMULA DE BARROW.

Podemos desenvolver considerações inteiramente análogas, para funções definidas no intervalo $]a, b]$, integráveis em cada intervalo $]u, b]$, com $a < u < b$. Então, se f for ilimitada em $]a, b]$, tem-se, por definição:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)dx ,$$

se o limite do 2.º membro existe e é finito.

Mais geralmente, ainda, podemos considerar o caso em que o intervalo de integração é a reunião de um número finito de intervalos em que se verifica uma ou outra destas circunstâncias: então, o integral de f nesse intervalo será a soma dos integrais de f nos intervalos parciais.

Os integrais deste tipo são chamados *integrais impróprios de* 1.ª *espécie,* enquanto os integrais em intervalos ilimitados se dizem *integrais impróprios de* 2.ª *espécie.*

Exemplo – Seja o integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

com $a<b$, sendo α um número real qualquer. Se $\alpha<0$, a função integranda é contínua e, portanto, integrável em $[a, b]$. Se $\alpha>0$, a função é contínua em todo o intervalo $]u, b]$, com $a<u<b$, mas tende para ∞ quando $x \to a$. Vejamos para que valores de α existe o integral. Tem-se:

$$\int_u^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(u-a)^{\alpha-1}}\right], & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \log(b-a) - \log(u-a), & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Vê-se, então, que *o integral é convergente,* se e só se $\alpha<1$, sendo, então, a sua soma igual

$$\frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}.$$

Por exemplo, o integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

é divergente e o integral

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

é convergente, igual a $2\sqrt{2}$.

Critérios de convergência.

A teoria dos integrais impróprios de 1.ª espécie é muito semelhante à dos integrais em intervalos ilimitados. Tem-se ainda, neste caso, um *critério geral de convergência,* um *critério de confronto,* etc. Em particular, o confronto com funções de tipo $M/(x-a)^\alpha$ fornece um critério que se usa, com frequência, na prática, sob diferentes formas. Subsiste, ainda, o teorema:

Condição suficiente para que o integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

seja convergente é que o seja o integral

$$\int_a^b |f(x)|dx\,.$$

Nesta hipótese, o primeiro integral diz-se absolutamente convergente.

Combinando este teorema com o anterior critério, obtém-se este outro critério, muitas vezes aplicado na prática:

TEOREMA 2.1. *Seja f uma função integrável à Riemann em todo o intervalo* $]u, b]$, *com $a<u<b$. Então, se existe uma constante finita M e um número real α tais que*

$$|f(x)|<\frac{M}{(x-a)^\alpha}\,,\quad com\quad \alpha<1,\quad para\quad a<x\leqslant b,$$

o integral de f entre a e b é absolutamente convergente. Se existe uma constante não nula M e um número real α tais que

$$|f(x)|>\frac{M}{(x-a)^\alpha}\,,\quad com\quad \alpha\geqslant 1,\quad para\quad a<x\leqslant b,$$

o integral de f entre a e b é divergente.

Note-se que, pondo $\varphi(x) \equiv (x-a)^{\alpha} f(x)$, a primeira parte do teorema pode apresentar-se com qualquer dos seguintes aspectos:

1) *O integral de f entre a e b é convergente, se f é da forma*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}, \quad com \quad \alpha < 1,$$

sendo φ uma função limitada em $[a, b]$.

2) *O integral de f entre a e b é convergente, se existe, pelo menos, um número $\alpha < 1$ tal que a função $(x-a)^{\alpha} f(x)$ de x é limitada em* $]a, b]$.

A condição suficiente indicada em 1) pode exprimir-se dizendo que *f tem um pólo de ordem menor que 1 no ponto a.*

Atendendo a 2), vê-se que, *em particular,* esta condição é verificada, se:

Existe um número $\alpha < 1$ tal que a função $(x-a)^{\alpha} f(x)$ tende para um limite finito quando $x \to a^+$.

Por exemplo, seja o integral

$$\int_0^1 \log x \, dx .$$

Para todo o número positivo α tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\alpha}}{-\alpha} = 0 .$$

Assim, $\log x$ tem um *pólo de ordem inferior a qualquer número positivo no ponto zero* e o integral proposto é, portanto, convergente.

Analogamente, conclui-se que o integral de f entre a e b é divergente, *se existe um número $\alpha \geqslant 1$ tal que $(x-a)^{\alpha} f(x)$ tende para um limite não nulo quando $x \to a^+$.*

Critérios análogos se obtêm no caso das funções f ilimitadas no intervalo $[a, b]$, mas *integráveis à Riemann* em todo o intervalo $[a, u[$, com $a < u < b$.

Integrais impróprios de tipo misto.

Além dos integrais impróprios de 1.ª espécie ou de 2.ª espécie, apresentam-se, ainda, integrais impróprios de tipo misto, isto é, ao mesmo tempo de 1.ª e de 2.ª espécie. Tal é, por exemplo, o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{|x|}}$$

que podemos decompor nos integrais da mesma função entre $-\infty$ e -1, entre -1 e 0, entre 0 e 1, e entre 1 e $+\infty$. A função integranda tem um pólo de ordem 1/2 no ponto $x=0$ e um zero de ordem 2 nos pontos $+\infty$ e $-\infty$; *isto basta para que o integral proposto seja absolutamente convergente*.

Dum modo geral, consideremos uma função f que seja contínua em todos os pontos da recta, excepto, quando muito, numa infinidade numerável de pontos α_n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), de modo que, em cada intervalo limitado $[u, v]$, exista um número finito desses pontos. Então, o integral de f entre u e v decompõe-se, geralmente, na soma dum número finito de integrais, próprios ou impróprios de 1.ª espécie, nos intervalos $[u, \alpha']$, $[\alpha', \alpha'']$, ..., $[\alpha^{(k)}, v]$, sendo α', α'', ..., $\alpha^{(k)}$, os sucessivos pontos α_n porventura situados entre u e v. Por sua vez, o integral de f entre $-\infty$ e $+\infty$ decompõe-se, *quando muito*, na soma de uma infinidade numerável (ou seja, numa série) de integrais, próprios ou impróprios de 1.ª espécie, nos intervalos $[\alpha_{n-1}, \alpha_n]$. *Por definição,* o integral de f entre $-\infty$ e $+\infty$ é convergente, se e só se são convergentes esses integrais parciais[1], tendo-se, em tal hipótese:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} f(x)dx \qquad (\text{supondo } \alpha_{n-1} < \alpha_n).$$

Se o integral de $|f(x)|$ em $\mathbf{R}$ (isto é, entre $-\infty$ e $+\infty$) é convergente, também é convergente o integral de f em $\mathbf{R}$, e diz-se, ainda, que este é absolutamente convergente. Por exemplo, pode reconhecer-se, como exercício, que o integral

(1) Bem como a série dos valores desses integrais.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx$$

é absolutamente convergente.

Diz-se que uma função f é *seccionalmente contínua* num intervalo I, se admite, quando muito, *descontinuidades de* 1.ª *espécie, com limites laterais finitos,* em pontos α_n tais que, em cada intervalo compacto $K \subset I$, exista um número finito desses pontos. É claro que, neste caso, a função f é *integrável, segundo Riemann*, em qualquer intervalo compacto $K \subset I$ (porquê?). Por exemplo, são seccionalmente contínuas em toda a recta as funções $C(x)$ (*característica* ou *parte inteira* de x) e $M(x)$ (*mantissa* de x).

Podem, ainda, apresentar-se integrais impróprios de 1.ª espécie que se decomponham em *séries de integrais impróprios* ou em *séries de séries* de tais integrais, etc., etc.

NOTA IMPORTANTE. As considerações anteriores, todas de carácter elementar, conduzem a tipos de integrais sucessivamente mais complicados, mas obrigam, de cada vez, a uma nova teoria, embora análoga às anteriores. Há, assim, uma flagrante falta de unidade nessas considerações, o que torna desejável uma *teoria geral da integração,* que englobe todos esses casos particulares num conceito uno de integral. Ora, uma tal unificação é possível *no caso dos integrais absolutamente convergentes:* o *conceito de integral segundo Lebesgue* abrange todas hipóteses atrás consideradas (de integrais absolutamente convergentes) e outras, ainda, muito mais gerais.

Trataremos, mais adiante, do conceito de *integral de Lebesgue.*

3. Mudança de variáveis em integrais impróprios

Os métodos de decomposição e de integração por partes subsistem essencialmente para os integrais impróprios, como é fácil verificar recorrendo às anteriores definições e à FÓRMULA DE BARROW. Vejamos, agora, o que sucede quanto ao *método de substituição.*

Seja, por exemplo, f uma função real, definida num intervalo $[a, +\infty[$, com a finito, e consideremos outra função real $x = \varphi(t)$ monótona e continuamente derivável num intervalo $[a, T[$, com

$\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(T)=+\infty$, sendo α finito. Então, se for F uma primitiva de f, ter-se-á:

$$\int_a^u f(x)dx = F(u) - F(a) = \int_\alpha^\tau f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

para todo o $u>a$, com $\varphi(\tau)=u$.

Atendendo ao termo intermédio, vemos que, se o primeiro integral tende para um limite finito quando $u \to +\infty$, também o segundo integral tende para limite finito quando $\tau \to T$ (quer T seja finito ou infinito) e *reciprocamente*. O método de substituição é, pois, aplicável, e, analogamente, se reconhece que é ainda válido em qualquer outro caso em que intervenham integrais impróprios.

Pode assim acontecer, em particular, que um integral impróprio de 2.ª espécie seja transformado num de 1.ª espécie ou mesmo num *integral próprio* (*de Riemann*). Por exemplo, se, no integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

fizermos a mudança de variável $x=1/t$, com $0<t\leqslant 1$, virá (supondo o integral convergente):

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{f(1/t)}{t^2}\,dt.$$

Em particular, se f pode escrever-se na forma

$$f(x) \equiv \varphi(x)/x^\alpha,$$

com φ limitada e α positivo, o segundo integral será próprio, se for $\alpha \geqslant 2$, e será impróprio convergente, se for $1<\alpha<2$.

Analogamente, todo o integral do tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

será convertido num integral próprio ou impróprio de 1.ª espécie, pela substituição $x=\operatorname{tg} t$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\operatorname{tg} t)\sec^2 t\, dt.$$

4. Funções de EULER

Um exemplo notável de funções definidas por integrais impróprios são as *funções eulerianas de* 1.ª *e de* 2.ª *espécie*. Dão-se estes nomes, respectivamente, às funções assim definidas:

$$\mathrm{B}(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx,$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx.$$

Estudemos a primeira (também chamada *função beta*). O seu domínio de existência será constituído pelos pares de valores de u e v para os quais o integral existe. Se for ao mesmo tempo $u \geqslant 1$ e $v \geqslant 1$, a função integranda é contínua em $[0, 1]$ e, portanto, o *integral existe no sentido de Riemann*. Mas basta que seja $u < 1$ ou $v < 1$, para que a função integranda se torne infinita num dos extremos e o integral seja *impróprio de* 1.ª *espécie*. Em qualquer caso, podemos decompor o integral em dois por um ponto c entre 0 e 1, e estudar, separadamente, esses dois integrais. Quanto ao extremo inferior de integração, notemos que a função integranda é da forma

$$\frac{(1-x)^{v-1}}{x^{1-u}},$$

sendo o numerador uma função de x limitada em $[0, c]$, qualquer que seja v; então, se for $1-u<1$, ou seja, $u>0$, o integral entre 0 e c é absolutamente convergente; mas, se for $u \leqslant 0$, o integral é divergente, como facilmente se reconhece. Analogamente se vê que o integral entre c e 1 será convergente, se e só se for $v>0$. Em conclusão:

A função beta é definida nos pontos (u, v) *do plano tais que* $u>0$ *e* $v>0$.

Estudemos, agora, a segunda *função de Euler* (também chamada *função gama*). O integral que a define pode ser decomposto em dois: por exemplo, um entre 0 e 1, outro entre 1 e $+\infty$. Destes, o primeiro será próprio, se $t \geqslant 1$, impróprio (de 1.ª espécie), se $t<1$. Mas, tal como anteriormente, vê-se que o integral existe, se e só se $t>0$. Quanto ao integral de $x^{t-1}e^{-x}$ entre 1 e $+\infty$, as considerações que desenvolvemos no n.º 1, relativamente a funções integrandas com exponenciais, mostram imediatamente que o integral é absolutamente convergente, qualquer que seja o número real t. Assim, em conclusão:

A função Γ *é definida para* $t>0$.

Vejamos algumas propriedades destas funções. Comecemos por mostrar que

$$\Gamma(t+1)=t\Gamma(t) \qquad (\forall t>0). \tag{1}$$

Com efeito, tem-se, por definição:

$$\Gamma(t+1)=\int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx.$$

Aplicando a regra de integração por partes com

$$\begin{cases} u=x^t \\ v'=e^{-x} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u'=tx^{t-1} \\ v=-e^{-x} \end{cases}$$

obtem-se

$$\Gamma(t+1)=-[x^t e^{-x}]_0^{+\infty}+t\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$$

e, como o primeiro termo do 2.º membro é nulo, vem, finalmente, (1).

Seja, agora, n um número inteiro positivo. Aplicando sucessivamente a fórmula (1), vem

$$\Gamma(t+n)=(t+n-1)(t+n-2)\ \dots\ (t+1)t\Gamma(t), \tag{2}$$

fórmula esta muito importante, porque permite sempre reduzir o cálculo da função gama no caso em que $0<t<1$, e *existem tabelas da função gama para valores de t deste intervalo.* Por exemplo:

$$\Gamma(4{,}57)=3{,}57\times 2{,}57\times 1{,}57\times\Gamma(0{,}57).$$

Em particular, se $t=1$, deduz-se de (2) que

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)\ \dots\ 2\Gamma(1)$$

e, como

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=-\,[e^{-x}]_0^{+\infty}=1\,,$$

vem, finalmente,

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Note-se, ainda, que $\Gamma(0+1)=1=0!$

Assim, quando x é um número inteiro $\geqslant 0$, *a função* $\Gamma(x+1)$ *coincide com o factorial de* x; *é, pois, uma extensão, ao campo de todos os números reais* $x>-1$, *da função factorial, e, por isso mesmo, se escreve muitas vezes, para todo o* $x>-1$:

$$x!\ \textit{ou}\ \pi(x)\ \textit{em vez de}\ \Gamma(x+1)\,.$$

As *funções de Euler* intervêm em numerosas questões de matemática pura ou aplicada. Como já se disse, a função $\Gamma(x)$ encontra-se tabelada para valores de x no intervalo $]0,\ 1[$. Quanto à função beta, demonstra-se que

$$\mathrm{B}(x,\ y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

5. Integrais impróprios de funções vectoriais e de funções complexas

As noções de integrais impróprios de 1.ª e de 2.ª espécie estendem-se imediatamente ao caso em que a função integranda f toma os valores num espaço vectorial topológico *E,* localmente convexo e completo (em particular, num *espaço de Banach*).

As propriedades desses integrais, que continuam a ter sentido, generalizam-se sem qualquer dificuldade a este caso. Em particular, se E é um *espaço de Banach*, tem-se a seguinte propriedade, que reduz este caso ao das funções numéricas, atrás estudado:

Condição suficiente para que o integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

seja convergente, é que o seja o integral

$$\int_a^b \|f(x)\|dx,$$

onde os extremos a e b podem ser ambos finitos ou não. Nesta hipótese, o integral de f entre a e b diz-se absolutamente convergente.

Mais particularmente, ainda, E pode ser o espaço **C** dos números complexos, identificável a $\mathbf{R}^2$. Então, f é uma *função complexa de variável real* e, pondo

$$f_1(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad f_2(x) = \operatorname{Im} f(x),$$

facilmente se reconhece que:

O integral de f entre a e b existe, se e só se existem os integrais de f_1 e f_2 entre a e b, tendo-se, precisamente,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + i \int_a^b f_2(x)dx.$$

Como exemplo, vejamos que *a função Γ é prolongável ao conjunto dos números complexos z tais que* $\operatorname{Re} z > 0$ (semi-plano aberto).

Para isso, comecemos por notar que, para todo o número real $x > 0$ e todo o número complexo α, se tem

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} = e^{\log x \,.\, \operatorname{Re}\alpha} \,.\, e^{(\log x \,.\, \operatorname{Im}\alpha)i} = x^{\operatorname{Re}\alpha} \,.\, \exp\,[(\log x \,.\, \operatorname{Im}\alpha)i]$$

donde, *atendendo a que o segundo factor é sempre um número de módulo* 1:

$$\left| x^{\alpha} \right| = x^{\operatorname{Re}\alpha}.$$

Portanto, será, para todo o $t > 0$:

$$\left| t^{z-1} e^{-t} \right| = t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t}.$$

Isto permite-nos, atendendo ao estabelecido no n.º 4, concluir que *o integral*

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

é absolutamente convergente no semi-plano aberto $\operatorname{Re} z > 0$, *definindo aí, portanto, uma função de* z *que é um prolongamento da função* $\Gamma(x)$ (*atrás definida para* x *real positivo*) *e que é natural designar, agora, por* $\Gamma(z)$. Veremos, mais adiante, que esta função é holomorfa, aliás prolongável como função meromorfa a todo o plano, com pólos nos pontos $0, -1, -2, \ldots$.

Analogamente se reconhece que *a função beta é extensível aos pares de números complexos* z, w *tais que* $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$.

6. Convergência uniforme relativa a parâmetros contínuos

A noção de convergência uniforme, definida para sucessões de funções, estende-se de modo natural ao caso em que a variável natural n é substituída por uma variável contínua. Para fixar ideias, vamos considerar funções reais de variável real, mas as nossas considerações imediatamente se estendem a outros tipos de funções, por exemplo, a funções complexas de variável complexa.

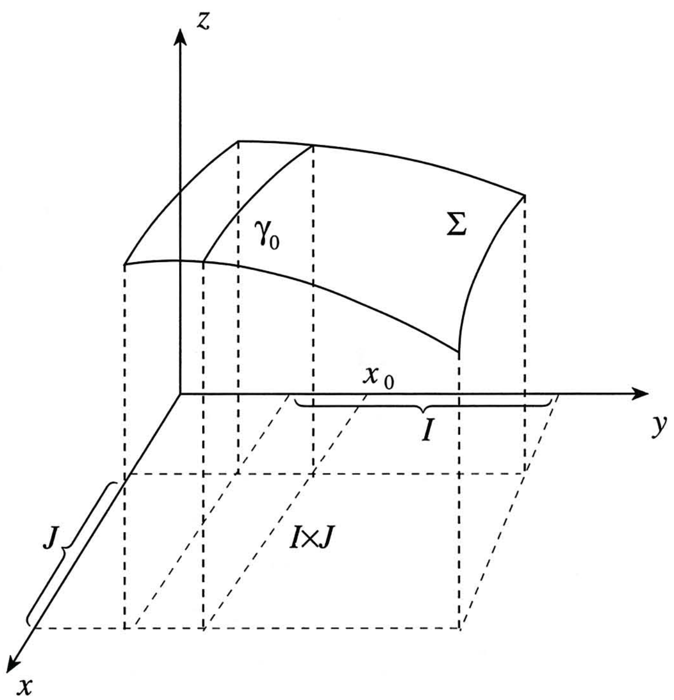
Uma sucessão de funções é definida fazendo corresponder a cada número natural n uma determinada função f_n (termo geral da sucessão); trata-se, pois, de uma aplicação $n \to f_n$ do conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais num conjunto de funções. Mas suponhamos, agora, que, a cada número real t, pertencente a um dado intervalo I, limitado ou ilimitado, se faz corresponder uma determinada função f_t definida num segundo intervalo J; teremos, assim, uma aplicação

$t \to f_t$ do intervalo I no conjunto F_J das funções definidas em J, ou seja, de uma *função definida em I, com os valores em* F_J. Se designarmos esta função ou aplicação por $\tilde{f}$, podemos escrever $\tilde{f}(t) = f_t$, para todo o $t \in I$, *mas é preciso não esquecer que, neste caso, os valores da função* $\tilde{f}$ *não são números mas sim funções* (*ou vectores de* F_J).

Por outro lado, se pusermos

$$f_t(x) = F(t, x), \text{ para todo o } t \in I \text{ e todo o } x \in J,$$

é claro que fica, assim, dada uma função real $F(t, x)$ das duas variáveis t, x, definida no rectângulo $I \times J$ do plano. A recíproca é também verdadeira: toda a função $F(x, y)$ das duas variáveis x, y, definida no rectângulo $I \times J$, determina uma aplicação $x \to F(x, y)$ de I em F_J, visto que, para cada valor numérico atribuído a x, situado em I, $F(x, y)$ se converte numa função real só de y, de domínio J.



Assim, as funções definidas em I com os valores em F_J *identificam-se às funções reais de duas variáveis definidas em* $I \times J$ (é claro que a escolha das letras, a usar no papel, de variáveis tem carácter arbitrário).

Estas considerações tornam-se mais intuitivas recorrendo à representação geométrica. Suponhamos a função $F(x, y)$ contínua;

então, a sua imagem geométrica é uma superfície Σ. A cada *número* $x_0 \in I$, atribuído a x em $F(x, y)$, corresponde uma *função* $F(x_0, y)$ definida em J, cujo gráfico é dado pela intersecção γ_0 de Σ com o plano $x = x_0$. Quando x varia em I, a curva γ correspondente descreve a superfície Σ.

Tornemos, agora, a usar a letra t como variável em I e a letra x como variável em J. Seja, ainda, f_t, para cada $t \in I$, uma função de domínio J (também se costuma dizer, neste caso, que f_t é uma *função definida* em J *e dependente do parâmetro* t). Seja, por outro lado, t_0 um ponto interior ou fronteiro de I, finito ou infinito. Posto isto:

DEFINIÇÃO 6.1. *Diz-se que f_t converge para uma função φ uniformemente sobre J, ao tender t para t_0, quando o extremo superior da função $|f_t(x) - \varphi(x)|$ de x no intervalo J tende para zero ao tender t para t_0; isto é, quando*:

$$\lim_{t \to t_0} (\sup_{x \in J} |f_t(x) - \varphi(x)|) = 0 .$$

Seguem-se, agora, vários teoremas, perfeitamente análogos aos que se estabelecem no caso das sucessões uniformemente convergentes. Suponhamos que f_t *converge para* φ *uniformemente sobre* J *quando* $t \to t_0$. *Nesta hipótese, verificam-se os dois seguintes factos*:

TEOREMA 6.1. *Se, para todo o $t \in I$, a função $f_t(x)$ é contínua sobre J, também a função limite $\varphi(x)$ é contínua sobre J.*

TEOREMA 6.2. *Se, para todo o $t \in I$, a função $f_t(x)$ é contínua sobre J, supondo $J = [a, b]$, tem-se*

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b f_t(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b (\lim_{t \to t_0} f_t(x))dx .$$

(CRITÉRIO DE PERMUTABILIDADE ENTRE OS SÍMBOLOS DE LIMITE E DE INTEGRAL).

As demonstrações destes dois teoremas são inteiramente análogas às que se costumam fazer no caso das sucessões. A única diferença está em que, em vez da variável inteira n, se apresenta, agora, a variável contínua t e, em vez do ponto $+\infty$, o ponto t_0, interior ou fronteiro a I, próprio ou impróprio (pode, em particular, ser $+\infty$, $-\infty$ ou simplesmente ∞).

Dos dois teoremas anteriores, deduz-se, por sua vez, o seguinte CRITÉRIO DE PERMUTABILIDADE ENTRE OS SÍMBOLOS DE LIMITE E DE DERIVADA:

TEOREMA 6.3. *Suponhamos verificadas as seguintes hipóteses:*
1) *para todo o* $t \in I$, *a função* $f_t(x)$ *admite derivada* $D_x f_t(x)$ *contínua sobre* J;
2) $D_x f_t(x)$ *converge uniformemente sobre* J *quando* $t \to t_0$;
3) *há, pelo menos, um ponto* x_0 *de* J *tal que* $f_t(x_0)$ *tende para um limite finito quando* $t \to t_0$.
Então, f_t *converge uniformemente sobre* J *para uma função* φ *quando* $t \to t_0$; *esta função* φ *ainda é derivável em* J, *tendo-se, precisamente*:

$$\lim_{t \to t_0} D_x f_t = D_x \varphi = D_x(\lim_{t \to t_0} f_t).$$

Com efeito, tem-se, em virtude da hipótese 1),

$$f_t(x) = f_t(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{d}{du} f_t(u)du, \qquad \forall t \in I, \quad x \in J.$$

Por passagem ao limite quando $t \to t_0$, vem, por força das hipóteses 2) e 3), aplicando o TEOREMA 6.2 e designando por c o limite de $f_t(x_0)$ quando $t \to t_0$:

$$\varphi(x) = c + \int_{x_0}^{x} \left(\lim_{t \to t_0} \frac{d}{du} f_t(u) \right) du, \qquad \forall x \in J.$$

Daqui, atendendo ao TEOREMA 6.1, deduz-se:

$$\varphi'(x) = \lim_{t \to t_0} \frac{d}{dx} f_t(x), \qquad \forall x \in J,$$

e que pode ainda escrever-se

$$\frac{d}{dx} (\lim_{t \to t_0} f_t(x)) = \lim_{t \to t_0} \frac{d}{dx} f_t(x), \qquad \forall x \in J.$$

Note-se que os teoremas anteriores podem apresentar-se com aspecto diferente, mudando as notações. Assim, por exemplo, pondo x no lugar de t, y no lugar de x e $f(x, y)$ no lugar de $f_x(y)$, a permutabilidade entre os símbolos de limite e de integral apresenta-se com o aspecto

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x, y)dy = \int_a^b (\lim_{x \to x_0} f(x, y))dy,$$

supondo que, para todo o $x \in I$, $f(x, y)$ *é uma função de* y *contínua sobre* $J = [a, b]$ *e que, quando* $x \to x_0$, $f(x, y)$ *converge uniformemente sobre* J *para uma função* $\varphi(y)$. Por sua vez, tem-se (TEOREMA 6.3):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{d}{dy} (\lim_{x \to x_0} f(x, y)),$$

supondo que:

1) *para todo o* $x \in I$, *a função* $f(x, y)$ *de* y *admite derivada*

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

contínua sobre J;

2) *quando* $x \to x_0$,

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

converge uniformemente sobre J;

3) *há, pelo menos, um ponto* y_0 *de* J *tal que* $f(x, y)$ *converge para um limite finito, quando* $x \to x_0$.

Um teorema sobre convergência uniforme, muito útil em certos casos da prática, é o seguinte:

TEOREMA DO LIMITE DUPLO. *Seja* $f(x, y)$ *uma função definida num rectângulo* $I \times J$ *e sejam* x_0, y_0, *pontos interiores ou fronteiros aos intervalos* I, J, *respectivamente. Se* $f(x, y)$ *tende para uma função* $L(y)$ *uniformemente sobre* J, *quando* $x \to x_0$, *e se* $L(y)$ *tende para um limite finito* L, *quando* $y \to y_0$, *então existe o limite de* $f(x, y)$ *quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *e tem-se, precisamente,*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} L(y) = \lim_{y \to y_0} [\lim_{x \to x_0} f(x, y)] .$$

Se, além disso, $f(x, y)$ tende para uma função $\lambda(x)$, pontualmente em I, quando $y \to y_0$, então $\lambda(x) \to L$ quando $x \to x_0$, sendo, portanto, permutáveis as duas passagens ao limite relativas a x e a y.

Demonstração. Quaisquer que sejam x, y em $I \times J$, tem-se:

$$(1) \qquad |f(x, y) - L| \leqslant |f(x, y) - L(y)| + |L(y) - L| .$$

Seja, agora, δ um número positivo qualquer. Em virtude da hipótese, existem números ρ e σ tais que

$$|f(x, y) - L(y)| < |\delta/2, \text{ quando } |x - x_0| < \rho , \qquad \forall y \in J,$$
$$|L(y) - L| < |\delta/2, \text{ quando } |y - y_0| < \sigma ,$$

supondo x_0, y_0 finitos. Mas daqui vem, atendendo a (1) e designando por ε o menor dos números ρ e σ:

$$|f(x, y) - L| < \delta, \text{ quando } |x - x_0| < \varepsilon \;\text{ e }\; |y - y_0| < \varepsilon ,$$

o que prova a primeira parte do teorema, *na hipótese de x_0, y_0, serem finitos*. Analogamente se prova o teorema na hipótese de uma, pelo menos, das constantes x_0, y_0, ser infinita.

Para demonstrar a segunda parte do teorema, basta atender à relação

$$|\lambda(x) - L| \leqslant |f(x, y) - L| + |\lambda(x) - f(x, y)| ,$$

observando que, *fixado um número y de J tal que* $|y - y_0| < \varepsilon$, existe um $\eta < \varepsilon$ tal que

$$|\lambda(x) - f(x, y)| < \delta \;\text{ e }\; |f(x, y) - L| < \delta ,$$

quando $|x - x_0| < \eta$, na hipótese de x_0, y_0, serem finitos (q.e.d.).

Note-se que o TEOREMA 6.1 *é um corolário deste.*

Funções com valores no espaço C_J.

Suponhamos $J=[a, b]$ *limitado* e designemos por C_J o espaço vectorial das funções reais contínuas em J, com a noção de norma considerada no Capítulo III:

$$\|f\| = \sup_{x\in J} |f(x)|, \quad \text{para} \quad f\in C_J.$$

(É claro que, neste caso, o supremo é atingido, sendo, portanto, um máximo). Suponhamos, agora, que, para cada $t\in I$, f_t é um vector de C_J, isto é, uma função contínua sobre J. Então, a correspondência $t\to f_t$ é uma função definida em I com os valores em C_J e a DEFINIÇÃO 6.1 pode apresentar-se com o seguinte aspecto mais simples:

Diz-se que f_t *converge para* φ *uniformemente sobre J,* ao tender t para t_0, quando

$$\lim_{t\to t_0} \|f_t - \varphi\| = 0.$$

Equivale isto ainda a dizer que, quando $t\to t_0$, a função f_t de t com valores em C_J (função que também podemos escrever sob a forma $\tilde{f}(t)$, como atrás foi indicado), tende para o vector φ, segundo a topologia desse espaço. Se, além disso, for precisamente $\varphi=f_{t_0}=\tilde{f}(t_0)$, a função $\tilde{f}(t)$ será *contínua no ponto* t_0. Posto isto, vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA 6.4. *Se $F(x, y)$ é uma função real contínua sobre $I\times J$, sendo x_0 um ponto qualquer de I, $F(x, y)$ converge para $F(x_0, y)$ uniformemente sobre J, quando $x\to x_0$. Por outros termos: $F(x, y)$ define uma função $\tilde{f}(x)$ de x em I com valores em C_J, que é contínua sobre I. A recíproca desta proposição também é verdadeira.*

Com efeito, como estamos a supor J compacto, se considerarmos um sub-intervalo compacto K de I que contenha x_0, o rectângulo $K\times J$ será compacto e, portanto, $F(x, y)$ uniformemente contínua sobre $K\times J$. Quer isto dizer que, a todo o $\delta>0$, corresponde um $\varepsilon>0$ tal que

$$|F(x, y) - F(x', y')| < \delta, \text{ quando } |x - x'| < \varepsilon \text{ e } |y - y'| < \varepsilon,$$

com $x, x' \in K$, $y, y' \in J$. Em particular, tem-se $x_0 \in K$ e a desigualdade $|y - y'| < \varepsilon$ é verificada, se $y' = y$; logo, virá, qualquer que seja $y \in J$:

$$|F(x, y) - F(x_0, y)| < \delta, \text{ quando } |x - x_0| < \varepsilon, \text{com } x \in K,$$

donde

$$\sup_{y \in J} |F(x, y) - F(x, y_0)| < \delta, \text{ quando } |x - x_0| < \varepsilon, \ (x \in K),$$

o que prova a primeira parte do teorema.

A segunda parte do teorema é uma consequência imediata do TEOREMA DE LIMITE DUPLO. Portanto:

ESCÓLIO. *Em virtude do* TEOREMA 6.4, *existe uma correspondência biunívoca* $F(x, y) \leftrightarrow \tilde{f}(x)$, *entre as funções numéricas* $F(x, y)$ *contínuas sobre* $I \times J$ *e as funções* $\tilde{f}(x)$ *com valores em* C_J *contínuas sobre* I.

TEOREMA 6.5. *Se* $F(x, y)$ *admite derivada parcial em ordem a* x *contínua em* $I \times J$, *a razão incremental*

$$\frac{F(x, y) - F(x_0, y)}{x - x_0}, \quad com \quad x, x_0 \in I, \quad x \neq x_0,$$

converge para $F'_x(x_0, y)$ *uniformemente sobre* J *quando* $x \to x_0$. *Por outros termos:* $F(x, y)$ *define, nesta hipótese, uma função* $\tilde{f}(x)$ *com valores em* C_J, *que é derivável em todo o ponto* x_0 *de* I, *segundo a topologia de* C_J.

Com efeito, se pusermos, para $x \neq x_0$:

$$(2) \qquad R(x, y) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} [F'_x(u, y) - F'_x(x_0, y)]\, du,$$

tem-se, como é fácil verificar:

$$(3) \qquad R(x, y) = \frac{F(x, y) - F(x_0, y)}{x - x_0} - F_x'(x_0, y).$$

Mas, em virtude da hipótese e do teorema anterior, $F_x'(u, y)$ tende para $F_x'(x_0, y)$ *uniformemente sobre* J, quando $u \to x_0$. Então, aplicando a (2) a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL, vê-se que $R(x, y)$ tende para zero uniformemente sobre J quando $x \to x_0$, o que, segundo (3), demonstra o teorema.

NOTA IMPORTANTE. Este teorema podia demonstrar-se mais simplesmente aplicando o TEOREMA DOS ACRÉSCIMOS FINITOS. Mas a demonstração anterior tem a vantagem de se poder adaptar imediatamente ao caso em que, em vez de uma variável real x, se tem uma variável complexa.

7. Integrais paramétricos

Integrais próprios paramétricos.

Seja $J = [a, b]$ limitado e suponhamos que, para cada $x \in I$, $f(x, y)$ é uma função de y integrável em J. Então, o integral

$$\int_a^b f(x, y)dy$$

será uma função da variável x que, neste caso, é costume chamar *parâmetro do integral,* para a distinguir da variável de integração y. Por isso, o integral diz-se *paramétrico* e define, como se vê, uma função de x no intervalo I. Na prática, o que interessa é saber se esta função é ou não contínua em dados pontos, se pode ser derivada permutando o símbolo de derivada com o de integral, etc., etc. Alguns critérios simples, muitas vezes usados, são os seguintes:

TEOREMA 7.1. *Se $f(x, y)$ é contínua sobre $I \times J$, a função*

$$\int_a^b f(x, y)dy$$

de x é contínua sobre I.

Com efeito, tem-se, nesta hipótese, em virtude dos TEOREMAS 6.4 e 6.2, para todo o $x_0 \in I$:

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x, y)dy = \int_a^b (\lim_{x \to x_0} f(x, y))dy = \int_a^b f(x_0, y)dy, \quad \text{com} \quad x \in I.$$

TEOREMA 7.2. *Se $f(x, y)$ admite derivada parcial em ordem a x contínua sobre $I \times J$, também a função*

$$\int_a^b f(x, y)dy$$

de x é continuamente derivável sobre I, tendo-se, precisamente: (1)

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y)dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)dy$$

(CRITÉRIO DE PERMUTABILIDADE DOS SÍMBOLOS DE DERIVADA E DE INTEGRAL).

Este teorema é, como logo se vê, consequência imediata dos TEOREMAS 6.5 e 6.3.

Quanto à permutabilidade entre as integrações relativas a duas variáveis, uma condição suficiente é que $f(x, y)$ seja integrável sobre $I \times J$ (por exemplo, contínua), pois que, neste caso, como é sabido, o integral duplo se reduz a duas integrações simples sucessivas, em ordem arbitrária:

$$\iint_{I \times J} f(x, y)dxdy = \int_I dx \int_J f(x, y)dy = \int_J dy \int_I f(x, y)dx\,.$$

Integrais impróprios paramétricos.

Seja, por exemplo, $J = [c, +\infty[$ com c finito, e suponhamos que, para cada $x \in I$, o integral

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

(1) Diz-se que uma função é *continuamente derivável* sobre um intervalo, quando admite derivada contínua sobre esse intervalo.

é convergente. Então, este integral define uma função de x no intervalo I, tendo-se, por definição:

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \lim_{u \to +\infty} \int_c^u f(x, y)dy.$$

Pois bem:

DEFINIÇÃO 7.1. *Diz-se que o integral*

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

é uniformemente convergente no intervalo I, se a função

$$\Phi(x, u) = \int_c^u f(x, y)dy$$

converge uniformemente em I quando $u \to +\infty$ *sobre J.*

Convém notar que se trata, aqui, de uma noção perfeitamente análoga à de série uniformemente convergente. Basta substituir a variável real y pela variável inteira n e o integral pelo somatório, para recair, neste caso, já anteriormente considerado:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{N \to +\infty} S_N(x).$$

O CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA UNIFORME DE WEIERSTRASS estende-se imediatamente a este caso:

TEOREMA 7.3. *Condição suficiente para que o integral*

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

seja uniformemente convergente em I é que exista uma função real $\alpha(y)$, *só de y, tal que o integral*

$$\int_c^{+\infty} \alpha(y)dy$$

seja convergente e se tenha:

$$|f(x, y)| \leqslant \alpha(y), \qquad \forall x \in I, y \geqslant c.$$

A demonstração é formalmente idêntica à que se costuma fazer para as séries.

Aplicando, agora, os TEOREMAS 6.1 e 7.1, demonstra-se também, como no caso das séries:

TEOREMA 7.4. *Se o integral*

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

é uniformemente convergente em I e se a função $f(x, y)$ é contínua sobre $I \times J$, a função definida pelo integral também é contínua sobre I.

Por sua vez, aplicando os TEOREMAS 6.3 e 7.2, obtém-se o seguinte CRITÉRIO DE PERMUTABILIDADE DOS SÍMBOLOS DE DERIVADA E DE INTEGRAL:

TEOREMA 7.5. *Suponhamos verificadas as seguintes hipóteses:*
1) *a função $f(x, y)$ admite derivada parcial em ordem a x, contínua em $I \times J$;*
2) *o integral*

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

é convergente, pelo menos, para um valor $x_0 \in I$;
3) *o integral*

$$\int_c^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)dy$$

é uniformemente convergente em I.
Então, a função de x definida pelo primeiro integral será também continuamente derivável em I, tendo-se:

$$\frac{d}{dx}\int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \int_c^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)dy.$$

Com efeito, uma vez verificada a hipótese 1), se pusermos

$$\Phi(x, u) = \int_c^u f(x, y)dy, \qquad \forall u \geqslant c,$$

tem-se, em virtude do TEOREMA 7.2:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, u) = \int_c^u \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)dy.$$

Por outro lado, a hipótese 2) equivale a dizer que existe, pelo menos, um ponto $x_0 \in I$ tal que $\Phi(x_0, u)$ tende para um limite finito quando $u \rightarrow +\infty$. Finalmente, a hipótese 3) equivale a dizer que $D_x\Phi(x, u)$ converge para uma função de x, *uniformemente sobre* I, quando $u \rightarrow +\infty$. Então, aplicando o TEOREMA 6.3, vem

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{u\rightarrow+\infty} \Phi(u, x)\right) = \lim_{u\rightarrow+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Phi(u, y),$$

o que, pela definição de integral entre c e $+\infty$, equivale à tese do teorema.

Quanto à permutabilidade das integrações relativas a duas variáveis, é fácil ver, aplicando o TEOREMA 6.2, que:

TEOREMA 7.6. *Se I é um intervalo limitado* $[a, b]$, *tem-se:*

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} F(x, y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^b F(x, y)dx,$$

desde que, para todo o $y \geqslant c$, $F(x, y)$ seja uma função de x contínua sobre I e que o integral impróprio do primeiro membro seja uniformemente convergente sobre I.

Este teorema é análogo ao da integração das séries termo a termo, sendo, agora, a série substituída pelo integral entre c e $+\infty$.

Porém, quando I é, tal como J, um intervalo ilimitado, o critério de permutabilidade das integrações complica-se. O caminho talvez mais simples para obter uma condição suficiente de permutabilidade, que seja aplicável na maioria dos casos da prática, é recorrer ao conceito de *integral duplo impróprio.* Por exemplo, ter-se-á, por definição:

$$\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} F(x, y)dxdy = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ v\to+\infty}} \int_a^u\int_c^v F(x, y)dxdy,$$

quando a função F é integrável à Riemann em todo o rectângulo $a \leqslant x \leqslant u$, $c \leqslant y \leqslant v$, *e quando, além disso, existe e é finito o limite do segundo membro.*

Designemos este limite por S. Quer isto dizer que, para cada número $\delta > 0$, existe um outro número $R > 0$ tal que se tem

$$\left| S - \int_a^u\int_c^v F(x, y)dxdy \right| < \delta,$$

desde que seja *ao mesmo tempo* $u > R$ e $v > R$.

Prova-se, facilmente, que, *se existe o integral duplo impróprio de* $|F(x, y)|$, *também existe o de* $F(x, y)$, dizendo-se, então, que este é *absolutamente convergente.*

Também se demonstra o seguinte importante teorema:

TEOREMA 7.7. *Se o integral duplo*

$$\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} F(x, y)dxdy$$

é absolutamente convergente, pode calcular-se mediante duas integrações simples sucessivas, em ordem arbitrária: isto é, tem-se:

$$\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} F(x, y)dxdy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} F(x, y)dy =$$

$$= \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} F(x, y)dx.$$

Em certos casos, o TEOREMA DO LIMITE DUPLO (n.º 6) permite estabelecer a convergência dum integral duplo impróprio e a sua redução a dois integrais simples.

Um CRITÉRIO PARTICULAR DE CONVERGÊNCIA dos integrais duplos impróprios, semelhante aos que se usam para integrais simples, é o seguinte:

Se existem constantes M, α, β tais que, para *$x>c$ e $y>a$, se tenha*

$$|F(x,y)|<\frac{M}{x^{\alpha}y^{\beta}},\ \textit{com } M \textit{ finito, } \alpha>1 \ \textit{ e } \ \beta>1,$$

sendo $F(x,y)$ contínua, o integral

$$\int_{c}^{+\infty}\int_{a}^{+\infty}F(x,\,y)dx\,dy$$

é absolutamente convergente e, portanto, redutível a duas integrações simples sucessivas em ordem arbitrária.

A demonstração é análoga à do TEOREMA 1.1.

Teremos também ocasião de utilizar o seguinte teorema:

TEOREMA 7.8. *Se os integrais*

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx \qquad \text{e} \qquad \int_{c}^{+\infty}g(y)dy$$

são absolutamente convergentes, com f e g contínuas, também o integral

$$\int_{a}^{+\infty}\int_{c}^{+\infty}f(x)g(y)dx\,dy$$

é absolutamente convergente, e tem-se:

$$\left[\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\right].\left[\int_{c}^{+\infty}g(y)dy\right]=\int_{a}^{+\infty}\int_{c}^{+\infty}f(x)g(y)dx\,dy.$$

Demonstração. Suponhamos verificada a hipótese. Então, a função $F(x,y)\equiv f(x)g(y)$ é contínua para $x\geqslant a$, $y\geqslant c$, e o mesmo sucede com a função $|F(x,y)|$. Ora, se pusermos para todo o número real $X>a$:

$$k=\int_{a}^{X}f(x)dx,$$

virá, para todo o número real $Y>c$:

$$k\int_c^Y g(y)dy = \int_c^Y kg(y)dy,$$

ou seja,

$$(1) \qquad \left[\int_a^X f(x)dx\right].\left[\int_c^Y g(y)dy\right] = \int_c^Y\left[\int_a^X f(x)dx\right]g(y)dy$$

$$= \int_c^Y dy\int_a^X f(x)g(y)dx$$

$$= \int_a^X\int_c^Y f(x)g(y)dxdy$$

e, analogamente, para os módulos das funções integrandas. Ter-se-á, pois, sempre

$$\int_a^X\int_c^Y |f(x)g(y)|dxdy = \int_a^X |f(x)|dx\,.\int_c^Y |g(y)|dy$$

$$\leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|dx\,.\int_c^{+\infty} |g(y)|dy.$$

Daqui resulta que, quando $X \to +\infty$ e $Y \to +\infty$, o primeiro integral tende para um limite finito, o que prova a primeira parte do teorema.

A segunda parte decorre da primeira e das igualdades (1), com a aplicação do TEOREMA 7.7 (q.e.d.).

É fácil ver que o teorema anterior se pode enunciar mais geralmente, supondo f e g *integráveis à Riemann* nos intervalos $[a, X]$ e $[c, Y]$ considerados. Aliás, ao tratar do *integral de Lebesgue*, este mesmo teorema será consideravelmente generalizado. Também apresentaremos, então, outros critérios de convergência para integrais múltiplos impróprios.

Outros tipos de integrais impróprios paramétricos.

Os resultados anteriores estendem-se, *mutatis mutandis,* aos outros tipos de integrais impróprios de 1.ª e de 2.ª espécie atrás considerados, bem como aos integrais que se exprimem como somas de um número finito ou numerável de integrais desses tipos. As demonstrações são inteiramente análogas.

Todas as precauções indicadas são indispensáveis, para não cair em erro. Assim, há casos da prática em que não é lícito inverter a ordem das integrações (não existindo, então, o integral duplo). Por exemplo, tem-se, como é fácil verificar

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

É claro que se trata, aqui, de integrais impróprios de 1.ª espécie.

Caso das funções complexas e dos parâmetros complexos.

Nas considerações anteriores, para comodidade de exposição, considerámos sistematicamente funções reais de variáveis reais. Mas os teoremas indicados estendem-se imediatamente, como é fácil verificar, ao caso de funções complexas de variável ou de variáveis reais, e, ainda, ao caso de funções que dependem de um ou mais parâmetros complexos.

Nestes casos, faz-se, geralmente, uso do seguinte teorema, que continua a ser válido e permite reduzir o estudo do integral aos casos anteriores:

Se o integral

$$\int_I |f(x)| dx$$

é convergente, também o integral

$$\int_I f(x) dx$$

é convergente (dizendo-se, então, absolutamente convergente) e tem-se:

$$\left|\int_I f(x)dx\right| \leqslant \int_I |f(x)|dx\,.$$

(Designa-se, aqui, por *I*, evidentemente, o intervalo de integração, limitado ou ilimitado).

Exemplos – 1) Consideremos o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tz}}{\sqrt{t}}\,dt$$

dependente do parâmetro *complexo* z. Este integral é decomponível nos dois integrais impróprios

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{e^{-tz}}{\sqrt{t}}\,dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tz}}{\sqrt{t}}\,dt,$$

respectivamente, de 1.ª e de 2.ª espécie. Ora, se pusermos $z = x + iy$, com x e y reais, tem-se $e^{-zt} = e^{-xt}.\,e^{-ity}$, e portanto:

$$|e^{-zt}| = e^{-xt} = e^{-t\mathrm{Re}z}, \quad \forall t > 0,$$

visto ty ser real. Deste modo, o primeiro dos integrais (2) será absolutamente convergente para todo o z complexo, visto que o módulo da função integranda é igual a $e^{-xt}/\sqrt{t}$, e o integral desta função entre 0 e 1 é convergente para todo o valor real de x, como facilmente se verifica. Quanto ao segundo dos integrais (2), tendo em vista o que se disse no n.º 1 sobre exponenciais, imediatamente se reconhece que é absolutamente convergente, se e só se $x > 0$. *Assim, o integral proposto será absolutamente convergente para os valores de z tais que* $\mathrm{Re}z > 0$, *e só para esses valores* (cujo lugar geométrico é o semi-plano à direita do semi-eixo imaginário, excluído este eixo).

Posto isto, observemos que a função integranda admite derivada parcial em ordem ao parâmetro:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-tz}\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = -\sqrt{t}\,e^{-tz}$$

que é manifestamente contínua para $t \geqslant 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. Além disso, fixado *arbitrariamente* um número $\alpha > 0$, tem-se:

$$|-\sqrt{t}\, e^{-tz}| \leqslant \sqrt{t}\, e^{-\alpha t}, \qquad \text{desde que } \operatorname{Re} z \geqslant \alpha.$$

Portanto, segundo o CRITÉRIO DE WEIERSTRASS, o integral

$$-\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-tz} dt$$

é uniformemente convergente no semi-plano $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha$ e assim, aplicando o CRITÉRIO DE PERMUTABILIDADE ENTRE OS SÍMBOLOS DE DERIVADA E DE INTEGRAL IMPRÓPRIO, vem

$$\frac{d}{dz} \int_0^{+\infty} e^{-tz} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-tz} dt,$$

no semi-plano $\operatorname{Re} z > 0$, visto que α é *qualquer* número positivo. Em particular, reconhecemos que *a função de z definida por este integral é holomorfa no semi-plano* $\operatorname{Re} z > 0$.

2) Analogamente se reconhece que a função de z

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} z^{t-1} e^{-t} dt$$

é holomorfa no semi-plano $\operatorname{Re} z > 0$. Prova-se, além disso, que *tal função se pode prolongar analiticamente a todo o plano, privado dos pontos* $-1, -2, \ldots,$ *que são pólos da função analítica global assim definida.*

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

CAP. IV – **Fundamentos da teoria das funções analíticas**

CAP. V – **Revisões e complementos sobre integrais impróprios e sobre integrais paramétricos**

CAP. VI – **Método dos resíduos**