II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

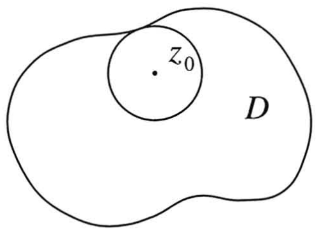
$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência (1).

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[1] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[2]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1. Números complexos

Como se sabe, todo o número complexo se pode representar sob a *forma algébrica*

$$a + bi,$$

sendo a e b números reais e sendo i uma das raízes da equação $x^2 = -1$.

Dois números complexos $a+bi$ e $c+di$ (com a, b, c, d reais) são *iguais*, se, e só se, $a = c$ e $b = d$.

Em particular, pode acontecer que se tenha $b=0$ e então o número complexo $a + bi$ reduz-se ao número real a.

Se $b \neq 0$, o número $a+bi$ não é real e diz-se então *imaginário* (*imaginário puro*, se for ao mesmo tempo $a=0$).

A *parte real* a e o *coeficiente* b *da parte imaginária* do número complexo $z = a + bi$ costumam ser designadas, respectivamente, pelas notações $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$(1):

$$\operatorname{Re} z = a, \qquad \operatorname{Im} z = b.$$

(1) Também se usam as notações $\mathfrak{R}z$ e $\mathfrak{I}z$, com $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{I}$ góticos ou manuscritos.

Pelo que se viu, o conjunto dos números reais (que se designa por $\mathbb{R}$) é uma parte do conjunto dos números complexos (que se designa por $\mathbb{C}$), isto é, tem-se

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

(O sinal $\subset$ lê-se "contido em"). Mas não se tem $\mathbb{R} = \mathbb{C}$ e os elementos de $\mathbb{C}$ não pertencentes a $\mathbb{R}$ são, precisamente, os números chamados *imaginários*.

No conjunto $\mathbb{C}$ estão definidas uma adição e uma multiplicação.

Adição. A soma dos números $a + bi$ e $c + di$ é, como sabemos, o número

$$(a + c) + (b + d)i.$$

Propriedades formais. A adição em $\mathbb{C}$ é:

1. *Sempre possível e unívoca*;
2. *Associativa*: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. *Comutativa*: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
4. *Reversível*: dados dois números complexos α e β é sempre possível determinar um e um só complexo ξ tal que

$$\beta + \xi = \alpha.$$

(Este número ξ é denominado *diferença entre* α e β e representa-se por $\alpha - \beta$; se $\alpha = a + bi$ e $b = c + di$, tem-se $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i$).

As propriedades enunciadas podem resumir-se, dizendo que o conjunto $\mathbb{C}$ é um *grupo comutativo* relativamente à adição (rever a noção de grupo).

Multiplicação. Recordemos que o produto de dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ é o número

$$(ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Propriedades formais. A multiplicação em **C** é:

1.ª *Sempre possível e unívoca*;

2.ª *Associativa*: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;

3.ª *Comutativa*: $\alpha\beta = \beta\alpha$;

4.ª *Reversível*: excluído o zero como divisor, isto é, dados dois números complexos $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, *sendo* $\beta \neq 0$, existe sempre um e um só número complexo ξ tal que

$$\xi\beta = \alpha,$$

tendo-se precisamente

$$\xi = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}\, i.$$

(Este número ξ é chamado o *quociente de* α *por* β e representa-se por $\frac{\alpha}{\beta}$, por α/β ou por $\alpha : \beta$).

Em resumo: o conjunto **C** é um *semi-grupo comutativo* em relação à multiplicação e, se excluirmos de **C** o zero, será mesmo um *grupo* (*comutativo*) relativamente à mesma operação.

Há, finalmente, outra propriedade a considerar quando associamos a adição e a multiplicação:

5. *A multiplicação é distributiva a respeito da adição*: isto é, tem-se sempre

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Os factos anteriores resumem-se dizendo que **C** é um *corpo comutativo.* Com efeito:

1) É grupo comutativo a respeito da adição;

2) Excluído o zero, é grupo comutativo a respeito da multiplicação;

3) A multiplicação é distributiva a respeito da adição.

Também o conjunto **R** é, como sabemos, um corpo comutativo. Como se tem $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, e as operações de adição e multiplicação definidas em **C** concordam com as mesmas operações anteriormente definidas em **R**, podemos dizer que **R** é um *sub-corpo* de **C** ou que **C** é uma *extensão* (*algébrica*) de **R**.

Esta extensão de **R** foi construída com o fim de tornar sempre possível a extracção de raízes quadradas (que era impossível em **R** com radicando negativo). Podemos mesmo dizer que **C** é o mais pequeno corpo que contém **R** e permite tornar sempre possível a extracção de raízes quadradas (bem como extracções de raízes de qualquer outro índice).

Recordemos ainda que no conjunto **R** se encontram definidas não só operações, mas também uma relação de ordem expressa pelo sinal $<$. Chama-se *relação de ordem* toda a relação binária que seja transitiva e tricotómica[(1)].

Com efeito, em **R**, a relação $<$ é:

1) *Transitiva*: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$[(2)];

2) *Tricotómica*: dados dois números reais *a, b,* verifica-se sempre *uma*, e *uma só*, das três seguintes hipóteses:

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b.$$

Além disso, a relação de ordem $<$, no corpo **R**, é compatível com a adição, isto é, tem-se

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$

o que se exprime dizendo que a adição em **R** é *monótona.* Quanto à multiplicação em **R**, há apenas *monotonia parcial,* isto é:

Se $a < b$, *tem-se* $ac < bc$, $ac > bc$ *ou* $ac = bc$, *conforme* $c > 0$, $c < 0$ *ou* $c = 0$.

---

(1) Segundo certos autores, o conceito de relação de ordem é diferente e mais geral.

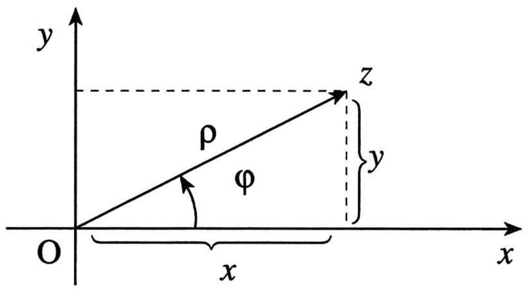
(2) O símbolo lógico $\Rightarrow$ (de *implicação*) lê-se "implica" ou "se ... então" (antepondo o "se" ao primeiro membro). O símbolo $\wedge$ (de *conjunção* ou *produto lógico*) lê-se "e".

Ora, no corpo **C**, ao contrário do que sucede em **R**, já não é possível definir uma relação de ordem que seja compatível com a adição e que tenha, portanto, qualquer interesse. Pode, no entanto, definir-se relação de ordem entre os módulos dos números complexos, visto esses serem números reais positivos.

2. Representação geométrica

Recordemos que há uma correspondência biunívoca entre os pares ordenados de números reais (x, y) e os números complexos $z = x + iy$:

$$z = x + iy \leftrightarrow (x, y).$$



Mais até: uma das maneiras usuais de introduzir os números complexos consiste, precisamente, em apresentá-los como pares ordenados de números reais: assim, o número complexo $x + iy$ é pura e simplesmente identificado ao par ordenado (x, y) escrevendo-se:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi.$$

Não esqueçamos, porém, que há diversas *interpretações* do conjunto **C** todas isomorfas entre si, e todas igualmente aceitáveis.

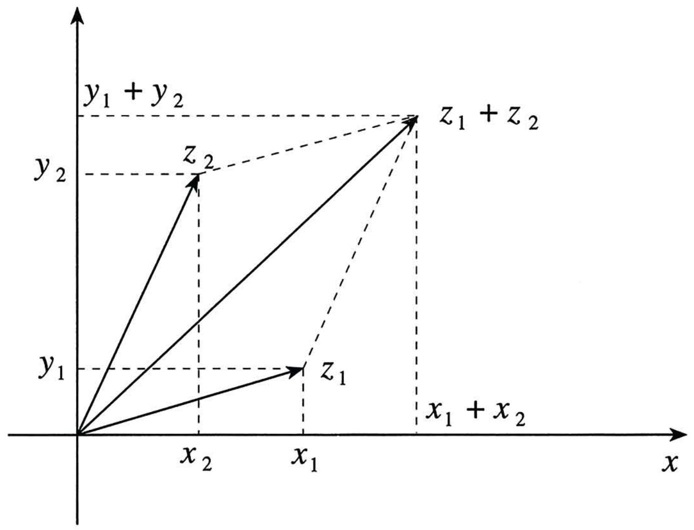
Recordemos ainda que, uma vez fixado um referencial cartesiano no plano, se estabelece uma correspondência biunívoca $(x, y) \leftrightarrow P$ entre os pares ordenados (x, y) de números reais e os pontos do plano. Logo, ficará assim definida, por transitividade, uma correspondência biunívoca,

$$z = x + iy \leftrightarrow P,$$

entre os números complexos z e os pontos P do plano (euclideano). A parte real e o coeficiente de i do número z serão, respectivamente, a abcissa e a ordenada do ponto P que o representa (chamado *imagem geométrica* ou, impropriamente, *afixo* de z).

Recordemos, finalmente, que os pontos P do plano correspondem biunivocamente aos respectivos vectores de posição $\vec{u} = P - O$. Assim, encontramos uma segunda representação geométrica dos números complexos, que é muito cómoda para diversos fins, como passamos a rever.

Adição. A adição dos números complexos traduz-se pela adição dos vectores do plano que os representam.

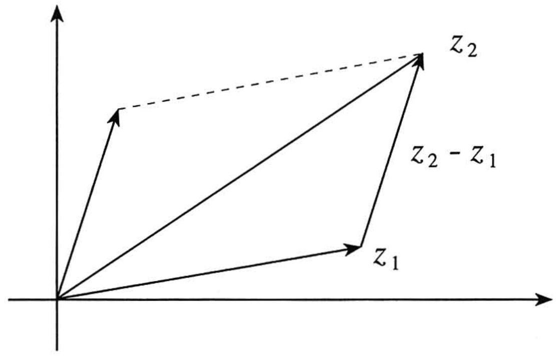


$$z_1 = x_1 + iy_1, \; z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Subtracção. A diferença $z_2 - z_1$ é representada pela diferença entre o vector que representa z_2 e o vector que representa z_1.



Chama-se *módulo* dum número complexo $z = x + iy$ ao módulo ρ do vector que o representa. O módulo de z é designado pela notação $|z|$. Assim, por definição:

$$|z| = \rho = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Chama-se *argumento* de z à medida (em radianos) do ângulo que o vector representativo de z forma com o semi-eixo positivo dos *xx*, tomando para sentido positivo o contrário ao dos ponteiros dum relógio (sentido *anti-horário*). Como sabemos, essa medida é expressa por uma infinidade de valores φ, diferentes entre si por múltiplos de 2π; chamaremos *argumento reduzido* de z ao valor de φ que verifica a condição

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi\,.$$

Para calcular o argumento reduzido de z pode usar-se qualquer das fórmulas

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\rho}\,, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho}\,.$$

Mas uma só destas fórmulas é insuficiente para determinar φ, no intervalo $[0, 2\pi[$. Assim, a primeira dá para φ dois valores que diferem de π. Porém, a ambiguidade desaparece atendendo aos sinais de x e y, que indicam o quadrante onde se encontra.

O argumento de z designa-se pela notação

$$\arg z$$

e, salvo indicação expressa em contrário, subentende-se que se trata do argumento reduzido.

3. Representação trigonométrica dos números complexos

Das fórmulas anteriores, vem

$$x = \rho \cos \varphi\,, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

e, portanto,

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

que é a *representação trigonométrica do número complexo z.*

Assim, a passagem da representação algébrica para a representação trigonométrica dos números complexos corresponde à substituição das coordenadas cartesianas x, y pelas coordenadas polares ρ, φ.

O *critério de igualdade* nesta forma já não é tão simples como na forma algébrica.

Tem-se:

$$\rho_1(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2),$$

se e só se

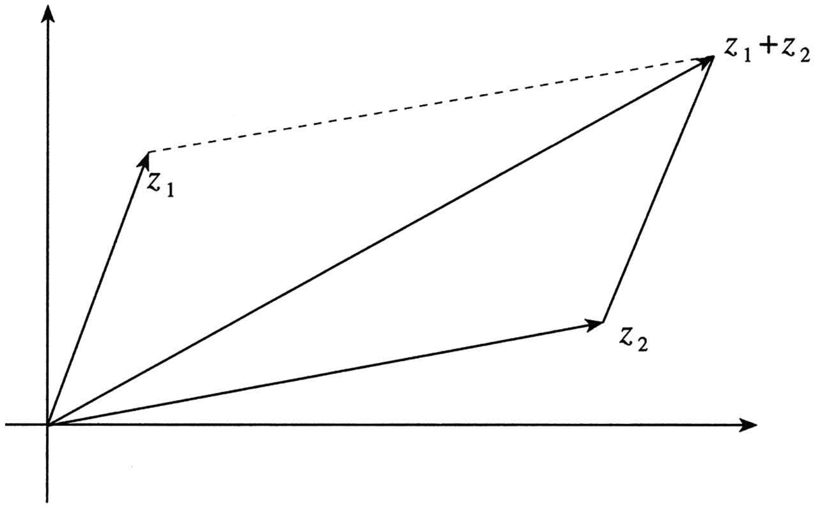
$$\rho_1 = \rho_2 \quad \text{e} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi\,,$$

sendo k um número inteiro relativo qualquer.

Quanto à *adição*, a representação trigonométrica não oferece vantagem apreciável. Há, no entanto, que recordar a relação entre o módulo da soma e os módulos das parcelas

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

extensível a mais de duas parcelas, em número finito e *fundamental para toda a Análise Complexa.* Esta relação, que se pode demonstrar rigorosamente por via analítica, é traduzida geometricamente por um teorema da geometria euclideana: “Em qualquer triângulo, um lado não pode exceder a soma dos outros dois”.



Mas já para a *multiplicação* a representação é particularmente cómoda. Efectuando o produto algébrico de

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1) \text{ por } z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2),$$

facilmente se chega à relação

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Assim:

1) *O módulo do produto é igual ao produto dos módulos dos factores*

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

2) *O argumento do produto é igual à soma dos argumentos dos factores*

$$\arg (z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2{}^{(1)}.$$

Em resumo: a função "módulo" transforma o produto em produto e a função "argumento" transforma o produto em soma (a menos de um múltiplo de 2π).

Este resultado estende-se ao caso de mais de dois factores (em número finito) e, em particular, ao das potências:

$$|z^n| = |z|^n \quad , \quad \arg z^n = n \arg z^{(1)}.$$

Da regra da multiplicação deduz-se a da divisão:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2{}^{(1)},$$

supondo $z_2 \neq 0$.

Note-se que estas fórmulas relativas aos módulos são igualmente fundamentais para a Análise Complexa.

Finalmente, da regra da potência (1.ª FÓRMULA DE MOIVRE) deduz-se a importante 2.ª FÓRMULA DE MOIVRE que resolve o problema da radiciação.

Dado z, procuremos w tal que

$$w^n = z.$$

Pondo

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \quad w = r(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega),$$

deverá ser

$$r^n = \rho \quad \text{e} \quad n\omega = \varphi + 2k\pi$$

e, portanto,

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \quad (\text{raiz} \geq 0), \\ \omega = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}. \end{cases}$$

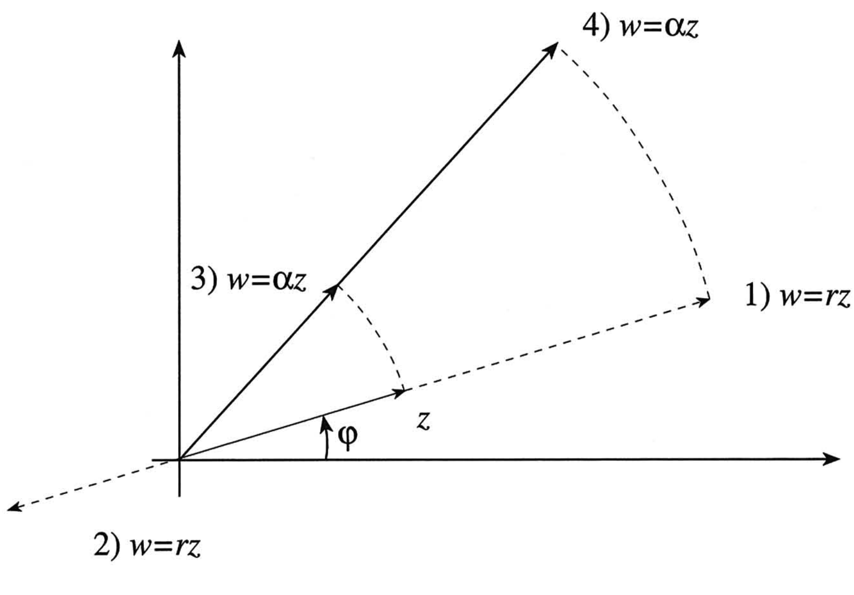
(1) Naturalmente, a igualdade expressa nesta fórmula deve ser interpretada a menos de um múltiplo de 2π.

Como se sabe, apesar de k assumir uma infinidade de valores inteiros, vêm para ω apenas n valores distintos, no intervalo $[0,2\pi[$, correspondentes aos valores 0, 1, 2, ..., $n-1$ de k. *Assim, todo o número complexo* $z \neq 0$ *admite* n raízes distintas de índice n (se $z = 0$, há apenas a raíz múltipla $z = 0$). Fica deste modo provado o que se disse logo de início: no corpo **C** a extracção de raízes de índice n, qualquer, é uma operação sempre possível (mas não unívoca).

4. Interpretação geométrica da multiplicação

Consideremos a relação $w = \alpha z$ em que $\alpha = r\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ é um número complexo fixo e $z = \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ um número complexo variável. Esta relação faz corresponder a cada ponto z do plano um determinado ponto w do plano; define, pois, uma transformação geométrica[1].

1) Se $\omega = 0$, α é um número real positivo. Temos apenas de multiplicar o módulo ρ de z por r. A transformação geométrica é, como se vê, uma *homotetia directa* de razão r e centro zero.



(1) Esta transformação do conjunto **C** sobre si mesmo será biunívoca se (se só) for $\alpha \neq 0$. Das considerações seguintes exclui-se a hipótese $\alpha = 0$.

2) Se $\omega = \pi$, α é um número real negativo. A transformação geométrica é uma *homotetia inversa* de centro zero e razão r.

3) Se $r = 1$ e ω qualquer, então $|z|$ fica inalterado e o argumento passa de φ a $\omega + \varphi$. A transformação geométrica é, portanto, uma *rotação* em torno da origem.

4) No caso geral temos uma homotetia seguida de uma rotação (transformação de *semelhança* que deixa fixa a origem).

Consideremos agora, mais geralmente, transformações do tipo

$$w = \alpha z + \beta.$$

Já vimos como se traduz o produto por α. Por sua vez, a adição de β traduz-se numa *translação*, definida pelo vector representativo de β. Portanto, a referida transformação é uma *homotetia seguida de uma rotação e de uma translação*, portanto, uma *semelhança* (que não deixa geralmente fixa a origem).

Porém, estas semelhanças são directas, isto é, não mudam a face do plano. Pelo contrário, a transformação definida pela fórmula

$$w = \bar{z}$$

em que $\bar{z} = x - iy$ é o conjugado de $z = x + iy$, é uma simetria em relação ao eixo dos xx, portanto, uma igualdade inversa.

5. Outro tipo de interpretação geométrica dos números complexos

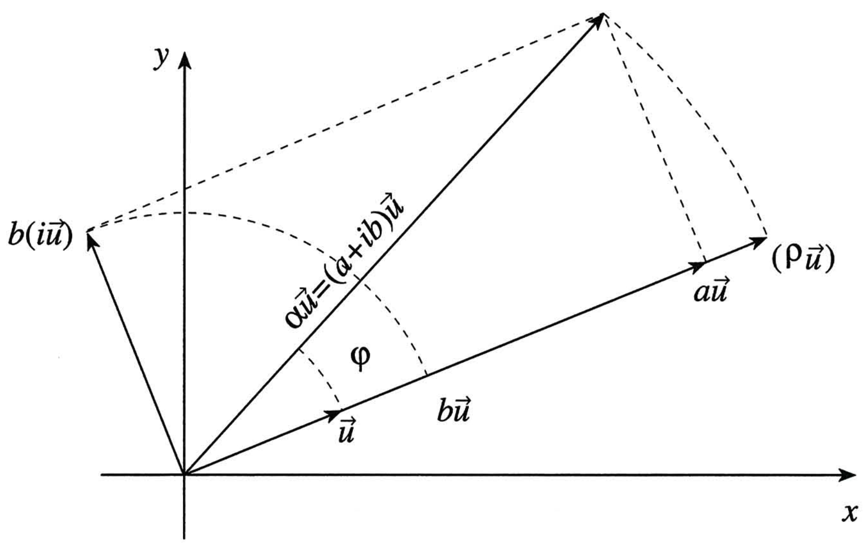
Já vimos que a transformação geométrica definida pela função

$$w = \alpha z,$$

com $\alpha = r\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, consiste na homotetia de centro 0 e razão r, seguida da rotação de amplitude φ em torno da origem. Vimos, por outro lado, que o número $z = x + iy$ pode ser representado pelo vector $\vec{u}$ do plano, de componentes x, y. Daqui nasceu, naturalmente, a seguinte

DEFINIÇÃO. *Chama-se produto de um número complexo* α *por um vector* $\vec{u}$ *do plano, e representa-se por* $\alpha\vec{u}$, *o vector* $\vec{v}$ *do plano que se obtém multiplicando* $\vec{u}$ *pelo número real* $|\alpha|$ *e imprimindo a* $|\alpha|\vec{u}$ *uma rotação de amplitude igual a* $\arg\alpha$ (*tomando para positivo o sentido anti-horário*).

Assim nos aparece uma nova interpretação geométrica dos números complexos, que muito interessa aos físicos e aos técnicos, nomeadamente aos electrotécnicos: os números complexos podem, deste modo, ser considerados como *operadores* sobre vectores do plano.



Em particular, o vector $i\vec{u}$ será o que se obtém fazendo rodar $\vec{u}$, de $\pi/2$ radianos no sentido positivo; o número i será, então, identificado a essa operação, isto é, a essa rotação, e o seu quadrado será tal que

$$i^2\vec{u} = i(i\vec{u}) = -\vec{u} = (-1)\vec{u},$$

o que fornece uma interpretação intuitiva da relação $i^2 = -1$.

Dum modo geral, sendo $a = \operatorname{Re}\alpha$ e $b = \operatorname{Im}\alpha$, tem-se, como é fácil ver,

$$\alpha\vec{u} = (a + bi)\vec{u} = a\vec{u} + b(i\vec{u}),$$

o que indica um outro modo de obter o vector $\alpha\vec{u}$ (fig. acima).

6. Limites de sucessões de números complexos

Já vimos que a diferença $z-\alpha$ entre dois números complexos é dada geometricamente pela diferença entre o vector que representa z e o vector que representa α. Então $|z-\alpha|$ será o módulo desse vector diferença, ou seja, a *distância* entre o ponto representativo de z e o ponto representativo de α. Daí a

DEFINIÇÃO. *Chama-se distância entre os números complexos z e α ao número* $|z-\alpha| \geqslant 0$.

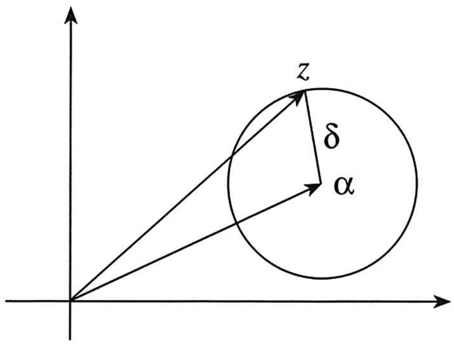


Fig. 8

Posto isto, se for δ um número qualquer > 0, é fácil ver que o lugar geométrico dos valores de z que verificam a condição

$$|z-\alpha| < \delta$$

será o *interior do círculo de centro em* α (isto é, no ponto representativo de α) e *de raio* δ [(1)].

Este conjunto de pontos (ou de números complexos) é denominado a *vizinhança* (δ) de α.

Posto isto:

DEFINIÇÃO A. *Diz-se que uma sucessão de números complexos*

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

---

(1) Em virtude da correspondência biunívoca estabelecida entre os números complexos e os pontos do plano, é frequente identificar os primeiros aos segundos, como já sucedia entre números reais e pontos da recta.

tem por limite um número complexo α (*ou tende para ou converge para* α) *e escreve-se*

$$\lim z_n = \alpha \quad ou \quad z_n \to \alpha,$$

quando a distância de z_n *a* α *tende para zero, isto é, quando*

$$\lim |z_n - \alpha| = 0.$$

Esta definição é baseada na definição de limite dada anteriormente no campo real, mas é equivalente à seguinte definição directa:

DEFINIÇÃO B. *Diz-se que* z_n *tende para* α *quando, para todo o número* $\delta > 0$, *existe um número natural p tal que se tem*

$$|z_n - \alpha| < \delta \quad para\ todo\ o \quad n > p.$$

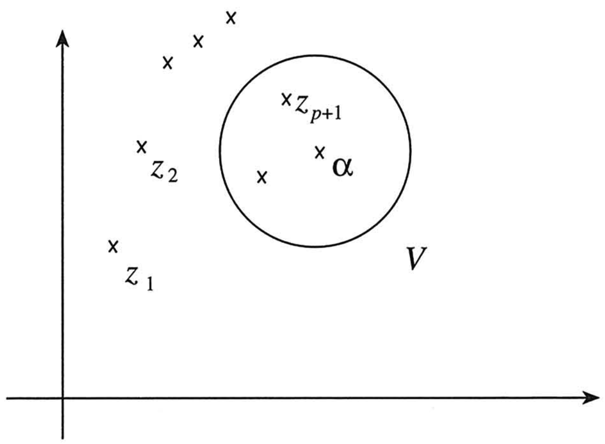


Fig. 9

Esta mesma definição pode ser dada em termos de "vizinhança":

DEFINIÇÃO C. *Diz-se que* z_n *tende para* α, *quando para toda a vizinhança V de* α, *existe uma ordem p depois da qual todos os termos da sucessão se encontram em V.*

Vejamos como se traduz o facto de z_n tender para α, considerando a parte real e o coeficiente da parte imaginária. Vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA. *Condição necessária e suficiente para que z_n tenda para α é que a parte real de z_n tenda para a parte real de α e que o coeficiente da parte imaginária de z_n tenda para o coeficiente da parte imaginária de α.*

Podemos exprimir simbolicamente este enunciado escrevendo:

$$z_n \to \alpha \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re}\alpha \wedge \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im}\alpha^{(1)}$$

a) Demonstremos, primeiro, que a condição é suficiente, isto é, demonstremos que:

$$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re}\alpha \wedge \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im}\alpha \Rightarrow z_n \to \alpha.$$

Pondo z_n e α na forma algébrica:

$$z_n = x_n + i y_n \quad \text{e} \quad \alpha = a + ib,$$

vem, pela definição de módulo:

$$|z_n - \alpha| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

Mas, por hipótese, $x_n \to a \wedge y_n \to b$. Logo, passando ao limite,

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - \alpha| = \sqrt{\lim_{n\to\infty} (x_n - a)^2 + \lim_{n\to\infty} (y_n - b)^2} = 0.$$

Mas isto significa (DEFINIÇÃO A) que $z_n \to \alpha$. A condição é, pois, suficiente.

b) Demonstremos que a condição é necessária, isto é, que:

$$z_n \to \alpha \Rightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re}\alpha \wedge \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im}\alpha.$$

Por ser

$$(x_n - a)^2 \leqslant (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2, \quad \text{tem-se:}$$

---

(1) O símbolo lógico $\Leftrightarrow$ (de *equivalência*) lê-se "*se e só se*" ou "*equivalente a*".

$$|x_n - a| \leqslant \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - \alpha|,$$

e, analogamente,

$$|y_n - b| \leqslant |z_n - \alpha|.$$

(Geometricamente, isto corresponde ao facto de as componentes de um vector $\vec{u}$ nunca terem módulo superior ao módulo de $\vec{u}$).

Mas, se $z_n \to \alpha$, obtém-se destas relações

$$|x_n - a| \to 0 \quad \text{e} \quad |y_n - b| \to 0,$$

ou seja,

$$x_n \to a \quad \text{e} \quad y_n \to b.$$

A condição é, pois, necessária.

DEFINIÇÃO D. *Diz-se que uma sucessão z_n tem por limite infinito ou tende para ∞ e escreve-se*

$$\lim z_n = \infty \quad ou \quad z_n \to \infty,$$

quando

$$|z_n| \to +\infty.$$

Isto significa que, dado o número positivo L, qualquer que ele seja, existe sempre uma correspondente ordem p tal que

$$|z_n| > L, \quad \text{para} \quad n > p.$$

Uma sucessão de números complexos diz-se *convergente*, quando tende para um limite finito (isto é, para um número complexo). Diz-se *divergente* no caso contrário, isto é, quando não tende para limite algum ou tende para ∞.

As sucessões mais interessantes são as convergentes.

Tal como para as sucessões de números reais, verificam-se as proposições:

Se u_n e v_n são termos gerais de sucessões convergentes, então $u_n + v_n$ e *$u_n \cdot v_n$ também o são e tem-se:*

I. $\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$;

II. $\lim (u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$.

III. *Se, além disso, for* $\lim v_n \neq 0$, *tem-se*

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}.$$

As demonstrações destes teoremas são decalcadas sobre as correspondentes para o caso dos números reais, pois que nelas intervêm essencialmente as propriedades dos módulos duma soma, dum produto, etc., que subsistem, como vimos, no corpo **C**.

Como exemplo, recordemos a demonstração da regra

$$\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n.$$

Seja

$$\lim u_n = a \quad \text{e} \quad \lim v_n = b \quad \text{com} \quad a, b \in \mathbf{C}.$$

Queremos provar que $\lim (u_n + v_n) = a + b$.

Ora,

$$(u_n + v_n) - (a + b) = (u_n - a) + (v_n - b)$$

e o *módulo da soma é inferior ou igual à soma dos módulos das parcelas*; logo, tem-se:

$$(1) \qquad |(u_n + v_n) - (a + b)| \leqslant |u_n - a| + |v_n - b|$$

para todo o valor de *n*.

Seja agora δ um número positivo *arbitrário*. Visto que $u_n \to a$ e $v_n \to b$, existe um número p (dependente de δ) tal que

$$|u_n - a| < \frac{\delta}{2}, \quad \text{para} \quad n > p,$$

e um número q (dependente de δ) tal que

$$|v_n - b| < \frac{\delta}{2}, \quad \text{para} \quad n > q.$$

Seja r o maior dos números q e p. Então, será

$$|u_n - a| + |v_n - b| < \delta, \quad \text{para todo} \quad n > r,$$

o que, dada a arbitrariedade de δ, significa precisamente que

$$u_n + v_n \to a + b.$$

Existem, contudo, teoremas válidos no campo real que deixam de o ser no campo complexo. Alguns deixam mesmo de ter sentido: são aqueles que envolvem a relação de ordem (não definida em **C**), como, por exemplo, o seguinte:

"Toda a sucessão que é crescente em sentido lato e limitada superiormente é convergente".

Continua, porém, a ser válido o

CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DE CAUCHY-BOLZANO. *Condição necessária e suficiente para que a sucessão* z_n *seja convergente, é que a todo o número* $\delta > 0$ *corresponda um número natural p tal que se tenha*

$$|z_m - z_n| < \delta,$$

desde que seja ao mesmo tempo $m > p$ *e* $n > p$.

No conjunto $\mathbf{R}^+$ (dos números reais não negativos) é válida a regra:

$$\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}.$$

No campo complexo surgem restrições à sua aplicação, pois que, por existirem geralmente p raízes de índice p, a simbologia torna-se ambígua e não sabemos se a raiz que tomamos no 1.º membro é a correspondente à que tomamos no 2.º membro. Há, pois, que tomar certas precauções que indicaremos oportunamente.

São ainda válidas no campo complexo as seguintes regras que foram demonstradas em **R**:

$$\text{I.}\quad u_n \to a \neq 0 \wedge v_n \to \infty \Rightarrow u_n \cdot v_n \to \infty;$$

$$\text{II.}\quad u_n \to a \neq 0 \wedge v_n \to 0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \to \infty;$$

$$\text{III.}\quad u_n \to a \neq \infty \wedge v_n \to \infty \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \to 0;$$

etc., etc.

7. Séries de termos complexos

Série de termos complexos será toda a expressão do tipo

$$z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \ldots$$

ou, abreviadamente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n,$$

que se obtém ligando por notação aditiva os termos de uma sucessão de números complexos $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$. O estudo duma série reduz-se ao da sucessão das suas *somas parciais*:

$$\begin{aligned} S_0 &= z_0 \\ S_1 &= z_0 + z_1 \\ S_2 &= z_0 + z_1 + z_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diz-se que a série é *convergente* ou *divergente*, conforme a sucessão S_n, das somas parciais é convergente ou divergente. No primeiro caso, chama-se *soma* da série ao limite (finito) de S_n e, sendo $S = \lim S_n$, escreve-se

$$S = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z_n .$$

É fácil relacionar a convergência de uma série de números complexos com a da série das partes reais e a da série dos coeficientes de *i*. Aplicando o correspondente teorema para limites de sucessões, demonstra-se facilmente o seguinte

TEOREMA. *Condição necessária e suficiente para que a série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *seja convergente, é que sejam convergentes a série das partes reais e a série dos coeficientes das partes imaginárias dos números* z_n*, e tem-se nessa hipótese*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n .$$

Este teorema reduz, pois, o estudo duma série de termos complexos ao estudo de duas séries de termos reais. Continua a verificar-se, para séries de termos complexos, o

CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DE CAUCHY-BOLZANO. *Condição necessária e suficiente para que a série* $\sum z_n$ *convirja, é que a todo o número* $\delta > 0$ *corresponda um número natural* ν *tal que se tenha*

$$|S_{n+p} - S_n| = |z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \delta$$

para todo o $n > \nu$ *e todo o número natural* p.

Daqui se deduz a bem conhecida

CONDIÇÃO NECESSÁRIA DE CONVERGÊNCIA. *Se a série* $\sum z_n$ *converge, o seu termo geral tende para zero*: $z_n \to 0$.

Por não estar definida uma relação de ordem no corpo **C**, os critérios de comparação deixam de ter aqui sentido.

Porém, subsiste no campo complexo o seguinte teorema fundamental, que permite reduzir o estudo de uma série de termos complexos ao de uma série de termos reais não negativos, nos casos mais correntes e mais importantes da prática:

CONDIÇÃO SUFICIENTE DE CONVERGÊNCIA. *Uma série* $\sum u_n$ *é convergente, desde que o seja a série* $\sum |u_n|$ *dos módulos dos termos da primeira e, nesta hipótese, tem-se*:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|,$$

isto é, a propriedade do módulo da soma estende-se, então, ao caso de uma infinidade numerável de parcelas:

$$|u_0 + u_1 + \cdots + u_n \ldots| \leqslant |u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n| + \ldots$$

Uma série $\sum u_n$ *diz-se absolutamente convergente quando é convergente a série* $\sum |u_n|$.

Também as propriedades comutativas e associativa generalizada das séries absolutamente convergentes (ver Álgebra Superior I do Prof. VICENTE GONÇALVES) se estendem ao caso das séries absolutamente convergentes de termos complexos.

Mantém-se igualmente a importante

REGRA DE CAUCHY. *Sendo* $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|}$, *a série* $\sum u_n$ *será absolutamente convergente se* $L < 1$ *e será divergente se* $L > 1$.

Demonstração. a) Suponhamos que $L < 1$. Então, se for k um número tal que $L < k < 1$, todos os números $\sqrt[n]{|u_n|}$ serão inferiores a k depois de certa ordem p e, portanto:

$$|u_n| < k^n \qquad \text{para } n > p.$$

Ora, k^n é termo geral de uma série geométrica de razão $k < 1$, portanto convergente. Daqui se conclui que também a série $\sum |u_n|$ será convergente.

b) Seja $L > 1$. Então, há uma infinidade de valores de n para os quais se tem $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, ou seja, $|u_n| > 1$. Sendo assim, o termo geral da série $\sum |u_n|$ não tende para 0 e, portanto, a série é divergente.

NOTA. Recordemos a definição de *"limite máximo"*: Dada uma sucessão x_n de números reais, limitada superiormente, chama-se *limite máximo* da sucessão, e representa-se por $\overline{\lim}\, x_n$, o número L definido pelas duas seguintes propriedades:

1) Qualquer que seja $L' > L$, *todos* os números x_n *a partir de certa ordem*, são inferiores a L';

2) Qualquer que seja $L'' < L$, existem sempre, depois de qualquer ordem, termos da sucessão, superiores a L''.

Se a sucessão x_n não é limitada superiormente, põe-se, por definição, $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$.

Analogamente, se define "limite mínimo" de uma sucessão de números reais.

Se a sucessão x_n é convergente ou propriamente divergente tem-se

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim x_n .$$

Reciprocamente, se a primeira igualdade se verifica, a sucessão é convergente ou propriamente divergente, e verifica-se também a última igualdade. (Recordemos que uma sucessão se diz *propriamente divergente*, quando tende para infinito com sinal determinado, isto é, para $+\infty$ ou para $-\infty$).

É óbvio que estas noções deixam de ter sentido no campo complexo.

8. Soma e produto de séries

DEFINIÇÃO. *Chama-se série soma de duas séries*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

à série $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$.

TEOREMA. *Se as séries* $\sum u_n$ e $\sum v_n$ *são convergentes, também a série soma é convergente e a sua soma é igual à soma das somas das séries dadas, isto é, tem-se*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n).$$

Se, além disso, as séries dadas são absolutamente convergentes, também a série soma é absolutamente convergente.

A segunda parte do teorema resulta da primeira e da relação:

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|.$$

Análogo teorema se demonstra para a *série diferença*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n - v_n).$$

Neste caso a segunda parte do teorema obtém-se a partir da relação

$$|u_n - v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|.$$

NOTA. $|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |b|$.

Tem-se ainda uma regra análoga para o produto de um número complexo α pela série $\sum u_n$. Se esta for convergente, tem-se

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha u_n)$$

e, se a primeira for absolutamente convergente, também a segunda o será.

Chama-se *série produto* das séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0).$$

Verifica-se o seguinte:

TEOREMA. *Se as séries dadas são absolutamente convergentes, a série produto é absolutamente convergente e tem por soma o produto das somas das séries dadas, isto é*:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0) .$$

Estes teoremas têm grande importância teórica e prática. As suas demonstrações são formalmente as mesmas que se costumam dar para os teoremas correspondentes no campo real.

9. Séries de potências

Dá-se o nome de *série de potências* a toda a expressão da forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

ou, abreviadamente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, são números complexos quaisquer e z é uma variável complexa.

O estudo da convergência das séries de potências é dominado pelo seguinte teorema fundamental, que resulta da REGRA DE CAUCHY atrás recordada:

TEOREMA. *Sendo* $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, *a série* $\sum a_n z^n$ *é absolutamente convergente para todo o valor de* z *tal que* $|z| < \dfrac{1}{L}$, *e divergente para todo o valor de* z *tal que* $|z| > 1/L$.

Demonstração. Com efeito, dando a z como valor um número complexo z_0 qualquer, a série dada converte-se numa série numérica de termo geral $u_n = a_n z_0^n$. Ora,

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n||z_0|^n} = |z_0|\sqrt[n]{|a_n|}$$

e, portanto,

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|u_n|} = |z_0|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = |z_0|L.$$

Logo, segundo a regra de Cauchy, a série $\sum a_n z_0^n$ será absolutamente convergente ou divergente, conforme for

$$|z_0|L < 1 \quad \text{ou} \quad |z_0|L > 1,$$

isto é, conforme for

$$|z_0| < \frac{1}{L} \quad \text{ou} \quad |z_0| > \frac{1}{L} \qquad \text{(q.e.d.)}.$$

Pondo

$$R = \frac{1}{L}, \text{ com } L = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|},$$

dá-se a R o nome de *raio de convergência da série de potências* $\sum a_n z^n$.

Se $R \neq 0$ e $R \neq +\infty$ o lugar geométrico dos valores de z tais que $|z| < R$ é, como sabemos, o interior do círculo de centro na origem e raio R, chamado *círculo de convergência* da série. Esta é, pois, absolutamente convergente no interior do círculo de convergência e divergente no exterior do círculo; sobre a circunferência $|z| = R$, o comportamento da série varia de caso para caso.

Se $R = 0$, a série é convergente só para $z = 0$: o círculo de convergência degenera num ponto (a origem).

Se $R = +\infty$, a série é convergente para todo o valor complexo de z: o círculo de convergência é substituído por todo o plano da variável complexa.

Mais geralmente, pode apresentar-se uma série de potências de $z-\alpha$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n,$$

sendo α um número complexo qualquer. Então, o raio de convergência R da série é ainda dado pela fórmula anterior e, segundo o teorema, a série será absolutamente convergente ou divergente, conforme for

$$|z-\alpha|<R \quad \text{ou} \quad |z-\alpha|>R.$$

Se $R \neq 0$ e $R \neq +\infty$, a imagem geométrica de

$$|z-\alpha|<R$$

é o interior do círculo de centro α e raio R (círculo de convergência). Se $R=0$, a série converge só para $z=\alpha$, se $R=+\infty$, a série converge em todo o plano.

DETERMINAÇÃO DO RAIO DE CONVERGÊNCIA PELO CRITÉRIO DE D'ALEMBERT: Em particular, pode acontecer que o módulo da razão a_n/a_{n+1} tenda para um limite, finito ou infinito, ao tender n para ∞. Nesse caso (e só nesse), o raio da convergência da série $\sum a_n z^n$ pode ser obtido aplicando à série $\sum |a_n z^n|$ o critério de D'Alembert. Tem-se, então, como é fácil verificar,

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

10. Função exponencial

Consideremos a série de potências de z

(1) $$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

O seu raio de convergência pode ser obtido pelo critério de D'Alembert:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{1}{(n+1)!}} = \lim (n+1) = +\infty .$$

A série (1) converge, pois, para todo o valor de z. Designemos, então, por $f(z)$ a soma desta série para cada valor de z:

$$f(z) \equiv \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Se z é, em particular, um número real x, já sabemos que esta série representa a função exponencial e^x, que também se designa pela notação $\exp x$.

Sabemos, por outro lado, que se tem

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y},$$

ou seja,

$$\exp (x+y) = \exp x \cdot \exp y ,$$

quaisquer que sejam os números reais x e y. (Mais até, demonstra-se que, no campo real, e^x é a única função contínua que tem esta propriedade, tomando o valor e para $x = 1$).

Vamos agora ver que a função $f(z)$ atrás definida possui também esta propriedade e, como tal, pode ser considerada como a extensão ao campo complexo da função exponencial e^x.

Com efeito, sendo z_1 e z_2 dois números complexos quaisquer, tem-se:

$$f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} , \quad f(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} .$$

Efectuando o produto destas duas séries (absolutamente convergentes), vem, segundo um teorema anterior:

$$f(z_1)\cdot f(z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_1^n}{n!}\cdot 1+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{z_2^2}{2!}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{z_1^{n-p}}{(n-p)!}\cdot\frac{z_2^p}{p!}+\cdots+\frac{z_2^n}{n!}\right),$$

ou seja, passando para fora dos parênteses o factor $\dfrac{1}{n!}$:

$$f(z_1)\cdot f(z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z_1^n+nz_1^{n-1}z_2+\binom{n}{2}z_1^{n-2}z_2^2+\cdots+\right.$$

$$\left.+\binom{n}{p}z_1^{n-p}z_2^p+\cdots+z_2^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n=f(z_1+z_2).$$

Vemos, pois, que:

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2),$$

quaisquer que sejam os números complexos z_1, z_2, o que nos induz a representar, no caso geral, a soma da série (1) por e^z ou por $\exp z$, em vez de $f(z)$.

Deste resultado deduzem-se importantes consequências. Pondo z na forma algébrica, $z=x+iy$, virá, segundo o estabelecido:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}.$$

Mas

$$e^{iy}=1+iy-\frac{y^2}{2!}-\frac{iy^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{iy^5}{5!}-\cdots,$$

ou seja, aplicando o teorema que relaciona a soma da série com a das partes reais e a dos coeficientes de i:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) +$$

$$+ i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right).$$

Ora, já sabemos da Análise Real que a soma da primeira série do 2.º membro é igual a cos y e que a soma da segunda série é sen y.

Então, será

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

e, portanto,

$$(2) \qquad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Por aqui se vê, desde já, que a exponencial complexa e^z *é uma função periódica de período* $2\pi i$. De facto,

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x [\cos (y + 2\pi) + i \operatorname{sen} (y + 2\pi)].$$

Ora tem-se, qualquer que seja $y \in \mathbf{R}$:

$$\cos (y + 2\pi) = \cos y, \quad \operatorname{sen} (y + 2\pi) = \operatorname{sen} y$$

e não há nenhum ângulo y_1 compreendido entre y e $y + 2\pi$ tal que se verifiquem simultaneamente as duas igualdades cos y_1 = cos y e sen y_1 = sen y. Será, pois, sempre:

$$e^{z+2\pi i} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z$$

ou

$$\exp (z + 2\pi i) = \exp z,$$

e não existe nenhum número φ tal que $\exp(z + i\varphi) = \exp z$, com $0 < \varphi < 2\pi$.

Uma outra consequência importante que se deduz facilmente da fórmula (2) é a seguinte:

A função $\exp z$ *não se anula para nenhum valor complexo de* z.

Da mesma fórmula deduzem-se ainda outros resultados notáveis. Assim:

a) Pondo $x = 0$ e $y = \varphi$, vem:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi\,. \tag{3}$$

Escrevamos z sob a forma trigonométrica:

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)\,.$$

Atendendo a (3), podemos agora escrever

$$z = \rho\, e^{i\varphi},$$

que é a chamada *forma exponencial do complexo* z.

Deste modo, também a expressão $e^{i\varphi}\vec{u}$ (onde $\vec{u}$ é um vector qualquer do plano) adquire significado. Com efeito, vemos por (3) que $e^{i\varphi}$ é um complexo de módulo unitário e argumento φ. *Então,* $e^{i\varphi}$ *representa um operador que aplicado a* $\vec{u}$ *lhe imprime uma rotação de* φ *radianos,* respeitando as convenções estabelecidas quanto ao sentido.

b) Sendo x um número real qualquer, tem-se

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x\,.$$

Daqui se deduz, respectivamente, por adição e subtracção ordenada, as chamadas FÓRMULAS DE EULER:

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

análogas às expressões de $\operatorname{ch} x$ e $\operatorname{sh} x$.

11. Logaritmação no campo complexo

Dado um número complexo z procuramos um número complexo w tal que

$$z = e^w. \tag{1}$$

Reparemos, em primeiro lugar, que apenas podemos considerar valores de z diferentes de zero, para que a equação anterior seja possível, visto que a função e^z não se anula nunca no conjunto **C**.

Seja

$$\rho = |z|, \quad \varphi = \arg z, \quad x = \operatorname{Re} w, \quad y = \operatorname{Im} w.$$

Então, será

$$z = \rho\, e^{i\varphi}, \quad w = x + iy,$$

e a equação (1) toma a forma

$$\rho\, e^{i\varphi} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

A igualdade (1) será, pois, equivalente ao sistema das duas seguintes equações:

$$\rho = e^x = |z|, \quad \text{ou seja,} \quad x = \log|z|,$$

$$y = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi.$$

(Note-se que, por supormos $z \neq 0$, será $|z| > 0$ e existe, portanto, $\log|z|$ no campo real). A igualdade (1) equivale, portanto, a:

$$w = x + iy = \log|z| + i\,(\arg z + 2k\pi),$$

em que k pode tomar qualquer valor inteiro relativo.

Vem assim para w uma *infinidade de valores*. Por extensão, costuma-se ainda chamar a *qualquer* desses valores de w um *logaritmo de z*, e escreve-se

$$w = \log z.$$

Note-se, porém, que, à face de uma lógica rígida, há aqui um *abuso de escrita*: o sinal "=" implica a existência de um único valor de log z para cada valor de z, o que é falso, visto a expressão log z ser ambígua. Situação análoga se apresenta ao escrever

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \text{quando} \quad w^n = z .$$

No campo real não se verificavam tais ambiguidades: expressões tais como

$$\log 2 , \quad \sqrt{3} , \quad -\sqrt{5} , \quad \text{etc.}$$

têm um único valor em **R**, segundo as convenções usuais. Mas já em **C** as expressões log $(1-2i)$, $\sqrt{1-i}$, etc., são ambíguas.

Assim, no campo complexo, as expressões $\sqrt[n]{z}$ e log z representam *funções em sentido lato* ou *funções pluriformes,* de que nos ocuparemos oportunamente.

12. Senos e cosenos de números complexos

Consideremos as duas seguintes séries de potências de z:

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

e

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

formalmente idênticas àquelas que nos dão, respectivamente, os desenvolvimentos em série das funções coseno e seno no campo real. Investigando acerca da sua convergência, facilmente se conclui que são ambas absolutamente convergentes em todo o conjunto **C**. Designemos, então, por $C(z)$ a soma da primeira e por $S(z)$ a soma da segunda.

Utilizando os desenvolvimentos em série de e^{iz} e de e^{-iz} facilmente se reconhece que

$$C(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad S(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

para todo o valor de z real ou imaginário. Daqui se conclui, desde logo, que

$$[S(z)]^2 + [C(z)]^2 = 1$$

e que

$$S(z_1 + z_2) = S(z_1)\,C(z_2) + S(z_2)\,C(z_1)$$

$$C(z_1 + z_2) = C(z_1)\,C(z_2) - S(z_1)\,S(z_2)\,.$$

Podemos verificar estas três identidades por mera substituição de valores aplicando as fórmulas anteriores e as propriedades de exp z.

Também e ainda, se pode verificar que $S(z)$ e $C(z)$ são funções periódicas de período 2π.

Vemos, assim, que $S(z)$ e $C(z)$ obedecem a relações formalmente idênticas àquelas a que se sujeitam sen x e cos x, sendo x a variável real. Deste modo, por extensão natural, passamos a designar $S(z)$ e $C(z)$, respectivamente, por sen z e cos z.

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

CAP. IV – **Fundamentos da teoria das funções analíticas**

CAP. V – **Revisões e complementos sobre integrais impróprios e sobre integrais paramétricos**

CAP. VI – **Método dos resíduos**

CAP. VII – **Breves noções sobre medida e integral de Lebesgue**

CAP. VIII – **Transformação de Fourier**

CAP. IX – **Transformação de Laplace**