II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

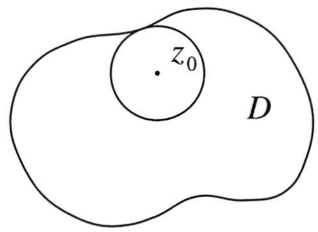
isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência [(1)].

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

---

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[1] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[2]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO VI

MÉTODO DOS RESÍDUOS

1. Definição e teorema fundamental

Seja α um pólo ou um ponto singular essencial isolado, relativo a uma função complexa f, holomorfa num domínio aberto D do plano. Chama-se *resíduo de f no ponto* α o coeficiente de $1/(z-\alpha)$ no desenvolvimento de f em *série de Laurent* em torno deste ponto.

LEMA. *Se Γ é uma linha fechada, simples e rectificável, contida num domínio aberto D do plano em que f é holomorfa, e se α é o único ponto singular de f interno a Γ, o integral*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(z)dz$$

é igual ao resíduo de f em α (designando por Γ^+, evidentemente, a linha Γ orientada no sentido positivo).

Com efeito, segundo o estabelecido no Capítulo IV, n.º 8, podemos substituir Γ por uma circunferência Υ de centro α, interna a Γ, sem mudar o valor do integral. Ora, na *série de Laurent* de f em torno de α (ver Capítulo IV, n.º 13):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n,$$

os coeficientes a_n são dados pela fórmula:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(u)(u-\alpha)^{-n-1}du \quad \text{para} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Portanto, em particular, para $n = -1$, tem-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(u)du = a_{-1} \ (\textit{resíduo de } f \textit{ em } \alpha).$$

A expressão *resíduo de f em* α provém, exactamente, do facto expresso pelo lema anterior.

TEOREMA FUNDAMENTAL. *Se* Γ *é uma linha fechada, simples e rectificável, contida no domínio aberto D em que f é holomorfa, e se existe, apenas, um número finito de pontos singulares* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, *de f internos a* Γ *(pólos ou singularidades essenciais isoladas), então o integral*

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz$$

é igual ao produto de $2\pi i$ *pela soma dos resíduos de f nos pontos* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

Demonstração. Suponhamos verificada a hipótese. Então, como os pontos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, são internos a Γ, podemos considerar p circunferências $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_p$, internas a Γ, de centros $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, e externas umas às outras (basta para isto que o raio de cada uma seja inferior à distância do centro a Γ e inferior a metade da distância mínima entre esses pontos dois a dois). Então, segundo o estabelecido no n.º 8 do Capítulo IV, o integral de f sobre Γ^+ será igual à soma dos integrais de f sobre as circunferências $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_p$, orientadas no sentido positivo. Como cada um destes integrais é igual ao resíduo de f no respectivo ponto α_j, multiplicado por $2\pi i$ (em virtude do lema), o teorema fica demonstrado.

Indicações práticas para o cálculo dos resíduos.

Quando o ponto α é um pólo, o cálculo do resíduo está incluído no cálculo da respectiva parte principal, que já foi indicada no

Capítulo IV, n.º 17. Muitas vezes, na prática, a função f cujo resíduo se pretende calcular em α é da forma

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)\,\psi(z)},$$

sendo φ, ψ, g, holomorfas em D e

$$g(\alpha)=0, \quad \text{com } \varphi(\alpha)\neq 0 \quad \text{e} \quad \psi(\alpha)\neq 0.$$

Então, α é um pólo de f. Designando por k a sua ordem, será

$$g(z) = (z-\alpha)^k \left[\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!} + (z-\alpha)\,\frac{g^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!} + \cdots \right].$$

Por outro lado, tem-se:

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha) + (z-\alpha)\,\varphi'(\alpha) + \ldots,$$
$$\psi(z) = \psi(\alpha) + (z-\alpha)\,\psi'(\alpha) + \ldots,$$

donde se deduz facilmente, pelo algoritmo da divisão, o desenvolvimento de $\varphi(z)/\psi(z)$ em série de potências de $z-\alpha$. O resíduo em α será então, manifestamente, o quociente do coeficiente do termo em $(z-\alpha)^{k-1}$, nesse desenvolvimento, pelo coeficiente de $(z-\alpha)^k$ em $g(z)$. Em particular, se $k=1$ (pólo simples), o resíduo será:

$$\frac{\varphi(\alpha)}{g'(\alpha)\,\psi(\alpha)}.$$

2. Aplicação à contagem dos zeros duma função meromorfa

Seja f uma função meromorfa num domínio aberto D e seja Γ uma linha fechada, simples e rectificável, contida em D, *sem passar por nenhum pólo ou zero de f*. Visto que os zeros e os pólos de f são pontos isolados de D (Capítulo IV, n.os 14 e 15), só pode haver um número finito de tais pontos internos a Γ (de contrário, como o conjunto dos pontos internos a Γ é limitado, haveria, pelo menos, um ponto de acumulação de pólos ou de zeros em D).

Sejam, então, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, os zeros de f internos a Γ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, os pólos de f internos a Γ, supondo que cada zero e cada pólo é escrito um número de vezes igual à sua ordem de multiplicidade. Deste modo, a função

$$g(z) = f(z)\,\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_p)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_m)}$$

é holomorfa sobre o domínio D^* limitado e fechado de fronteira Γ, e não tem zeros em D^*[(1)]. Com efeito, foram eliminados, por um lado, os pólos de f internos a Γ, multiplicando $f(z)$, sucessivamente, por $z-\beta_1, z-\beta_2, \ldots, z-\beta_p$; por outro lado, foram eliminados os zeros de f internos a Γ, dividindo $f(z)$, sucessivamente, por $z-\alpha_1, \ldots, z-\alpha_m$; e, finalmente, não existem zeros nem pólos de f em Γ, por hipótese. Tem-se, pois,

$$f(z) = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_m)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_p)}\,g(z),$$

sendo g, como se disse, uma função holomorfa em D^* que não se anula em nenhum ponto deste domínio. Derivando ambos os membros da anterior igualdade e dividindo o resultado por $f(z)$ (ou, o que é equivalente, tomando os logaritmos e derivando em seguida), é fácil ver que se obtém

$$(1) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{z-\alpha_j} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{z-\beta_k} + h(z)$$

em que $h(z)$ designa a função $g'(z)/g(z)$, que é certamente holomorfa sobre D^*, visto g ser holomorfa sobre D^* e não se anular neste domínio. Mostra esta fórmula, portanto, que:

A função $f'(z)/f(z)$ é meromorfa sobre D^* (isto é, meromorfa num domínio aberto que contém D^*), tendo por pólos em D^*, quer os zeros α_j quer os pólos β_k de f neste domínio. Todos esses pólos são simples.

---

(1) Recordemos que uma função se diz holomorfa sobre um conjunto K qualquer, quando é holomorfa em algum conjunto aberto que contenha K.

Não esqueçamos, por outro lado, que cada zero α_j de f figura em (1) um número de vezes igual à sua ordem μ_j, e cada pólo β_k de f figura em (1) um número de vezes igual à sua ordem ν_k. Logo, na função $f'(z)/f(z)$, o resíduo de cada pólo α_j é μ_j e o de cada pólo β_k é $-\nu_k$; portanto, a soma total dos resíduos é $m-p$. Em conclusão:

TEOREMA 2.1. *Se f é uma função meromorfa num domínio aberto D do plano e se Γ é uma linha fechada simples e rectificável, contida em D, que não passe por nenhum zero ou pólo de f e circunde, apenas, pontos de D, a soma dos resíduos dos pólos de $f'(z)/f(z)$ circundados por Γ dá-nos a diferença entre o número m de zeros de f internos a Γ e o número p de pólos de f internos a Γ, sendo cada zero e cada pólo contado um número de vezes igual à respectiva ordem de multiplicidade. Assim, portanto:*

$$m - p = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

supondo Γ orientada no sentido positivo.

Notemos que, enquanto o ponto z descreve a linha orientada Γ, o ponto $w=f(z)$ descreve uma linha orientada Γ^* (imagem de Γ por f). Assim, se Γ é representada parametricamente pela função $z=\varphi(t)$, com $t\in[a, b]$, Γ^* terá a representação paramétrica $w=f(\varphi(t))$, com $t\in[a, b]$. Posto isto, é fácil ver que, por simples mudança de variável no integral, se tem:

$$\int_{\Gamma^*}\frac{dw}{w} = \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

É claro que Γ^* será fechada e rectificável, tal como Γ (seccionalmente regular, se Γ o for). Logo, segundo as considerações finais do n.º 7 do Capítulo IV, o anterior integral sobre Γ^* será igual ao produto de $2\pi i$ pelo *número k de voltas* que a linha Γ^* dá em torno da origem (ou seja, a *variação do argumento de w* sobre Γ^*), com o sinal + ou −, conforme as voltas forem dadas no sentido positivo ou negativo. Por conseguinte:

ESCÓLIO. *Na hipótese do* TEOREMA 2.1, *a diferença entre o número m de zeros e o número p de pólos da função f internos a* Γ, *é igual ao número de voltas que o ponto* $w=f(z)$ *dá em torno da origem quando z descreve a linha* Γ *(uma só vez), sendo atribuído o sinal + ou – ao número de voltas, conforme estas se efectuem no sentido positivo ou no sentido negativo.*

Estes factos também se traduzem simbolicamente escrevendo

$$m-p=\frac{1}{2\pi i}\,[\log f(z)]_\Gamma=[\arg f(z)]_\Gamma$$

em que $[\log f(z)]_\Gamma$ designa a *variação de* $\log f(z)$ *sobre* Γ, e, analogamente, para $\arg f(z)$.

Em particular, se f é holomorfa no interno de Γ, tem-se $p=0$ e o número de voltas será positivo ou nulo, igual ao número m de zeros internos a Γ (contendo sempre cada zero um número de vezes igual à sua ordem).

O anterior teorema fornece, pois, um MÉTODO DE SEPARAÇÃO DAS RAÍZES NO CAMPO COMPLEXO, aplicável a quaisquer funções holomorfas. A dificuldade está em calcular o número de voltas a que se refere o escólio. Mas existem processos que permitem efectuar esse cálculo na prática.

Em particular, podemos obter, assim, uma nova demonstração do TEOREMA DE D'ALEMBERT, sem recorrer ao método de redução ao absurdo, utilizado no n.º 11 do Capítulo IV.

Com efeito, se for $f(z)\equiv a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$, com $a_0\neq 0$ e $n>0$, já sabemos que $f(z)\to\infty$ quando $z\to\infty$. Portanto, dado um número $L>0$, existe um número ρ tal que

$$|f(z)|>L \quad \text{para} \quad |z|>\rho\,.$$

Assim, $f(z)$ não se anula fora do círculo $z\leqslant\rho$ e, portanto, se designarmos por Υ uma circunferência de centro 0 e raio $R>\rho$, os zeros de f que porventura existam são *todos* internos a Υ.

Por outro lado, tem-se, como é fácil verificar:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z}+\frac{\varepsilon(z)}{z}$$

com

$$(1) \qquad \varepsilon(z) = \frac{zf'(z) - nf(z)}{f(z)},$$

Então, o número m de zeros de $f(z)$ será

$$m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon^+} \frac{n}{z}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon^+} \frac{\varepsilon(z)}{z}\,dz\,.$$

Mas o primeiro termo do 2.º membro é n. Quanto ao segundo tem-se

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon^+} \frac{\varepsilon(z)}{z}\,dz\right| \leqslant \max_{z\in\Upsilon} |\varepsilon(z)|\,.$$

Ora, da fórmula (1) resulta que $\varepsilon(z)\to 0$ quando $z\to\infty$. Logo, o último integral tende para zero quando $R\to\infty$, e, assim, $m=n$. Em conclusão:

Todo o polinómio de grau n tem n raízes, contando cada raiz um número de vezes igual à sua ordem.

3. Resíduos no ponto impróprio

Seja f uma função holomorfa num domínio aberto D da *esfera de Riemann* e suponhamos que o ponto ∞ é uma singularidade isolada de f. Quer isto dizer que existe um número $R>0$ tal que D contém o domínio $|z|>R$, mas não o ponto ∞. Então, f admite um *desenvolvimento de Laurent* em torno de ∞

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{para} \quad |z|>R,$$

sendo a série uniformemente convergente em todo o conjunto fechado contido no domínio $|z|>R$. Então, se designarmos por Υ uma circunferência $|z|=\rho$, com $\rho>R$, virá, integrando a série termo a termo sobre Υ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon^+} f(z)dz = a_{-1},$$

visto que

$$\int_{\Upsilon^+} z^n dz = 0 \quad \text{quando } n \neq -1 .$$

Mas Υ^+ está orientada, de modo a deixar à direita o ponto ∞ (sentido anti-horário). Orientando Υ, de modo a deixar ∞ à esquerda, vem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Upsilon^-} f(z)dz = -a_{-1} .$$

Por este facto, convenciona-se chamar *resíduo da função f no ponto* ∞ ao coeficiente com sinal mudado, $-a_{-1}$, do seu *desenvolvimento de Laurent* em torno de ∞.

Com tal convenção, podemos demonstrar o

TEOREMA 3.1. *Se f é uma função holomorfa na esfera de Riemann, privada de um número finito de pontos, a soma dos resíduos de f em todos estes pontos é nula.*

Com efeito, sendo Υ uma circunferência que circunde todos os pontos próprios singulares de f, o integral de f sobre Υ^+, dividido por $2\pi i$, dá, por um lado, a soma dos resíduos desses pontos e, por outro lado, o resíduo do ponto impróprio com sinal contrário (se o integral é nulo, o ponto ∞ será, quando muito, uma singularidade removível).

4. Aplicação do método dos resíduos ao cálculo de integrais impróprios

Integrais de funções racionais.

Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ duas funções racionais inteiras. *Suponhamos que $Q(z)$ não tem raízes reais e que a diferença entre o grau de Q e o grau de P é igual ou superior a* 2. Então, segundo o estabelecido no Capítulo anterior, n.º 1, o integral

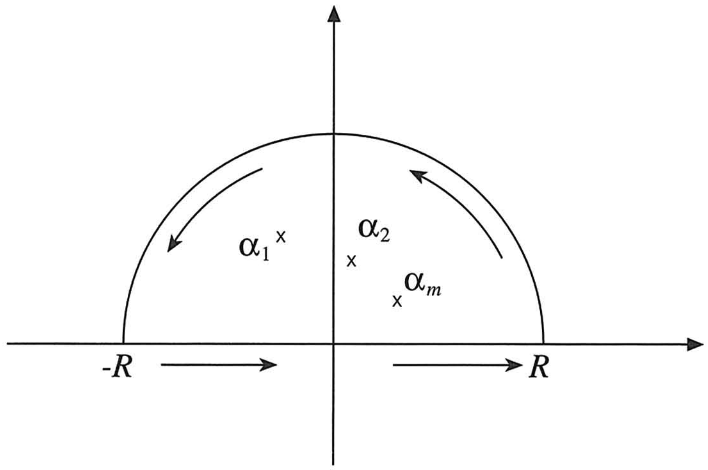
$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

é *absolutamente convergente*. Com efeito, como $Q(x)$ não se anula em $\mathbf{R}$, a função integranda é contínua sobre a recta e, por outro lado, o limite de

$$\left| x^2 \frac{P(x)}{Q(x)} \right|$$

quando $x \to \infty$, existe e é finito, visto o grau do denominador exceder em duas unidades, pelo menos, o grau do numerador. Posto isto, vamos provar que:

O integral S é igual ao produto de $2\pi i$ *pela soma dos resíduos da função integranda nos pólos situados acima do eixo real.*



Com efeito, uma vez que o integral existe, será o limite do integral da mesma função entre $-R$ e R, quando $R \to +\infty$. Designemos, então, por Γ a linha formada pelo segmento real $[-R, R]$ e pela semi-circunferência $|z| = R$, com $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$. Supondo R bastante grande para que $Q(z)$ não se anule para $|z| \geqslant \mathrm{R}$ e $\mathrm{Im}\, z > 0$, todos os pólos de $P(x)/Q(x)$ porventura existentes no semi-plano superior $\mathrm{Im}\, z > 0$, serão internos a Γ, e, portanto, a soma dos respectivos resíduos, multiplicada por $2\pi i$, será dada pelo integral

$$\int_{\Gamma^+} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx + \int_L \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

onde L designa a semi-circunferência $|z| = R$, $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$, orientada de R para $-R$. Ora, tem-se:

$$\left|\int_L \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| \le \pi R \max_{z\in L}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|$$

e como

$$\left|\frac{zP(z)}{Q(z)}\right| \to 0 \quad \text{quando } R=|z|\to +\infty\,,$$

segue-se que *o último integral tende para zero quando* $R \to +\infty$. Logo, passando ao limite na fórmula anterior quando $R \to +\infty$, vê-se que o integral S é, de facto, igual ao produto de $2\pi i$ pela soma dos resíduos nos referidos pólos.

Exemplo – Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}\,.$$

Neste caso, as raízes do denominador situadas acima do eixo real são

$$\alpha_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}\,,\quad \alpha_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}\,,$$

O cálculo dos resíduos nestes pontos efectua-se muito facilmente pela regra prática indicada no n.º 1. Como se tem, neste caso, $f(z)=1/g(z)$, sendo α_1 e α_2 raízes simples de $g(z)$, os resíduos serão

$$\frac{1}{g'(\alpha_1)}=\frac{1}{4\alpha_1^3}=\frac{1}{4}\,e^{-\frac{3\pi i}{4}}\,,\quad \frac{1}{g'(\alpha_2)}=\frac{1}{4}\,e^{-\frac{9\pi i}{4}}\,,$$

cuja soma é

$$\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{3\pi i}{4}}+e^{\frac{\pi i}{4}}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\,i\,.$$

Multiplicando por $2\pi i$, obtém-se, finalmente, o valor do integral proposto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,.$$

Integrais em que intervêm exponenciais.

Consideremos, agora, integrais do tipo

$$\text{(1)} \qquad S = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx\,, \quad \text{com } t \text{ real}\,,$$

sendo ainda P e Q polinómios. *Suponhamos que $Q(z)$ não se anula sobre o eixo real e que a diferença entre o grau do denominador e o grau do numerador é igual ou superior a* 2. Então, atendendo ao estabelecido no Capítulo V, desde logo se reconhece que o integral é absolutamente convergente, visto que $|e^{itx}|=1$, para x e t reais. Por outro lado, notemos que, se for $z=x+iy$, com $y=\operatorname{Im} z \geqslant 0$, e, além disso, $t \geqslant 0$, vem

$$|e^{itz}| = |e^{itx}| \cdot |e^{-ty}| = e^{-ty} \leq 1\,.$$

Assim, o método que seguimos para o caso das funções racionais é ainda aqui aplicável, o que nos leva a concluir:

Se $t \geqslant 0$, o integral S é igual ao produto de $2\pi i$ pela soma dos resíduos da função integranda nos pólos situados acima do eixo real.

É claro que o caso $t<0$ se reduz imediatamente ao anterior, mudando x em $-x$.

Note-se que a parte real e o coeficiente da parte imaginária do anterior integral são, respectivamente,

$$\text{(2)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos tx\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\operatorname{sen} tx\,dx\,,$$

tipos de integrais também muito importantes.

Exemplo – Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx\,.$$

A função integranda tem dois únicos pólos, i e $-i$ (simples), situados, respectivamente, acima e abaixo do eixo real. Aplicando a regra prática do n.º 1, com $g(z)=1+z^2$, $\varphi(z)=e^{itz}$, $\psi(z)=1$, obtém-se o resíduo no ponto i:

$$\frac{\varphi(i)}{g'(i)}=\frac{e^{-t}}{2i},$$

que, multiplicando por $2\pi i$, nos dá o valor do integral para $t\geqslant 0$:

$$\pi e^{-t}.$$

Para $t\leqslant 0$, o integral será igual ao que se obtém mudando x em $-x$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it|x|}}{1+x^2}\,dx=\pi e^{-|t|}.$$

Assim, em conclusão:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx=\pi e^{-|t|},\quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

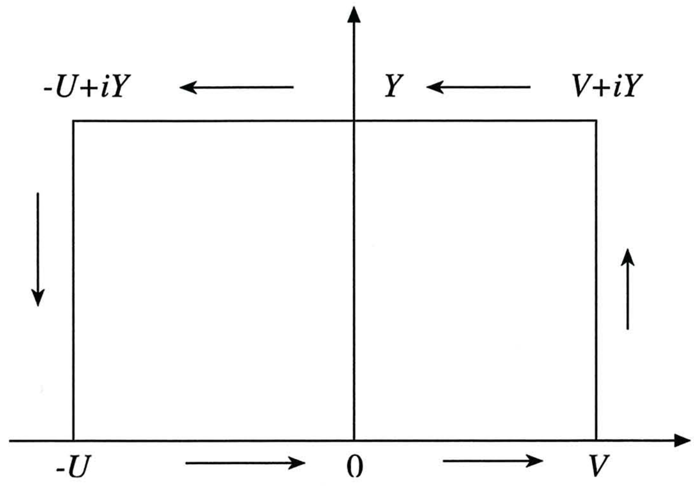
Caso em que a função racional tem apenas um zero simples no infinito.

Nos integrais do tipo (1) supusemos que a função racional $R(z)\equiv P(z)/Q(z)$ tem um zero de ordem $\geqslant 2$ no infinito. Se a diferença entre o grau do denominador e o grau do numerador é apenas 1, o resultado anterior subsiste, com $t\neq 0$, mas, para o demonstrar, não convém usar semi-círculos.

O método que vamos seguir neste caso permite demonstrar, ao mesmo tempo, a existência do integral, como limite de

$$\int_{-U}^{V} e^{itx}R(x)dx,$$

quando U e V tendem independentemente para $+\infty$. Aliás, é fácil ver que, neste caso, o integral *não é absolutamente convergente,* ao contrário do que sucedia no caso anterior, em que era evidente, *a priori,* a convergência absoluta.



Tomemos, agora, para caminho de integração a fronteira Γ do rectângulo de vértices V, $V+iY$, $-U+iY$ e $-U$, orientado positivamente. Desde que U, V e Y sejam suficientemente grandes, este rectângulo contém todos os pólos de $R(z)$ situados acima do eixo real (continuamos a supor que não há pólos sobre este eixo). Em virtude da hipótese, existe uma constante M tal que $|zR(z)|<M$ para todo o z não interior ao rectângulo; logo, o módulo do integral entre V e $V+iY$ será menor que

$$M\int_0^Y e^{-yt}\frac{dy}{|z|}<\frac{M}{V}\int_0^Y e^{-yt}dy \leqslant \frac{M}{Vt} \qquad (\forall t>0),$$

visto ser $|z|\geqslant|\mathrm{Re}z|$ e o último integral ser $<1/t$ para $t>0$. Sobre o outro lado vertical, tem-se um resultado correspondente. Do mesmo modo se reconhece que o integral sobre o lado horizontal superior não excede em módulo

$$\frac{M}{Y}e^{-tY}(U+V),$$

o que, *com U e V constantes,* tende para 0 quando $Y\to\infty$. Logo, se designarmos por S o integral sobre a fronteira Γ completa, virá

$$\left|S-\int_{-U}^{V}e^{itx}R(x)dx\right|<\frac{M}{Ut}+\frac{M}{Vt}+\varepsilon,$$

sendo ε arbitrariamente pequeno. Assim, para $t>0$, virá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} R(x)dx = \lim_{\substack{U\to+\infty \\ V\to+\infty}} \int_{-U}^{V} e^{itx} R(x)dx = S$$

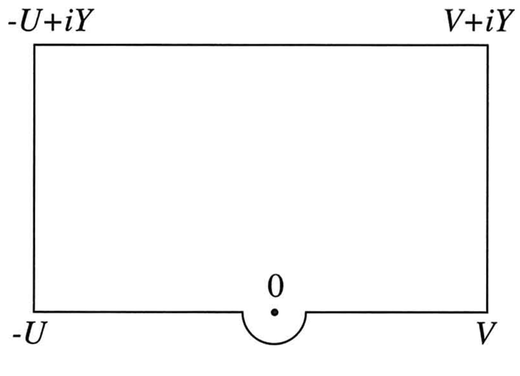
e, como S é precisamente igual ao produto de $2\pi i$ pela soma dos resíduos nos pólos situados acima do eixo real, fica provado o que pretendíamos, no caso $t>0$.

O caso $t<0$ reduz-se imediatamente ao anterior, como já vimos.

Caso em que há pólos no eixo real.

Quando a função $R(z)$ tem algum pólo no eixo real, os integrais (2) atrás considerados não são, em geral, convergentes, a não ser que se trate de um pólo simples que coincida com um zero de sen tx ou de cos tx, para um particular valor de t.

Suponhamos, por exemplo, que $R(z)$ tem um pólo simples na origem (e um zero no infinito).



Vamos seguir, agora, o método anterior, com uma pequena variante: evitaremos que o caminho Γ passe pela origem, seguindo uma semi-circunferência de centro 0 e raio δ, situada no semi-plano inferior. Desde que U, V e Y sejam bastante grandes e δ bastante pequeno, a linha Γ circunda todos os pólos situados acima do eixo real, a origem e *nenhum outro pólo da função integranda.* Designemos por σ a soma dos resíduos nos pólos situados acima do eixo real e por ρ o resíduo na origem (ρ e σ dependentes de t). Então, será:

$$e^{itz} R(z) = \frac{\rho}{z} + g_t(z),$$

em que g designa, para cada t real, uma função holomorfa numa vizinhança da origem. O integral do 1.º termo sobre a semi-circunferência é $\pi i \rho$, enquanto o integral do 2.º termo sobre a mesma tende para 0 com δ. Deste modo, raciocinando como no caso anterior, na hipótese $t \geqslant 0$, chegamos ao resultado

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{+\infty} \right] e^{itx} R(x) dx = 2\pi i \left(\sigma + \frac{1}{2} \rho \right).$$

O limite do primeiro membro é chamado o *valor principal de Cauchy* do integral proposto, que se diz *semi-convergente* pelo facto de existir este limite (com a mudança de variável $x \to 1/x$, somos conduzidos ao caso de semi-convergência já considerado no Capítulo V, n.º 1). É de notar que, *no resultado anterior, o resíduo no ponto* 0 *intervém como se apenas metade do pólo estivesse situado no semi-plano superior* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Este resultado estende-se imediatamente ao caso em que há vários pólos no eixo real. Assim, teremos, designando por ρ a *soma* dos resíduos nos pólos do eixo real:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} R(x) dx = 2\pi i \left(\sigma + \frac{1}{2} \rho \right), \qquad \forall t \geqslant 0 .$$

Em particular:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i .$$

Note-se que a parte real deste integral é *divergente*, visto que a função integranda, $(\cos x)/x$, tem um pólo de ordem 1 na origem (Capítulo V, n.º 2); mas o seu v. p. é zero, por ser ímpar a função integranda. Quanto à parte imaginária, a função integranda, $(\operatorname{sen} x)/x$, tende para 1 quando $x \to 0$ e por isso o integral é convergente (simplesmente); *como, além disso, a função é par,* o integral entre $-\infty$ e $+\infty$ é duplo do integral entre 0 e $+\infty$ e assim chegamos à seguinte fórmula, importante pelas suas aplicações:

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .}$$

Notemos, ainda, que os integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}^k x \,.\, R(x)dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^k x \,.\, R(x)dx\,,$$

com $k=2, 3, \ldots$, se podem reduzir ao caso anterior, visto que $\operatorname{sen}^k x$ e $\cos^k x$ se exprimem como combinações lineares de funções do tipo $\operatorname{sen} nx$, $\cos mx$.

Para outros casos, veja-se AHLFORS e VALIRON, obras citadas.

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

CAP. III – **Noções prévias sobre espaços vectoriais abstractos e sobre topologia**

CAP. IV – **Fundamentos da teoria das funções analíticas**

CAP. V – **Revisões e complementos sobre integrais impróprios e sobre integrais paramétricos**

CAP. VI – **Método dos resíduos**

CAP. VII – **Breves noções sobre medida e integral de Lebesgue**

CAP. VIII – **Transformação de Fourier**

CAP. IX – **Transformação de Laplace**