II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

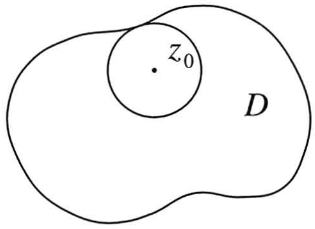
isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência[(1)].

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

---

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[1] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[2]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO VII

BREVES NOÇÕES SOBRE MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE

Já no final do n.º 2 do Capítulo V, aludimos à vantagem de uma generalização do conceito de integral, que englobe, como casos particulares, o *integral de Riemann*, e, na medida do possível, os integrais que se exprimem como somas de um número finito ou numerável de *integrais de Riemann* e de integrais impróprios. Também dissemos que o conceito de *integral de Lebesgue* satisfaz a esse desiderato, se nos limitarmos ao caso dos integrais *impróprios absolutamente convergentes*, o que já é muito importante.

O novo conceito de integral, introduzido por HENRI LEBESGUE na sua tese de doutoramento, em 1902, veio revolucionar a Análise. Na verdade, a *teoria do integral de Lebesgue* e, mais geralmente, a do *integral de Lebesgue-Stieltjes*, tem uma importância vital em Análise moderna e suas aplicações à Física Teórica e ao Cálculo das Probabilidades. Todavia, para desenvolver de maneira conveniente esta teoria, ser-nos-ia necessário, pelo menos, um semestre, destinado exclusivamente a esse fim. Por isso nos limitaremos a indicar, aqui, uma das maneiras mais simples de introduzir o conceito de *integral de Lebesgue*. A orientação que vamos apresentar é devida ao matemático húngaro F. RIESZ. Para as demonstrações e outros complementos, aconselhamos o tratado de F. RIESZ e B. SZ.-NAGY, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, 3.ª edição, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

Como veremos, o *integral de Lebesgue* apresenta-se como limite duma sucessão de *integrais de Riemann* de funções em escada, que tendem para a função integranda "em quase todos os pontos". Para explicar o significado desta expressão "em quase todos os pontos", convém introduzir, previamente, a noção de *medida dum conjunto segundo Lebesgue.* Na realidade, bastar-nos-ia começar pela noção de "medida exterior" e só definir "medida", a partir da própria noção de *integral de Lebesgue* – como fazem RIESZ e NAGY na citada obra. Isso permite simplificar consideravelmente as demonstrações, economizando muito tempo. Mas, como desde logo renunciámos a fazer aqui a maior parte das demonstrações, preferimos dar já a definição de *medida segundo Lebesgue*.

1. Medida de LEBESGUE sobre a recta

Dado um conjunto A de pontos da recta, consideremos uma *cobertura* $\mathscr{H}$ *de* A, formada por um *número finito ou por uma infinidade numerável* de intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, abertos ou não. Chama-se *comprimento total da cobertura* $\mathscr{H}$ à soma dos comprimentos $|I_n|$ destes intervalos:

$$(1) \qquad |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,$$

soma que não depende da ordem das parcelas, visto estas serem números não negativos. Em particular, se a série for divergente, o comprimento total será, por definição, $+\infty$. Posto isto:

DEFINIÇÃO 1.1. *Chama-se medida exterior do conjunto A (segundo Lebesgue), e designa-se por $m_e(A)$, o extremo inferior dos comprimentos totais de todas as coberturas $\mathscr{H}$ de A formadas por um número finito ou numerável de intervalos.*

DEFINIÇÃO 1.2. *Chama-se medida interior dum conjunto limitado A, e representa-se por $m_i(A)$, ao número $|I| - m_e(I-A)$, em que I designa qualquer intervalo limitado que contenha A.*

Ponhamos, agora, $I_n = [-n, n]$, para $n = 1, 2, \ldots$.

DEFINIÇÃO 1.3. *Chama-se medida interior dum conjunto A ilimitado ao limite, finito ou infinito, da medida interior de* $A \cap I_n$*, quando* $n \to \infty$.

Prova-se que é

$$(1) \qquad m_e(A) \geqslant m_i(A) \geqslant 0, \qquad \forall A \subset \mathbf{R}.$$

DEFINIÇÃO 1.4. *Diz-se que um conjunto A é mensurável quando* $m_e(A) = m_i(A)$. *Chama-se, então, medida de A e representa-se por* $m(A)$ *o número* $m_e(A) = m_i(A)$.

É bem fácil reconhecer que, segundo as definições anteriores, todo o intervalo limitado I é mensurável, tendo-se, precisamente, $m(I) = |I| = b - a$ (sendo a e b os extremos de I).

A medida dum conjunto $A \subset \mathbf{R}$ também pode chamar-se *comprimento* de A e designar-se por $|A|$. *Mas esta terminologia só é aplicável a conjuntos de pontos da recta, enquanto o termo "medida" e a notação* $m(A)$ *se estendem a subconjuntos A dum espaço* $\mathbf{R}^n$ *qualquer*, como veremos.

De (1) resulta que, se for $m_e(A) = 0$, o conjunto A é mensurável, sendo $m(A) = 0$. Aos conjuntos de medida nula chamaremos conjuntos *menosprezáveis*. Convém, desde já, notar que:

PROPOSIÇÃO 1.1. *Todo o conjunto finito ou numerável é menosprezável.*

Com efeito, se forem $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, os pontos de um tal conjunto, este é coberto pelos intervalos

$$I_1 = [a_1, a_1], I_2 = [a_2, a_2], \ldots, I_n = [a_n, a_n], \ldots,$$

e como se tem $|I_n| = 0$ para todo o n, será

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = 0.$$

Também poderíamos cobrir o mesmo conjunto com a sucessão de intervalos abertos $I_n =]a_n - \varepsilon/2^n, a_n + \varepsilon/2^n[$, sendo $\varepsilon > 0$; então, o comprimento total da cobertura é 2ε e tende para zero com ε.

Em particular: *o conjunto dos números racionais é menosprezável.*

Demonstra-se, ainda, a seguinte propriedade fundamental da *medida segundo Lebesgue*:

TEOREMA 1.1. *A reunião de um número finito ou numerável de conjuntos mensuráveis, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, ainda é um conjunto mensurável, e, se os conjuntos dados forem disjuntos dois a dois, tem-se*:

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = m(A_1) + m(A_2) + \ldots$$

Exprime-se este facto dizendo que a medida $m(A)$ é uma função *numeravelmente aditiva* (ou *σ-aditiva*) de conjunto, definida na classe dos conjuntos A mensuráveis.

Relação entre a medida à Lebesgue e a medida à Jordan.

O conceito de medida estudado na Cadeira de Cálculo Infinitesimal é devido a C. JORDAN. Pois bem, dizem-se *conjuntos mensuráveis* (J) os conjuntos *mensuráveis segundo Jordan* e chama-se *medida* (J) à sua medida nesse sentido. Por outro lado, dizem-se conjuntos *mensuráveis* (L) os conjuntos *mensuráveis segundo Lebesgue* e chama-se *medida* (L) a sua *medida à Lebesgue.*

Demonstra-se, porém, que todo o *conjunto mensurável* (J) *também é mensurável* (L) *e a sua medida* (J) *coincide com a sua medida* (L). A recíproca é que não é verdadeira; por exemplo, o conjunto dos números racionais não é mensurável (J), mas é mensurável (L), com medida nula (visto ser numerável). Aliás, o TEOREMA 1.1 não é válido para a medida (J): esta apenas é uma função *finitamente aditiva* de conjunto.

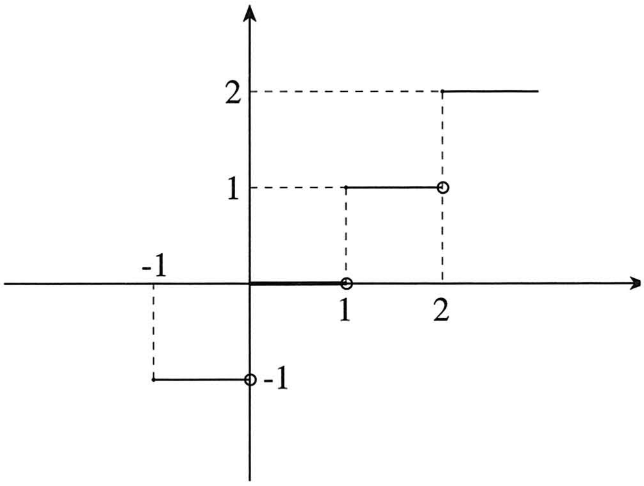
O conceito de *conjunto mensurável* (L) é extremamente geral. Pode bem dizer-se que, praticamente, *todos os conjuntos são mensuráveis* (L). Na verdade, os conjuntos *não mensuráveis segundo Lebesgue* são de tal modo irregulares, que não se consegue definir explicitamente um tal conjunto. Apenas se sabe demonstrar a existência *teórica* de conjuntos não mensuráveis (L), aplicando o axioma de Zermelo. Equivale isto a dizer que todos os conjuntos que se nos podem apresentar concretamente são, com certeza, mensuráveis (L).

Daqui por diante, diremos simplesmente *mensurável* em vez de *mensurável* (L) e *medida* em vez de *medida* (L).

2. Funções em escada. Funções fundamentais

Diz-se que uma função φ, real ou complexa, é uma *função em escada* num intervalo I qualquer, quando todo o subintervalo limitado de I se decompõe num número finito de intervalos em cada um dos quais φ se reduz a uma constante.

Por exemplo, a função $C(x)$ (*característica* de x ou *parte inteira* de x) é tipicamente uma função em escada.



Imediatamente se reconhece que as funções em escada são seccionalmente contínuas (ver Capítulo V, n.º 2).

Seja I um intervalo qualquer da recta, limitado ou ilimitado, aberto ou não, de extremos a, b. Chamaremos *função fundamental em I* toda a função φ em escada nesse intervalo que só é diferente de zero num número finito de intervalos limitados contidos em I. Deste modo, existe um número finito de intervalos limitados e disjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_p$, contidos em I tais que φ toma um valor constante c_k em cada intervalo $I_k (k = 1, 2, \ldots)$, sendo nula nos restantes pontos de I, se os houver. Então, de acordo com as convenções usuais, a soma

$$\sum_{k=1}^{p} c_k |I_k|$$

será chamada *integral* de φ *em I* e designada por

$$\int_a^b \varphi(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_I \varphi(x)dx.$$

É óbvio que toda a função em escada num intervalo I *limitado* é uma função fundamental em I. Mas o mesmo não sucede, se I é ilimitado; por exemplo, a função $C(x)$ não é fundamental na recta. Assim, a distinção entre os dois conceitos só aparece quando o intervalo I é ilimitado.

3. Funções mensuráveis

Daqui por diante, usaremos muitas vezes a expressão "*em quase todos os pontos*", tradução do francês "*presque partout*" e do inglês "*almost everywhere*". Diremos que uma dada propriedade se verifica em *quase todos os pontos dum conjunto A,* quando se verifica em todos os pontos de A, excepto, quando muito, num sub-conjunto menosprezável de A. Assim:

– duas funções f e g são iguais *em quase todos os pontos de* A, se for $f(x) = g(x)$ em todos os pontos x de A, excepto, quando muito, nos pontos dum sub-conjunto menosprezável de A;

– uma sucessão φ_n de funções converge *em quase todos os pontos de* A para uma função f, se

$$\lim \varphi_n(x) = f(x)$$

em todos os pontos x de A, excepto, quando muito, num sub-conjunto menosprezável de A; etc., etc.

Posto isto:

DEFINIÇÃO 3.1. *Diz-se que uma função f é mensurável num intervalo I, quando existe, pelo menos, uma sucessão φ_n de funções fundamentais em I, que converge para f em quase todos os pontos de I.*

É claro que, segundo esta definição, uma função mensurável em I pode não ser definida em todos os pontos de I: *basta que seja definida em quase todos os pontos de I.*

Como exercício, pode verificar-se que uma *função contínua* sobre um intervalo *I qualquer é mensurável em I.*

Aliás, o que dissemos, atrás, acerca de conjuntos não mensuráveis aplica-se, *mutatis mutandis,* às funções não mensuráveis: só teoricamente, admitindo o axioma de Zermelo, se demonstra a existência de tais funções, o que redunda em dizer que, *praticamente*, todas as funções são mensuráveis.

Pode mesmo dizer-se que a classe das funções mensuráveis ultrapassa, largamente, as necessidades da Análise: poderíamos contentar-nos com uma classe de funções bem mais restrita.

Designaremos por M_I a classe das funções mensuráveis em I.

NOTA. O termo "*função mensurável*" provém da primitiva definição deste conceito, dada por LEBESGUE:

Diz-se que uma função f é *mensurável num intervalo I,* quando, qualquer que seja o número real c, o conjunto dos pontos x de I tais que $f(x) < c$ é mensurável.

Prova-se que esta definição é equivalente à anterior.

4. Funções somáveis. Integral de LEBESGUE

A definição de *integral de Lebesgue*, dada por F. RIESZ para funções reais, assenta nos dois seguintes lemas:

LEMA 1. *Se uma sucessão φ_n de funções fundamentais num intervalo I é decrescente em sentido lato e tende para zero em quase todos os pontos de I, a sucessão dos integrais*

$$\int_I \varphi_n(x)dx$$

também tende para zero.

LEMA 2. *Se uma sucessão φ_n de funções fundamentais em I é crescente em sentido lato, e se a sucessão dos respectivos integrais*

$$\int_I \varphi_n(x)dx$$

é limitada superiomente, a sucessão φ_n converge em quase todos os pontos x de I para um limite $f(x)$ finito (podendo tender para infinito em pontos dum sub-conjunto menosprezável de I).

Para as demonstrações, ver RIESZ e NAGY, obra cit., p. 30-31.

DEFINIÇÃO 4.1. *Diz-se que uma função real* $f \geqslant 0$ *é somável (ou integrável segundo Lebesgue) num intervalo I, quando é limite, em quase todos os pontos de I, duma sucessão* φ_n *de funções fundamentais em I, que verificam a hipótese do* LEMA 2. *Designaremos por* L_I^+ *a classe das funções reais não negativas somáveis em I.*

Como, na hipótese do LEMA 2, a sucessão dos valores dos integrais

$$\int_I \varphi_n(x)dx$$

é limitada e crescente em sentido lato, esta sucessão tende para um limito finito, a que é natural chamar o *integral de f em I* e designar pelas notações usuais. Teremos, pois, neste caso, *por definição*:

$$\boxed{\int_I f(x)dx = \lim \int_I \varphi_n(x)dx.}$$

Para legitimar esta definição, resta provar que o limite do segundo membro não muda quando se substitui a sucessão φ_n por uma outra sucessão ψ_n do mesmo tipo, que tenda para f em quase todos os pontos de I. Ora, isso consegue-se aplicando o LEMA 1 (obra cit. p. 31-32). Fica assim provado que *o integral de f em I tem um valor único*.

Seja, agora, f uma função real qualquer definida em quase todos os pontos de I. Chama-se *parte positiva* de f a função f^+ assim definida

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{quando} \quad f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{quando} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Chama-se *parte negativa* de f, e designa-se por f^-, a parte positiva de $-f$. É fácil ver que

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{quando} \quad f(x) \leqslant 0, \\ 0, & \text{quando} \quad f(x) > 0, \end{cases}$$

$$f = f^+ - f^-, \quad \text{e que} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Pois bem:

DEFINIÇÃO 4.2. *Diz-se que f é somável (ou integrável segundo Lebesgue) no intervalo I, quando a sua parte positiva e a sua parte negativa pertencem ambas à classe L_I^+. Nesta hipótese, chama-se integral de f em I, e representa-se por qualquer das notações usuais, o número*

$$\int_I f(x)dx = \int_I f^+(x)dx - \int_I f^-(x)dx.$$

Estas noções estendem-se imediatamente ao caso de funções complexas f de variável real. Com efeito, pondo $\mathrm{Re}f = f_1$, $\mathrm{Im}f = f_2$, a função f diz-se *somável em I*, quando f_1 e f_2 o são, e põe-se, por definição:

$$\int_I f(x)dx = \int_I f_1(x)dx + i\int_I f_2(x)dx.$$

A classe de todas as funções somáveis em I costuma ser designada por L (por ser L a inicial de "Lebesgue"). Muitas vezes, quando está subentendido o intervalo I de que se trata, omite-se a indicação deste em índice; esta omissão costuma fazer-se, principalmente, quando I é toda a recta $\mathbf{R}$, isto é, o intervalo $]-\infty, +\infty[$. Em circunstâncias análogas omite-se a indicação do intervalo no integral, escrevendo:

$$\int f(x)dx \quad \text{em vez de} \quad \int_I f(x)dx,$$

sendo então necessário não confundir o integral considerado com um *integral indefinido de f*.

Também por vezes, a fim de aligeirar a escrita, se escreve, simplesmente,

$$\int_I f \quad \text{em vez de} \quad \int_I f(x)dx.$$

Usaremos com frequência a notação simplificada

$$\int_I f.$$

É óbvio que as funções da classe L_I^+, e, portanto, todas as funções somáveis em I, são mensuráveis em I, isto é, tem-se:

$$L_I^+ \subset L \subset M \ .$$

Mas a recíproca não é verdadeira, como resulta do seguinte exemplo:

EXERCÍCIO – Provar que *a função* $1/x$ *é mensurável na recta, mas não é somável em nenhum intervalo que contenha a origem.*

NOTA. A definição dada por LEBESGUE do integral que tem o seu nome é diferente da anterior e pode apresentar-se nos seguintes termos:

Seja f uma função *mensurável* no intervalo I e consideremos uma decomposição do intervalo $]-\infty, +\infty[$, por meio duma infinidade numerável de pontos:

$$\ldots < c_{-2} < c_{-1} < c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$$

tais que $c_n - c_{n-1} \leqslant \delta$, $\forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, sendo δ um número > 0. Do facto de f ser mensurável, resulta que cada conjunto A_n dos pontos x de I tais que

$$c_{n-1} \leqslant f(x) < c_n$$

é mensurável, qualquer que seja n. Pois bem, a função f diz-se *somável em I*, quando a série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n m(A_n)$$

é convergente para algum $\delta \to 0$. Nesta hipótese, chama-se integral de f em I ao limite da soma da série quando $\delta \to 0$. Ter-se-á, neste caso, por definição:

$$\int_I f = \lim_{\delta \to 0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n m(A_n) \right).$$

Prova-se que esta definição é equivalente à anterior (obra cit., p. 95-96). É, contudo, menos manejável, exigindo demonstrações mais difíceis.

5. Propriedades do integral de LEBESGUE

Das DEFINIÇÕES 4.1. e 4.2. deduzem-se, facilmente, as seguintes propriedades:

1) *Se* f *e* g *são somáveis em* I *e* α *é uma constante numérica, também* $f+g$ *e* αf *são somáveis em* I *e tem-se*:

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g, \quad \int_I \alpha f = \alpha \int_I f.$$

2) *Dados três números* $a<c<b$, *se* f *é somável em* $I_1=[a, c]$ *e em* $I_2=[c, b]$, *também é somável em* $I=[a, b]$ *e tem-se*

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

3) *Sendo* f *e* g *somáveis em* I, *então*

$$f \leqslant g \quad em \quad I \Rightarrow \int_I f \leqslant \int_I g.$$

4) f *é somável em* I, *se e só se* $|f|$ *o for, tendo-se, então,*

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

5) *Se* $|f| \leqslant g$, *sendo* f *mensurável e* g *somável em* I, *também* f *é somável em* I.

As demonstrações destas propriedades são simples exercícios. Dentre estas, só a última não se verifica para o *integral de Riemann*.

A propriedade 1) exprime-se dizendo que o integral é um *funcional linear* (mais tarde estudaremos o conceito de *funcional*).

A propriedade 3) exprime-se dizendo que o integral é um *funcional crescente* (*em sentido lato*). Esta propriedade é uma consequência imediata da DEFINIÇÃO 4.1 e da propriedade 1). Analogamente, a propriedade 4) é uma consequência de 1) e da DEFINIÇÃO 4.2.

A propriedade 2) exprime-se dizendo que o integral é uma *função aditiva de intervalo*. Mas demonstra-se mais geralmente a seguinte propriedade, que não se verifica para o *integral de Riemann*:

2′) *Se I é a reunião de uma infinidade numerável de intervalos I_n disjuntos dois a dois* ($n=1, 2, \ldots$) *e se f é somável em I, tem-se*

$$\int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f .$$

Exprime-se este facto dizendo que o *integral de Lebesgue* é uma *função numeravelmente aditiva* de intervalo.

Uma outra propriedade elementar do *integral de Lebesgue*, que resulta imediatamente da sua definição, é a seguinte:

6) *Se f é uma função somável em I, qualquer outra função g que seja igual a f em quase todos os pontos de I também é somável neste intervalo e tem-se*:

$$\int_I f = \int_I g .$$

Em particular, se I for um intervalo aberto $]a, b[$, o integral de f em $\bar{I}=[a, b]$ é o mesmo, tendo-se

$$\int_I f = \int_{\bar{I}} f = \int_a^b f .$$

Importa notar que o produto de duas funções somáveis pode não ser somável.

Por exemplo, a função $1/\sqrt{x}$ é somável em $[0, 1]$ e, contudo, a função $(1/\sqrt{x})(1/\sqrt{x}) = 1/x$ não o é. Porém, de 1), 4) e 5) deduz-se que:

Se f é somável em I, sendo g limitada e mensurável, também fg é somável em I.

Com efeito, de $|g|<M$, resulta $|fg|<M|f|$.

(Note-se que a soma e o produto de funções mensuráveis são sempre funções mensuráveis).

Chama-se *valor médio duma função f num intervalo limitado I*, de extremos *a, b,* ao número:

$$k = \frac{\int_I f}{|I|} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Mais geralmente, sendo φ uma função não negativa somável em I tal que $f\varphi$ também o seja, chama-se *valor médio de f relativamente a φ* ao número:

$$k = \frac{\int_I f\varphi}{\int_I \varphi}.$$

Estas noções de valor médio são muito usadas em Física e no Cálculo das Probabilidades (sendo φ a função *densidade de probabilidade*).

De 1) e de 3) resulta o

PRIMEIRO TEOREMA DA MÉDIA. *O valor médio duma função f num intervalo* (*relativamente a outra função*) *está sempre compreendido entre os extremos inferior e superior de f nesse intervalo.*

Por sua vez, de 3) e de 4), deduz-se a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL:

$$|f| \leqslant M \Rightarrow \left| \int_I f \right| \leqslant M|f|.$$

Relações com o integral de Riemann e com os integrais impróprios.

Demonstra-se facilmente o seguinte facto (obra cit., p. 33):

Se f é uma função integrável à Riemann num intervalo I limitado, f é somável em I e o integral de Lebesgue de f em I coincide com o integral de Riemann de f em I.

Porém, a recíproca não é verdadeira, mesmo que a função f seja limitada em I. Por exemplo, a *função de Dirichlet*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é irracional,} \\ 0, & \text{se } x \text{ é racional,} \end{cases}$$

não é *integrável à Riemann* em nenhum intervalo limitado $[a, b]$, com $a < b$ (o integral inferior é 0 e o superior é $b - a$), mas é somável em qualquer desses intervalos, *visto que é igual a* 1 *em quase todos os pontos* (o conjunto dos números racionais tem medida nula).

Aliás, da propriedade 5) resulta imediatamente que:

Toda a função mensurável limitada num intervalo I limitado é somável em I.

Observemos, agora, que todo o integral impróprio num intervalo I, limitado ou ilimitado, se exprime como série de *integrais de Riemann*, numa sucessão de intervalos I_n cuja reunião é I. Assim, atendendo a 2′) e a 4), chegamos à seguinte conclusão *muito importante*, que já se tinha anunciado:

Se a expressão

$$\int_I f(x)dx$$

*é um integral impróprio, de tipo simples ou de tipo misto, como os que foram considerados nos n.*ᵒˢ *1 e 2 do Capítulo* V, *a função f é somável em I, se e só se o integral é absolutamente convergente. O valor deste coincide, então, com o integral de Lebesgue de f em I.*

Assim, *se o integral*

$$\int_I f(x)dx$$

é simplesmente convergente ou divergente, a função f não é somável em I.

Portanto, neste caso e só neste, a teoria do *integral de Lebesgue* não consegue englobar a dos integrais impróprios no sentido clássico.

Critério de permutabilidade entre os símbolos de limite e de integral.

No *integral de Lebesgue*, a passagem ao limite sob sinal de integral pode fazer-se com uma extrema liberdade, que não exclui, todavia, certas precauções. Tem lugar o seguinte

TEOREMA DE LEBESGUE. *Se uma sucessão f_n de funções somáveis em I converge em quase todos os pontos para uma função g e se, além disso, existe uma função* μ *somável em I tal que*

$$|f_n(x)| \leq \mu(x), \quad \forall x \in I, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

então, g é também somável em I e tem-se

$$\lim \int_I f_n = \int_I g = \int_I (\lim f_n).$$

Para a demonstração, ver obra cit., p. 36-37.
Em particular:

COROLÁRIO. *Se uma sucessão f_n de funções somáveis num intervalo limitado I é limitada em I, e converge para uma função g em quase todos os pontos deste intervalo, então, g é somável em I e tem-se*

$$\lim \int_I f_n = \int_I g.$$

Com efeito, dizer que a sucessão f_n é limitada em I equivale a dizer que existe uma constante M tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ora, sendo *I limitado*, a função $\mu(x) \equiv M$ é somável em I. *Mas note-se que o* COROLÁRIO *deixa de ser válido em intervalos ilimitados.*

Do TEOREMA DE LEBESGUE deduzem-se *critérios relativos a integrais paramétricos* bastante mais gerais do que os apresentados no Capítulo V, por meio da noção de convergência uniforme. Por exemplo:

I) CONTINUIDADE. *Se, para quase todos os valores de x em I, a função $f(x, t)$ de t é contínua num ponto t_0 e se existe uma função $\mu(x)$ somável em I tal que*

$$|f(x, t)| \leqslant \mu(x)$$

para todo $x \in I$ e todo o t numa vizinhança de t_0, então,

$$\lim_{t \to t_0} \int_I f(x, t)dx = \int_I f(x, t_0)dx,$$

o que significa que a função de t definida pelo 1.º *integral também é contínua em t_0.*

II) DERIVAÇÃO. *Se, para quase todos os valores de x em I e para um valor fixo de t, são verificadas as condições*:

1) *A derivada parcial* $D_t f(x, t)$ *existe*;

2) *Existe uma função $\lambda(x)$ somável em I e um número $\delta > 0$ independente de x tais que*

$$\left|\frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h}\right| \leqslant \lambda(x), \quad para \quad x \in I, \quad 0 < |h| < \delta,$$

então,

$$D_t \int_I f(x, t)dx = \int_I D_t f(x, t)dx.$$

6. Integrais indefinidos. Funções absolutamente contínuas

Seja I um intervalo qualquer da recta. Diz-se que uma função f é *localmente somável* em I, quando é somável em todo o intervalo compacto (limitado e fechado) contido em I. Em particular, se o próprio intervalo I é compacto, dizer que f é localmente somável em I equivale a dizer que f é somável em I.

Por exemplo, a função $1/x$ é localmente somável (mas não somável) no intervalo $]0, +\infty[$; mas não é localmente somável em nenhum intervalo que contenha a origem.

Também a função $\log|x|$ é localmente somável (mas não somável) em toda a recta, apesar de ter um pólo na origem.

DEFINIÇÃO 6. 1. *Chama-se integral indefinido duma função f localmente somável em I, a toda a função F da forma*

$$F(x) = k + \int_c^x f(t)dt, \quad \forall x \in I,$$

sendo k uma constante arbitrária e c um ponto arbitrário de I.

Demonstra-se o seguinte teorema, que é a generalização do TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL ao caso do *integral de Lebesgue*:

TEOREMA 6.1. *Se F é um integral indefinido da função f localmente somável em I, F é contínua em I e admite, em quase todos os pontos x de I, derivada* $F'(x) = f(x)$ (obra cit. p. 47-48).

Por este facto, os integrais indefinidos da função f serão chamados também, *funções primitivas* de f ou, simplesmente, *primitivas* de f.

Mas note-se que nem todas as funções contínuas são primitivas de funções localmente somáveis: basta lembrar que existem funções contínuas que não admitem derivada em nenhum ponto. Para caracterizar, entre as funções contínuas, aquelas que são primitivas de funções localmente somáveis, há que recorrer ao conceito de *variação total duma função num intervalo.*

Dada uma função f definida num intervalo limitado $J = [a, b]$, chama-se *variação total de f em J*, e designa-se por $V_f(J)$, o extremo superior das somas

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

relativas a todas as possíveis decomposições de I por meio dum número finito de pontos x tais que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Se $V_f(J)$ é finita, diz-se que f é *uma função de variação limitada em J.*

Posto isto:

DEFINIÇÃO 6.2. *Sendo I um intervalo qualquer da recta, diz-se que uma função f é absolutamente contínua num ponto x_0 de I, quando a variação total de f num intervalo* $[x_0, x]$, *sendo* $x > x_0$ *ou* $x < x_0$, *tende para zero com* $x - x_0$; *isto é, quando*

$$\lim_{x \to x_0} V_f([x_0, x]) = 0\,.$$

Diz-se que f é absolutamente contínua sobre I, quando a sua restrição a I é absolutamente contínua em todos os pontos de I.

É imediato que, se f é absolutamente contínua em x_0, f é contínua em x_0, e que, se f é absolutamente contínua em I, f é de variação limitada em todo o sub-intervalo compacto de I (*funções de variação localmente limitada em I*).

Também é evidente que, *se f verifica a* CONDIÇÃO DE LIPSCHITZ:

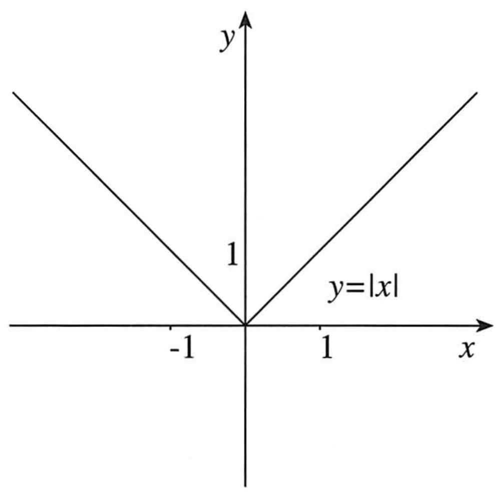
$$|f(x) - f(x')| \leqslant C_J |x - x'|, \quad (C_J \text{ constante}),$$

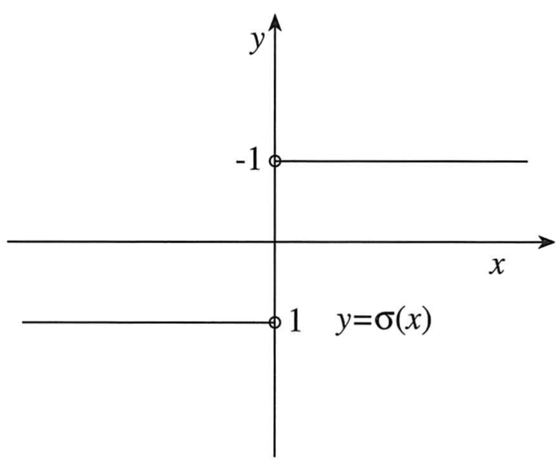
em todo o intervalo compacto $J \subset I$, *f é absolutamente contínua em I.*

Pois bem, demonstra-se o seguinte

TEOREMA 6.2. *Condição necessária e suficiente para que uma função F seja primitiva duma função localmente somável em I é que F seja absolutamente contínua em I* (obra cit., p. 50-52).

Assim, há identidade entre *funções absolutamente contínuas* e *funções primitivas de funções localmente somáveis*.





Um exemplo muito simples de função absolutamente contínua é a função $|x|$, que verifica, manifestamente, a CONDIÇÃO DE LIPSCHITZ: $\| x|-|x'\| \leqslant |x-x'|$. Esta função admite derivada em *quase todos os pontos da recta* (na verdade, em todos, excepto a origem), sendo essa derivada, em cada ponto $x \neq 0$, igual à função *sinal de* x:

$$\sigma(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \ \ 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por outro lado, é evidente que a função $\sigma(x)$ é localmente somável, sendo $|x|$ precisamente uma sua primitiva (integral entre 0 e x)[(1)].

Do TEOREMA 6.1 e da propriedade 6) do integral (n.º 5) resulta, logo, que:

TEOREMA 6.3. *Condição necessária e suficiente para que duas funções f_1 e f_2, localmente somáveis em I, tenham uma mesma função primitiva neste intervalo é que seja $f_1(x)=f_2(x)$ em quase todos os pontos de I.*

Que a condição é suficiente, mostra-o a propriedade 6) do *integral de Lebesgue* atrás enunciada (n.º 5).

Para reconhecer que a condição é necessária, basta lembrar que, se F é uma primitiva de f_1 e f_2, então, segundo o TEOREMA 6.1, existem dois sub-conjuntos M e N de I menosprezáveis tais que

$$F'(x)=f_1(x) \ \text{ em } \ I \setminus M \ \text{ e } \ F'(x)=f_2(x) \ \text{ em } \ I \setminus N$$

e, portanto, será $f_1(x)=f_2(x)$ em todos os pontos de I, excepto, quando muito, no conjunto menosprezável $M \cup N$.

7. Integração por partes e integração por substituição

A regra de integração por partes estende-se ao *integral de Lebesgue* com o seguinte aspecto:

TEOREMA 7.1. *Se f e g são funções somáveis em I, então, designando por F e G funções primitivas das primeiras, também Fg e fG são somáveis em I e tem-se*

---

(1) A função *sinal de x* é designada, muitas vezes, pela notação $\operatorname{sgn} x$.

$$\int_I Fg = [FG] - \int_I fG$$

em que $[FG] = F(b)G(b) - F(a)G(a)$, *sendo a, b os extremos de I* (obra cit., p. 54-55).

Quanto à integração por substituição (ou mudança de variável no integral), tem-se:

TEOREMA 7.2. *Se* $\varphi(t)$ *é uma função monótona em sentido lato e absolutamente contínua num intervalo J, e se, por outro lado,* $f(x)$ *é uma função somável no intervalo I, transformado de J por* φ, *também a função* $f(\varphi(t))|\varphi'(t)|$, *ou seja a função* $(f\circ\varphi)|\varphi'|$, *é somável em J, e tem-se*

$$\int_I f(x)dx = \int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt.$$

(Obra cit., p. 55-56).

Note-se que, se admitirmos, como no caso do *integral de Riemann*, a definição

$$\int_\alpha^\beta f = -\int_\beta^\alpha f, \quad \text{quando} \quad \alpha > \beta,$$

podemos escrever, na hipótese do teorema:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt,$$

sendo *a, b* os extremos de *I* e $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$ os extremos de *J*. É claro que, sendo $a < b$, será $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$, conforme for $\varphi' \geqslant 0$ ou $\varphi' \leqslant 0$ em *J* (φ crescente ou φ descrescente em sentido lato).

Em particular, o método de substituição aplica-se aos integrais impróprios, de tipo simples ou misto, atrás considerados, podendo acontecer que um integral impróprio de 2.ª espécie se transforme num de 1.ª espécie (ou vice-versa) ou mesmo que um *integral impróprio* se converta num *integral próprio de Riemann* – como vimos no Capítulo V, n.º 3.

8. Integral duma função sobre um conjunto mensurável

Temo-nos referido, até aqui, sistematicamente a integrais em intervalos I da recta. Mas pode, mais geralmente, definir-se *integral duma função f sobre um conjunto mensurável da recta.* Seja A um tal conjunto e consideremos a função $f^*(x)$ que é igual a $f(x)$ para $x \in A$ e igual a 0 nos outros pontos da recta. Diz-se que f é somável em A quando f^* é somável na recta, e tem-se, por definição:

$$\int_A f(x)dx = \int_{\mathbf{R}} f^*(x)dx.$$

É manifesto que, se f é somável em A, também o é em todo o sub-conjunto mensurável de A. Tem-se, ainda, o seguinte teorema, que generaliza a propriedade 2′) do n.º 5:

TEOREMA 8.1. *Se A é a reunião de um número finito ou numerável de conjuntos* $A_1, A_2, \ldots,$ *todos mensuráveis e disjuntos dois a dois, sendo f somável em A, tem-se*

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f + \ldots$$

Deste modo, se f é definida e mensurável em $\mathbf{R}$, pondo

$$F(A) = \int_A f \quad \text{ou} \quad F(A) = +\infty,$$

conforme f é somável ou não em A, o teorema mostra que $F(A)$ é uma função *numeravelmente aditiva*, definida na classe dos conjuntos A mensuráveis. Em particular, se $f(x)=1$ para todo o x real, é óbvio que $F(A)=m(A)$ (*medida de A segundo Lebesgue*).

9. Espaço das funções localmente somáveis num intervalo

Como vimos, duas funções complexas f, g, localmente somáveis num intervalo I da recta, podem ser distintas e ter uma mesma função primitiva, isto é, pode acontecer que seja, para todo o $x \in I$:

$$\int_c^x f(t)dt = \int_c^x g(t)dt \qquad (\text{com } c \in I),$$

sendo $f \neq g$. Basta, para isso, que f e g sejam iguais *em quase todos os pontos de* I (TEOREMA 6.3). Por exemplo, as funções:

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \geqslant 0, \end{cases} \quad \sigma_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

são distintas, visto que $\sigma_1(0) = 1$ e $\sigma_2(0) = -1$, mas têm ambas como primitiva a função $|x|$, que também, como vimos, é primitiva da função $\sigma(x)$, atrás considerada (não definida na origem).

Dadas duas funções f, g distintas, com uma mesma função primitiva F, pergunta-se: Será natural dizer que f e g são *funções derivadas* de F e escrever

$$DF = f, \quad DF = g\,?$$

Se assim convencionarmos, uma função absolutamente contínua F passa a ter uma infinidade de funções derivadas, em vez de uma única, e o operador D de derivação deixa de ser unívoco. Ora, isso não convém. Para estabelecer a univocidade do operador de derivação, há que introduzir as seguintes convenções, geralmente adoptadas:

Dadas duas funções f, g, localmente somáveis num intervalo I da recta, diz-se que f e g são *equivalentes* (em I) e escreve-se $f \sim g$, quando $f(x) = g(x)$ *em quase todos os pontos de* I.

A relação assim definida entre funções localmente somáveis é, de facto, uma *relação de equivalência*. Que a relação é reflexiva e simétrica, é evidente. Para ver que é transitiva, consideremos três funções, f, g, h, tais que $f(x) = g(x)$ em quase todos os pontos de I e $g(x) = h(x)$ em quase todos os pontos de I. Quer isto dizer que existem conjuntos menosprezáveis M e N tais que

$$f(x) = g(x), \ \forall x \in I \setminus M, \qquad g(x) = h(x), \ \forall x \in I \setminus N.$$

Mas, então, será

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in I \setminus (M \cup N),$$

e, como o conjunto $M \cup N$ também é menosprezável, conclui-se que $f(x) = g(x)$ em quase todos os pontos de I.

Por exemplo, tem-se $\sigma \sim \sigma_1$ e $\sigma_1 \sim \sigma_2$.

Posto isto, sendo f uma função localmente somável em I (definida em quase todos os pontos de I), designaremos por $[f]$ a *classe* de todas as funções equivalentes a f, no sentido acima precisado. Assim, será, por definição:

$$[f] = [g] \Leftrightarrow f \sim g,$$

o que não quer dizer que seja $f = g$.

Por exemplo:

$$[\sigma] = [\sigma_1] = [\sigma_2].$$

Designaremos por $\dot{L}_I$ o conjunto de todas as classes de equivalência $[f]$, de funções complexas localmente somáveis em I. Em $\dot{L}_I$ define-se naturalmente uma adição do modo seguinte:

Dadas duas funções f, g, localmente somáveis em I (definidas em quase todos os pontos de I), tem-se, por definição:

$$(1) \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

em todo o ponto x de I em que f e g são ambas definidas. Ora, é fácil verificar o seguinte facto

$$f \sim f^* \wedge g \sim g^* \Rightarrow f + g \sim f^* + g^*.$$

Deste modo, a cada par de classes $[f]$ e $[g]$, pertencentes a $\dot{L}_I$, corresponde a classe $[f+g]$, *que não depende das funções f e g representativas das primeiras*, visto que, se for $[f] = [f^*]$ e $[g] = [g^*]$, será também $[f+g] = [f^* + g^*]$. É natural, então, dizer que a classe $[f+g]$ é a *soma* das classes $[f]$ e $[g]$, e escrever, *por definição*:

$$(2) \qquad [f] + [g] = [f+g].$$

A adição assim definida em $\dot{L}_I$ é, não só *sempre possível e unívoca* (como acabamos de provar), mas também associativa, comutativa e reversível, como facilmente se reconhece: *o conjunto* $\dot{L}_I$ é, *pois, um grupo comutativo relativamente à adição assim definida.*

Analogamente, chama-se *produto de um número complexo* α *por uma classe* $[f]\in\dot{L}_I$, e designa-se por $\alpha[f]$, o elemento de $\dot{L}_I$ assim definido:

$$\alpha[f]=[\alpha f], \tag{3}$$

e que não depende, manifestamente, da função f escolhida para representante da classe.

Não é agora difícil reconhecer que:

TEOREMA 9.1. *Relativamente às operações de adição e de produto por escalares definidas por* (2) *e* (3), *o conjunto* $\dot{L}_I$ *é um espaço vectorial complexo.*

Posto isto, é natural que chamemos *derivada de uma função absolutamente contínua* F em I à classe de todas as funções f localmente somáveis de que F é primitiva e que, segundo o TEOREMA 6.3, são equivalentes entre si. Escreveremos, então:

$$DF=[f].$$

Assim, fica restabelecida, como pretendíamos, a univocidade do operador D, visto que a derivada de F é um *ente único* (a classe $[f]$), em vez de uma *infinidade de entes* (as funções f, g, ...), muito embora o primeiro ente seja formado pelos segundos.

Mas são as funções absolutamente contínuas elementos de $\dot{L}_I$? Na realidade, não o são, visto que os elementos deste espaço são *classes de funções* e não *funções*. Por exemplo, a *função de Dirichlet*:

$$d(x)=1, \text{ se } x \text{ irracional}, \ d(x)=0 \text{ se } x \text{ racional},$$

é equivalente à função $f(x)\equiv 1$, pois que difere desta, apenas, no conjunto dos números racionais, cuja medida é nula: ambas representam, portanto, um mesmo elemento de $\dot{L}_I$, muito embora a segunda seja absolutamente contínua e a primeira descontínua em todos os pontos.

Note-se, entretanto, que a função $F(x) \equiv x$, primitiva comum das duas funções consideradas, admite como derivada 1 *em todos os pontos*. Assim, a função $f(x) \equiv 1$ é uma *representante privilegiada* (contínua) da classe a que pertence a *função de Dirichlet.*

Dum modo geral, consideremos uma classe $[f]$, representada por *qualquer* função f localmente somável em I. Então, a função

$$F(x) \equiv \int_c^x f(t)dt, \quad \text{com } c \in I,$$

é uma primitiva de f, portanto uma função absolutamente contínua, que admite derivada igual a $f(x)$ *em quase todos os pontos de I*. Pois bem, chamaremos *representante típica da classe* $[f]$ à função φ que verifica a seguinte condição:

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt,$$

em todo o ponto x de I em que F admite derivada finita, não sendo φ *definida nos restantes pontos*. Diremos ainda, neste caso, que φ é uma função *localmente somável típica*, ou, simplesmente, uma *função típica* (em I).

Assim, uma função φ será típica em I, se e só se for

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x \varphi(t)dt$$

em todo o ponto x de I em que existe e é finita a derivada, não sendo φ definida nos restantes pontos.

Por exemplo, a representante típica da classe $[\sigma_1] = [\sigma_2]$ é a função σ, pois que $\sigma(x)$ coincide com a derivada de $|x|$ em todo o ponto $x \neq 0$ (em que esta função admite derivada finita), não sendo definida no ponto $x = 0$ (em que a função $|x|$ não admite derivada).

Analogamente se reconhece que a função igual a $\log|x|$ para $x \neq 0$, *e não definida na origem*, é uma função localmente somável típica (na recta).

Chamaremos *pontos excepcionais* duma função típica aos pontos em que essa função não é definida (comparáveis aos pontos singulares duma função analítica). Imediatamente se reconhece que:

PROPOSIÇÃO 9.1. *Toda a função definida e contínua em I é uma função típica sem pontos excepcionais.*

É natural, agora, chamar soma de duas funções típicas φ, ψ (em I), e designar por $\varphi + \psi$, a representante típica da classe $[\varphi + \psi]$. Mas note-se que esta noção de soma não é equivalente à definida por (1). Por exemplo, a soma das funções $\sigma(x)$ e $1-\sigma(x)$, segundo (1), será a função igual a 1 para $x \neq 0$ *e não definida na origem*, enquanto a soma típica das duas primeiras é a função igual a 1 em todos os pontos.

Por outro lado, é óbvio que, se for α um número complexo e φ uma função típica, também $\alpha\varphi$ será uma função típica, representante da classe $[\alpha\varphi] = \alpha[\varphi]$.

Destes factos resulta imediatamente que:

PROPOSIÇÃO 9.2. *As funções localmente somáveis típicas em I formam um espaço vectorial isomorfo a* $\dot{L}_I$.

Daqui por diante designaremos o espaço das funções típicas em I pela mesma notação $\dot{L}_I$ e ao chamar-lhe o *espaço das funções localmente somáveis em I*, subentende-se que se trata de funções típicas.

Com esta convenção já podemos dizer que as funções contínuas em I formam um sub-espaço vectorial de $\dot{L}_I$:

$$C_I \subset \dot{L}_I$$

e que toda a função absolutamente contínua F admite, como derivada, uma única função localmente somável típica φ:

$$DF = \varphi .$$

Assim, a univocidade do operador de derivação é restabelecida de maneira mais natural: a derivada duma função absolutamente contínua fica a ser uma determinada função (típica), em vez de uma classe de funções.

10. Espaços L^p. Espaços de HILBERT

Sendo p um número real $\geqslant 1$, diz-se que uma função f é *de potência p somável* num intervalo I quando a função $|f(x)|^p$ é somável em I. Prova-se que:

Se f é de potência p somável em I, f é localmente somável em I.

Mas a recíproca não é verdadeira, mesmo quando I é compacto: por exemplo, a função $1/\sqrt{x}$ é somável no intervalo $[0, 1]$ e, contudo, a função

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right|^2 = \frac{1}{x}$$

não é somável nesse intervalo.

Por outro lado, pode uma função ser de potência p somável num intervalo I sem ser somável em I. Por exemplo, a função $1/x$ tem quadrado somável no intervalo $[1, +\infty[$ e, contudo, não é somável nesse intervalo.

Visto que toda a função f de potência p somável é localmente somável, podemos sempre substituí-la pela função típica φ equivalente: o integral de $|f|^p$ coincide, manifestamente, com o de $|\varphi|^p$.

Para cada número real $p \geqslant 1$, designa-se por L_I^p a classe de todas as funções complexas de potência p somável em I (funções típicas). Demonstra-se, então, que:

O conjunto L_I^p é um sub-espaço vectorial do espaço $\dot{L}_I$ das funções localmente somáveis em I.

Quando esteja subentendido o intervalo I de que se trata, omite-se, geralmente, a sua indicação em índice (especialmente quando $I = \mathbf{R}$).

Posto isto, prova-se que, pondo

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_I |f|^p}, \quad \forall f \in L^p,$$

fica definida uma função norma em L^p.

Além disso, demonstra-se que:

O espaço normado L^p é completo, portanto um espaço de Banach.

Mais, ainda, se prova que:

O espaço das funções contínuas em I é um sub-conjunto denso de L^p.

Equivale isto a dizer que toda a função $f \in L^p$ se pode obter como limite *em* L^p duma sucessão φ_n de funções contínuas:

$$\lim_{n \to \infty} \|f - \varphi_n\|_p = 0 .$$

Assim, *L_I^p é o completado do espaço C_I para a norma $\|\cdot\|_p$*. (Note-se que, para os diferentes valores de p, as normas $\|\cdot\|_p$ não são topologicamente equivalentes entre si).

A convergência relativa à norma $\|\cdot\|_p$ é chamada *convergência em média de ordem p.*

Os casos mais importantes na prática são aqueles em que $p=1$ e $p=2$.

O espaço L^1 é simplesmente o espaço L das *funções somáveis em I*, e a convergência relativa à norma $\|\cdot\|_1$ é *a convergência em média simples* (ou apenas *convergência em média*).

O espaço L^2 é o espaço das *funções de quadrado somável* e a convergência relativa à sua norma é a *convergência em média quadrática* (também chamada, apenas, *convergência em média*, quando não se considera nenhum outro valor de p).

Espaços de Hilbert.

O espaço L^2 é particularmente importante pelas suas aplicações à Física, sobretudo à Mecânica Quântica. Neste espaço, além da norma, é definido um *produto interno* $<f, g>$ de dois vectores $f, g \in L^2$, por meio da fórmula

$$<f, g> = \int_I f(x)\overline{g(x)}dx,$$

em que $\overline{g(x)}$ designa, para cada valor de x, o número complexo conjugado de $g(x)$.

Desde logo se reconhece que

$$\|f\|_2 = \sqrt{<f, f>}, \quad \forall f \in L^2 .$$

São evidentes as propriedades:

$$<f+g,\, h> = <f,\, h> + <g,\, h>$$
$$<\alpha f,\, g> = \alpha <f,\, g>$$
$$\overline{<f,\, g>} = <g,\, f>$$

quaisquer que sejam $f,\, g \in L^2$ e $\alpha \in \mathbf{C}$.

Destas ainda se deduzem as seguintes:

$$<f,\, g+h> = <f,\, g> + <f,\, h>$$
$$<f,\, \alpha g> = \overline{\alpha} <f,\, g>.$$

Dum modo geral, dado um espaço vectorial complexo E, chama-se *função de produto interno definida em E* toda a função complexa $H(u,\, v)$ de duas variáveis $u,\, v$, vectores de E, que para quaisquer $u, v,\, w \in E$, $\alpha \in \mathbf{C}$ verifique as condições:

1) $H(u+v,\, w) = H(u,\, w) + H(v,\, w)$
2) $H(\alpha u,\, w) = \alpha H(u,\, w)$
3) $H(u,\, v) = \overline{H(v,\, u)}$
4) $H(u,\, u) > 0$
5) $H(u,\, u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Quando se adopta uma determinada noção de produto interno $H(u,\, v)$ num espaço E, é costume designar esse produto interno por qualquer das notações

$$<u,\, v>, \quad <u|v>, \quad u|v, \quad (u,\, v), \quad \text{etc.}$$

Evidentemente, também se podem definir noções de produto interno em espaços vectoriais reais. Basta impor à função $H(u, v)$ a condição de ser real e substituir a condição 3) pela condição

3′) $H(u, v) = H(v,\, u)$ (*simetria* ou *comutatividade*).

Note-se que, a partir da noção de produto interno, se definem as noções de *norma* ou *comprimento* dum vector u e de *ângulo de dois vectores u, v,* por meio das fórmulas:

$$\|u\| = \sqrt{<u, u>},$$

$$\cos(u, v) = \frac{<u, v>}{\|u\| . \|v\|}.$$

Em particular, os vectores u, v dizem-se *ortogonais*, quando $<u, v>=0$.

Assim, um espaço vectorial, munido de uma noção de produto interno, é mais do que um espaço normado: é um espaço geométrico, ao qual se generalizam numerosos teoremas da geometria euclideana, tais como o teorema de Pitágoras, o teorema relativo à soma dos ângulos internos dum triângulo, etc., etc.

Em $\mathbf{R}^n$, costuma definir-se produto interno de dois vectores $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$, pela fómula:

$$<x, y> = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Por sua vez, em $\mathbf{C}^n$ tem-se, por definção:

$$<z, w> = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k.$$

sendo $z=(z_1, \ldots, z_n)$ e $w=(w_1, \ldots, w_n)$.

Chama-se *espaço vectorial euclideano com n dimensões* todo o espaço vectorial E com n dimensões munido duma noção de produto interno. Prova-se que, *nessa hipótese, E é necessariamente isomorfo a* $\mathbf{R}^n$ *ou a* $\mathbf{C}^n$, *conforme for real ou complexo.*

Costuma chamar-se *espaço hilbertiano numérico* e designar-se por ℓ^2, o conjunto de todas as sucessões

$$z=(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$$

de números complexos tais que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$$

é convergente. Prova-se que ℓ^2 é um espaço vectorial complexo[(1)], no qual se define uma noção de produto interno, pondo

$$<z, w> = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w_n} .$$

Dum modo geral, chama-se *espaço hilbertiano* ou *espaço de Hilbert* a todo o espaço vectorial complexo E, munido duma noção de produto interno e que verifica as seguintes condições suplementares:

I) tem um número infinito de dimensões;

II) como espaço métrico, é completo;

III) como espaço topológico, é separável.

Pelo que vimos no Capítulo III, n.º 16, a última condição equivale a dizer que existe em E um conjunto *numerável* B de vectores tal que todo o vector $u \in E$ se exprime como limite de elementos de B.

Prova-se que *todo o espaço hilbertiano* E *é isomorfo a* ℓ^2. Quer isto dizer que se pode definir uma aplicação biunívoca φ de E sobre ℓ^2, que respeita as noções de soma, de produto por escalares e de produto interno; isto é, tal que:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) \\ \varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u) \\ < \varphi(u), \varphi(v) > = < u, v > \end{array}\right\} \quad \forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbf{C}.$$

Assim, todos os espaços de Hilbert são isomorfos entre si.

Em particular, prova-se que *o espaço* L^2 *das funções de quadrado somável num intervalo* I *é um espaço de Hilbert.*

Espaço L^∞.

Costuma designar-se por L^∞ a classe das funções mensuráveis limitadas num intervalo I (portanto, localmente somáveis em I). O conjunto L^∞ é um espaço vectorial, no qual se define uma norma pondo

(1) Também se pode considerar o *espaço hilbertiano real* contido neste.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

O espaço das funções contínuas limitadas em I é um sub-espaço vectorial normado de L^∞, completo como este.

11. Medida e integral em $\mathbf{R}^n$

O que se disse nos números anteriores sobre *medida e integral de Lebesgue* estende-se com aspecto análogo a conjuntos de pontos dum espaço $\mathbf{R}^n$ e a funções complexas de n variáveis reais.

Intervalos n-dimensionais e medida.

No que diz respeito à medida dum conjunto, bastará utilizar, em vez de intervalos de recta, *intervalos n-dimensionais*. Dados dois pontos

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ e } y = (y_1, \ldots, y_n),$$

ambos de $\mathbf{R}^n$, escreveremos

$$x \leqslant y, \qquad \text{quando } x_k \leqslant y_k, \qquad \forall k = 1, \ldots, n,$$

e

$$x < y, \qquad \text{quando } x_k < y_k, \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

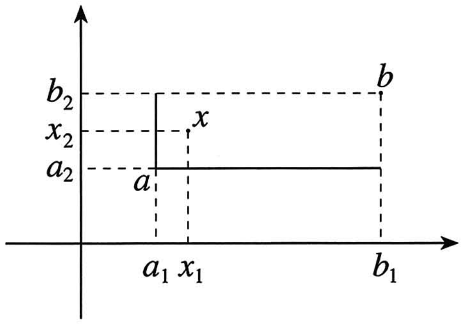
Assim, dados $a, b \in \mathbf{R}^n$, chamaremos intervalo $[a, b]$ ao conjunto dos pontos x tais que $a \leqslant x \leqslant b$; intervalo $[a, b[$ ao conjunto dos pontos x tais que $a \leqslant x < b$, etc. Por sua vez, chamaremos intervalo $[a, \rightarrow[$ ao conjunto dos pontos x tais que $x \geqslant a$, intervalo $]\leftarrow, a]$ ao conjunto dos pontos x tais que $x \leqslant a$, intervalo $]\leftarrow, \rightarrow[$ ao próprio espaço $\mathbf{R}^n$, etc.

Teremos pois, tal como na recta, intervalos *limitados* e intervalos *ilimitados*, intervalos *abertos*, intervalos *fechados* e intervalos *semi-abertos*, etc. Serão *compactos* os intervalos $[a, b]$, limitados e fechados.

Também é fácil ver que *todo o intervalo n-dimensional será um produto cartesiano de intervalos da recta*. Assim:

$$[a, b[= [a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \cdots \times [a_n, b_n[.$$

Se $n=2$, os intervalos compactos serão os rectângulos de lados paralelos aos eixos coordenados, os intervalos $[a, b[$ serão esses mesmos rectângulos privados dos lados superior e direito, etc. Sendo $a=(a_1, a_2)$ e $b=(b_1, b_2)$, a área (ou medida) de qualquer intervalo de extremos a, b será $(b_1-a_1)\times(b_2-a_2)$.



Se $n=3$, os intervalos compactos serão os paralelipípedos de arestas paralelas aos eixos, etc. Sendo $a=(a_1, a_2, a_3)$ e $b=(b_1, b_2, b_3)$, o volume (ou medida) de qualquer intervalo de extremos a, b será o produto das suas dimensões

$$b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3.$$

Dum modo geral, sendo $a=(a_1, \ldots, a_n)$, $b=(b_1, \ldots, b_n)$, a *medida de qualquer intervalo de extremos a, b* será, por definição:

$$\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)=(b_1-a_1)\times(b_2-a_2)\times\cdots\times(b_n-a_n).$$

Um intervalo ilimitado terá por medida $+\infty$.

Posto isto, as noções de *medida exterior*, $m_e(A)$, e de *medida interior*, $m_i(A)$, de um conjunto $A\subset\mathbf{R}^n$ definem-se, exactamente, como no caso $n=1$. Se $m_i(A)=m_e(A)$, o conjunto A diz-se *mensurável*, com medida $m(A)=m_i(A)=m_e(A)$. Se $m_e(A)=0$, o conjunto A diz-se *menosprezável* (todo o conjunto numerável é ainda menosprezável). Demonstra-se também que $m(A)$ é uma *função numeravelmente aditiva*, definida na classe dos conjuntos A mensuráveis.

São mensuráveis todos os conjuntos abertos e todos os conjuntos fechados.

Pode ainda dizer-se que, *praticamente*, todos os conjuntos de pontos de $\mathbf{R}^n$ são mensuráveis.

Funções fundamentais. Integrais múltiplos.

Uma vez definida a noção de intervalo n-dimensional, as noções de função em escada, de função fundamental, para n variáveis, bem como a de integral de uma função fundamental, definem-se, *mutatis mutandis*, como no caso $n=1$. Daqui resulta, de modo análogo, a noção de função mensurável (a locução "quase em todos os pontos" continua a usar-se com significado idêntico).

Finalmente, as definições de *função não negativa somável num intervalo I, de função real ou complexa somável em I* e de *integral de tais funções em I* são dadas de modo perfeitamente análogo. O integral duma função f, num intervalo $I=I_1\times\cdots\times I_n$, será designado pela notação

$$\int_{I_1}\int_{I_2}\cdots\int_{I_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

ou, abreviadamente, por

$$\int_I f(x)dx \quad \text{ou mesmo por} \quad \int_I f,$$

pondo $x=(x_1, \ldots, x_n)$ e $dx=dx_1 \ldots dx_n$. A indicação do intervalo em índice poderá também ser omitida quando não houver perigo de confusão.

As propriedades do integral enunciadas no n.º 5 estendem-se ao caso geral com uma pequena modificação evidente na propriedade 2) e na FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL, em que a notação $|I|$ (comprimento de I) deverá ser substituída por $m(I)$.

Aliás, a noção de integral múltiplo pode ser estendida ao caso em que o campo de integração é, em vez dum intervalo I, um conjunto mensurável A qualquer de pontos de $\mathbf{R}^n$, *como se fez no n.º* 8 *para o caso* $n=1$.

As referidas propriedades, incluindo o TEOREMA DA MÉDIA e a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL, generalizam-se imediatamente a este caso.

As principais diferenças entre os integrais múltiplos e os integrais simples surgem quando se trata das relações entre a integração e a derivação, da mudança de variáveis em integrais e da redução dum integral múltiplo a integrais simples.

Integrações sucessivas. Teorema de Fubini.

Sejam I_1 e I_2 intervalos *quaisquer* da recta e $I = I_1 \times I_2$ (intervalos de $\mathbf{R}^2$, que pode, em particular, ser este espaço). Posto isto, demonstra-se o seguinte teorema, devido a FUBINI:

TEOREMA 11.1. *Se $f(x, y)$ é uma função somável em I, toda a função de y que se obtém atribuindo a x em $f(x, y)$ um valor situado em I_1 é somável em I_2, excepto, quando muito, para os pontos x dum sub-conjunto menosprezável de I_1. Portanto, se pusermos*

$$\Phi(x) = \int_{I_2} f(x, y)dy,$$

fica assim definida uma função Φ em quase todos os pontos de I_1. Esta função é somável em I_1 e o seu integral neste intervalo coincide com o integral duplo de f em I. Ter-se-á, pois,

$$\iint_I f(x, y)dxdy = \int_{I_1} dx \int_{I_2} f(x, y)dy = \int_{I_2} dy \int_{I_1} f(x, y)dx$$

(*visto que o que se diz para uma variável se aplica, automaticamente, à outra*).

Ficam assim, consideravelmente generalizados, critérios estabelecidos no Capítulo V, n.º 7, como, por exemplo, o TEOREMA 7.7.

O TEOREMA DE FUBINI estende-se, de maneira evidente, ao caso de funções de n variáveis, com n qualquer, e dele se deduz este outro teorema, que generaliza o TEOREMA 7.8 do Capítulo V:

TEOREMA 11.2. *Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é o produto de n funções $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$, de uma variável, nenhuma das quais é nula em quase todos os pontos, para que f seja somável em $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, é necessário e suficiente que f_k seja somável em I_k $(k = 1, \ldots, n)$. Então, o integral de f em I é o produto dos integrais das funções f_k nos respectivos intervalos I_k:*

$$\int\int \cdots \int_I f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f\,(x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{I_1} f_1(x_1) dx_1 \times \int_{I_2} f_2(x_2) dx_2 \times \cdots \times \int_{I_n} f\,(x_n) dx_n\,.$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplos.

Para maior clareza, começaremos pelo caso dos integrais duplos:

TEOREMA 11.3. *Seja T um conjunto mensurável de pontos de* $\mathbf{R}^2$, *e seja $x=\varphi(t)$ uma aplicação biunívoca de T sobre um outro conjunto $X \subset \mathbf{R}^2$, definida por duas funções reais*

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \quad x_2 = \varphi_2(t_1, t_2),$$

definidas e continuamente deriváveis num aberto Ω que contenha T. Então o conjunto X também é mensurável e, para que uma função $f(x)=f(x_1, x_2)$ seja somável em X, é necessário e suficiente que seja somável em T a função $f(\varphi(t))\,J(t)$ de t, em que

$$J(t) = J(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

(jacobiano ou determinante funcional da aplicação φ). Nesta hipótese, tem-se

$$\int\int_X f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_T f[\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)] \left| J(t_1, t_2) \right| dt_1 dt_2\,.$$

No caso geral, tratar-se-á de um sub-conjunto T de $\mathbf{R}^n$ e de uma aplicação biunívoca φ de T sobre outro conjunto X, definida por n funções

$$x_k = \varphi_k(t_1, \ldots, t_n), \quad k=1, \ldots, n\,,$$

continuamente deriváveis num aberto $\Omega \supset T$. O jacobiano da transformação φ será:

$$J(t) = J(t_1, \ldots, t_n) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \cdots \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \cdots \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Então, para que $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ seja somável em X, é necessário e suficiente que a função

$$f(\varphi(t))J(t) = f[\varphi_1(t_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi\ (t_1, \ldots, t_n)]\,J(t_1, \ldots, t_n)$$

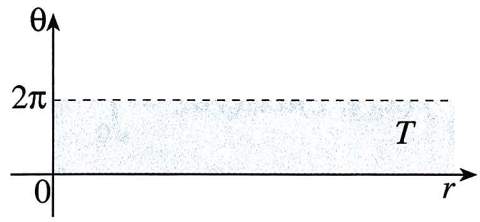
de $t_1, \ldots, t_n$ seja somável em T. Nesta hipótese, tem-se, em notação abreviada,

$$\int_X f(x)dx = \int_T f(\varphi(t))\,|J(t)|\,dt.$$

Exemplos importantes – Seja $X = \mathbf{R}^2$ e ponhamos:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

tomando para T o conjunto dos valores de r e θ tais que $r > 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, acrescido do ponto $r = 0$, $\theta = 0$, de modo que a aplicação $(r, \theta) \to (x, y)$ de T sobre X seja biunívoca. Então,



$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r\,.$$

Logo, para que $f(x, y)$ seja somável em $\mathbf{R}^2$, é necessário e suficiente que $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r$ seja somável em T, e tem-se, então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = \iint_T f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)rdrd\theta =$$

$$= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)rd\theta .$$

Note-se que $rd\theta$ é o comprimento ds do arco de círculo de raio r e de amplitude igual a $d\theta$ radianos. Então, designando por C_r a circunferência de centro na origem e raio r, podemos escrever o anterior integral sob a forma

$$\int_0^{+\infty} dr \int_{C_r} f ds ,$$

em que o segundo integral simples é o *integral* (*curvilíneo*) *de* f *sobre* C_r.

Analogamente, considerando $X = \mathbf{R}^3$ e pondo:

$$x = r\cos\varphi\ \mathrm{sen}\,\theta,\ \ y = \mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,\theta,\ \ z = r\cos\theta$$

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ \ 0 < \theta < \pi,\ \ r \geqslant 0,$$

acha-se

$$J(\rho, \varphi, \theta) = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e, na hipótese de f ser somável:

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} f(x, y, z)dxdydz = \int_0^{+\infty} F(r)dr,$$

em que

$$F(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r\cos\varphi\ \mathrm{sen}\,\theta, r\,\mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,\theta, r\cos\theta)\, r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\varphi\, d\theta$$

ou ainda, designando por E_r a superfície esférica de centro na origem e raio r, e pondo $d\Omega = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\varphi\, d\theta$ (elemento de área da superfície):

$$F(r) = \iint_{E_r} f\,d\Omega$$

que é, por definição, *o integral de f sobre a superfície* E_r.

Em particular, se f se reduz a uma função só de r,

$$f(x, y, z) = g(r),$$

tem-se

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = 4\pi \int_0^{+\infty} g(r) r^2 dr,$$

visto ser $4\pi r^2$ a área de E_r.

Estes resultados estendem-se a $\mathbf{R}^n$.

Por exemplo, se for $f(x_1, \dots, x_n)$ uma função que só depende de

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,, \quad f(x_1, \dots, x_n) = g(r)\,,$$

para que f seja somável em $\mathbf{R}^n$, é necessário e suficiente que φ seja somável em $[0, +\infty[$ e, então:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = S_n \int_0^{+\infty} g(r) r^{n-1} dr,$$

em que S_n designa a "área" da hipersuperfície de equação

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

(fronteira da bola unitária de centro na origem).

No caso geral, supondo f somável, tem-se

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty} dr \int_{\Sigma_r} f\,dS,$$

em que Σ_r designa a hipersuperfície

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$$

e dS o "elemento de área" de Σ_r.

Critérios de convergência para integrais múltiplos.

Dos resultados anteriores deduz-se que:

PROPOSIÇÃO 11.1. *O integral*

$$\int \underset{r \geqslant 1}{\cdots} \int \frac{dx_1 \cdots dx_n}{r^\alpha}, \quad com \quad r = |x|,$$

é convergente se $\alpha > n$, *divergente se* $\alpha \leqslant n$. *O integral*

$$\int \underset{r \leqslant 1}{\cdots} \int \frac{dx_1 \cdots dx_n}{r^\alpha}$$

é convergente se $\alpha < n$, *divergente se* $\alpha \geqslant n$.

Com efeito, basta notar que estes integrais, são, respectivamente, iguais a

$$S_n \int_1^{+\infty} r^{n-1-\alpha} dr, \qquad S_n \int_0^1 r^{n-1-\alpha} dr.$$

Daqui resultam, por confronto, critérios de convergência, que generalizam, ao caso de *n* variáveis, os critérios estabelecidos no Capítulo V para integrais impróprios simples, de 1.ª e de 2.ª espécie. Assim:

TEOREMA 11.4. *Seja* A *um conjunto mensurável de* $\mathbf{R}^n$ *e* f *uma função mensurável em* A:

I. *Suponhamos que* A *é ilimitado e não contém a origem. Então, se existem constantes* M *e* α *tais que, para* $x \in A$,

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{|x|^\alpha}, \quad com \quad \alpha > n \quad e \quad M \, finito,$$

o integral $\int_A f$ *é convergente. Se existem contantes* M *e* α *tais que, para* $x \in A$,

$$|f(x)| \geqslant \frac{M}{|x|^\alpha}, \quad com \quad \alpha \leqslant n \quad e \quad M > 0,$$

o integral $\int_A f$ *é divergente.*

II. *Suponhamos A limitado e seja* $a \in A$. *Então, se existem constantes M* e α *tais que, para todo o* $x \in A$,

$$|f(x)| < \frac{M}{|x-a|^{\alpha}}, \quad com \quad \alpha < n \quad e \quad M \text{ finito},$$

o integral $\int_A f$ *é convergente. Se existem constantes M e* α *tais que, para todo o* $x \in A$,

$$|f(x)| \geqslant \frac{M}{|x-a|^{\alpha}}, \quad com \quad \alpha \geqslant n \quad e \quad M > 0,$$

o integral $\int_A f$ *é divergente.*

Não esquecer que, neste enunciado, x e a designam pontos $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{R}^n$ e que

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad |x-a| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2}.$$

Estes resultados podem aplicar-se, por exemplo, ao estudo do *potencial newtoniano* criado por uma distribuição de matéria de densidade $\mu(x)$, em cada ponto x do espaço ordinário. Num ponto a qualquer do espaço o potencial é dado por:

$$U(a) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mu(x)}{|x-a|}\, dx.$$

EXERCÍCIO – *Calcular o potencial em a, supondo que a densidade é igual a uma constante* μ *numa bola de centro a e raio R, e nula fora dessa bola.*

Espaços de funções localmente somáveis.

Consideremos um conjunto A mensurável de pontos de $\mathbf{R}^n$. Diz-se que uma função complexa $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ é *localmente somável* em A, quando é somável em todo o compacto contido em A. Duas funções f e g localmente somáveis em A dizem-se equivalentes, e escreve-se $f \sim g$, quando são iguais em quase todos os pontos de A; prova-se que a relação assim definida é, de facto, uma relação de equivalência. Designemos por $\dot{L}_A$ o conjunto de todas as classes de equivalência $[f]$ de funções localmente somáveis em A; neste conjunto, definem-se, de modo natural, operações de soma e de produto por escalares, que o tornam um espaço vectorial complexo. Também é possível, neste caso, escolher representantes típicos para cada classe de equivalência, e, assim, chamaremos a $\dot{L}_A$ o *espaço das funções localmente somáveis* em A. Um sub-espaço vectorial de $\dot{L}_A$ é o das funções contínuas sobre A.

Para todo o número real $p \geqslant 1$, designa-se por L_A^p, ou simplesmente por L^p, o espaço das funções f de potência p somável em A, isto é, tais que a função

$$|f(x_1, \ldots, x_n)|^p$$

é somável em A. Prova-se que L_A^p é um sub-espaço vectorial de $\dot{L}_A$. Nele se define uma norma por meio da fórmula

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_A |f|^p}\,.$$

Em particular, $L_A^1 = L_A$ é o *espaço das funções somáveis em A*.

Por sua vez, L_A^2 é *o espaço das funções de quadrado somável em A*. Neste podemos definir um *produto interno*, pondo

$$< f, g > = \int_A f(x)\overline{g(x)}dx\,.$$

Desde logo se reconhece que $\|f\|_2 = \sqrt{<f, f>}$ e prova-se que o espaço vectorial L_A^2, munido deste produto interno, é um *espaço de Hilbert*, quaisquer que sejam o conjunto mensurável $A \subset \mathbf{R}^n$ e $n = 1, 2, \ldots$.

Os espaços funcionais deste tipo intervêm, essencialmente, na Mecânica Quântica.

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

CAP. V – **Revisões e complementos sobre integrais impróprios e sobre integrais paramétricos**

CAP. VI – **Método dos resíduos**

CAP. VII – **Breves noções sobre medida e integral de Lebesgue**

CAP. VIII – **Transformação de Fourier**

CAP. IX – **Transformação de Laplace**