II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

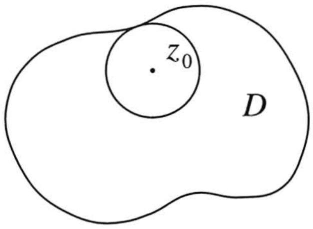
$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência[1].

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[1] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[2]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO VIII

TRANSFORMAÇÃO DE FOURIER

1. Definição e notações

Seja f uma função *complexa* de variável *real,* definida em $\mathbf{R}$, e consideremos o integral

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)dx,$$

em que ξ é um parâmetro *real.* Se este integral for convergente, *para todo o valor real* de ξ, fica, assim, definida um função de ξ em $\mathbf{R}$:

$$(2) \qquad F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)dx,$$

que se diz a *imagem* ou *transformada de Fourier* da função f dada. Esta operação $f \to F$, que faz passar da função f dada para a função F obtida, é chamada *transformação de Fourier* e designada por $\mathscr{F}$, escrevendo-se, então,

$$F = \mathscr{F}[f] \quad \text{ou} \quad F = \mathscr{F}f.$$

Trata-se, pois, duma transformação que converte certas funções de uma variável x em funções de outra variável ξ. *Mas é claro que a* *escolha das letras a usar como variáveis, assim como para designar as funções, é puramente arbitrária:* o que conta é a relação estabelecida pela fórmula (2) entre f e F, e é essa relação *constante,* no sentido de f para F, que se chama *transformação de Fourier* (para funções) e se representa por $\mathcal{F}$.

Para indicar que a função F é a *imagem de Fourier* de f, também se escreve, por vezes,

$$F = \mathcal{F}_x[f(x)] \quad \text{e ainda} \quad F(\xi) = \mathcal{F}_x[f(x);\xi],$$

em que a colocação da variável x em índice tem por fim apontar que a função F não depende de x (variável numérica aparente), mas sim de f, *variável cujos valores são funções e não números*. Deste modo, $\mathcal{F}_x[f(x)]$ será uma função (ou *funcional*) de f e, de modo nenhum, uma função composta de x, como poderia parecer, se x não estivesse escrito em índice.

Exemplos – 1) Calcular a *imagem de Fourier* da função $e^{-|x|}$.

Tem-se, por definição:

$$\mathcal{F}_x[e^{-|x|};\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\, e^{-|x|} dx.$$

Mas, como $e^{-|x|} = e^{-x}$ para $x \geqslant 0$, $e^{-|x|} = e^{x}$ para $x < 0$, o anterior integral decompõe-se na soma

$$\int_{-\infty}^{0} e^{i\xi x}\, e^{x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{i\xi x}\, e^{-x} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-(1+i\xi)x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(i\xi-1)x} dx =$$

$$= \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}.$$

Será, pois,

$$\mathcal{F}_x[e^{-|x|}] = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

É claro que também podíamos dizer que a *imagem de Fourier* de $e^{-|x|}$ é a função

$$\frac{2}{1+t^2}, \quad \text{a função} \quad \frac{2}{1+y^2}, \quad \text{etc.},$$

pois não interessa, propriamente, a letra escolhida para variável independente.

2) Vimos no Capítulo VI, n.º 4, que se tem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|t|}, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Será, pois, $\pi e^{-|x|}$ a *imagem de Fourier* de $\frac{1}{1+x^2}$ e, assim, poderemos escrever:

$$\mathcal{F}_x\left[\frac{1}{1+x^2}\,;\,t\right] = \pi e^{-|t|}, \quad \mathcal{F}_t\left[\frac{1}{1+t^2}\,;\,\tau\right] = \pi e^{-|\tau|},$$

etc.

3) O método dos resíduos permite estabelecer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} e^{-ht^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4h}}, \qquad \forall \omega \in \mathbf{R},\ h > 0.$$

Será, pois,

$$\mathcal{F}_x[e^{-ht^2};\omega] = \sqrt{\frac{\pi}{h}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4h}\right).$$

A transformação de Fourier tem enorme importância em Análise pura e aplicada. O seu uso é correntíssimo em Electromagnetismo, Electrotecnia, Mecânica Quântica, Física Nuclear, Cálculo das Probabilidades, etc., etc.

Os integrais do tipo (1) são chamados *integrais de Fourier.* O seu estudo está intimamente relacionado com o das *séries de Fourier,* que é hábito estudar antes dos *integrais de Fourier.* Mas não há inconveniente nenhum lógico ou didáctico em proceder em ordem inversa. Como veremos ao tratar da teoria das distribuições, as *séries de Fourier* podem mesmo apresentar-se como caso particular dos *integrais de Fourier.*

O cálculo das *imagens de Fourier* é efectuado por vários métodos aplicáveis a integrais impróprios, nomeadamente pelo método dos resíduos, exposto no Capítulo VI.

Mas convém desde já salientar que, dada a grande importância desta transformação, existem publicadas tabelas, mais ou menos extensas, de *transformadas de Fourier* (ver Bibliografia, no final deste Capítulo).

2. Campo de existência. Primeiras propriedades

É claro que, segundo a definição anterior, o campo de existência da transformação $\mathcal{F}$ não é formado por *todas* as funções complexas definidas em $\mathbf{R}$, mas apenas pelas funções f que tornam *convergente* o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)dx \tag{1}$$

para todo o valor real de ξ. Estas funções dizem-se *$\mathcal{F}$-transformáveis.*

Não é fácil caracterizar a classe das funções $\mathcal{F}$-transformáveis, isto é, obter um critério geral (condição necessária e suficiente) que permita, na prática, averiguar se uma dada função f é ou não $\mathcal{F}$-transformável. Aliás, o termo "convergente" atrás empregado é susceptível de várias interpretações, sucessivamente mais gerais:

1) *A função f é contínua na recta.* Então, o *integral de Fourier* (1) é apenas um integral impróprio de 2.ª espécie, do tipo estudado no Capítulo V, n.º 1, e será convergente, se e só se o integral

$$\int_{-u}^{v} e^{i\xi x} f(x)dx$$

tender para um limite *finito*, quando u e v tendem para $+\infty$, de modo independente.

2) *A função f tem, quando muito, em cada intervalo limitado, um número finito de pontos de descontinuidade*. Então, segundo o que vimos no final do n.º 2 do Capítulo V, o *integral de Fourier* (1) decompõe-se, quando muito, numa série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} e^{i\xi x} f(x)dx$$

de integrais próprios ou impróprios de 1.ª espécie. O integral (1) será, então, convergente, quando e só quando estes integrais parciais forem todos convergentes e a série dos mesmos for também convergente.

3) *A função f é localmente somável na recta*. Então, quaisquer que sejam *u, v,* existe no *sentido de Lebesgue o integral*

$$\int_{-u}^{v} e^{itx} f(x)dx \tag{2}$$

e, o integral (1) será convergente, se e só se o integral (2) tender para um limite finito, quando u e v tendam para $+\infty$, de modo independente.

Note-se que esta última hipótese, sendo muito mais geral do que as anteriores, tem aspecto mais simples do que a segunda[(1)]. Todavia, pressupõe a *teoria do integral de Lebesgue* que, no Capítulo anterior, nos limitámos a expor, na sua maior parte, sem demonstrações.

A referida dificuldade em caracterizar o domínio da transformação $\mathscr{F}$ leva a fazer o estudo de $\mathscr{F}$ em classes particulares de funções,

---

(1) Na realidade, a hipótese 2) só é um caso particular da hipótese 3), quando os integrais *parciais* são absolutamente convergentes. Mas é este o caso que interessa na prática.

embora bastante gerais. Uma dessas classes é, precisamente, o espaço L^1 *das funções somáveis na recta, isto é, integráveis à Lebesgue entre* $-\infty$ e $+\infty$ (ver Capítulo VII, n.º 10). Tem-se, desde logo, o seguinte teorema:

TEOREMA 2.1. *Se f é somável na recta, existe e é limitada a imagem de Fourier de f. Mais ainda: nesta hipótese, a imagem de Fourier de f é uniformemente contínua na recta.*

Com efeito, por ser

$$|e^{i\xi x}f(x)| = |f(x)|, \qquad \forall x, \xi \in \mathbf{R},$$

se f é somável, também a função $e^{i\xi x}f(x)$ de x é somável para todo o ξ real, e tem-se

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx, \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}.$$

Assim, a função $F(\xi)$ definida pelo primeiro integral é limitada na recta. Para reconhecer que esta função é uniformemente contínua na recta, basta aplicar a doutrina do Capítulo VII, n.º 5 (teorema relativo à continuidade).

Por outro lado, as propriedades elementares do integral permitem afirmar que:

PROPOSIÇÃO 2.1. *Se f e g são $\mathcal{F}$-transformáveis, o mesmo acontece com $f+g$ e com αf, em que α é um número complexo qualquer, e tem-se*

$$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \quad \mathcal{F}[\alpha f] = \alpha \mathcal{F}[f].$$

Da 1.ª parte desta proposição e do TEOREMA 2.1. resulta que:

O domínio de $\mathcal{F}$ é um espaço vectorial complexo, de que L^1 é um sub-espaço vectorial.

A 2ª parte da proposição exprime-se dizendo que:

A transformação $\mathcal{F}$ é linear (*aplicação linear do seu domínio no seu contra-domínio*).

3. Efeito da transformação de FOURIER sobre a derivação e sobre a multiplicação por *x*

A importância, já atrás assinalada, da *transformação de Fourier*, resulta, em parte, das duas seguintes propriedades fundamentais:

TEOREMA 3.1. *Se f é somável em* $\mathbf{R}$ *e admite derivada f' também somável em* $\mathbf{R}$, *tem-se*

$$\mathcal{F}[Df] = -i\xi\, \mathcal{F}[f],$$

sendo ξ a variável independente das imagens de Fourier[1].

Com efeito, uma vez verificada a hipótese, tem-se

$$\int_{-X}^{X} e^{i\xi x} f'(x)dx = [e^{i\xi x} f(x)]_{-X}^{X} - i\xi \int_{-X}^{X} e^{i\xi x} f(x)dx$$

para todo o X real. Por outro lado, será

$$f(X) = f(0) + \int_0^X f'(x)dx, \qquad \forall X \in \mathbf{R}.$$

Como f' é somável em $\mathbf{R}$ (por hipótese), existem os limites de $f(X)$ quando $X \to +\infty$ e $X \to -\infty$, e estes limites só podem ser zero, de contrário f não podia ser somável em $\mathbf{R}$. Então, virá, por passagem ao limite, lembrando que $|e^{i\xi x}| = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f'(x)dx = -i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)dx$$

o que exprime a tese do teorema.

Podemos, pois, dizer que, na referida hipótese:

A transformação de Fourier transforma a derivação em multiplicação por $-i\xi$.

(1) Seria mais correcto, mas menos sugestivo, escrever $\mathcal{F}_x[f'(x);\xi] = -i\xi \,.\, \mathcal{F}_x[f(x);\xi]$.

Note-se que, neste teorema, não é preciso supor que existe a derivada de f *no sentido usual* em todos os pontos, mas apenas que f é primitiva de um função localmente somável (que designamos por f') e que é, portanto, *absolutamente contínua,* admitindo derivada em quase todos os pontos x, igual a $f'(x)$ (Capítulo VII, n.º 6).

A segunda propriedade é análoga à anterior:

TEOREMA 3.2. *Se as funções $f(x)$ e $xf(x)$ são ambas somáveis em* $\mathbf{R}$, *a imagem de Fourier de f admite derivada em todos os pontos (no sentido usual), e tem-se*

$$\mathcal{F}_x[xf(x)] = -iD\mathcal{F}[f].$$

A demonstração deste facto é *formalmente* muito simples, desde que se admita a permutabilidade da derivação com a integração. Com efeito, ter-se-á, então:

$$D_\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)dx = i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} xf(x)dx,$$

ou seja, $D\mathcal{F}[f] = i\mathcal{F}_x[xf(x)]$, donde a tese.

Tudo está, portanto, em legitimar esta derivação sob o sinal de integral. Na hipótese particular em que f é contínua (mas somável, ao mesmo tempo que o seu produto por x), a justificação pode efectuar-se aplicando a doutrina do Capítulo V, n.º 6[1].

Na hipótese geral do teorema, a justificação pode fazer-se com a doutrina do Capítulo VII, n.º 5, lembrando que

$$\frac{e^{i(\xi+h)x} - e^{i\xi x}}{h} f(x) = e^{i(x+\theta h)x} xf(x),$$

$\forall x, \xi, h \in \mathbf{R}$, com $0 < \theta < 1$.

(1) Pode fazer-se, como exercício, a justificação neste caso particular, aplicando a referida doutrina.

O módulo do 1.º membro será, pois, sempre igual ao da função $xf(x)$ que é independente de ξ e somável por hipótese. É pois, legítima a referida derivação em ordem ξ sob o sinal de integral.

O TEOREMA 3.2 pode enunciar-se dizendo que, na referida hipótese:

A transformação de Fourier transforma a multiplicação por ix em derivação.

4. Inversão. Teorema de FOURIER

O problema central da transformação de Fourier é o da inversão, que se pode pôr nos seguintes termos:

É dada uma função complexa F definida em **R**. *Procura-se uma função f da qual F seja a imagem de Fourier, isto é, uma função f tal que*

$$F = \mathcal{F}[f]$$

ou, mais explicitamente, tal que

$$(1) \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx.^{(1)}$$

O problema consiste, pois, em *representar a função F sob a forma de integral de Fourier*, ou, ainda, em *resolver a equação integral* (1), *sendo F função dada e f função incógnita*. Como todos os problemas, comporta, desde logo, uma dupla questão: a da *existência* e a da *unicidade* da solução. Mais precisamente, pergunta-se:

I. *É o problema possível, isto é, admite, pelo menos, uma solução?*

II. *É o problema determinado, isto é, não pode admitir mais de uma solução?*

---

(1) Para comodidade de escrita, passamos a usar a letra *t*, em vez de ξ, como variável das imagens de Fourier.

Evidentemente, o problema nem sempre será possível: isso depende da função F dada. Mas não se conhece uma *condição necessária* e *suficiente*, de forma simples, a que deva obedecer F, para que o problema seja possível (do mesmo modo que não se conhece uma condição simples, necessária e suficiente, para que uma dada função f tenha *imagem de Fourier*, como já atrás assinalámos). Conhecem-se, apenas, condições simples que são só necessárias ou só suficientes, para que tal se verifique. *Porém, como teremos ocasião de verificar, estas questões recebem uma resposta formal, inteiramente satisfatória, no domínio das distribuições, em que a teoria da transformação de Fourier, bem como a da transformação de Laplace, se simplifica consideravelmente.*

Quanto à questão II, prova-se o seguinte:

> *Se existe uma função $f \in L^1$ que verifique* (1), *essa função fica determinada por F, excepto, quando muito, em pontos dum conjunto de medida nula.*

Por conseguinte, se considerarmos, apenas, funções localmente somáveis *na forma típica,* podemos afirmar que o problema, quando possível, é determinado. Por outras palavras: *é determinado no espaço L^1.*

Para o estudo efectivo do problema da inversão de $\mathscr{F}$, limitar-nos-emos a considerar uma classe particular de funções, suficiente para as aplicações e para a extensão da teoria ao campo das distribuições.

DEFINIÇÃO 4.1. *Diz-se que uma função f é seccionalmente regular num intervalo compacto I, quando admite derivada contínua nesse intervalo, excluindo, quando muito, um número finito de pontos de I, nos quais f tem limites laterais finitos e derivadas laterais também finitas. Diz-se que f é seccionalmente regular na recta, quando é seccionalmente regular em qualquer intervalo compacto da recta.*

Segundo esta definição, se uma função f é seccionalmente regular na recta, a função f e a sua derivada f' têm, quando muito, um número finito de *descontinuidades de primeira espécie* (com saltos finitos), em cada intervalo limitado, e são, portanto, *integráveis segundo Riemann*, nesses intervalos (seccionalmente contínuas).

Posto isto, tem lugar o seguinte importante teorema:

TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER. *Seja f uma função seccionalmente regular e somável na recta. Então, se pusermos*:

$$(1) \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx, \qquad \forall t \in \mathbf{R},$$

será, necessariamente:

$$(2) \qquad \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} F(t)dt,$$

para todo o x real (1).

Só no número seguinte daremos a demonstração deste teorema. Antes disso, convém fazer algumas observações essenciais:

a) O teorema é válido sob hipóteses mais gerais: basta supor, por exemplo, que, além de ser somável na recta, a função *f é de variação limitada em cada intervalo limitado* (o caso de f ser seccionalmente regular é apenas um caso particular desta hipótese).

Note-se ainda que, neste caso, como f é *integrável à Riemann* em cada intervalo limitado, dizer que f é somável na recta significa que existe o integral de $|f|$ entre $-\infty$ e $+\infty$, como limite do integral

$$\int_u^v |f(x)|dx$$

quando $u \to -\infty$ e $v \to +\infty$, de modo independente.

b) Supondo F dada e f incógnita, o teorema não nos diz a que condições deve obedecer F para que exista f; diz-nos, apenas, que, *se existe uma função f que verifique* (1) *e a hipótese do teorema, essa função é dada, necessariamente, pela fórmula* (2). Com efeito, tem-se:

(1) Para comodidade de escrita, usamos aqui a letra t, em vez de ξ, como variável independente das imagens de Fourier.

$$f(x^+) = f(x^-) = f(x)$$

em quase todos os pontos de **R** (os pontos em que f é contínua) e, portanto,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$$

nos referidos pontos.

Deste modo, a fórmula (2) define uma transformação funcional $F \to f$ que coincide com a inversa da *transformação de Fourier*, *quando esta se restringe à classe das funções f consideradas*. Na verdade, tem-se

$$F = \mathscr{F}[f] \quad \textit{e, portanto,} \quad f = \mathscr{F}^{-1}[F],$$

nas condições do teorema. Por isso, as fórmulas (1) e (2) são chamadas FÓRMULAS DE RECIPROCIDADE DE FOURIER.

Porém, supondo que F é uma função localmente somável, dada arbitrariamente, de modo que exista o

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} F(t)\,dt = \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} e^{-ixt} F(t)\,dt, \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

nada nos garante que a função de x assim definida, dividida por 2π, admita *imagem de Fourier* e essa seja precisamente F.

c) Estas considerações levam-nos, naturalmente, a adoptar uma DEFINIÇÃO MAIS GERAL DE TRANSFORMAÇÃO DE FOURIER:

Chamaremos imagem de Fourier duma função localmente somável f, e designaremos por $\mathscr{F}[f]$, *a função F definida pela fórmula*

$$(1') \qquad F(t) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx,$$

no caso em que o segundo membro exista para quase todos os valores de t.

Por outro lado, supondo F dada, chamaremos *imagem conjugada de Fourier* de F, e designaremos por $\overline{\mathscr{F}}[F]$, a função f definida pela fórmula

$$(2') \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} F(t)dt,$$

supondo que o 2.º membro existe *para quase todos os valores* de x. Assim fica, portanto, definida uma transformação funcional $F \to f$, que designamos por $\overline{\mathcal{F}}$ e a que chamaremos TRANSFORMAÇÃO CONJUGADA DE FOURIER. Do TEOREMA DE FOURIER resulta, precisamente, o seguinte:

Quando se restringe $\mathcal{F}$ à classe das funções seccionalmente regulares somáveis sobre a recta (ou a outra classe mais extensa a que se aplique, ainda, a tese do teorema), a transformação $\overline{\mathcal{F}}$ dá-nos a inversa de $\mathcal{F}$, isto é, pode escrever-se, então, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$, visto que se tem

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f] = f,$$

para toda a função f de tal classe.

Ora, é fácil ver que será, analogamente,

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}[f] = f,$$

para toda a função f da mesma classe e que, portanto, $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}^{-1}$, quando se restringe $\overline{\mathcal{F}}$ a essa classe.

Com efeito, as transformações $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ têm, como se vê, forma muito semelhante, e, portanto, propriedades análogas.

Todavia, o TEOREMA DE FOURIER não nos habilita (mesmo com o citado alargamento da hipótese) a afirmar que se tem $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$ no caso geral, isto é, aplicando $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ à classe de todas as funções localmente somáveis para as quais existe o 2.º membro de (1′) ou de (2′).

d) As questões I e II atrás formuladas recebem uma resposta completa, quando nos reportamos ao espaço L^2 das funções de quadrado somável em **R** (Capítulo VII). Tem-se, com efeito, o seguinte elegante

TEOREMA DE PLANCHEREL. *A transformação $\mathcal{F}$ dada por* (1′) *define uma aplicação biunívoca do espaço L^2 sobre si mesmo, cuja* *inversa é dada por* (2′). *Esta aplicação é isométrica, relativamente à norma quadrática definida em* L^2, *isto é, tem-se*

$$\|\mathscr{F}f\|_2 = \|f\|_2, \qquad \forall f \in L^2.$$

Este teorema, cuja demonstração se pode encontrar em qualquer bom tratado sobre a *transformação de Fourier*, é de importância capital nos fundamentos matemáticos da Mecânica Quântica. Mas a sua hipótese é ainda demasiado restritiva.

Por exemplo, a função

$$\frac{e^{-|x|}}{\sqrt{|x|}}.$$

é, como facilmente se reconhece, seccionalmente regular e somável sobre a recta, e, contudo, o seu quadrado não é somável em nenhum intervalo que contenha a origem.

Aliás, em Mecânica Quântica é frequente considerar, como existente, a *imagem de Fourier* de funções tais como $\operatorname{sen} x$, x, etc., para as quais não existe ou não é finito o segundo membro de (1′). As *imagens de Fourier* de tais funções só podem interpretar-se como distribuições; estas constituem, como já atrás se observou, o domínio mais adequado para o estudo da *transformação de Fourier.*

e) No espaço L^1 a situação não é tão clara como em L^2. Todavia, tem lugar o seguinte teorema, que se apresenta como variante notável do TEOREMA DE FOURIER:

Se $f \in L^1$ *e se também* $F \in L^1$, *sendo* F *a imagem de Fourier de* f, *então, tem-se necessariamente*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} F(t)\, dt,$$

em quase todos os pontos x *da recta* (*mesmo que* f *não seja seccionalmente regular ou de variação limitada em intervalos limitados*).

f) Certos autores chamam *transformação de Fourier*, e designam por $\mathscr{F}$, a transformação definida por (2′); então, a *conjugada* $\overline{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$

será a transformação definida por (1′). Há, pois, assim, uma completa troca de terminologia e notação.

Por vezes, a fim de pôr em evidência a analogia das duas transformações, é costume defini-las pelas duas seguintes fórmulas de reciprocidade, ligeiras variantes de (1′) e (2′):

$$(1'') \qquad F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx,$$

$$(2'') \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} F(t)dt.$$

A única diferença consiste, como se vê, na troca de sinal efectuada no expoente.

Note-se que, adoptando estas definições, se tem (ver n.º 1, Exemplo 3)

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Assim, a função exp $(-x^2/2)$ tem por imagem de Fourier a mesma função (à parte as letras escolhidas para variáveis independentes). Por outras palavras: *esta função é uma invariante da transformação de Fourier definida por* (1″).

Este facto tem repercussão importante, por exemplo, no Cálculo das Probabilidades: como se sabe, a função

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

cujo gráfico é a *curva de Gauss,* representa a densidade de probabilidade da distribuição normal (de valor médio 0 e desvio-padrão 1).

Fórmula integral de Fourier. Forma complexa e forma real.

As fórmulas de reciprocidade (1) e (2) que figuram no enunciado do TEOREMA DE FOURIER podem fundir-se numa única fórmula, substituindo $F(t)$ em (2) pela sua expressão dada por (1), com uma outra letra (por exemplo ξ) no lugar da variável de integração x. Virá, então, atendendo a que e^{-ixt} não depende de ξ,

$$(3) \qquad \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\xi - x)} f(\xi) d\xi .$$

Tal é a FÓRMULA INTEGRAL DE FOURIER (na forma complexa) cuja importância para funções de variável real é comparável à da FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY para funções analíticas. Esta fórmula é válida, evidentemente, quando f verifica a hipótese do TEOREMA DE FOURIER.

Interessa, agora, examinar como esta fórmula fornece a parte real e o coeficiente da parte imaginária de f. Para comodidade de escrita, convencionemos atribuir como valor a $f(x)$, em cada ponto x de descontinuidade de f, a semi-soma dos limites laterais de f em x; isto é, ponhamos, por convenção,

$$f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

nos referidos pontos (nos restantes já sabemos que assim é). Então, pondo $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, a parte real da função integranda em (3) será

$$u(\xi) \cos[t(\xi - x)] - v(\xi) \operatorname{sen}[t(\xi - x)] .$$

Ora, como a função de t

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi) \operatorname{sen}[t(\xi - x)] d\xi$$

é ímpar (mudando t em $-t$ a função integranda muda apenas de sinal), segue-se que

$$\int_{-T}^{T} dt \int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi) \operatorname{sen}[t(\xi - x)] d\xi = 0 , \qquad \forall T \in [0, +\infty[.$$

Logo, o limite quando $T \to +\infty$ também é nulo e, portanto,

$$(4) \qquad u(x) = \frac{1}{2\pi} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \cos[t(\xi - x)] d\xi .$$

Analogamente se reconhece que a função $v(x)$ é dada pela mesma fórmula, com v no lugar de u. Tal é, pois, a forma real da FÓRMULA INTEGRAL DE FOURIER, aplicável a funções $u(x)$ que verifiquem a hipótese do TEOREMA DE FOURIER. Atendendo à definição de v. p. (*valor principal de Cauchy*) e ao facto de a função $\cos t(\xi - x)$ ser par (não muda quando se muda t em $-t$), a fórmula (4) pode ser escrita com o aspecto

$$(5) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos[t(\xi - x)] d\xi,$$

com

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$$

em todo o ponto x de descontinuidade. Esta é a FÓRMULA INTEGRAL DE FOURIER, na forma real.

As considerações anteriores mostram que, para demonstrar (3) (*com f complexa e na hipótese do teorema*), *basta demonstrar* (5) (*com f real, na mesma hipótese*). É isto o que faremos no número seguinte, demonstrando, assim, o TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER.

Notemos, por último, que a forma complexa (3) da FÓRMULA DE FOURIER é ainda aplicável, evidentemente, a funções f reais que verifiquem a referida hipótese, e que, por sua vez, a fórmula (5) também é aplicável a funções complexas.

5. Demonstração do teorema integral de FOURIER

A demonstração que vamos dar assenta no resultado anterior e em dois lemas, dos quais o segundo é corolário do primeiro.

LEMA 1. *Se φ é uma função complexa seccionalmente contínua num intervalo limitado $[a, b]$ qualquer, o integral*

$$S = \int_a^b \varphi(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx$$

tende para zero quando $\lambda \to +\infty$.

Basta demonstrar o Lema no caso em que φ é contínua sobre $[a, b]$, visto que, de contrário, $[a, b]$ decompõe-se num número finito de intervalos sobre os quais φ é contínua (segundo a hipótese). Ora, feita a mudança de variável

$$x = u + h, \quad \text{com } h = \frac{\pi}{\lambda},$$

obtém-se

$$S = -\int_{a-h}^{b-h} \varphi(u+h) \operatorname{sen} \lambda u \, du,$$

visto que $\operatorname{sen} \lambda x = -\operatorname{sen} \lambda u$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. Então, pondo x no lugar de u (o que não muda o valor do integral) e somando as duas expressões de S, obtém-se

$$2S = -\int_{a-h}^{a} \varphi(x+h) \operatorname{sen} \lambda x \, dx + \int_{a}^{b-h} [\varphi(x) - \varphi(x+h)] \operatorname{sen} \lambda x \, dx +$$

$$+ \int_{b-h}^{b} \varphi(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx.$$

Seja, agora, $M = \max|\varphi(x)|$ em $[a, b]$. Da anterior expressão virá:

$$2|S| \leqslant 2Mh + \int_{a}^{b-h} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \, dx. \tag{1}$$

Posto isto, seja δ um número positivo arbitrário. Como $h \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$, existe um p tal que $2Mh < \delta$ para $\lambda > p$. Como, por outro lado, φ é contínua sobre $[a, b]$, existe um q tal que

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \frac{\delta}{b-a}, \quad \text{para } \lambda > q.$$

Então, se designarmos por r o maior dos números p, q, virá de (1):

$$|S| < \delta \quad \text{para} \quad \lambda > r,$$

o que significa, precisamente, que $S \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$.

NOTA. A ideia intuitiva que deu origem a esta demonstração é a seguinte: Quando $\lambda > 0$, a função sen λx de x é alternadamente positiva e negativa em sucessivos intervalos de comprimento π/λ. Então, para grandes valores de λ, as contribuições para o integral provenientes de intervalos adjacentes tendem a anular-se mutuamente, visto que, em virtude da continuidade, os valores de $\varphi(x)$ em tais intervalos adjacentes tendem a ser iguais.

LEMA 2. *Se f é uma função complexa seccionalmente regular na recta, tem-se, para todo o $a>0$ e todo o x real*:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,[f(x^+)+f(x^-)]$$

(FÓRMULA DO LIMITE DE DIRICHLET).

Com efeito, seja f uma função nas condições do enunciado e consideremos, primeiramente, o intervalo $[0, a]$. Se pusermos

$$\varphi(t) = \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}\,,$$

virá, para todo o x real, em virtude da hipótese, $\varphi(0^+)=f'(x^+)$ (valor finito). Então, facilmente se reconhece que a função φ é *seccionalmente contínua* em $[0, a]$. Assim:

$$\int_0^a f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt = \int_0^a f(x^+)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt + \int_0^a \varphi(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt\,,$$

e, segundo o Lema 1, o último integral tende para zero quando $\lambda\to+\infty$. Finalmente, efectuando no primeiro integral do 2.º membro a substituição $t=u/\lambda$ e atendendo a um resultado do Capítulo VI, n.º 4, obtém-se para limite do 1.º membro, quando $\lambda\to+\infty$:

$$f(x^+)\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{a\lambda}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du = f(x^+)\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\,f(x^+)\,.$$

Analogamente se reconhece que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-a}^{0} f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2} f(x^-),$$

o que, junto ao resultado anterior, conduz à FÓRMULA DE DIRICHLET.

Demonstração do Teorema de Fourier.

Seja f uma função complexa, seccionalmente regular e somável sobre a recta. Ponhamos, então, para cada x real:

(1) $$\int_{-a}^{a} f(x+t) \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} \, dt = F(a, \lambda), \qquad \forall a > 0, \lambda > 0.$$

Segundo a FÓRMULA DE DIRICHLET, tem-se

$$\lim_{\lambda \to +\infty} F(a, \lambda) = \frac{\pi}{2} [f(x^+) + f(x^-)], \qquad \forall a > 0,$$

e, como este limite não depende de *a*, será ainda:

(2) $$\lim_{a \to +\infty} \lim_{\lambda \to +\infty} F(a, \lambda) = \frac{\pi}{2} [f(x^+) + f(x^-)].$$

Por outro lado, visto que

$$\frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} = \int_0^{\lambda} \cos(t\tau) d\tau, \qquad \forall t \neq 0, \lambda > 0,$$

tem-se, atendendo a (1):

$$F(a, \lambda) = \int_{-a}^{a} f(x+t) dt \int_0^{\lambda} \cos(t\tau) d\tau = \int_0^{\lambda} d\tau \int_{-a}^{a} f(x+t) \cos(t\tau) dt.$$

Então, *se for permitido trocar a ordem dos limites na fórmula* (2), ter-se-á:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} [f(x^+) + f(x^-)] &= \lim_{\lambda \to +\infty} \lim_{a \to +\infty} F(a, \lambda) \\
&= \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\lambda} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \cos(t\tau) dt, \\
&= \int_0^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \cos(t\tau) dt,
\end{aligned}$$

visto que o último integral é uniformemente convergente, por ser sempre

$$|f(x+t)\cos(t\tau)| \leqslant |f(x+t)|$$

e a função f ser somável sobre **R**, por hipótese.

Ora, a expressão anterior dá-nos imediatamente a FÓRMULA INTEGRAL DE FOURIER (5), *escrita no número anterior, se pusermos $t=\xi-x$ e mudarmos depois τ em t.* Resta-nos, pois, em última análise, demonstrar que é lícita a referida troca dos símbolos de limite:

$$\lim_{a\to+\infty}\lim_{\lambda\to+\infty} F(a, \lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\lim_{a\to+\infty} F(a, \lambda).$$

Para isso, podemos aplicar o TEOREMA DO DUPLO LIMITE (Capítulo V, n.º 6). Trata-se de provar que, quando $a\to+\infty$, a função $F(a, \lambda)$ tende para o limite

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}(\lambda t)}{t}\,dt$$

uniformemente sobre a semi-recta $\lambda>0$. Ora, isso é um consequência imediata da relação

$$|L-F(a, \lambda)| < \int_{a}^{+\infty} |f(x+t)|\,\frac{|\operatorname{sen}\lambda t|}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{-a} |f(x+t)|\left|\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\right| dt$$

$$< \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt, \qquad \forall a>1, \quad \lambda>0,$$

a qual nos mostra que o *supremo* de $|L-F(a, \lambda)|$, para $\lambda>0$, tende para zero quando $a\to+\infty$.

6. Efeito da transformação de FOURIER sobre a multiplicação. Convolução

Sejam f, g duas quaisquer funções complexas somáveis sobre a recta. Então (TEOREMA 2.1.), existem para todo o t real os integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} f(u)\,du, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itv} g(v)\,dv,$$

que definem, respectivamente, $\mathscr{F}[f]$ e $\mathscr{F}[g]$. Ora, o produto destes integrais será, segundo um critério conhecido (Capítulo V, TEOREMA 7.8 e Capítulo VII, TEOREMA 11.2), igual ao integral duplo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(u+v)} f(u) g(v) du dv.$$

Neste integral é lícita a mudança de variáveis

$$x = u + v, \qquad \xi = v$$

cujo jacobiano é

$$J\begin{pmatrix} x\ \xi \\ u\ v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Efectuando esta mudança de variáveis, obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x-\xi) g(\xi) dx d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi) g(\xi) d\xi.$$

Ora, se pusermos

$$\text{(1)} \qquad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi) g(\xi) d\xi, \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

o anterior integral será igual a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} h(x) dx,$$

ou seja, $\mathscr{F}[h]$. Assim, em conclusão,

$$\text{(2)} \qquad \mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g] = \mathscr{F}[h].$$

Pois bem, chama-se *convolução* das duas funções somáveis f, g à função h definida por (1), e escreve-se, então, para indicar este facto:

$$h = f * g.$$

Ter-se-á, pois, por DEFINIÇÃO DE CONVOLUÇÃO:

$$\boxed{(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt, \qquad \forall x\in\mathbf{R}.}$$

A igualdade (2) pode, agora, escrever-se, trocando a ordem dos membros:

(3)
$$\boxed{\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\,.\,\mathcal{F}[g]}$$

fórmula muito importante, que traduz o seguinte teorema fundamental da teoria do *integral de Fourier*:

A transformação de Fourier, quando aplicada a funções somáveis, transforma a convolução na multiplicação usual.

Prova-se, aliás, que a *convolução de duas funções somáveis ainda é uma função somável.*

A convolução, também chamada *produto de composição* ou *produto integral* (em alemão *"faltung"*) é uma operação binária, com propriedades formais idênticas às da multiplicação, como resulta imediatamente da fórmula (3) e da *unicidade* das *imagens inversas de Fourier.* Assim, a convolução (entre funções somáveis na recta) é: *comutativa*, *associativa* e *distributiva relativamente à adição.*

Por exemplo, a primeira propriedade resulta de se ter

$$\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]=\mathcal{F}[g]\mathcal{F}[f], \qquad \forall f,g\in L^1,$$

e, analogamente, para as restantes propriedades.

O teorema anterior também se pode enunciar deste outro modo:

A transformação inversa de Fourier, quando aplicada a funções que são imagens de Fourier de funções somáveis, transforma a multiplicação em convolução.

Com efeito, se forem f e g duas funções somáveis e

$$F=\mathcal{F}[f], \qquad G=\mathcal{F}[g],$$

tem-se, pelo teorema anterior:

$$\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]=FG,$$

donde

$$\mathcal{F}^{-1}[FG] = f * g = \mathcal{F}^{-1}[F] * \mathcal{F}^{-1}[G].$$

Em particular, *se f, g verificam a hipótese do* TEOREMA DE FOURIER, $\mathcal{F}^{-1}$ coincide com $\overline{\mathcal{F}}$ e, assim, teremos

$$\overline{\mathcal{F}}[FG] = \overline{\mathcal{F}}[F] * \overline{\mathcal{F}}[G].$$

Na mesma hipótese, adoptando a DEFINIÇÃO GENERALIZADA DE TRANSFORMAÇÃO DE FOURIER (n.º 4, fórmula (1′)), poderemos escrever

$$\boxed{\mathcal{F}[FG] = \mathcal{F}[F] * \mathcal{F}[G]}$$

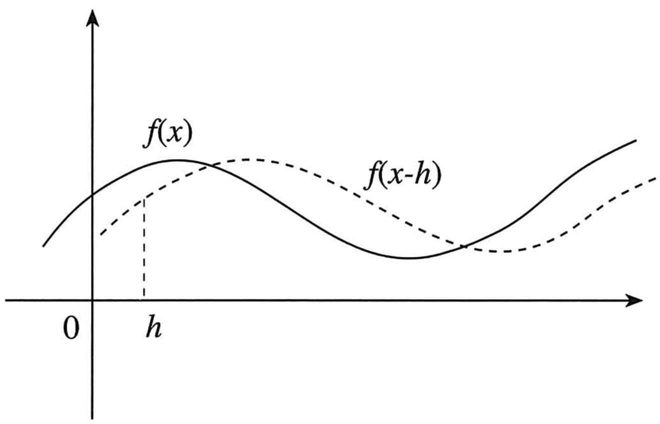
(supõe-se que F e G são *imagens de Fourier* de funções que verificam o TEOREMA DE FOURIER).

É preciso não esquecer que estamos, agora, a considerar os *valores principais de Cauchy* dos *integrais de Fourier,* segundo a referida definição generalizada. Todavia, se F, G e FG são somáveis, esses integrais são convergentes no sentido usual e recaímos na definição usual.

Reencontramos, aqui, as dificuldades inerentes ao facto de não serem bem conhecidos o domínio e o contradomínio da transformação $\mathcal{F}$. *Trabalhando com distribuições, essas dificuldades desaparecem.*

7. Efeito da transformação de FOURIER sobre as translações

Dada uma função real f definida sobre a recta, e sendo h um número real qualquer, é fácil ver que o gráfico da função $f(x-h)$ de x



se obtém do gráfico de $f(x)$ por uma translação de amplitude h. Daí o dizer-se que $f(x-h)$ é a *translatada* (h) de f, a qual se representa por $\tau_h f$.

Suponhamos, agora, $f \in L^1$. Então, também a sua *translatada* (h) pertence a L^1, e tem-se

$$\mathcal{F}_x[f(x-h);\, t] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x-h)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(u+h)} f(u)du$$

$$= e^{iht} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} f(u)du,$$

ou seja,

(1) $$\boxed{\mathcal{F}_x[f(x-h)] = e^{iht}\, \mathcal{F}_x[f(x)]\,.}$$

Aliás, este resultado estende-se, como é fácil ver, a quaisquer funções $\mathcal{F}$-transformáveis. Assim:

A transformação de Fourier transforma a translação de amplitude h em multiplicação por e^{iht}.

Da mesma fórmula resulta, imediatamente:

$$\mathcal{F}_t^{-1}[e^{iht}F(t)] = \tau_h \mathcal{F}^{-1}[F]\,.$$

8. Aplicações às equações diferenciais

O facto de a *transformação de Fourier* converter a derivação relativa a x em multiplicação por $-i\xi$ (sendo ξ a nova variável independente), torna-a um instrumento precioso para equações diferenciais (ordinárias ou em derivadas parciais), que sejam lineares e com coeficientes independentes de x. Desempenha, então, um papel análogo ao dos logaritmos no cálculo numérico elementar.

Exemplo 1) – Consideremos a *equação diferencial ordinária*

$$(1) \qquad \varphi'' - \varphi = f,$$

em que f é uma função dada e φ a função incógnita. Vários são os tipos de problemas que se podem pôr relativamente a tal equação. O mais simples é o *problema de Cauchy,* que consiste em dar, além de f, condições iniciais: por exemplo, os valores de $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ no ponto $x=0$. Mais complicados são os *problemas nos limites*, um dos quais consiste em dar os valores de $\varphi(x)$ em dois pontos a e b distintos.

Pode ainda apresentar-se um problema do seguinte tipo:

Seja f somável na recta; procura-se uma solução φ de (1) *que seja também somável na recta*[1].

Neste caso está naturalmente indicada a *transformação de Fourier.* Suponhamos que o problema admite uma solução. Visto que $\varphi'' = D(D\varphi)$, tem-se:

$$\mathscr{F}[\varphi''] = -i\xi\mathscr{F}[D\varphi] = (-i\xi)^2\mathscr{F}[\varphi] = -\xi^2\mathscr{F}[\varphi].$$

Por conseguinte, se aplicarmos $\mathscr{F}$ aos dois membros de (1), virá, atendendo a que esta transformação é linear:

$$-\xi^2\mathscr{F}[\varphi] - \mathscr{F}[\varphi] = \mathscr{F}[f],$$

ou seja, pondo $\mathscr{F}[\varphi] = \Phi$ e $\mathscr{F}[f] = F$:

$$-(\xi^2+1)\,\Phi(\xi) = F(\xi),$$

o que equivale a

$$\Phi(\xi) = -\frac{F(\xi)}{1+\xi^2}.$$

(1) Este é ainda uma espécie de problema nos limites, pois que, para ser somável na recta, a função φ deve ter um certo comportamento quando $x \longrightarrow +\infty$ e quando $x \longrightarrow -\infty$.

Assim, o problema relativo à equação diferencial (1) *é transformado num simples problema algébrico de divisão por* $1+\xi^2$.

Resta, agora, voltar atrás, isto é, aplicar a *transformação inversa de Fourier.* A solução procurada, *se existe*, deve ser dada pela fórmula:

$$\varphi = -\mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\frac{F(\xi)}{1+\xi^2}\right].$$

Mas podemos, aqui, aplicar a doutrina do n.º 6. Tem-se

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\xi^2}F(\xi)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\xi^2}\right] * \mathcal{F}^{-1}[F] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\xi^2}\right] * f.$$

Por outro lado:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\xi^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{1+\xi^2}\,d\xi,$$

e já sabemos (cf. n.º 1) que este integral é igual a $\pi e^{-|x|}$. Virá, pois, finalmente,

$$\boxed{\varphi(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|} * f(x)}$$

ou seja, mais explicitamente:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}f(t)\,dt.$$

Ora, pode *verificar-se* que esta é, de facto, uma solução do problema proposto. Além disso, as considerações anteriores mostram que tal solução é a *única* existente.

NOTA IMPORTANTE. A justificação total do método empregado só pode fazer-se, de maneira simples, recorrendo à *teoria das distribuições.* Deixa, então, de ser necessário *verificar* que a função obtida é uma solução do problema.

Mais ainda, a *teoria das distribuições* permite alargar, consideravelmente, as condições do problema: *basta supor que existem constantes M e* α *tais que* $|f(x)| \leqslant Mx^{\alpha}$ *e exigir que* φ *verifique uma condição análoga.*

Exemplo 2) – Seja, agora, a *equação em derivadas parciais*

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(x, t), \quad \text{com} \quad h \geqslant 0,$$

que é a *equação de propagação do calor*, ao longo de uma haste homogénea indefinida. Aqui, $f(x, t)$ é uma função conhecida que representa a *fonte externa de calor* no ponto da haste de abcissa x e no instante t; $\varphi(x, t)$ é a função incógnita, representativa da *temperatura* no ponto x e no instante t. Um dos problemas que se podem apresentar a respeito desta equação é o *problema de Cauchy*, que consiste em dar, além da função f, a temperatura $\varphi_0(x)$ em cada ponto x, num instante inicial $t = 0$. Assim, à equação (2) é associada a *condição inicial*:

$$(3) \qquad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \text{para} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Suponhamos que, para todo o $t \geqslant 0$, a função $f(x, t)$ de x é somável na recta, assim como $\varphi_0(x)$, e que existe uma solução $\varphi(x, t)$ de (2) que verifica (3) e é também somável na recta em relação a x, para todo o $t \geqslant 0$. Então, podemos aplicar tanto a f como a φ a *transformação de Fourier, relativamente à variável x*. Ponhamos

$$F(\xi, t) = \mathscr{F}_x[f(x, t)], \quad \Phi(\xi, t) = \mathscr{F}_x[\varphi(x, t)].$$

Visto que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = D_x^2 \varphi,$$

ter-se-á, então,

$$\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right] = (-i\xi)^2 \, \mathscr{F}_x[\varphi] = -\xi^2 \Phi.$$

Admitamos que $\mathcal{F}$ é permutável com a derivação em ordem a t (não nos é possível, agora, demonstrar a validade desta hipótese). Aplicando $\mathcal{F}$ aos dois membros de (2), virá, pois, finalmente, atendendo à linearidade de $\mathcal{F}$:

$$(2') \qquad D_t\Phi + h\xi^2\Phi = F(\xi, t).$$

Por sua vez, aplicando $\mathcal{F}$ aos dois membros de (3), e pondo $\Phi_0 = \mathcal{F}[\varphi_0]$, virá:

$$(3') \qquad \Phi(\xi, 0) \equiv \Phi_0(\xi), \quad \text{para} \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

Assim, transformámos a equação em derivadas parciais (2), *com a condição inicial* (3), *na equação diferencial ordinária* (2′) *em ordem a t* (*ξ é, agora, apenas um parâmetro*) *com a condição inicial* (3′).

Ora, a solução de (2′) que verifica (3′) é, como se sabe,

$$\Phi(\xi, t) = \Phi_0(\xi)e^{-h\xi^2 t} + \int_0^t e^{-h\xi^2(\tau - t)}F(\xi, \tau)d\tau.$$

Restava-nos agora, para obter a solução de (2) que verifica (3) (somável em ordem a x para todo o $t \geqslant 0$), aplicar a esta função Φ a *transformação inversa de Fourier* em ordem a ξ.

Em particular, se $f(x, t) \equiv 0$ (*equação do calor homogénea*), virá, para todo o $t \geqslant 0$:

$$\varphi(x, t) = \mathcal{F}_\xi^{-1}[e^{-h\xi^2 t}] * \mathcal{F}^{-1}[\Phi_0] = \frac{1}{\sqrt{4\pi ht}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ht}\right) * \varphi_0(x)$$

(ver n.º 1, Exemplo 3 e FÓRMULA DE INVERSÃO). Ter-se-á, pois, mais explicitamente:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ht}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-u)^2}{4ht}\right]\varphi_0(u)du.$$

Ora, não é difícil provar que esta função de x e t é, de facto, uma solução de (2) para $t \geqslant 0$, que verifica (3). E será a única, se lhe impusermos, por exemplo, a condição suplementar de ser uma função de x limitada sobre a recta, para todo o $t \geqslant 0$.

NOTAS – 1. As observações feitas para o 1.º exemplo, estendem-se, *mutatis mutandis,* ao 2.º exemplo.

2. Só existe solução do problema, nas condições indicadas, para $t>0$. Este facto está relacionado com a *irreversibilidade das transformações térmicas*: a partir do estado inicial, pode-se prever o futuro, mas não reconstituir o passado.

3. O facto de, na solução do *problema de Cauchy* para a *equação do calor*, figurar a *função de Gauss* do Cálculo das Probabilidades, sugeriu aos físicos a ideia de que a *propagação do calor* é um fenómeno de natureza *não dinâmica*, mas *estatística.* Assim nasceu a *teoria cinética dos gases.*

Aliás, a mesma equação diferencial aplica-se, mais geralmente, a outros fenómenos do mesmo tipo (*fenómenos de difusão*) e por isso recebe, também, o nome de *equação da difusão.*

Exemplo 3) – Seja a *equação das cordas vibrantes*:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \quad a \text{ real}\,,$$

que caracteriza a *propagação de vibrações* (ou *perturbações*), sob a forma de *ondas*, ao longo de um fio homogéneo. Aqui, $u(x, t)$ é a função incógnita, representativa da ordenada do ponto da corda de abcissa x, no instante t. O *problema de Cauchy*, para esta equação, consiste em dar as funções $u(x, t)$ e $u'_t(x, t)$ no instante $t=0$:

$$(5) \qquad u(x, 0) \equiv u_0(x)\,, \quad u'_t(x, 0) \equiv u_1(x)\,.$$

Supondo verificadas certas condições, a *transformação de Fourier em ordem* a x converte a equação (4) em derivadas parciais, na equação diferencial ordinária com o parâmetro ξ:

$$(4') \qquad -\xi^2 U(\xi, t) - \frac{1}{a^2} D^2 U(\xi, t) = 0\,,$$

ou ainda,

$$D^2U(\xi, t) + (a\xi)^2U(\xi, t) = 0,$$

com $U(\xi, t) = \mathscr{F}_x[u(x, t)]$.

Por sua vez, as condições iniciais (5) são transformadas nas condições iniciais relativas a (4′):

$$(5') \qquad U(\xi, 0) = U_0(\xi), \quad U'(\xi, 0) = U_1(\xi),$$

com $U_0 = \mathscr{F}[u_0]$ e $U_1 = \mathscr{F}[u_1]$.

Ora, a solução de (4′) que verifica (5′) é, como se sabe:

$$U(\xi, t) = \cos(at\xi)U_0 + \frac{\operatorname{sen}(at\xi)}{a\xi} U_1 =$$

$$= \frac{e^{iat\xi} + e^{-iat\xi}}{2} U_0 + \frac{e^{iat\xi} - e^{-iat\xi}}{2a\xi i} U_1 .$$

Mas, tendo em vista o estabelecido no n.º 7, vem:

$$\mathscr{F}_\xi^{-1}[e^{iat\xi}U_0] = u_0(x - at), \quad \mathscr{F}_\xi^{-1}[e^{-iat\xi}U_0] = u_0(x + at)$$

e, portanto,

$$\mathscr{F}_\xi^{-1}[\cos(at\xi)U_0] = \frac{u_0(x - at) + u_0(x + at)}{2} .$$

Analogamente se obtém:

$$\mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\frac{\operatorname{sen}(at\xi)}{a\xi} U_1\right] = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(r)dr .$$

Estes dois resultados permitem obter a forma explícita da solução do *problema de Cauchy* proposto. Mas neste caso particular não é manifesta a vantagem do *método de Fourier*: a solução do *problema de Cauchy* pode ser achada directamente, da maneira mais simples, sem impor restrições inúteis aos dados e à solução. Servimo-nos deste exemplo, apenas, para melhor esclarecer o *método de Fourier*, que, em outros casos, oferece nítida vantagem.

9. A transformação de FOURIER para funções de mais de uma variável

Consideremos, por exemplo, uma função complexa $f(x, y)$ das duas variáveis reais x, y, definida no plano. Suponhamos que, para cada valor de y, a função *$f(x, y)$ de x tem imagem de Fourier*, $\mathcal{F}_x[f(x, y)]$. Esta será, então, a função $F(\xi, y)$ definida pela fórmula

$$F(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x, y)\,dx \qquad \forall \xi, y \in \mathbf{R},$$

e diremos que $F(\xi, y)$ é a *imagem de Fourier parcial em ordem a x, da função $f(x, y)$*. Já encontrámos este conceito nos exemplos do número anterior.

Suponhamos, agora, que, para cada valor de ξ, a função $F(\xi, y)$ de y também admite *imagem de Fourier*, $\mathcal{F}_y[F(\xi, y]$. Esta será a função $\Phi(\xi, \eta)$ dada por

$$\Phi(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta y} F(\xi, y)\,dy, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R},$$

ou seja,

$$\Phi(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Ora, para que estas duas integrações sucessivas sejam permutáveis, *basta* que exista o integral duplo correspondente (Capítulo VII):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi x + \eta y)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Nesta hipótese, a função $\Phi(\xi, \eta)$ definida pelo anterior integral é chamada a *imagem de Fourier de $f(x, y)$ em ordem a x e a y*, ou, simplesmente, a *imagem de Fourier de f*, e representada por $\mathcal{F}_{x,y}[f(x, y)]$, por $\mathcal{F}_{x,y} f(x, y)$, ou, mais simplesmente ainda, por $\mathcal{F} f$. Ter-se-á, então,

$$\mathcal{F}_{x,y} f(x, y) = \mathcal{F}_x \mathcal{F}_y f(x, y) = \mathcal{F}_y \mathcal{F}_x f(x, y).$$

Assim, fica definida a *transformação dupla de Fourier*.

Dum modo geral, dada uma função $f(x_1, \ldots, x_n)$ das n variáveis reais $x_1, \ldots, x_n$, definida em $\mathbf{R}^n$, se pusermos, para abreviar:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \cdots + \xi_n x_n,$$

chama-se *imagem de Fourier de f em ordem a $x_1, \ldots, x_n$* ou, simplesmente, *imagem de Fourier de f*, à função de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ definida pelo integral múltiplo

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi \cdot x} f(x) dx,$$

quando este é convergente para todos os sistemas de valores de $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Tal função é, então, designada por qualquer das notações

$$\mathscr{F}_{x_1, \ldots, x_n} f(x_1, \ldots, x_n), \quad \mathscr{F}_x f(x), \quad \mathscr{F}[f] \text{ etc.},$$

sendo, então, $\mathscr{F}$ o produto das n *transformações de Fourier parciais* $\mathscr{F}_{x_1}, \mathscr{F}_{x_2}, \ldots, \mathscr{F}_{x_n}$, em *ordem arbitrária*.

Assim, fica definida a *transformação múltipla de Fourier* (para funções de n variáveis).

As propriedades fundamentais da *transformação múltipla de Fourier* são extensões, mais ou menos imediatas, das que foram estabelecidas para a transformação simples.

Assim, por exemplo, é fácil ver que a *transformação múltipla de Fourier é linear,* que *a imagem de Fourier de f existe e é limitada* (*e uniformemente contínua*) *quando f é somável sobre $\mathbf{R}^n$, e que se tem, sob condições análogas às anteriores*:

$$\mathscr{F}_x \left[\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right] = - i \xi_k \mathscr{F}[f(x)], \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$\mathscr{F}_x [x_k f(x)] = - i \frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathscr{F}[f(x)], \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$\mathscr{F}^{-1} f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi,$$

etc.

A convolução de duas funções f e g de n variáveis reais define-se, ainda, de modo análogo:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-u)g(u)du,$$

supondo que este integral existe para todo o $x \in \mathbf{R}^n$. Tem-se ainda, quando f e g são somáveis:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g],$$

donde se deduzem propriedades da convolução análogas às da multiplicação.

As propriedades expostas da *transformação múltipla de Fourier* são, ainda, o fundamento de importantes *aplicações desta transformação a equações diferenciais, ordinárias ou em derivadas parciais.*

Seja, por exemplo, a *equação do calor no espaço*:

(1) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - h\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z, t),$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - h\Delta\varphi = f,$$

com

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(*laplaciano em ordem a x, y, z*).

Aqui $f(x, y, z, t)$ é uma função conhecida, que representa a *fonte de calor* no ponto (x, y, z) e no instante t, enquanto $\varphi(x, y, z, t)$ é a função incógnita, representativa da *temperatura* no ponto (x, y, z) e no instante t. Consideremos o *problema de Cauchy* relativo à equação (1), associando a esta, a *condição inicial*:

(2) $$\varphi(x, y, z, 0) \equiv \varphi_0(x, y, z).$$

Suponhamos que, para todo o $t \geqslant 0$, a função $f(P, t)$ do ponto $P = (x, y, z)$ é somável no espaço, assim como a função $\varphi_0(P) = \varphi_0(x, y, z)$, e que existe uma solução $\varphi(P, t)$ de (1), que verifica (2) e é também somável no espaço, para cada $t \geqslant 0$. Ponhamos:

$$\mathcal{F}_{x,y,z} f(x, y, z, t) = F(\xi, \eta, \zeta, t)$$

$$\mathcal{F}_{x,y,z} \varphi(x, y, z, t) = \Phi(\xi, \eta, \zeta, t)$$

$$\mathcal{F}_{x,y,z} \varphi_0(x, y, z) = \Phi_0(\xi, \eta, \zeta).$$

Então, aplicando $\mathcal{F}$ aos dois membros de (1) e (2), em ordem a x, y, z, a *equação em derivadas parciais* (1) será transformada na *equação diferencial ordinária*

$$(1') \qquad D_t\Phi + h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\Phi = F,$$

com a condição inicial

$$(2') \qquad \Phi(\xi, \eta, \zeta, 0) = \Phi_0(\xi, \eta, \zeta).$$

Ponhamos, para abreviar, $Q = (\xi, \eta, \zeta)$, $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Então, a solução de (1′) que verifica (2′) será, como é sabido:

$$\Phi(Q, t) = \Phi_0(Q)\, e^{-h\rho^2 t} + \int_0^t e^{h\rho^2(\tau - t)} F(Q, \tau)\, d\tau.$$

Em particular, se $f = 0$ (*equação homogónea*), virá

$$\Phi(Q, t) = \Phi_0(Q)\, e^{-h\rho^2 t},$$

donde, aplicando $\mathcal{F}_Q^{-1}$ aos dois membros e pondo $P = (x, y, z)$:

$$\varphi(P, t) = \mathcal{F}_Q^{-1}(e^{-h\rho^2 t}) * \varphi_0(P),$$

Mas tem-se com $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\mathcal{F}_Q^{-1}(e^{-h\rho^2 t}) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi h t})^3} \exp\left[-\frac{r^2}{(4ht)^3}\right],$$

o que conduz, finalmente, à forma explícita da solução de (1) que verifica (2).

Podemos, ainda, aplicar o mesmo método à *equação geral das ondas*

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x_1, \ldots, x_n, t)$$

com

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

de que são casos particulares a *equação das cordas vibrantes* ($n=1$), a *equação das ondas no plano* ($n=2$) e a *equação das ondas no espaço* ($n=3$).

A *transformação de Fourier* é igualmente útil neste caso.

ALGUMAS INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS

BOCHNER – *Verlesungen über Fouriersche Integrale*. Chelsea Publishing Company, New York, 1949 (existe uma tradução inglesa).

BOCHNER and CHANDRASEKHARAN – *Fourier transforms*. Princeton University Press, London, 1941.

TITCHMARSH – *Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, London, 1937.

TANTER – *Integral Transforms in Mathematical Physics*. Methuen and Company, London, 1956.

WIENER – *The Fourier Integral*. Cambridge University Press, London, 1933.

TÁBUAS

CAMPBELL and FORSTER – *Fourier Integrals for Practical Applications*. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1948.

ERDÉLYI, MAGNUS and TRICOMI – *Tables of integral transforms*, 2 vol., Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.

Página em branco

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

CAP. V – **Revisões e complementos sobre integrais impróprios e sobre integrais paramétricos**

CAP. VI – **Método dos resíduos**

CAP. VII – **Breves noções sobre medida e integral de Lebesgue**

CAP. VIII – **Transformação de Fourier**

CAP. IX – **Transformação de Laplace**