II.2

ANÁLISE SUPERIOR

Página em branco

BIBLIOGRAFIA INICIAL

GEORGES VALIRON – *Théorie des Fonctions,* Masson et Compagnie, Paris, 1948.

OSGOOD – *Functions of Complex Variable,* Stechert, N. Y..

AHLFORS – *Complex Analysis,* Mc Graw and Hill, N. Y. ou Londres, 1953.

CARATHÉODORY – *Theory of Functions,* Chelsea, N. Y., 1954.

Página em branco

INTRODUÇÃO

Entre a Análise Real e a Análise Complexa existe uma diferença fundamental que convém desde já salientar.

Quando se trata de uma *função real de variável real*, isto é, de uma função $y = f(x)$, em que tanto a variável independente, x, como a variável dependente, y, tomam como valores números reais, pode acontecer que a função admita primeira derivada, $f'(x)$, num dado intervalo, sem admitir aí segunda derivada, ou que admita segunda derivada, sem admitir terceira, etc. Pode também acontecer que $f(x)$ seja *indefinidamente derivável* num intervalo, isto é, que tenha aí derivadas finitas de todas as ordens, mas que não seja representável pela sua série de Taylor numa vizinhança dum ponto x_0 do intervalo:

$$f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, f^{(n)}(x_0) + \cdots ,$$

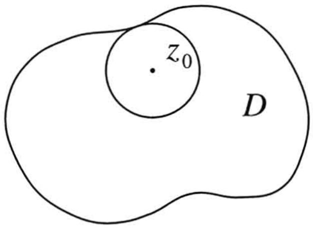
isto é, pode suceder que a soma desta série não coincida com $f(x)$ em todos os pontos x interiores ao intervalo de convergência [(1)].

De todos estes casos poderíamos dar inúmeros exemplos.

---

(1) Pode mesmo suceder que o raio de convergência seja nulo.

Pelo contrário, quando se trata de uma *função complexa da variável complexa*, ou seja, de uma função $w = f(z)$, em que tanto a variável independente, z, como a variável dependente, w, tomam como valores números complexos, verifica-se, como veremos, o seguinte facto, deveras notável:



Se a função admite primeira derivada finita[1] *nos pontos interiores de um domínio plano, admite necessariamente derivadas de todas as ordens nesses pontos e é representável pela sua série de Taylor, numa vizinhança de cada ponto interior ao domínio.*

Exprime-se este último facto dizendo que a função é *analítica* no interior do domínio D considerado.

Assim, de uma hipótese tão simples, como é a da existência de primeira derivada finita no interior de D, resulta para as funções de variável complexa uma série de consequências importantes e, como veremos, uma grande riqueza de propriedades, que tornam as funções analíticas extremamente regulares, cómodas, manejáveis – extremamente *bem comportadas*[2]. Esse "bom comportamento" cessa precisamente em certos pontos da fronteira do domínio em que há derivada – pontos *singulares*, cujo estudo tem, igualmente, uma importância fundamental na teoria das funções analíticas, para um perfeito conhecimento das mesmas.

Da grande riqueza de propriedades das funções analíticas resulta não só a perfeição formal da sua teoria (que é, sem dúvida, uma das mais belas e harmoniosas de toda a Matemática), mas também uma

---

(1) Como veremos, a definição de derivada para funções de variável complexa é idêntica à que se dá para funções de variável real (como limite da razão incremental).

(2) Em linguagem intuitiva, não rigorosa, da Matemática, uma função diz-se tanto mais *regular* quanto mais propriedades possui, a facilitar o seu estudo. Assim, uma função derivável é mais regular do que uma função contínua, uma função com segunda derivada contínua é mais regular do que uma que tenha só primeira derivada, etc.

excepcional importância nas aplicações à Física e à Técnica, especialmente à Electrotecnia: todo o matemático aplicado precisa de ter conhecimentos, não apenas superficiais, da teoria das funções analíticas.

Nótula histórica. A teoria das funções analíticas de *uma* variável complexa ficou praticamente concluída no século passado principalmente por obra de CAUCHY (que se apoiou sobre os conceitos de derivada e de integral para tais funções) e de WEIERSTRASS (que baseou a teoria, de preferência no estudo das séries de potências).

Mas já o mesmo se não pode dizer a respeito da teoria das funções analíticas de *mais de uma* variável complexa; essa encontra-se hoje em plena evolução. É provável que, em 1961, tenha lugar em Lisboa um simpósio sobre funções de variáveis complexas, no qual tomarão parte os principais especialistas mundiais sobre o assunto.

Como base do estudo das funções analíticas, convém começar por recordar as noções fundamentais sobre números complexos aprendidos em Matemáticas Gerais. Para isso, recomenda-se a leitura de todo o Capítulo I do Curso de Álgebra Superior, 2.° volume, do Prof. J. VICENTE GONÇALVES. Entretanto, para facilitar essa recapitulação, vamos aqui fazer uma breve resenha de tais noções, chamando a atenção para alguns pontos essenciais.

Página em branco

CAPÍTULO IX

TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

1. Definição e notações

Seja f uma função *complexa* de variável *real*, definida no intervalo $[0, +\infty[$, e consideremos o integral

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt,$$

em que s é uma parâmetro complexo, $s = x + iy$. Suponhamos que *existe, pelo menos, um valor de s, para o qual este integral é convergente*. Então, a fórmula

$$(2) \qquad F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

define uma função *complexa* F de variável *complexa*, no conjunto dos pontos s do plano para os quais aquele integral é convergente. Pois bem, a função F assim obtida é chamada *imagem* (ou *transformada*) *de Laplace da função* f dada e, para indicar este facto, pode escrever-se:

$$F(s) = \mathscr{L}_t[f(t); s], \quad F = \mathscr{L}_t f(t), \quad F = \mathscr{L}[f]$$

ou, simplesmente, $F = \mathscr{L} f$.

A 1.ª notação usa-se quando se pretende indicar quais são as variáveis independentes da função dada e da função obtida; a 2.ª quando se quer indicar só a variável independente da função dada. É claro que, tal como no caso da *transformação de Fourier*, é arbitrária a escolha das letras que representam estas variáveis, bem como as que representam as funções dada e obtida(1). O que interessa é a correspondência $f \longrightarrow F$ assim estabecida entre certas funções f de variável real e certas funções F de variável complexa. É essa correspondência que é chamada *transformação de Laplace* e designada por $\mathscr{L}$.

Exemplos – 1) Seja $f(t) \equiv e^{at}$, em que a designa um número complexo qualquer. Ora,

$$\int_0^T e^{-st}\, e^{at} dt = \int_0^T e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^T = \frac{e^{(a-s)T}}{a-s} - \frac{1}{a-s},$$

sendo T um número qualquer. Como

$$\left| e^{(a-s)T} \right| = e^{T \operatorname{Re}(a-s)},$$

a função $e^{(a-s)T}$, quando $T \longrightarrow +\infty$, tende para zero ou para infinito, conforme $\operatorname{Re}(a-s) < 0$ ou $\operatorname{Re}(a-s) > 0$. Por conseguinte, o integral considerado será convergente, se e só se for $\operatorname{Re}(a-s) < 0$, isto é, quando $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$. Será pois, segundo a definição:

$$\mathscr{L}_t[e^{at}; s] = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad \text{para} \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a.$$

Em particular, para $a = 0$, tem-se $e^{at} \equiv 1$ e, portanto,

$$\mathscr{L}_t[1; s] = \frac{1}{s} \quad \text{ou ainda} \quad \mathscr{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \text{para} \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

---

(1) Muitos autores empregam, sistematicamente, a letra p, em vez de s, para variável das *imagens de Laplace*. Também é frequente usar a letra F para a função dada e a letra f para sua *imagem de Laplace*, ao contrário do que fazemos aqui. Na leitura dum livro sobre o assunto, convém estar atento às convenções adoptadas neste sentido.

2) Seja $f(t) \equiv 1$ para $t > a$ e $f(t) = 0$ para $t < a$, sendo a um número positivo. Então, um cálculo semelhante ao anterior, mostra que

$$\mathscr{L}[f] = \frac{e^{s-a}}{s}, \quad \text{para} \quad \operatorname{Re} s > 0 .$$

3) Seja $f(t) \equiv \operatorname{sen} ht$, com $h > 0$. Como

$$\operatorname{sen} ht = \frac{e^{iht} - e^{-iht}}{2i},$$

é fácil ver, aplicando o resultado do 1.º exemplo, que para $\operatorname{Re} s > 0$

$$\mathscr{L}_t [\operatorname{sen} ht, s] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ih} - \frac{1}{s + ih}\right) = \frac{h}{s^2 + h^2} \; s .$$

2. Campo de existência. Funções de tipo exponencial à direita

Segundo a definição anterior, o campo de existência da transformação $\mathscr{L}$ é formado por todas as funções complexas f de variável real, que tornam convergente o *integral de Laplace* (1), *pelo menos* para um valor complexo de s. Dizem-se *L-transformáveis* essas funções f, que possuem *imagem de Laplace.*

Tal como no caso da *transformação de Fourier*, não é fácil *caracterizar* a classe das funções *L-transformáveis.* O próprio termo "convergente" aqui empregado é susceptível de diversas interpretações.

Por isso, limitaremos o estudo da *transformação de Laplace* a uma classe particular de funções, que é largamente suficiente na prática, sobretudo quando se introduzem *distribuições.*

Chamaremos *função de tipo exponencial à direita* toda a função f para a qual se possam determinar constantes reais M, α, t_0 tais que

$$|f(t)| < M e^{\alpha t}, \qquad \forall t > t_0 .$$

Como exemplo trivial de funções de tipo exponencial à direita temos as próprias funções do tipo e^{at}. Mas é fácil ver que também são de tipo exponencial à direita as funções racionais inteiras e, mais geralmente, as funções algébricas localmente somáveis, em $[0, +\infty[$, tais como $\sqrt{1+x^2}$, $1/\sqrt{x}$, etc., etc.

Para ver, por exemplo, que toda a potência t^m de t é de tipo exponencial à direita, basta lembrar que $t^m/e^t \to 0$ quando $t \to +\infty$ e que, portanto, existe um número t_0 tal que $t^m < e^t$ para $t > t_0$.

CONVENÇÃO. Para comodidade de exposição, designaremos por Λ a classe de todas as funções localmente somáveis no intervalo $[0, +\infty[$, que são do tipo exponencial à direita(1).

A soma de duas funções pertencentes a Λ *ainda pertence a* Λ. Com efeito, se for

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}, \quad \forall t > t_0, \qquad |g(t)| < Ne^{\beta t}, \quad \forall t > t_1,$$

virá, designando por γ o maior dos números α, β e por τ o maior dos números t_0, t_1:

$$|f(t) + g(t)| < (M+N)e^{\gamma t}, \quad \forall t > \tau.$$

Por outro lado, é imediato que o produto de uma função da classe Λ por um número complexo ainda pertence à classe Λ. Assim, em resumo:

PROPOSIÇÃO 2.1. *A classe* Λ *é um sub-espaço vectorial do espaço das funções localmente somáveis em* $[0, +\infty[$.

Analogamente se verifica que *o produto de duas funções de* Λ *ainda pertence a* Λ, *desde que seja localmente somável em* $[0, +\infty[$. Em particular:

PROPOSIÇÃO 2.2. *O produto de uma função* $f \in \Lambda$ *por qualquer potência* t^m *de t, com* $m > 0$, *ainda pertence a* Λ.

Basta notar que t^m é do tipo exponencial à direita e que, em virtude da hipótese, a função $t^m f(t)$ é somável em todo o intervalo $[0, a]$, com a finito, por ser o produto de uma função limitada por uma função somável nesse intervalo (Capítulo VII).

---

(1) É claro que uma função será localmente somável em $[0, +\infty[$, quando for somável em todo o intervalo $[0, a]$ com a finito. Tal é, por exemplo, a função $1/\sqrt{x}$, mas não a função $1/x$.

PROPOSIÇÃO 2.3. *Toda a primitiva de uma função pertencente a* Λ *ainda pertence a* Λ.

Com efeito, da relação

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}, \qquad \forall t > t_0,$$

deduz-se

$$\left| \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \right| \leqslant \frac{M}{\alpha} e^{\alpha t}, \qquad \forall t > t_0,$$

e, se adicionarmos uma constante arbitrária à primitiva de f considerada, não saímos de Λ (PROPOSIÇÃO 2.1).

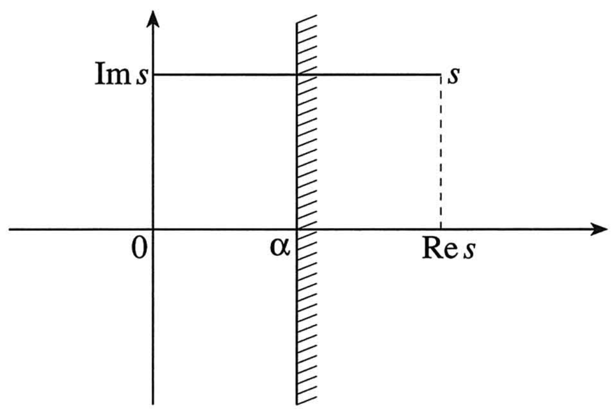
Resta-nos ver que toda a função da classe Λ é *L-transformável.* Isso resulta do seguinte

TEOREMA FUNDAMENTAL. *Se* f *é uma função da classe* Λ, *existe um número real* α *tal que o integral de Laplace*

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

é absolutamente convergente quando $\operatorname{Re} s > \alpha$. *A função* $F(s)$ *assim definida (imagem de Laplace de* f*) é holomorfa no semi-plano aberto* $\operatorname{Re} s > \alpha$, *e tem-se*

$$F'(s) = -\mathcal{L}_t[tf(t)], \quad para \quad \operatorname{Re} s > \alpha.$$



Demonstração. a) Suponhamos verificada a hipótese. Então, existem M, α e t_0 tais que

$$(2) \qquad |f(x)| \leqslant Me^{\alpha t}, \quad \forall t > t_0 .$$

Além disso, como f é localmente somável, a função $e^{-st}f(t)$ de t, para cada $s \in \mathbf{C}$, é somável em todo o intervalo $[a, b]$, com $0 \leqslant a < b < +\infty$, por ser aí o produto de f pela função somável limitada e^{-st}.

Ora, como vimos no n.º 1, Exemplo 1), o integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, e^{\alpha t} dt$$

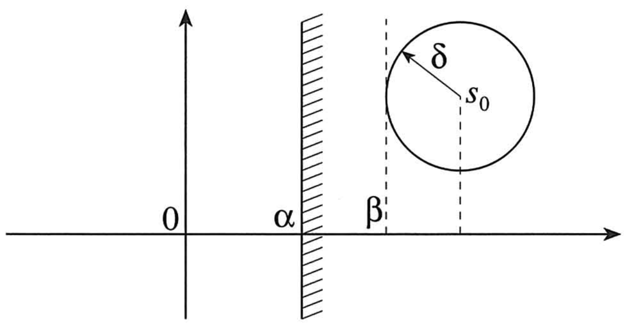
é absolutamente convergente, quando $\operatorname{Re} s > \alpha$. Então, aplicando o CRITÉRIO DE CONFRONTO aos integrais

$$\int_{t_0}^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt, \qquad \int_{t_0}^{+\infty} |e^{t(\alpha - s)}| dt,$$

vê-se que o primeiro é convergente quando $\operatorname{Re} s > \alpha$ e que, portanto, o *integral de Laplace* (1) é absolutamente convergente quando $\operatorname{Re} s > \alpha$.

b) Seja s_0 um número complexo qualquer tal que $\operatorname{Re} s_0 > \alpha$. Para todo o $s \in \mathbf{C}$, tem-se:

$$e^{-st} - e^{-s_0 t} = -\int_{s_0}^{s} t e^{-\sigma t} d\sigma .$$



Seja, agora, β um número real tal que $\alpha < \beta < \operatorname{Re} s_0$. Então, tem-se

$$|e^{-(\sigma-\beta)t}| \leqslant 1, \quad \text{quando} \quad \operatorname{Re}(\sigma-\beta) > 0,$$

ou seja, $|e^{-\sigma t}| \leqslant e^{-\beta t}$, quando $\operatorname{Re}\sigma > \beta$ (com $t \geqslant 0$) e assim virá, por majoração do anterior integral:

$$(3) \qquad \left|\frac{e^{-st} - e^{-s_0 t}}{s - s_0} f(t)\right| \leqslant t e^{-\beta t} |f(t)|$$

quando $|s - s_0| < \delta$, sendo $\delta = \operatorname{Re} s_0 - \beta$.

Para provar que se pode derivar o integral de Laplace, no ponto s_0, sob o sinal de integral, basta, agora, demonstrar, segundo a doutrina do Capítulo VII, n.º 5, *que a função do 2.º membro de* (3) *é somável em* $[0, +\infty[$.

Ora, para isso, basta notar que se for γ um número real tal que $\alpha < \gamma < \beta$, a função $e^{-\gamma t} f(t)$ é somável entre 0 e $+\infty$, como se provou em a), e que

$$\frac{t e^{-\beta t} f(t)}{t e^{-\gamma t} f(t)} = \frac{t}{e^{(\beta-\gamma)t}} \to 0, \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Podemos, pois, derivar sob o sinal de integral:

$$D_{s=s_0} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t}\, t f(t)\,dt,$$

ou seja, dum modo geral:

$$D_s \mathscr{L}[f(t)] = -\mathscr{L}[t f(t)], \quad \text{quando} \quad \operatorname{Re} s > \alpha, \quad \text{(q.e.d.).}$$

A última fórmula pode ainda escrever-se:

$$(4) \qquad \boxed{\mathscr{L}[-t f(t)] = D_s \mathscr{L}[f(t)]}$$

isto é:

A transformação de Laplace converte a multiplicação por $-t$ na derivação em ordem a s.

Exemplos importantes – Já vimos no n.º 1, que $\mathcal{L}_t e^{at} = 1/(s-a)$. Daqui e da fórmula (4) deduz-se, desde logo, que

$$\boxed{\mathcal{L}_t[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\,, \quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots\,.}$$

Em particular:

$$\mathcal{L}_t[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\,, \quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots\,.$$

Ora, esta fórmula pode ser estendida *ao caso de um expoente complexo a real ou imaginário qualquer, com* $\mathrm{Re}\,a > -1$, *recorrendo à Função Gama.*

Para obter $\mathcal{L}_t[t^a]$, basta efectuar a substituição $x = st$ no integral de Laplace, o que dá

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\,t^a dt = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx \quad (s>0)\,.$$

Ora, o integral do 2.º membro é, precisamente, a função gama de $a+1$. Assim,

$$\boxed{\mathcal{L}_t[t^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\,, \quad para \quad \mathrm{Re}\,a > -1, \quad s>0.}$$

Por exemplo, tem-se

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}}\,,$$

ou ainda, por ser $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,.$$

Note-se que a função $1/\sqrt{t}$ se torna infinita na origem, mas é localmente somável em $[0, +\infty[$.

NOTA. Em vez do anterior TEOREMA FUNDAMENTAL, é costume demonstrar, na teoria de *transformação de Laplace*, um outro teorema bastante mais geral:

Se f é uma função L-transformável, existe um número real σ tal que o integral de Laplace relativo a f é convergente para $\mathrm{Re}\, s > \sigma$ *e divergente para* $\mathrm{Re}\, s < \sigma$, *representando uma função de s holomorfa no semi-plano aberto* $\mathrm{Re}\, s > \sigma$.

Este número σ (chamado *abcissa de convergência* do *integral de Laplace*) desempenha, assim, um papel análogo ao do raio de convergência duma série de potências, e o semi-plano $\mathrm{Re}\, s > \sigma$ (chamado *semi-plano de convergência*) um papel análogo ao do círculo de convergência. Porém, ao contrário do que sucede com as séries de potências, o *integral de Laplace* pode não ser *absolutamente convergente* no interior do semi-plano de convergência (conhecem-se exemplos simples desse facto).

Não necessitamos deste teorema geral, de interesse essencialmente teórico. Mas convém registá-lo.

Pode acontecer, em particular, que seja $\sigma = -\infty$; *então, a imagem de Laplace de f é uma função inteira.* Quando tal não sucede, a *imagem de Laplace* é apenas definida num semi-plano, mas será, muitas vezes, prolongável analiticamente a outros domínios do plano, gerando aí uma função analítica global. Por exemplo, já vimos que o integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} . e^{at} dt \quad (com\ a \in \mathbf{C})$$

é convergente, se e só se $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, a$, sendo, então, igual a $1/(s-a)$. A abcissa de convergência deste integral é, pois, $\mathrm{Re}\, a$; mas a função de s por ele definida estende-se a todo o plano, *excepto o ponto a*, gerando, assim, a função meromorfa $1/(s-a)$, com o pólo simples a.

Também pode acontecer que a função analítica global gerada pela *imagem de Laplace F* seja pluriforme; mas é claro que a *imagem de Laplace* será apenas um ramo dessa função.

3. Linearidade da transformação de LAPLACE

Sejam f, g duas funções da classe Λ. Então, em virtude do TEOREMA FUNDAMENTAL, existirá, pelo menos, um número real ρ tal que os *integrais de Laplace* correspondentes sejam convergente para $\mathrm{Re}\, s > \rho$. Deste modo, se forem a e b duas constantes complexas quaisquer, o integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}[af(t) + bg(t)]dt$$

será também convergente para $\operatorname{Re} s > \rho$, sendo, então, igual a

$$a\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt + b\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t)dt.$$

Podemos, pois, escrever

$$\mathscr{L}[af + bg] = a\mathscr{L}[f] + b\mathscr{L}[g],$$

se chamarmos *soma* de duas *imagens de Laplace*, φ e ψ, de funções dadas, à *imagem de Laplace* que coincide com $\varphi(\lambda) + \psi(\lambda)$ em algum semi-plano $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Exprime-se este facto dizendo que *a transformação de Laplace é uma aplicação linear do espaço vectorial Λ sobre o espaço $\mathscr{L}(\Lambda)$ das respectivas imagens.*

4. Efeito da transformação de LAPLACE sobre a derivação

O efeito da *transformação de Laplace* sobre a operação de derivação é semelhante ao da *transformação de Fourier*, com ligeira diferença:

TEOREMA 4.1. *Se f admite derivada $f' \in \Lambda$, tem-se*

(1) $$\boxed{\mathscr{L}[Df] = s\mathscr{L}[f] - f(0).}$$

Demonstração. Suponhamos verificada a hipótese. Então, será:

(2) $$\int_0^T e^{-st}f'(t)dt = [e^{-st}f(t)]_0^T + s\int_0^T e^{-st}f(t)dt,$$

para todo o número real $T > 0$ e todo o $s \in \mathbf{C}$.(1)

(1) Como já sabemos (Capítulo VII, n.º 7), esta fórmula é válida não só quando f' é contínua, mas, muito mais geralmente, quando f' é somável em $[0, T]$, como sucede no caso presente, em virtude da hipótese.

Além disso, como $f' \in \Lambda$, também $f \in \Lambda$ (PROPOSIÇÃO 2.3), e existem, portanto, constantes M, α e t_0 tais que

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}, \quad \text{para} \quad t > t_0 .$$

Então será, para $t > t_0$:

$$|e^{-st} f(t)| \leqslant |Me^{(\alpha - s)t}| = Me^{t \operatorname{Re}(\alpha - s)},$$

e, como $\operatorname{Re}(\alpha - s) < 0$ quando $\operatorname{Re} s > \alpha$, tem-se

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-st} f(t) = 0, \quad \text{quando} \quad \operatorname{Re} s > \alpha .$$

Logo, passando ao limite em (2), quando $T \to +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt - f(0),$$

para $\operatorname{Re} s > \alpha$, o que conduz imediatamente à tese (q.e.d.).

OBSERVAÇÃO. É claro que a fórmula (1) é apenas uma abreviatura da seguinte proposição:

Existe um número real α *tal que, no semi-plano* $\operatorname{Re} s > \alpha$, *a imagem de Laplace de* f' *coincide com o produto de* s *pela imagem de Laplace de* f, *menos* $f(0)$.

Em símbolos da Lógica Matemática:

$$\underset{\alpha \in \mathbf{R}}{\exists} \operatorname{Re} s > \alpha \underset{s}{\Rightarrow} \mathscr{L}_t [f'(t); s] = s \mathscr{L}_t [f(t); s] - f(0) .$$

Em particular, se $f(0) = 0$, tem-se

$$\mathscr{L}[Df] = s \mathscr{L}[f],$$

e podemos dizer que, *neste caso, a transformação de Laplace transforma a derivação em multiplicação por s.*

Sendo assim, é fácil ver que se tem:

$$\mathscr{L}[f] = s\mathscr{L}_t\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right], \qquad \forall f \in \Lambda.$$

Esta fórmula pode ainda escrever-se:

$$\mathscr{L}_\tau\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\,\mathscr{L}[f],$$

isto é:

A transformação de Laplace converte a integração entre 0 *e t na divisão por s.*

Efeito sobre as derivações de ordem superior à primeira.

Suponhamos que f admite derivada $f^{(n)} \in \Lambda$. Então, admite igualmente derivadas $f^{(k)} \in \Lambda$, para $k=1, \ldots, n-1$ (PROPOSIÇÃO 2.3), e virá, segundo o TEOREMA 4.1:

$$\mathscr{L}[f'] = s\mathscr{L}[f] - f(0)$$

$$\mathscr{L}[f''] = s\mathscr{L}[f'] - f'(0)$$

donde

$$\mathscr{L}[f''] = s^2\mathscr{L}[f] - sf(0) - f'(0).$$

Mais geralmente, pode estabelecer-se, por indução matemática, que

$$\mathscr{L}[f^{(n)}] = s^n\mathscr{L}[f] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Se f e todas as suas derivadas forem nulas no ponto zero, será, simplesmente,

$$\mathscr{L}[D^n f] = s^n\mathscr{L}[f].$$

5. Efeito da transformação de LAPLACE sobre as translações

Na *transformação de Laplace*, dada pela fórmula

$$(1) \qquad F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

supõe-se a função f definida apenas no intervalo $[0, +\infty[$. Mas nada impede que a função f seja definida em toda a recta, embora seja apenas a sua restrição àquele intervalo que intervém no integral. Ora, a transformação de Laplace pode ser definida, mais geralmente, pela fórmula

$$(2) \qquad F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

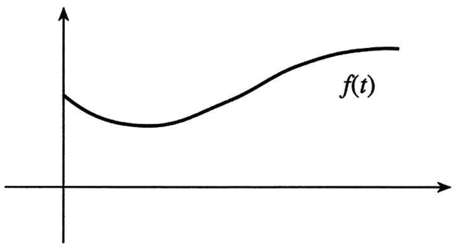
tomando, então, o nome de *transformação bilateral de Laplace. Mas note-se que esta coincide com a transformação unilateral de Laplace, definida por* (1), *quando a função f é nula à esquerda da origem, isto é, quando*

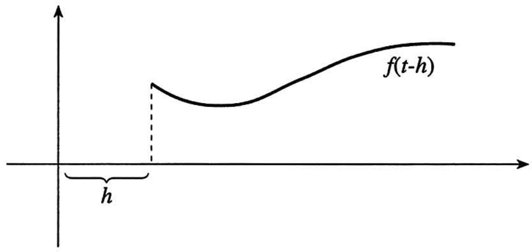
$$f(t) = 0, \quad para \quad t < 0.$$

Ora, muitas vezes, na *transformação de Laplace* usual, definida por (1), é cómodo supor a função f prolongada para a esquerda da origem, sempre com o valor zero. Convém fazê-lo, por exemplo, ao estudar o efeito da *transformação de Laplace* sobre as translações.

Como vimos, a propósito da *transformação de Fourier*, sendo f uma função de variável real e h um número real qualquer, a *transladatada* (h) de f, que se designa por $\tau_h f$, é a função $f(t-h)$ de t. Se a função f é real, o gráfico de $\tau_h f$ resulta do gráfico de f por uma translação de amplitude h.

Então, se f não é definida à esquerda da origem, $\tau_h f$ não será definida à esquerda do ponto h. Se f for definida e nula à esquerda da origem, $\tau_h f$ é definida e nula à esquerda do ponto h.





Suponhamos, pois, f definida e nula à esquerda da origem e $h \geqslant 0$. Então, será

$$\mathcal{L}_t[f(t-h)\,;s] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-h)dt$$

$$= \int_{-h}^{+\infty} e^{-s(u+h)} f(u)du = e^{-sh} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

ou seja:

$$\mathcal{L}_t[f(t-h)\,;s] = e^{-hs}\mathcal{L}_t[f(t)\,;s],$$

ou ainda, abreviadamente:

(3) $$\mathcal{L}[\tau_h f] = e^{-hs}\mathcal{L}[f] \qquad \text{com} \quad h \geqslant 0.$$

Assim, em conclusão:

Supondo o número real $h \geqslant 0$ e a função f definida e nula à esquerda da origem, a transformação de Laplace transforma τ_h na multiplicação por e^{-hs}.

Note-se que este resultado pode ser estendido ao caso $h < 0$, se adoptarmos, mais geralmente, a *transformação bilateral de Laplace*, definida por (2).

Aliás, com a *transformação de Laplace* usual tem-se, reciprocamente, *qualquer que seja o número real h,* como é fácil verificar:

$$\mathcal{L}_t[\mathrm{e}^{ht} f(t)] = F(s-h), \qquad \text{sendo } F = \mathcal{L}[f],$$

ou, ainda, designando por $\tau_h F$ a função $F(s-h)$ de s (*translatada* (h) de F):

$$\boxed{\mathscr{L}_t[e^{ht}f(t)] = \tau_h \mathscr{L}[f]\,.}$$

Assim, a transformação de Laplace em ordem a t transforma a multiplicação por e^{ht} na translação τ_h, qualquer que seja o número real h.

6. Inversão

O problema da inversão para a *transformação de Laplace* põe-se em termos análogos aos do problema correspondente para a *transformação de Fourier*, e pode mesmo reduzir-se a este último, como vamos ver.

Dada uma função $f \in \Lambda$, ponhamos

$$\tilde{f}(t) = f(t) \text{ para } t \geqslant 0, \quad \tilde{f}(t) = 0 \text{ para } t < 0^{(1)}.$$

Então, o *integral de Laplace* pode escrever-se:

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\tilde{f}(t)dt = F(s)\,.$$

Ora, sabemos que existe um número real α tal que este integral é absolutamente convergente para $\operatorname{Re} s > \alpha$. Tomemos arbitrariamente um outro número real $c > \alpha$ e ponhamos (ver figura mais adiante, com $y = -v$):

$$s = c - iv, \quad g(t) \equiv e^{-ct}\tilde{f}(t), \quad G(v) \equiv F(c-iv)\,.$$

Então, o *integral de Laplace* acaba por assumir a forma de *integral de Fourier*. Na verdade, tem-se:

$$G(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivt}g(t)dt\,, \qquad \forall v \in \mathbf{R},$$

(1) É claro que, se f é já definida e nula à esquerda da origem, esta operação de prolongamento é inútil, tendo-se $\tilde{f} = f$.

o que mostra ser G a *imagem de Fourier* de g. Então, se g verifica certas condições (se é, por exemplo, *seccionalmente regular* ou, mais geralmente, de *variação limitada em todo o intervalo limitado*), podemos aplicar a FÓRMULA DE INVERSÃO DE FOURIER, que dá

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itv} G(v)\,dv, \tag{2}$$

em todo o ponto t de continuidade de g, devendo substituir-se $g(t)$ pela semi-soma dos limites laterais nos pontos de descontinuidade.

Multiplicando ambos os membros de (2) por e^{ct} e substituindo v por $-y$, vem, manifestamente,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(c+iy)} F(c+iy)\,dy,$$

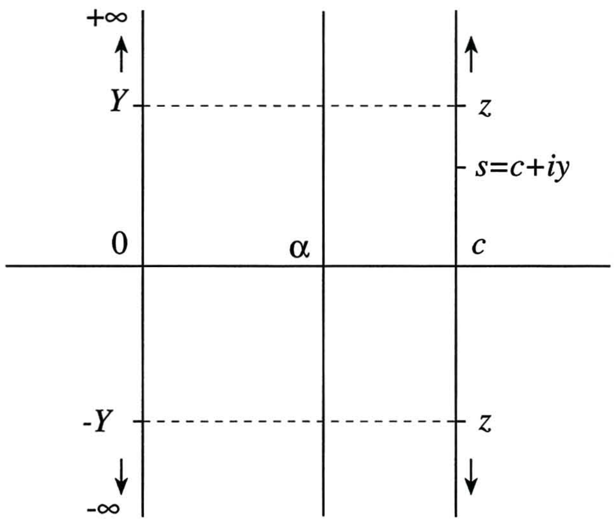
para $t \geqslant 0$, sendo o integral nulo para $t<0$.

Mas a função integranda coincide, agora, com $e^{ts}F(s)$ sobre a recta $\operatorname{Re} s = c$. Notando que o integral desta função sobre o segmento orientado de origem $\bar{z} = c - iy$ e extremidade $z = c + iy$, com $y > 0$, é

$$\int_{\bar{z}}^{z} e^{ts} F(s)\,ds = i \int_{-y}^{y} e^{t(c+iy)} F(c+iy)\,dy,$$

a anterior fórmula pode escrever-se, mais simplesmente,

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{ v. p.} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} e^{ts} F(s)\,ds,} \tag{3}$$



em que o 2.º membro, à parte o coeficiente $1/(2\pi i)$, designa o limite do anterior integral, quando $y \to +\infty$. (É claro que os símbolos $c+\infty i$, $c-\infty i$ não têm, aqui, significado próprio: estão, apenas, a indicar, abrevidamente, que se trata de um integral sobre recta $\operatorname{Re} s = c$, orientada de baixo para cima).

A fórmula (3) é a chamada FÓRMULA DE INVERSÃO DE RIEMANN, aplicável, por exemplo, na hipótese em que f é seccionalmente regular. Fornece, então, o valor $f(t)$ da função em todo o ponto $t \geqslant 0$ em que f é contínua, devendo $f(t)$ substituir-se pela semi-soma dos limites laterais nos restantes pontos $t \geqslant 0$ (para $t<0$ o valor dado pela fórmula é zero).[1]

Aplica-se, também, na hipótese em que *F é somável sobre a recta* $\operatorname{Re} s = c$ (isto é, em que $F(c+iy)$ é uma função de y somável sobre o eixo real), fornecendo, então, o valor de f em quase todos os pontos $t \geqslant 0$. (ver Capítulo VIII, n.º 4, e)). Mas neste caso dispensa-se a indicação "v. p." antes do integral, visto este ser, então, convergente (quer dizer, é convergente o integral de $F(c+iy)$ em ordem a y entre $-\infty$ e $+\infty$.

Além da FÓRMULA DE RIEMANN, *têm sido estabelecidas outras fórmulas de inversão da transformação de Laplace, especialmente para fins práticos de cálculo.*

O MÉTODO DE INVERSÃO DE RIEMANN, também chamado MÉTODO DE INVERSÃO À FOURIER, comporta, geralmente, o *cálculo de resíduos*, segundo a doutrina exposta no Capítulo VI.

A FÓRMULA DE RIEMANN pode ser generalizada e justificada directamente por meio da *teoria das distribuições*, como faremos oportunamente. Então, o estudo da *transformação de Laplace* torna-se não só mais geral, mas também mais simples e preciso.

No caso das funções, verifica-se a UNICIDADE DAS IMAGENS INVERSAS DE LAPLACE, com o seguinte aspecto:

Se duas funções localmente somáveis f_1 e f_2 têm uma mesma imagem de Laplace F, isto é, se $\mathscr{L}[f_1] = \mathscr{L}[f_2] = F$, então f_1 e f_2 diferem, quando muito, em pontos de um conjunto de medida nula (representando, portanto, um mesmo elemento do espaço $\dot{L}$).

---

(1) Com efeito, é fácil ver que as anteriores condições sobre a função $g(t)$ se traduzem por condições análogas sobre $f(t)$.

Podemos, assim, falar da *transformação inversa de Laplace*, $\mathscr{L}^{-1}$, que na prática é dada por (3), e, automaticamente, deduzir das propriedades de $\mathscr{L}$, propriedades correspondentes de $\mathscr{L}^{-1}$, como, por exemplo, a seguinte

$$\boxed{\mathscr{L}_s^{-1}[e^{-hs}F(s)] = \tau_h \mathscr{L}^{-1}[F]\,,} \tag{4}$$

isto é, *a transformação inversa de Laplace* (*em ordem a s*) *transforma a mutiplicação por* e^{-hs} *na translação* τ_h (cf. n.º anterior, fórmula (3)).

7. Convolução no intervalo [0, + ∞[

Dadas duas funções f, g localmente somáveis no intervalo $[0, +\infty[$, chama-se *convolução* (ou *produto de composição*) de f por g *sobre este intervalo* à função h definida pelo integral

$$h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt, \qquad \forall x \in \mathbf{R}^+.$$

Escreve-se, então, $h = f * g$.

O conceito de *convolução no intervalo* $[0, +\infty[$ pode apresentar-se como caso particular do conceito de *convolução sobre a recta*. Assim, se designarmos por $\tilde{f}$ e por $\tilde{g}$ as funções nulas à esquerda da origem, que coincidem com f e com g, respectivamente, à direita da origem, tem-se:

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x-t)\tilde{g}(t)dt.$$

Basta notar que, no 2.º integral, a função integranda é nula para $t<0$, e para $x-t<0$, ou seja, para $t>x$.

A operação assim definida tem propriedades análogas às da multiplicação usual: é *comutativa, associativa* e *distributiva relativamente à adição*.

Por exemplo, tem-se, pondo $x-t=v$ e, portanto, $t=x-v$:

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = -\int_x^0 f(v)g(x-v)dv = \int_0^x g(x-v)f(v)dv,$$

isto é: $f * g = g * f$ (comutatividade). E, analogamente, para as outras propridades.

PROPOSIÇÃO 7.1. *A convolução de duas funções pertencentes a Λ ainda pertence a Λ.*

Com efeito, sejam f, $g \in \Lambda$. Então, podemos fixar constantes ρ, M, N e τ tais que

$$|f(t)| \leqslant Me^{\rho t}, \quad |g(x)| \leqslant Ne^{\rho t}, \quad \forall t > \tau.$$

Se $\tau = 0$, tem-se:

$$\left| \int_0^x f(x-t)g(t)dt \right| \leqslant MN \int_0^x e^{\rho(x-t)} e^{\rho t} dt \leqslant MNxe^{\rho x}.$$

donde se conclui a tese, atendendo à PROPOSIÇÃO 2.2.

Se $\tau > 0$, decompõe-se o integral em três, entre 0 e τ, entre τ e $x-\tau$ e entre $x-\tau$ e x (para x suficientemente elevado), e efectuam-se majorações desses integrais análogas às anteriores.

TEOREMA 7.1. *Quaisquer que sejam f, $g \in \Lambda$, tem-se*

$$\mathscr{L}[f * g] = \mathscr{L}[f]\,\mathscr{L}[g],$$

isto é: a transformação de Laplace converte a convolução em multiplicação.

(Chama-se *produto FG* de duas *imagens de Laplace* F e G, naturalmente, a *imagem de Laplace* H tal que $H(s) = F(s)G(s)$, em algum semi-plano $\operatorname{Re} s > \alpha$).

A demonstração pode fazer-se exactamente nos mesmos moldes da correspondente para a *transformação de Fourier*, substituindo os integrais entre 0 e $+\infty$, que dão as *imagens de Laplace* de f e de g:

$$\int_0^{+\infty} e^{-su} f(u)du, \quad \int_0^{+\infty} e^{-sv} g(v)dv,$$

pelos integrais entre $-\infty$ e $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-su}\tilde{f}(u)du\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sv}\tilde{g}(v)dv\,,$$

em que $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são as funções nulas à esquerda da origem, que coincidem com f e g à direita da origem. Para a demonstração, convém adoptar letras diferentes (u e v, por exemplo) para variáveis de integração, nos dois integrais.

Pondo $F=\mathscr{L}[f]$ e $G=\mathscr{L}[g]$, donde $f=\mathscr{L}^{-1}[F]$, $g=\mathscr{L}^{-1}[G]$ a fórmula anterior pode ainda apresentar-se com o seguinte aspecto:

(1) $$\boxed{\mathscr{L}^{-1}[FG]=\mathscr{L}^{-1}[F]*\mathscr{L}^{-1}[G]}$$

isto é: *a transformação inversa de Laplace transforma a multiplicação usual em convolução.*

8. Aplicações às equações diferenciais

A *transformação de Laplace* é, tal como a *transformação de Fourier*, sua congénere, um instrumento essencial em Física Matemática, com inúmeras aplicações a problemas que se traduzem por equações diferenciais, equações integrais, equações integro-diferenciais, equações em diferenças finitas, etc., etc.

Quando se trata de *equações diferenciais ordinárias* (lineares de coeficientes constantes) ou de *sistemas de tais equações*, a *transformação de Laplace* aplica-se no caso em que são dadas *condições iniciais*. No entanto, para esse fim, a *transformação de Laplace* pode ser inteiramente dispensada, e com vantagem, recorrendo ao *método directo*, baseado na *teoria das distribuições*.

Quando se trata de *equações em derivadas parciais*, a *transformação de Laplace* está indicada nos *problemas mistos*, isto é, nos casos em que são dadas, ao mesmo tempo, *condições iniciais*, relativas a uma das variáveis e *condições nos limites*, relativas à outra ou às outras variáveis. *A transformação será, então, aplicada em ordem à variável a que se referem as condições iniciais* (*a qual, nos casos concretos, é em regra a variável tempo*) *e só pode ser utilizada quando a equação é linear e de coeficientes independentes dessa variável, podendo, no entanto, depender das outras.*

Para dar uma primeira ideia destas importantes aplicações, limitar-nos-emos a quatro exemplos simples.

Exemplo – 1) Seja a equação diferencial

$$\varphi'' + k^2\varphi = f(t) \quad (k \text{ real constante}),$$

com as condições iniciais:

$$\varphi(0) = c_0, \quad \varphi'(0) = c_1.$$

Suponhamos que a função f dada pertence a Λ e procuremos uma solução φ da mesma classe[1]. Aplicando a *transformação de Laplace* a ambos os membros desta equação, virá, atendendo às propriedades estabelecidas (n.º 4):

$$s^2\mathcal{L}[\varphi] - s\varphi(0) - \varphi'(0) + k^2\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{L}[f],$$

ou seja, pondo $\mathcal{L}[\varphi] = \Phi$ e $\mathcal{L}[f] = F$, e introduzindo os dados iniciais:

$$(s^2 + k^2)\Phi(s) = F(s) + c_1 + c_0 s,$$

ou ainda,

$$\text{(1)} \qquad \Phi(s) = \frac{1}{s^2 + k^2}\,F(s) + \frac{c_1}{s^2 + k^2} + \frac{c_0 s}{s^2 + k^2}.$$

Assim, a transformação de Laplace converteu o problema proposto num problema algébrico de divisão.

Resta agora, para obter φ, aplicar a *transformação inversa de Laplace*. Ora, tem-se (n.º 1, Exemplo 3)):

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + k^2}\right] = \frac{1}{k}\operatorname{sen} kt,$$

---

(1) Restrição incómoda e, aliás, supérflua, quando se recorrer ao *método operacional directo,* atrás mencionado (com o emprego das distribuições).

donde (TEOREMA 4.1):

$$\mathscr{L}_s^{-1}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right] = D_t\left(\frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,kt\right) = \cos kt$$

Portanto, virá de (1), atendendo ao estabelecido no n.º 7,

$$\varphi(t) = \frac{1}{k}\,(\mathrm{sen}\,kt) * f(t) + c_0 \cos kt + \frac{c_1}{k}\,\mathrm{sen}\,kt,$$

que constitui, de facto, a solução única do problema, mesmo que a função f não pertença a Λ: basta que seja localmente somável.

Exemplo – 2) Pretende-se determinar uma solução $u(x, t)$ da *equação das ondas*:

$$\text{(2)} \qquad a^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{com} \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

solução essa definida para $t \geqslant 0$ e para x situado num domínio aberto D de $\mathbf{R}^n$, de modo que verifique as *condições iniciais*:

$$\text{(3)} \qquad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t'(x, 0) = u_1(x), \qquad \forall x \in D,$$

e, ao mesmo tempo, uma *condição nos limites*, que pode ser, por exemplo, a de $u(x, t)$ tomar valores previamente dados, sobre a fronteira Γ de D:[1]

$$\text{(4)} \qquad u(x, t) = \theta(x, t) \qquad \forall x \in \Gamma, \quad t \geqslant 0.$$

Trata-se, pois, dum *problema misto*, relativo à equação das ondas.

(1) O domínio D deve também verificar certas condições para que o problema seja possível. Se D for ilimitado, deve-se dar uma outra condição nos limites para que o problema seja determinado: por exemplo, a de $u(x, t)$ ser um infinitésimo de certa ordem, quando $|x| \to \infty$.

Admitamos que, para todo o $x \in D$, a solução $u(x, t)$ é uma função de t pertencente a Λ, e que, para todo $x \in \Gamma$, também $\theta(x, t)$ pertence a Λ. Então, aplicando a (2) a *transformação de Laplace* em ordem a t, virá, admitindo que $\mathscr{L}_t$ é permutável com Δ:

$$a^2 \Delta \mathscr{L}_t[u] - s^2 \mathscr{L}_t[u] + su(x, 0) + u'_t(x, 0) = 0,$$

ou seja, pondo $\mathscr{L}_t[u(x, t)] = U(x, s)$, para todo o $x \in D$, e introduzindo as condições iniciais (3):

$$(2') \qquad a^2 \Delta U - s^2 U = - s - u_0(x) - u_1(x).$$

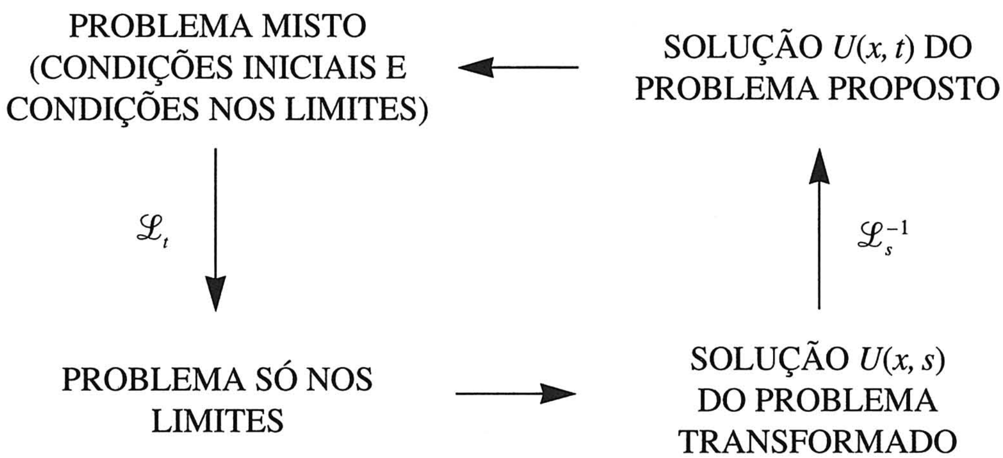
Por sua vez, pondo $\mathscr{L}_t[\theta(x, t)] = \Theta(x, s)$ para todo o $x \in \Gamma$, vem de (4):

$$(4') \qquad U(x, s) = \Theta(x, s), \qquad \text{para} \qquad x \in \Gamma.$$

Assim, a equação em derivadas parciais (2), *em ordem a* $x_1, \ldots, x_n, t$, *com as condições iniciais* (3) *e as condições nos limites* (4), *foi convertida na equação* (2′), *em ordem só a* $x_1, \ldots, x_n$, *com a condição nos limites* (4′).

Por outras palavras: *o problema misto foi convertido pela transformação de Laplace num problema só com dados na fronteira.* Uma vez resolvido este problema relativo a (2′), bastará aplicar a transformação $\mathscr{L}_s^{-1}$ à expressão de $U(x, s)$ para obter a solução $u(x, t)$ do problema proposto.

Este método de resolução pode ser resumido no seguinte esquema:



É este um método deveras elegante e eficaz, para a resolução de problemas mistos, relativos não só à equação das ondas, mas ainda a equações de vários outros outros tipos, e que se apresentam em numerosas questões de Física e de Engenharia. Porém, a sua perfeita justificação só pode ser feita com o auxílio da *teoria das distribuições*, que permite evitar as incómodas hipóteses relativas à natureza das funções dadas e das funções incógnitas, bem como à permutabilidade da *transformação de Laplace* com Δ ou com outros operadores que intervenham na equação (em ordem às variáveis $x_1, \ldots, x_n$). *Podem, então, ser estabelecidas, "a priori", a existência e a unicidade da solução do problema misto, sob condições muito largas.*

Para concretizar, consideremos o caso $n=1$:

$$(5) \qquad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\textit{equação das cordas vibrantes}).$$

Seja o domínio D, neste caso, o intervalo $]0, +\infty[$, e sejam as *condições iniciais* simplesmente as seguintes

$$(6) \qquad u(x,0) = u_t'(x,0) = 0, \qquad \text{para} \qquad x \in]0, +\infty[,$$

o *que significa que a corda se encontra em repouso no instante* $t=0$. A fronteira Γ de D reduz-se, agora, ao ponto 0, *na recta euclidiana*, ou aos pontos 0 e $+\infty$, *na recta acabada.*

Às condições iniciais (6) juntaremos as *condições de fronteira*:

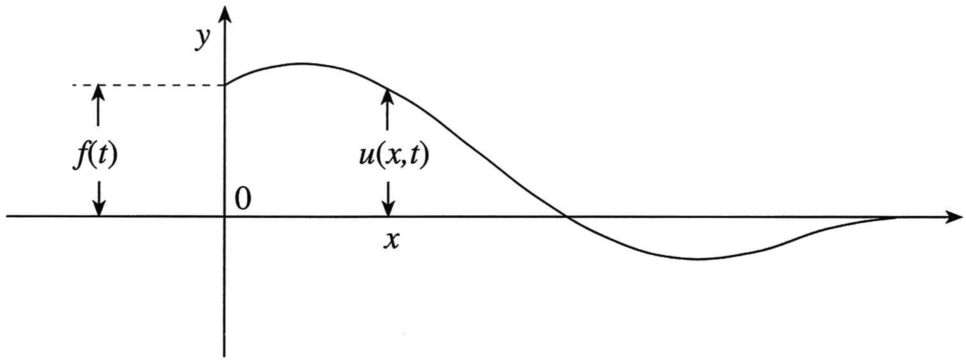
$$(7) \qquad u(0,t) = f(t), \qquad \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0, \qquad \forall t \geqslant 0,$$

sendo f uma função dada. Assim, se nos apresenta um *problema misto*, tradução matemática do seguinte *problema físico*:

Um fio elástico estendido, semi-indefinido e homogéneo, é sujeito no extremo (ponto de abcissa zero) a uma força que obriga esse ponto a mover-se segundo a equação

$$y = f(t)$$

que dá a ordenada y *do referido ponto como função conhecida do tempo para* $t \geqslant 0$. *O fio está em repouso no instante zero e nenhuma* *força externa actua ao longo do mesmo. Determinar a configuração* $y = u(x, t)$ *do fio em cada instante* $t \geqslant 0$, *admitindo que* $y \to 0$ *quando* $x \to +\infty$. [(1)]



Aplicando a transformação $\mathscr{L}_t$, a equação (5) é transformada na *equação diferencial ordinária*:

$$(5') \qquad a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - s^2 U = 0 \qquad (a > 0),$$

com as condições nos limites

$$(7') \qquad U(0, s) = F(s), \quad \lim_{x \to +\infty} U(x, s) = 0,$$

em que F designa a *imagem de Laplace* de f (usamos aqui o símbolo de derivação ordinária, em vez de derivação parcial, em ordem a x, visto s ser apenas um parâmetro na equação).

Ora, é fácil ver que a equação (7′) tem por integral geral

$$U(x, s) = C_1 e^{-sx/a} + C_2\, e^{sx/a},$$

em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias em relação a x, *que podem, no entanto, depender do parâmetro* s:

$$C_1 = \gamma_1(s), \quad C_2 = \gamma_2(s).$$

(1) Prova-se com o *método operacional directo* (baseado na *teoria das distribuições*) que esta última condição é implicada pelas anteriores. Deste modo, a segunda das condições (7) de fronteira é *supérflua*.

Note-se ainda que, fisicamente, uma "corda semi-indefinida" é realizada por uma corda finita (como são todos os fios materiais, na realidade), em que um dos extremos se encontra a uma distância bastante grande, para que se possa considerar *praticamente infinito* o comprimento do fio.

Como as *imagens de Laplace* existem sempre em determinados semi-planos direitos, $\operatorname{Re} s > \alpha$, podemos supor, sem quebra de generalidade, $\operatorname{Re} s > 0$. Deste modo, é fácil ver que, quando $x \to +\infty$:

$$e^{-sx/a} \to 0, \quad e^{sx/a} \to \infty .$$

Então, a segunda das condições (7′) só poderá ser verificada se $C_2 = 0$, e, portanto, a primeira será verificada se e só se $C_1 = \gamma_1(s) = F(s)$.

A solução (única) do problema transformado será, pois:

$$U(x, s) = e^{-(x/a)s} F(s) .$$

Daqui se deduz, finalmente, atendendo ao efeito da *transformação de Laplace* sobre a translação (n.º 5 e final do n.º 6):

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} f\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & \text{para } t \geqslant \dfrac{x}{a}, \\[2ex] 0 \qquad , & \text{para } t \leqslant \dfrac{x}{a}. \end{cases}} \tag{8}$$

Pode-se verificar que esta é, de facto, a solução (única) do problema proposto, *desde que a função f dada verifique a condição adicional de admitir derivadas f' e f'' contínuas.*

Porém, recorrendo ao método operacional directo, baseado na teoria das distribuições, esta condição pode ser dispensada (basta que f seja, por exemplo, uma função contínua). Além disso, torna-se, então, supérflua a verificação do facto de a fórmula (8) fornecer a solução única do problema.

Fisicamente, o resultado (8) é facilmente interpretável:

Cada ponto da corda fica em repouso até ao instante x/a (sendo x a abcissa desse ponto). Daí por diante, o ponto passa a mover-se segundo a equação

$$y = f\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

isto é, exactamente como a origem se move, mas com um atraso de x/a unidades de tempo.

Por outros termos:

O movimento da origem transmite-se inalterado, ao ponto da abcissa x, ao fim do tempo x/a, ou seja, com a velocidade a, visto ser x o espaço percorrido nessa transmissão.

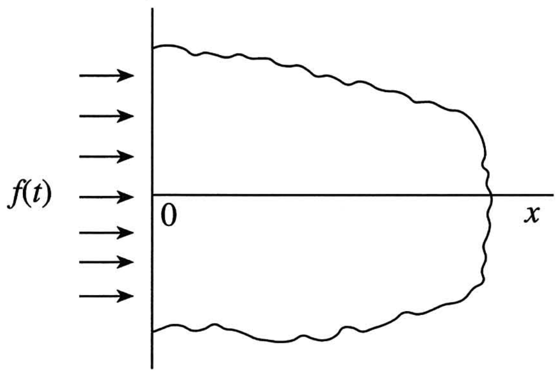
Exprime-se este facto dizendo que *o movimento do extremo do fio dá lugar a uma onda, que se propaga com a velocidade a ao longo do fio.* Chama-se *perfil da onda num dado instante t* precisamente à linha de equação

$$y = \begin{cases} f\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & \text{para } x \leqslant at, \\[2ex] 0 \qquad\qquad , & \text{para } x \geqslant at, \end{cases}$$

que, no plano cartesiano *xy*, dá a *configuração da corda nesse instante t.*

Vários outros tipos de condições nos limites se podem apresentar, a respeito da equação das cordas vibrantes: *por exemplo, o caso da corda finita com extremos fixos* (*sendo os dados iniciais não nulos*), *o caso da corda finita com um extremo fixo e o outro livre ou sujeito a um peso,* etc., etc. A todos se pode aplicar, com êxito, o método da *transformação de Laplace.*

Exemplo – 3) Consideremos um sólido homogéneo semi-indefinido, situado à direita do plano de equação $x=0$ (num referencial cartesiano conveniente). É este o caso idealizado de um sólido de dimensões bastante grandes relativamente à zona em estudo, junto de uma superfície plana. Suponhamos que o sólido se encontra,



inicialmente, à temperatura zero e que a fronteira $x=0$ é mantida a uma temperatura $f(t)$, igual em todos os pontos desse plano, mas função do tempo, conhecida para $t \geqslant 0$. Supõe-se, além disso, que não existe nenhuma fonte de calor no interior do sólido.

Nestas condições, é claro que o calor se difunde, de igual modo, ao longo das semi-rectas perpendiculares ao plano e que, portanto, o fenómeno é regido pela *equação do calor numa dimensão*, já atrás condiderada:

$$(9) \qquad \dot{u}_t(x, t) - k\ddot{u}_{xx}(x, t) = 0\,,$$

em que k é a difusividade térmica do material e a função incógnita $u(x, t)$ representa a temperatura nos pontos de abcissa $x > 0$ e no instante $t > 0$ (para habituar o leitor aos diversos tipos de notação que se podem apresentar, designamos, agora, por $\dot{u}_t$ a primeira derivada parcial em ordem a t e por $\ddot{u}_{xx}$ a segunda derivada $\partial^2 u / \partial x^2$; alguns autores chegam a omitir, mesmo, os pontos ou plicas indicativos das derivações).

À equação (9) associa-se a *condição inicial*:

$$u(x, 0) = 0, \qquad \forall x \geqslant 0,$$

e a *condição de fronteira* (*à esquerda*):

$$u(0, t) = f(t), \qquad \forall t \geqslant 0\,.$$

Como o sólido se encontra, inicialmente, à temperatura zero, é natural fixar a condição de fronteira à direita:

$$\lim_{x \to +\infty} u(x, t) = 0, \qquad \forall t \geqslant 0\,.$$

Ora, a transformação $\mathcal{L}_t$ converte o problema misto, assim apresentado, no seguinte problema, relativo a uma *equação diferencial ordinária*:

$$k\ddot{U}(x, s) - sU(x, s) = 0$$

$$U(0, s) = F(s), \lim_{x \to +\infty} U(x, s) = 0.$$

A solução deste problema nos limites é, como facilmente se reconhece (por considerações análogas às do exemplo anterior):

$$U(x, s) = F(s) e^{-x\sqrt{s/k}}.$$

Será, portanto (n.º 7):

$$u(x, t) = f(t) * \mathcal{L}_s^{-1}[e^{-x\sqrt{s/k}}].$$

Ora, consultando uma tabela de transformadas de Laplace, acha-se

$$\mathcal{L}_s^{-1}[e^{-x\sqrt{s/k}}] = \frac{x}{2\sqrt{\pi k t^3}} e^{-x^2/(4kt)}.$$

Tem-se, pois, finalmente, para $x > 0$ e $t > 0$:

$$u(x, t) = \frac{x}{a\sqrt{\pi k}} \int_0^t \frac{f(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-x^2/(4k\tau)} d\tau.$$

Quando a temperatura $f(t)$ é constante,

$$f(t) = f_0,$$

a temperatura no interior do sólido será, então, dada pela fórmula

$$u(x, t) = \frac{x f_0}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t \tau^{-3/2} \exp\left[-\frac{x^2}{4k\tau}\right] d\tau,$$

que, pela mudança de variável

$$\pi = \frac{x}{2\sqrt{k\tau}},$$

se converte em

$$u(x,t) = \frac{2f_0}{\sqrt{\pi}} \int_X^{+\infty} e^{-r^2 dr}, \quad \text{com} \quad X = \frac{x}{2\sqrt{kt}}.$$

Ora, recordemos que a função dos erros, Θ, do Cálculo das Probabilidades, é dada pela fórmula

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

e que, por ser $\Theta(+\infty) = 1$, se tem

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \Theta(x)$$

(*função complementar dos erros*). Portanto, o resultado anterior pode apresentar-se com o aspecto

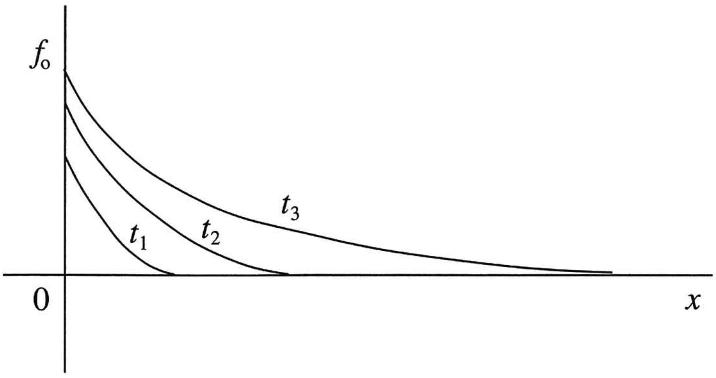
(10) $$\boxed{u(x,t) = f_0\left[1 - \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right]}$$

cuja vantagem reside no facto de se encontrar já tabelada a função Θ.

Note-se que os autores anglo-americanos costumam designar por $erf(x)$ a função dos erros (*error function*) e por $erfc(x)$ a função complementar dos erros (*complementary error function*).

A fórmula obtida mostra-nos que, em qualquer instante $t > 0$, a temperatura em todos os pontos do sólido é diferente de zero (supondo $f_0 \neq 0$), embora tenda para zero quando $x \to +\infty$. *Quer isto dizer que o calor se transmite instantaneamente* (*ou seja, com velocidade infinita*) *a todos os pontos do sólido, ao contrário do que sucede com os fenómenos ondulatórios, em que a propagação se efectua com uma velocidade finita. É esta uma característica dos fenómenos de difusão, que exclui a sua interpretação dinâmica, em favor de uma interpretação estatística, como já atrás se observou.*

Assim, o calor não se propaga à maneira das ondas: *difunde-se, espalha-se,* à semelhança de uma gota de tinta que se deita na água. É de notar, porém, que a referida *transmissão instantânea* do calor tem apenas carácter teórico. Para melhor compreensão do que acaba de dizer-se, consideremos sucessivos gráficos da temperatura como função de x, $y = u(x, t)$ em vários instantes $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ supondo $f_0 > 0$.



É fácil, então, reconhecer que:

Enquanto, no instante, $t = 0$, *a temperatura passa bruscamente do valor* f_0 *(à superfície), para o valor zero (no interior), em qualquer instante* $t > 0$ *(por menor que seja* t*) a temperatura é superior a zero em todos os pontos do sólido, passando com continuidade do valor* f_0 *(à superfície) para valores cada vez menores (no interior). A diminuição de temperatura, ao passar da superfície para o interior, não é, portanto, brusca, como sucede no instante zero, mas contínua. Simplesmente, a temperatura tende muito rapidamente para zero, quando* $x \to +\infty$, *de modo que, embora teoricamente seja sempre maior que zero, é praticamente nula para além de certo valor de* x, *que vai, porém, aumentando com o tempo.*

Assim pois, *praticamente*, a difusão do calor não é instantânea mas progressiva. Se, em vez do calor, se tratasse da difusão duma substância, podíamos dizer, usando a linguagem probabilista:

Em qualquer instante $t > 0$, *a probabilidade de se encontrarem moléculas da substância num ponto da abcissa* x *é praticamente nula quando* x *excede um certo limite (que aumenta, porém, com o tempo).*

Aliás, da fórmula (10) deduz-se imediatamente que dois pontos x_1 e x_2 estão à mesma temperatura em instantes t_1 e t_2, desde que seja

$$\frac{x_1}{\sqrt{t_1}} = \frac{x_2}{\sqrt{t_2}},$$

isto é, desde que

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\,,$$

o que, de certo modo, nos indica que *o calor progride cada vez mais lentamente, ou seja, na razão directa de* $\sqrt{t}$ (LEI DA CONDUÇÃO DO CALOR EM SÓLIDOS SEMI-INDEFINIDOS).

Exemplo – 4) A transmissão de perturbações eléctricas ao longo de um extenso fio ou cabo, como os dos telégrafos ou dos telefones, é regida por um sistema de equações em derivadas parciais do seguinte tipo:

$$(11) \qquad \begin{cases} L\dfrac{\partial I}{\partial t} + RI = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\[2ex] C\dfrac{\partial V}{\partial t} + SV = -\dfrac{\partial I}{\partial x} \end{cases}$$

em que $I(x, t)$ e $V(x, t)$ designam, respectivamente, a intensidade da corrente e a tensão à distância x do posto emissor, no instante t, sendo L, R, C, S constantes que designam, respectivamente, a *indutância*, a *resistência*, a *capacidade* e a *condutância de dispersão, por unidade de comprimento do fio.*

Entre as duas equações (11) podemos eliminar uma das funções incógnitas I ou V. Por exemplo, da segunda podemos tirar I'_x e $I''_{x,t}$, o que, por substituição na primeira após derivação em ordem a x, conduz à equação de 2.ª ordem:

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - CL\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - (CR + SL)\frac{\partial V}{\partial t} - RSV = 0\,,$$

chamada *equação dos telegrafistas.*

Quando R e S são tão pequenos que o seu efeito possa ser desprezado, a equação dos telegrafistas reduz-se à forma da equação das cordas vibrantes, com $a = 1/\sqrt{CL}$. Então, os sinais são transmitidos sob a forma de onda com a velocidade a. É este um dos casos que mais interessa para os fins dos telégrafos e telefones, pois há, então, garantia de que os sinais ou sons cheguem indeformados.

Quando L é desprezível (cabos não indutivos), a equação dos telegrafistas assume forma semelhante à da equação do calor: os sinais difundem-se ao longo do cabo, em vez de se propagarem ondulatoriamente sem dispersão.

No caso geral, o estudo da equação dos telegrafistas é mais complexo que o das equações do calor e das ondas, mas pode ainda ser feito com pleno êxito, mediante a *transformação de Laplace*. Isto justifica, em parte, o grande interesse que o estudo da *transformação de Laplace* apresenta para os engenheiros electrotécnicos.

Para maior desenvolvimento da teoria e das aplicações da *transformação de Laplace*, podem consultar-se as obras adiante indicadas, entre as quais recomendamos, particularmente, a de CHURCHILL.

BIBLIOGRAFIA

H. CARSLAW and J. JAEGER – *Operational Methods in Applied Mathematics*. Oxford University Press, London, 1941.

R. CHURCHILL – *Operational Mathematics*. McGraw-Hill, New York, 1958.

DENIS-PAPIN et KAUFMAN – *Cours de Calcul Opérationnel.*

G. DOETSCH – *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Springer, Berlin, 1937.

——— – *Handbuch der Laplace-Transformation*. Birkhäuser, vol. I, II, III, 1950, 55, 56.

P. MORSE and FERHBACH – *Methods of Theoretical Physics*, I e II, McGraw-Hill, New York, 1953.

D. WIDDER – *The Laplace Transform*. Princeton University Press, 1941.

NOTA. O livro de CHURCHILL indicado é um desenvolvimento da obra do mesmo autor, *Modern Operational Mathematical in Engineering* publicada em 1944.

As obras sobre a *transformação de Laplace* incluem normalmente uma tabela, mais ou menos extensa, de *transformadas de Laplace*. Para um maior desenvolvimento, além das Tabelas de ERDÓLYI, etc., já indicadas no Capítulo anterior, citaremos as seguintes:

DOETSCH, KNIESS und VOELKER – *Tabellem zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch.* Springer, Berlin, 1947.

ÍNDICE

ANÁLISE SUPERIOR

CAP. IV – **Fundamentos da teoria das funções analíticas**

CAP. VII – **Breves noções sobre medida e integral de Lebesgue**

CAP. VIII – **Transformação de Fourier**

CAP. IX – **Transformação de Laplace**