

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO
E SILVA**, PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS
MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COM-
PILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

É ao grande matemático francês LAURENT SCHWARTZ que se deve a criação da teoria das distribuições. Os primeiros artigos sobre o assunto publicou-os Schwartz em 1944, 1945. Mas a teoria só obteve difusão universal quando apareceu sistematizada na monografia "La Théorie des Distributions", em dois volumes, editados em 1950 e 1951 na colecção "Actualités Scientifiques et Industrielles", nº 1001 e 1122.

Um dos objectivos iniciais desta teoria era fundamentar rigorosamente certos processos de cálculo, introduzidos empiricamente, e aliás com conhecido êxito, em Mecânica Quântica por Dirac, e no Cálculo simbólico dos electrotécnicos, segundo o Eng^a. Heaviside.

Esses processos do cálculo, além de carecerem de base lógica, eram por vezes contraditórios. Situações análogamente inseguras surgiam em certos aspectos estranhos e um tanto desconcertantes das equações em derivadas parciais e também na teoria do integral e da série de Fourier que tão vital papel desempenham em Matemática aplicada.

No entanto, o trabalho de Schwartz não se limitou a sistematizar, a legalizar situações por vezes contraditórias encontradas nos domínios já referidos. Bem ao contrário, - a teoria das distribuições abre à Matemática, à Física e à Técnica novas possibilidades de progresso, em escala ainda imprevisível. Podem, aliás, apontar-se desde já alguns êxitos notáveis da descoberta de Schwartz:

a) devem-se-lhe já substanciais progressos na teoria das equações em derivadas parciais, por obra do próprio Prof. Schwartz e alguns dos seus discípulos;

b) vários físicos teóricos (Peterman, Güttinger), têm aplicado já com resultados apreciáveis a teoria das distribuições nas suas pesquisas;

c) em Electrodinâmica Quântica, vê-se na nova técnica matemática com grande esperança, um meio de encontrar solução para graves dificuldades da estruturação da respectiva teoria.

Mas a primeira sistematização da teoria das distribuições, efectuada por Schwartz, exige conhecimentos de Análise funcional que a tornam pouco acessível a físicos e a técnicos. De resto, compreende-se que o primeiro caminho seguido na estruturação de uma teoria, possa não ser o mais fácil, o mais directo. Na verdade, assim aconteceu em muitos casos.

Em 1953, o jovem matemático alemão Heinz König, na sua tese de doutoramento⁽¹⁾, apresentou uma construção da teoria das distribuições segundo um novo método que, sendo mais abstracto que o de Schwartz, parece contudo mais directo, mais elementar e portanto mais acessível. Isto vem mais uma vez provar que, ao contrário do que vulgarmente se pensa, "abstracto" não significa necessariamente "difícil", "heomético", "abstruso".

Ora, é uma orientação abstracta semelhante, mas não idêntica, à de König, que vamos seguir nesta exposição. Mais precisamente, vamos seguir um método axiomático.

Todavia, antes de expor uma teoria axiomática, é conveniente, é até indispensável, tomar conhecimento de um pouco do processo indutivo, histórico, que conduziu a essa axiomática. Por exemplo, que significado teria para nós a axiomática do Cálculo das Probabilidades, se esta não fôsse antecedida de uma exposição das noções intuitivas que intervêm na formulação da mesma axiomática ?

.....

Para começar, não seria possível encontrar maneira melhor do que repetir a frase com que o Prof. Schwartz quiz um dia exhibir os seus conhecimentos de língua portuguesa:

"A noção de distribuição é uma generalização da noção de função"

Podemos até dizer que, de certo modo, o conceito de distribuição está para o de função, como o de número complexo está para o de número real. E esta analogia não é superficial: foi ela até, como veremos, que sugeriu a construção axiomática do espaço das distribuições que vamos apresentar.

Uma das primeiras "distribuições", que se apresentaram, fóra do quadro clássico das funções, é a chamada "função impulsiva unitária" dos electrotécnicos, ou "função δ de Dirac".

E a "função" assim definida:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \neq 0 \\ \infty, & \text{para } x = 0, \end{cases}$$

e sujeita ainda à condição $\int_a^b \delta(x) dx = 1$ quando $a < 0, b > 0$

.....

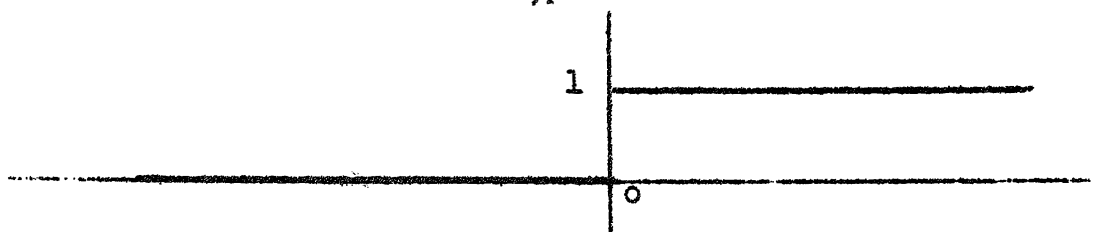
(1) "Neue Begründung der Theorie der Distributionen"
von L. SCHWARTZ, Math. Nachr. 9 (1953), p.129-148

Quanto à 1ª parte, (definição de δ), nada há a objectar há muito tempo que a Matemática clássica aceita o símbolo ∞ , acrescentado ao campo dos números reais, complexos, etc., - e interpretado de variadíssimas maneiras, inclusive geométricas. Tudo fica certo, desde que suficientes precauções assegurem que não surgem contradições. (A moderna teoria da integração exige mesmo, explicitamente, o recurso aos símbolos $+\infty$, $-\infty$).

A 2ª parte,
$$\int_a^b \delta(x) dx = 1$$

é que é contrária a todas as teorias usuais da integração de funções. Aquele integral existe na verdade (segundo Lebesgue), mas - encarando δ como função - o seu valor deve ser nulo. Para interpretar melhor esta condição contraditória, vejamos qual a origem concreta da "função δ ". Esta entidade apareceu como derivada da "função unitária dos telegrafistas" ou "função de Heaviside", $H(x)$, assim definida:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$



Trata-se duma "verdadeira" função, cujo domínio é o eixo real, uma vez excluída a origem. (Por vezes, define-se na origem também, tomando, por ex., $H(0) = 1$).

Mas, como pode aparecer δ como derivada de H ?

Reconhece-se imediatamente que $H(x)$ admite derivada para todos os valores de $x \neq 0$, no sentido clássico; mas para $x = 0$, $H(x)$ não admite derivada dentro da teoria clássica da derivação de funções. Quando muito, na hipótese de se tomar $H(0) = 1$, poderíamos falar em derivada à esquerda da origem, valendo $+\infty$: $H'(0^-) = +\infty$

Não se deve, neste momento, perder de vista que os conceitos matemáticos se criaram para interpretar a realidade física. E, pois, recorrendo a um "modelo" inspirado em considerações físicas que deve encontrar-se a sugestão para a interpretação da função $\delta(x)$ como derivada da função $H(x)$

Um exemplo muito simples é o seguinte: consideremos um movimento de um ponto material, em que a velocidade é dada em função do tempo pela função $v = H(t)$.

Para $t < 0$, é $v = 0$: o móvel está em repouso.

Para $t > 0$, é $v = 1$ o movimento é uniforme, com velocidade unitária.

No instante $t = 0$, a velocidade passa bruscamente de 0 a 1.

Suponhamos, para maior simplicidade, que a massa é unitária: $m = 1$. A força responsável pelo movimento será, segundo as concepções clássicas, a derivada da velocidade:

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{dH}{dt},$$

Para $t < 0$, nada há de anormal: como é $\frac{dv}{dt} = 0$, a força é nula. O mesmo sucede para $t > 0$.

E para $t = 0$? Os físicos não abandonam facilmente a sua preocupação de causalidade, o seu apêgo ao determinismo; a mudança brusca do valor 0 da velocidade para o valor 1, ocorrente no instante $t = 0$, é assim atribuída a uma causa: esta causa será chamada, ainda, uma força. Será uma força finita? Não pode ser, porque uma força finita, num intervalo (de tempo) nulo, não produz efeito algum. Só pode, pois, ser $f = \infty$.

Dai a definição da força em função do tempo, que o quadro seguinte resume:

$$f = H'(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \neq 0 \\ \infty, & \text{para } t = 0 \end{cases}$$

Por outro lado, e por coerência com o referido princípio do determinismo (restrito), uma causa determinada (a força) em condições determinadas (a velocidade num certo instante, por ex., $t = a < 0$) só pode produzir um efeito, que neste caso é a velocidade num instante ulterior, x .

Segundo os hábitos clássicos, para encontrar a velocidade no instante $t = x$ devemos integrar a força entre a e x ; isto é, será v (velocidade no instante x) dada pela relação

$$v = \int_a^x H'(t) dt = H(x) - H(a) = H(x)$$

uma vez que $H(a) = 0$, na hipótese $a < 0$.

Se considerarmos, em particular, um instante $t = b > 0$, visto que $H(b) = 1$, teremos

$$\int_a^b H'(t) dt = 1$$

A identificação, já feita, da função $f(x)$ com a função $\delta(x)$ de Dirac, permite escrever

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1$$

Quer dizer: a função δ , nas condições de Dirac, está "concretizada" mediante a sua identificação com a derivada $\frac{dH}{dt}$

Mas deve observar-se que nada se justificou no procedimento adoptado: chegou-se ao resultado final, caminhando deliberadamente na esteira de métodos tradicionais, sem inquirir da sua aplicabilidade aos casos concretos em que foram chamados a intervir.

Vamos considerar outro movimento, em que a velocidade em cada instante seja dada pela igualdade

$$v = 2H(t)$$

Será então, raciocinando como há pouco,

$$f = v' = 2H'(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \neq 0 \\ \infty, & \text{para } t = 0 \end{cases}$$

E, por sua vez, encontraremos

$$v = \int_a^x 2H'(t) dt = 2H(x) = \begin{cases} 2, & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Segundo o conceito geral de função, a nova força f é, precisamente, $\delta(x)$, porque coincide na verdade com $\delta(x)$ em todos os pontos da recta numérica.

Ou seja, (como já tínhamos identificado $H'(t)$ com $\delta(t)$),

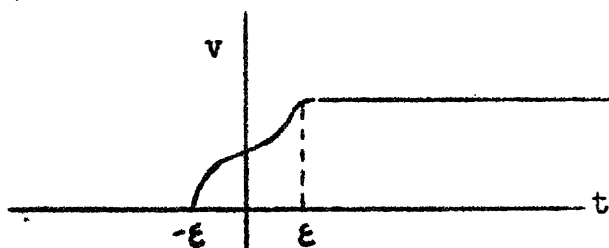
$$2H'(t) = 2\delta(t) = \delta(t)$$

Quer dizer: a mesma função $\delta(t)$ tem, no mesmo intervalo (a, x) , dois integrais diferentes, $H(x)$ e $2H(x)$, o que forçaria a adoptar um conceito de integral contraditório com as mais banais exigências do senso comum.

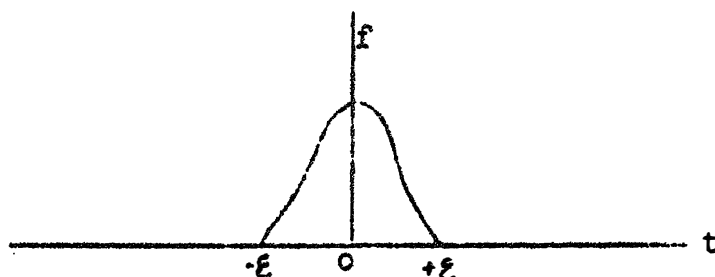
Sob o aspecto físico, a contradição apontada levaria ao abandono do determinismo, porquanto a mesma causa (a força δ) com a mesma condição inicial (a velocidade nula no instante $t = a < 0$), produziria efeitos diferentes: velocidades iguais a 1 e 2, por exemplo, num instante $t > 0$.

A isto poderá objectar-se, por exemplo, do seguinte modo: não há movimento algum, na realidade, em que a velocidade passe de 0 até 1, bruscamente

O que pode acontecer (dir-se-á) é que, num pequeníssimo intervalo $(-\xi, +\xi)$, a velocidade cresça continuamente de 0 até 1.



Podemos até admitir que a velocidade no intervalo $(-\xi, +\xi)$ é continuamente derivável, isto é, tem derivada contínua, sendo essa derivada a função que representa a fôrça que determina o movimento, e que só é diferente de 0 no intervalo $(-\xi, +\xi)$. Esta função cresce rapidamente até atingir, um valor elevado, decrescendo depois rapidamente até 0. Este esquema é perfeitamente coerente com a idea intuitiva de impulso ou de choque.



Ora, assim vistas as coisas, nada de anormal, de singular.

Para quê sair do quadro das funções habituais, então ?

A esta pergunta pode responder-se que:

1ª-as funções com que matematicamente pretende traduzir-se a realidade física, são apenas esquemas, simplificações, que de modo algum se ajustam totalmente à realidade. Portanto, as funções de t , definidas no intervalo $(-\xi, +\xi)$, para representar a variação da velocidade e da força, não deixariam de ser consequências de hipóteses sempre mais ou menos aderentes à realidade - mas não a descrevendo nunca exactamente

2ª-Simplificação por simplificação, é muito mais simples e cómodo empregar nestes casos a função δ e a função H - a não ser que interesse precisamente estudar o mecanismo do impulso, como se faz no capítulo de Mecânica a isso consagrado.

Não esqueçamos, aliás, que os físicos estudam fenómenos concretos, a partir dos quais improvisam esquemas intuitivos; aos matemáticos, o seu papel consiste em recolher essas intuições dos físicos e sistematizá-las de forma coerente, libertando-as de possíveis contradições internas. Estruturas formais não contraditórias: nisto, está toda a matemática. No que toca ao maior ou menor valor de um esquema matemático apresentado para estudo de um fenómeno físico, será oportuno lembrar o que Poincaré dizia da "verdade" das várias geometrias: "não há geometrias mais ou menos verdadeiras, há geometrias mais ou menos cómodas". Também se pode dizer: não há esquemas mais ou menos verdadeiros, há esquemas mais ou menos cómodos, mais ou menos eficazes conforme o fim em vista.

Observe-se ainda que, em Electrotecnia, no estudo de regimes transitórios em circuitos eléctricos, intervém a função impulsiva $\delta(x)$ E mais ainda: pode ser necessário fazer intervir as de-

derivadas δ' , δ'' , ... de δ derivadas de qualquer coisa que não se sabe bem o que é (no quadro clássico das funções)-mas com as quais se trabalhou, e com êxito !

.....

Por outro lado, vejamos como Dirac efectuou a introdução da função $\delta(x)$ na sua exposição: o problema que ele tratou foi de uma amplitude considerável, -nada menos que a representação de uma função qualquer, (pelo menos, de todas as funções contínuas), mediante uma fórmula do tipo

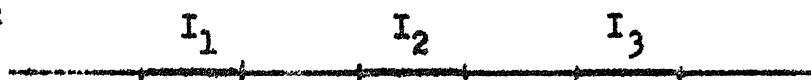
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-x) dt ,$$

supondo que se trata de funções definidas em toda a recta Ox.

Ora, antes dos trabalhos de L. Schwartz, já a teoria do integral de Stieltjes tinha legitimado aquela fórmula, (pelo menos, em certos casos), para cuja justificação Dirac tinha apresentado razões intuitivas, mas inaceitáveis quanto a rigor lógico.

Conviria recordar aqui, sumariamente embora, a definição do integral de Stieltjes . E para isso, será oportuno relembrar previamente a noção geral de medida de que aquele integral depende.

Entre os conjuntos de pontos da recta mais simples, figuram os intervalos:



É claro que, considerados por exemplo, 3 intervalos I_1, I_2, I_3 , a sua reunião (1)

$$I_1 + I_2 + I_3$$

já não é um intervalo, em geral.

Se considerarmos uma infinidade numerável de intervalos,

$$I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$$

a sua reunião

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} I_i$$

poderá não ser já um intervalo, mas um conjunto de tipo muito mais complicado.

(1) O uso do sinal $+$ para designar a reunião de conjuntos é preferível, em teoria da medida e em cálculo das Probabilidades, ao uso do sinal habitual \cup

Suponhamos que se passa ao complementar (relativamente a um intervalo que contenha todos os I_n) da reunião $\sum I_n$ pode ainda surgir um conjunto de novo tipo. Imaginemos que voltamos a considerar reuniões de infinidades numeráveis de conjuntos do tipo anterior, e que passamos aos complementares dessas reuniões; admitamos que se prossegue, sucessivamente e transfinitamente, na execução dessas duas operações:

- a) reunião de infinidades numeráveis;
- b) passagem ao complementar.

Dizem-se conjuntos de Borel ou borelianos todos os conjuntos assim obtidos.

Posto isto, designemos por $\mathcal{B}_\mathcal{R}$ a família de todos os borelianos que são conjuntos limitados e suponhamos que se faz corresponder, a cada conjunto X desta família um determinado número

$$\mu(X)$$

real ou complexo. Fica assim definida em $\mathcal{B}_\mathcal{R}$ uma função numérica de conjunto, isto é, uma aplicação de $\mathcal{B}_\mathcal{R}$ no conjunto dos números reais, \mathcal{R} , ou no conjunto dos números complexos, \mathcal{C} . Pois bem, a função $\mu(X)$ diz-se numeravelmente aditiva, se, dada uma infinidade numerável de conjuntos $X_n \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$, disjuntos dois a dois, se tem necessariamente

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) ,$$

em que $\sum X_n$ designa a reunião de todos os conjuntos X_n e $\sum \mu(X_n)$ a soma dos números $\mu(X_n)$ (série absolutamente convergente).

É óbvio que esta propriedade (aditividade numerável) implica a aditividade a respeito dum número finito de parcelas

$$\mu(X_1 + X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2) , \text{ etc.}$$

As funções numeravelmente aditivas, definidas em $\mathcal{B}_\mathcal{R}$, também se dá o nome de medidas.

Um primeiro exemplo de medida é-nos oferecido pela medida usual, que faz corresponder a cada intervalo I o comprimento deste.

Um outro exemplo é-nos dado por qualquer distribuição de massa sobre a recta. Neste caso, o número $\mu(X)$ associado a cada conjunto $X \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$ é não negativo e diz-se massa contida em X .

São ainda exemplos sugestivos de medidas não-negativas as distribuições de probabilidade. Neste caso, o número $\mu(X)$ diz-se a probabilidade de que a variável casual considerada tome um valor situado em X .

Um exemplo duma medida real que pode ser negativa será uma distribuição de cargas eléctricas sobre a recta.

É ainda fácil ver como esta noção, bastante geral, de medida, se generaliza a qualquer espaço cartesiano R^n .

Podemos agora referir a definição do integral de Riemann-Stieltjes, relativo a uma medida μ , que se representa pelo símbolo

$$\int_a^b f(t) d\mu,$$

Concretamente, vamos indicar o que seja o integral de Riemann-Stieltjes de uma função f no intervalo fechado $[a, b]$, a respeito de uma medida μ (1)

Consideremos uma partição ζ do intervalo $[a, b]$ num número finito de sub-intervalos, por meio de pontos intermédios:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

Seja $\Delta = \max. (t_i - t_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é, a máxima das amplitudes daquelas sub-intervalos. Este número Δ chama-se o diâmetro da decomposição ζ .

De forma mais precisa, consideremos os seguintes sub-intervalos de $[a, b]$:

$$[t_0, t_1[, [t_1, t_2[, \dots, [t_{n-1}, t_n],$$

dos quais os primeiros $n-1$ são abertos à direita; os n intervalos assim definidos são disjuntos dois a dois. De um modo geral, designemos por I_k o intervalo de ordem k : $I_k = [t_{k-1}, t_k]$

Seja \bar{t}_k um ponto qualquer do intervalo I_k : $\bar{t}_k \in I_k$; pode mesmo ser um dos extremos do intervalo.

Multipliquemos o número $f(\bar{t}_k)$ pela medida $\mu(I_k)$ do intervalo de ordem k ; formemos o somatório

$$(\alpha) \quad \sum_1^n f(\bar{t}_k) \cdot \mu(I_k)$$

Consideremos a totalidade das somas a que este processo conduz; se existir limite finito (no sentido da integração) (2) daquelas somas quando o diâmetro Δ tende para 0, diremos que esse li-

- (1) É essencial ter em conta que se trata de um intervalo $[a, b]$ fechado: tratando-se, por ex., de um intervalo $[a, b[$ aberto à direita, o integral seria, em princípio, diferente.
- (2) Quer dizer: quando existir um número I tal que, sendo $\delta > 0$ um número positivo qualquer, é possível determinar um número $\xi > 0$ de modo que, a todas as partições de $[a, b]$ de diâmetro $\Delta < \xi$ correspondam somas do tipo (α) tais que

$$|I - \sum_1^n f(\bar{t}_k) \cdot \mu(I_k)| < \delta$$

mite é o integral de Riemann-Stieltjes de função f , a respeito da medida μ , e relativamente ao intervalo fechado $[a, b]$

$$\int_a^b f(t) d\mu.$$

Daqui, passa-se muito facilmente para o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) d\mu$$

trata-se do limite (eventualmente existente) do integral $\int_a^b f(t) d\mu$, quando supomos que a tende para $-\infty$, e b para $+\infty$

Exemplos:

1) Seja o caso de integrar a função $f(t) = 1$.

Então, teremos

$\int_a^b 1 d\mu = \lim^{(n)} \sum_1^n \mu(I_k) = \mu[a, b]$, já que os intervalos I_1, I_2, \dots, I_n são disjuntos dois a dois e a medida é aditiva

2) Sendo μ uma distribuição de massa existente sobre a recta,

$\int_{-\infty}^{+\infty} x d\mu = \bar{x}$, dá-nos abcissa do centro de gravidade respectivo.

No caso duma distribuição de probabilidade, \bar{x} é o centro da distribuição ou valor médio da variável casual x .

3) Sendo μ uma distribuição de massa, o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 d\mu$$

dá-nos o momento de inércia respectivo.

Tratando-se duma distribuição de probabilidade, o valor do integral é a variância da distribuição.

.....
Convenciona-se chamar à função $\Phi(x) = \int_a^x d\mu$ uma primitiva da medida μ . Dá-nos a medida correspondente ao intervalo fechado $[a, x]$. E a medida diz-se a derivada da primitiva $\Phi(x)$. É fácil reconhecer que as funções "primitivas" de medidas são as funções de variação limitada.

Também não é difícil verificar que duas primitivas de uma mesma medida diferem por uma constante.

.....

(1) No sentido da integração.

Ora, $\delta(x)$ pode interpretar-se em correlação com uma distribuição (1) de massa no eixo real: a que faz corresponder a todo o intervalo que não contém a origem, o número 0; e a todo o intervalo que contém a origem, o número 1. (O que equivale a colocar a massa 1 na origem, e 0 em todos os outros pontos).

Por conseguinte, se pusermos neste caso $d\mu = \delta(t) dt$ (questão de notação), virá

$$\int_a^x d\mu = \int_a^x \delta(t) dt ,$$

o que nos conduz à propriedade integral da função δ atrás referida. De resto, a medida deve ser aqui interpretada como uma densidade; ora a densidade dum ponto material de massa 1 é infinita, o que justifica a atribuição do valor ∞ a δ na origem.

A fórmula de Dirac deduz-se agora facilmente. Começemos por considerar o integral entre a e b:

$$\int_a^b f(t) \delta(t) dt$$

Segundo a definição de há pouco, só interessa, em qualquer partição de $[a, b]$, o intervalo que contiver a origem; portanto

$$\int_a^b f(t) \delta(t) dt \text{ reduz-se a: } \lim_{\Delta \rightarrow 0} [f(\bar{t}_\nu) \cdot \mu(I_\nu)] , \text{ designando por } I_\nu \text{ o intervalo (da partição) que contém } 0 .$$



Suponhamos, provisoriamente que f é uma função contínua. É claro que, ao supor que o diâmetro Δ da decomposição tende para 0, tende para 0 em particular o comprimento de I_ν ; como I_ν encerra a origem, e \bar{t}_ν pertence a I_ν , resulta que $\bar{t}_\nu \rightarrow 0$, quando $\Delta \rightarrow 0$.

Então, a continuidade (admitida) de f permite escrever:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f = f(0)$$

Isto é, (já que a medida $\mu(I_\nu) = 1$, por I_ν conter a origem)

$$\int_a^b f(t) \delta(t) dt = f(0) .$$

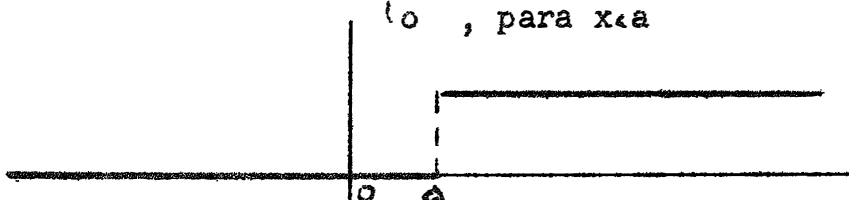
se fôr $a < 0, b > 0$.

E, como se trata de um valor constante, fazendo tender a para $-\infty$ e b para $+\infty$, vem ainda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

(1) Não já função !

Generalizemos agora a definição das funções de Dirac e Heaviside, dando sentido a símbolos como $\delta(x-a)$, $H(x-a)$. A função $\delta(x-a)$ aparecerá como a derivada da função $H(x-a)$, que se diz "função Heaviside relativa ao ponto a ". e se define do modo seguinte:

$$H(x-a) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > a \\ 0, & \text{para } x < a \end{cases}$$


A derivada, no sentido precisado logicamente há pouco, é uma medida: corresponde a estar a massa 1 colocada no ponto a , e 0 em todas as outras. Então, será igual a 1 a medida de todos os intervalos que contêm a , e igual a 0 a medida dos que não contêm esse ponto. Vê-se muito bem aqui, a necessidade de distinguir intervalos abertos e fechados: supondo $c < a$, o intervalo fechado $[c, a]$ tem medida $M = 1$; o semi-aberto $[c, a[$ tem medida $M = 0$.

Podíamos pois interpretar $\delta(x-a)$ como a distribuição de massa que faz corresponder ao ponto a a massa 1 e, a qualquer intervalo que não contém a , a massa 0.

Seguindo agora raciocínios análogos aos que fizemos no caso particular ($a = 0$), é fácil obter a igualdade de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-x) dt = f(x)$$

Está assim justificada esta fórmula, para a hipótese de ser f contínua. Para quê, então, recorrer à teoria de Schwartz?

É que, em cálculo simbólico dos electrotécnicos, há por vezes a necessidade (como já acentuámos) de recorrer às derivadas da função impulsiva: δ' , δ'' , Ora, nada fizemos que justificasse o seu emprego, e até a sua definição. Além disso, Dirac escreve fórmulas como:

$$f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta'(t-x) dt ; \text{ e, em geral, } f^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-x) dt$$

sem se preocupar sequer com saber se f é contínua, derivável, etc. O que não o impediu de chegar, por tão incerto caminho, a brilhantes resultados!

E a justificação que pode dar o integral de Stieltjes, não vai além do 1º caso considerado. É pois indispensável recorrer à teoria de L. Schwartz para legitimar o emprego das derivadas δ' ,

\oint ",...,problemas como o do dipolo magnético,da teoria do potencial dos folhetos magnéticos,exigem êsse emprêgo inevitavelmente.

Vejamos ainda alguma coisa sôbre o papel da teoria das distribuições na teoria da série e do integral de Fourier. Sabe-se quantas restrições é preciso impor,nessa teoria,às funções consideradas,para obter condições importantes de convergência. O integral de Fourier tem sido objecto de monografias várias; a de Titsmarch,por exemplo,é um volumoso tratado,onde muitas páginas são utilizadas para demonstrar apenas meia dúzia de resultados. O mesmo pode dizer-se quanto à série de Fourier,e quanto ao integral de Laplace,que intervém na justificação clássica do Cálculo Simbólico de Heaviside.

Ora,certos matemáticos,-em particular,Bochner,-procuraram evitar essas dificuldades,e ao mesmo tempo aumentar o campo de aplicabilidade da série de Fourier,admitindo como existentes,derivadas de funções contínuas que não têm derivada no sentido usual. Pelo seu primado histórico,é dever referir como exemplo a função de Weierstrass,que é contínua em todos os pontos,e não tem derivada em ponto algum.

Ora,a verdade é que admitindo a existência destas derivadas como entidades formais,se simplifica consideravelmente toda a teoria. É,de certo modo,o mesmo que aconteceu quando se começou a usar,em certos cálculos o símbolo $\sqrt{-1}$. Admitindo como válidas certas regras,chegava-se a resultados certos. Tal como se teve a iniciativa de antepor o radical a -1 ,também se escreveu (para uma função contínua não-derivável),o símbolo Df ,de derivação.

É uma entidade formal,cujo emprêgo não deve conduzir a contradições. Importa para isso alargar o campo das funções,-tal como a introdução do símbolo $\sqrt{-1}$ obrigou a ampliar o campo dos números reais para o campo dos complexos.

Se ficar provado que isso é possível,isto é,se ficar provado que não surgem contradições,está tudo feito. Nisso consiste precisamente a teoria axiomática das distribuições,que vamos apresentar.

.....