INSTITUTO
GULBENKIAN
DE CIÊNCIA

Centro de Cálculo Científico

CURSOS E SEMINÁRIOS

THEORY OF DISTRIBUTIONS

PROCEEDINGS OF AN INTERNATIONAL SUMMER INSTITUTE
HELD IN LISBON, SEPTEMBER 1964

Sponsored by the NATO Science Commitee
and the Gulbenkian Foundation

LISBOA
1964

THEORY OF DISTRIBUTIONS

This page intentionally left blank

THEORY OF DISTRIBUTIONS

PROCEEDINGS OF AN INTERNATIONAL SUMMER INSTITUTE
HELD IN LISBON, SEPTEMBER 1964

Sponsored by the NATO Science Commitee
and the Gulbenkian Foundation

Edited by

CENTRO DE CÁLCULO CIENTÍFICO
INSTITUTO GULBENKIAN DE CIÊNCIA

Lisboa — Portugal
1964

This page intentionally left blank

CONTENTS

This page intentionally left blank

LIST OF LECTURERS

This page intentionally left blank

Prof. Laurent Schwartz
Faculté des Sciences de Paris

37, Rue Pierre Nicole
Paris (5.e) — FRANCE

Prof. J. B. Diaz
Department of Mathematics,
University of California
Riverside, California — U. S. A.

Prof. J. L. Lions
Faculté des Sciences de Paris

42, Rue du Hameau
Paris (15.e) — FRANCE

Prof. André Martineau
Faculté des Sciences de Montpellier

1, Rue du Commerce
Montpellier — FRANCE

Prof. Ebbe Thue Poulsen
Matematisk Institute
Universitetsparken
Aarhus C — DENMARK

DIRECTOR OF THE COURSE

Prof. José Sebastião e Silva
Faculdade de Ciências de Lisboa

Rua Fernam Gomes, 17 (Restelo)
Lisboa-3 — PORTUGAL

This page intentionally left blank

LIST OF PARTICIPANTS

This page intentionally left blank

AUSTRALIA

Cedric F. Schubert
Dept. of Mathematics — University of California
Los Angeles 24, California — U. S. A.

BELGIUM

Jacques Boël
19, Rua Jean Flémal
Gastuche — BELGIUM

H. G. Garnir
14, Rue Joiret
Angleur — BELGIUM

BRAZIL

José Barros-Neto
Université de Montréal — Dep. de Mathématiques
Montréal. Que. — CANADA

CANADA

Serge Dubuc
140, Ridgecrest Road
Ithaca; N. Y. — U. S. A.

CHINA

Chou Chin-Cheng
42, Av. St. Lazare
Montpellier — FRANCE

COLOMBIA

Joseph I. Nieto
Dept. of Mathematics — University of Maryland
College Park
Maryland — U. S. A.

DENMARK

Henrik Stetker-Hansen
Kollegium 9
Aarhus C — DENMARK

Erik Balslev
La Maison Danoise — Cité Universitaire
Paris — FRANCE

FRANCE

Denise Huet
86, Rue Félix Faure
Nancy (Meurthe et Moselle) — FRANCE

Jaqueline Bompoint
«Triton B»
Pont-de-Claix (Isère) — FRANCE

Jean Pierre Louis Aubin
8 A, Résidence du Val
Palaiseau (S. et O.) — FRANCE

Bernard Van Cutsem
«La Pommeraye»
Verson (Calvados) — FRANCE

Jean Pierre Girardeau
9, Rue Boussingault
Paris (13.e) — FRANCE

Charles Goulaouic
4, route de Rosnoen
Le Faou
(Sud-Finistere) — FRANCE

P. Grisvard
10 Impasse Privée
1 rue de Beauregard
Nancy (M. et M.) — FRANCE

Jaques Frisch
2, Allée d'Artois
Viry-Chatillon (S. et O.) — FRANCE

GERMANY

Gottfried Köthe
69, Heidelberg
Mathematisches Institut
WEST GERMANY.

H. G. Tillmann
Institut für Angewandte Mathematik
65 Mainz
Universität
Jakob Wederweg 67
WEST GERMANY.

Elmar Schmidt
Institut für Angewandte Mathematik.
65 Mainz
Universität
Jacob Wederweg 67
WEST GERMANY.

Karl-Heinz Förster
1 000 Berlin 37
Schützallee 90
WEST GERMANY.

Gunter Bengel
69 Heidelberg
Mathematisches Institut
Tiergartenstrasse
WEST GERMANY.

GREAT BRITAIN

R. J. Elliott
19, The Riding, Kenton,
Newcastle-Upon-Tyne 3 — ENGLAND

G. Vincent-Smith
Merton College
Oxford — ENGLAND

G. H. Bailey
Department of Mathematics
Merz Court
The University
Newcastle-Upon-Tyne 1 — ENGLAND

D. E. Williams
Mathematics Department
Royal Aircraft Establishment
Farnborough, Hants. — ENGLAND

ITALY

F. G. Mantovani
Corso Dante 122
Torino — ITALY

Sergio A. Spagnolo
Via Fratti 40
Parma — ITALY

Angelo Minguzzi
Istituto di Fisica «A. Righi»
Via Irnério 46
Bologna — ITALY

NETHERLANDS

C. G. Lekkerkerker
Olympiaplein 20
Amsterdan Z — NETHERLANDS

E. M. de Jager
Stichting Mathematisch Centrum
2.e Boerhaavestraat 49
Amsterdam (O) — NETHERLANDS

J. P. M. de Kroon
A. B. W. — T. N. O. J. Pz Coenstraat 22
Den Haag — NETHERLANDS

N. van Arkel
Mathematical Institute
Stationsweg 46
Leiden — NETHERLANDS

NORWAY

Bent Birkeland
Fururaben 9
Oslo 7 — NORWAY

PHILIPPINES

Salva C. Ramboyong
Via Dandolo 74
Rome — ITALY

POLAND

Stanislas Klasa
Immeuble Triton B
Pont-de-Claix (Isére) — FRANCE

PORTUGAL

Fernando Roldão Dias Agudo
Av. Dr. Oliveira Salazar, 35
Oeiras — PORTUGAL.

Rómulo Rodrigues
Bairro Belém
Rua 13, n.º 129
Lisboa-3 — PORTUGAL.

Maria Higina Rendeiro Marques
Av. dos Estados Unidos da América, 96 r/c D.to
Lisboa-5 — PORTUGAL.

Amílcar dos Santos Gonçalves
Vivenda Oliveira — Bairro Simões
Agualva — Cacém — PORTUGAL.

Maria Odette Cadete
Rua D. João V, 30
Lisboa — PORTUGAL.

António Maia Farinha Cadete
Rua D. João V, 30
Lisboa — PORTUGAL.

António Saraiva Duarte
Rua da República, 86
Loures — PORTUGAL.

João Alexandre Medina Corte-Real
Rua Rodrigo da Fonseca, 212-1.º-D.to
Lisboa — PORTUGAL.

Maria Madalena Franco Quirino
Av. do Brasil, 178-3.º-D.to
Lisboa — PORTUGAL.

José Francisco Velhinho Palma Fernandes
Rua Oliveira Martins, 13-2.º-D.to
Lisboa — PORTUGAL.

João Manuel T. S. Oliveira
Rua de Santana à Lapa, 157-2.º-D.to
Lisboa — PORTUGAL.

Artur José G. Vaz Ferreira
Rua Arco do Carvalhão, 23-3.º-D.to
Lisboa — PORTUGAL.

António Pimentel de Sousa e Menezes
Rua Domingos Sequeira, 11-5.º-Esq.
Lisboa-2 — PORTUGAL.

Fernando Manuel Sequeira
Casa da Horta de Sta. Clara
Cascais — PORTUGAL.

Jaime C. Campos Ferreira
Rua Aviador Plácido de Abreu, 4-1.º-Esq.
Lisboa — PORTUGAL.

Rui António Ferreira de Agonia Pereira
Rua B1—Lote 7-7.º-D.to Olivais-Sul
Lisboa-6 — PORTUGAL.

Bárbara Palma Branco de Faria
Av. de Roma, 46-6.º-D.to
Lisboa — PORTUGAL.

João Cosme Santos Guerreiro
Rua Saraiva de Carvalho, 79-2.º-Esq.
Lisboa — PORTUGAL.

Maria Fernanda Rosa Lopes
Rua Jorge Ferreira de Vasconcelos, 2-3.º-Esq.
Lisboa — PORTUGAL.

António Brandão Lopes Pinto
Al. D. Afonso Henriques, 21-5.º-Esq.
Lisboa — PORTUGAL.

Eduardo Manuel S. S. Veloso
Av. D. Rodrigo da Cunha, 11-3.º-D.to
Lisboa — PORTUGAL.

TUNISIA

Mohamed Salah Baouendi
55, Coteaux du Rhodon
Chevreuse (S. et O.) — FRANCE.

TURKEY

Ali Imre Usseli
Middle East Technical University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Theoretical Physics
Ankara — TURKEY.

B. C. Unal
Tuna Cad. Halk Sok. n.º 18/9
Ankara — TURKEY.

UNITED STATES OF AMERICA

Abdul Kadir Aziz
1 004 Heather Av.
Takoma Park. Md. 20 012
U. S. A.

Adam Kleppner
Dept. of Mathematics — University of Maryland
College Park, Maryland — U. S. A.

J. J. Benedetto
37 Elm St.
Wakefield, Mass. — U. S. A.

G. J. Maltese
Dept. of Mathematics
University of Maryland
College Park, Maryland — U. S. A.

Ronald J. Larsen
Yale University — Dept. of Mathematics
Box 2155 Yale Station
New Haven, Connecticut — U. S. A.

This page intentionally left blank

OPENING SESSION

This page intentionally left blank

ALLOCUTION DU PROFESSEUR JOSÉ SARMENTO, VICE-RECTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LISBONNE

Minhas senhoras e meus senhores:

Foi com o maior agrado e simpatia que a Universidade de Lisboa deu o seu patrocínio a este curso de alto nível científico que hoje se inicia. Cedeu estas instalações, onde aqui nos encontramos, pois considera seu dever acarinhar e fomentar todas as oportunidades que proporcionem o aperfeiçoamento e expansão de novos ramos do saber.

No caso presente a Teoria das Distribuições é um dos tais ramos que bem merecem ser desenvolvidos, aperfeiçoados e divulgados. Acresce ainda o particular interesse da Universidade de Lisboa, por este curso internacional, o facto de um dos seus mais notáveis cultores ser um Professor desta Universidade.

Os expositores que vão figurar neste curso são figuras mundialmente conhecidas no campo da Matemática. Posso afirmar até que, pràticamente, todos os cientistas que criaram e desenvolveram a Teoria das Distribuições se encontram hoje aqui reunidos.

Aos Srs. Professores e ilustres Expositores deste curso, Laurent Schwartz da Universidade de Paris, J. B. Diaz, da Universidade de Maryland, J. L. Lions da Universidade de Paris, A. Martineau da Universidade de Montpellier, E. T. Poulsen da Universidade de Aarhus, desejo apresentar as mais sentidas homenagens da Universidade de Lisboa, desejando-lhes as maiores facilidades no desempenho da missão que aqui os trouxe. Tenho a certeza que deste curso e dos contactos que ele porporcionará, resultará uma nova expansão e aperfeiçoamento da Teoria das Distribuições.

Ao Sr. Professor Doutor Sebastião e Silva, director do curso e meu muito ilustre colega na Faculdade de Ciências, desejo exprimir-lhe a satisfação da Universidade de Lisboa pelos seus trabalhos sobre a Teoria das Distribuições e pela posição de alto relevo internacional que ocupa neste domínio. Recordo que, a pedido da Universidade de Maryland, o Sr. Professor Doutor Sebastião e Silva efectuou nessa Universidade, durante o segundo semestre do corrente ano, um curso sobre a sua tão querida Teoria das Distribuições.

À Comissão Coordenadora da Investigação para a OTAN, aqui representada pelo seu ilustre Presidente, Professor Doutor Herculano Amorim Ferreira, a quem apresento as minhas saudações, desejo exprimir o reconhecimento da

Universidade de Lisboa pelas facilidades concedidas para a realização deste 14.º Curso de Verão.

À Fundação Calouste Gulbenkian, aqui representada por um dos seus mais insignes membros o Sr. Embaixador Pedro Teotónio Pereira, a quem rendo as minhas mais profundas homenagens, desejo patentear mais uma vez a gratidão desta Universidade pelos auxílios que tantas vezes nos tem dispensado, e muito particularmente por hoje ter permitido que o Centro de Cálculo Científico do Instituto Gulbenkian de Ciência assegurasse e organizasse este Curso.

Finalmente as minhas últimas palavras são para o Sr. Professor Doutor Carlos Alves Martins na sua dupla qualidade de representante de Portugal no Comité Científico da OTAN e de Director do Centro de Cálculo Científico, do Instituto Gulbenkian de Ciência. Apresentando-lhe as minhas saudações desejo exprimir-lhe, em primeiro lugar, a satisfação da Universidade de Lisboa por em mãos tão competentes se encontrar a representação de Portugal no Comité Científico da OTAN, em segundo lugar o agrado por V. Ex.ª se encontrar à testa da organização deste Curso de Verão, o que de antemão faz prever o seu pleno êxito.

ALLOCUTION DU PROFESSEUR AMORIM FERREIRA, PRÉSIDENT DU COMITÉ NATIONAL PORTUGAIS DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE POUR L'OTAN

Monsieur le Président:

Au nom du Comité National Portugais de la Recherche Scientifique pour l'OTAN, j'ai l'honneur de vous saluer, en vous remerciant d'avoir bien voulu présider à cette séance d'ouverture du Cours d'été sur la Théorie des Distributions. Je vous prie aussi de transmettre à Monsieur le Recteur de l'Université de Lisbonne nos respectueuses salutations et nos vifs remerciements pour la cession de cette magnifique salle et des locaux de la Cité Universitaire pour les travaux et les services auxiliaires du cours.

Des remerciements également vifs sont dûs à la Fondation Calouste Gulbenkian pour le généreux appui financier qu'elle a donné au Comité Scientifique de l'OTAN pour la réalisation du cours d'été et pour l'assistance substantielle qu'elle a donnée et qu'elle donne pour le fonctionnement du cours. Il est pour moi un privilège — en adoptant la façon anglaise de dire — de les adresser, au nom du Comité National Portugais, au représentant de la Fondation ici présent, l'Ambassadeur Teotónio Pereira. Je n'insisterai pas — il ne serait pas opportun de le faire en cette occasion — sur l'œuvre magnifique de la Fondation en ce pays et dans le monde, en faveur de la culture dans tous les domaines.

Une salutation spéciale va au directeur du cours d'été, M. Sebastião e Silva, membre de l'Académie des Sciences et professeur à la Faculté de Lisbonne, avec les meilleurs vœux pour le bon succès des travaux du cours.

Mesdames, Messieurs:

Je pourrais — et peut-être je devrais — faire terminer ici mon allocution, forcément courte pour ne pas vous fatiguer. Mais il y a des renseignements que je considère approprié de donner en cette occasion, sur le Comité Scientifique de l'OTAN, son but et ses programmes, spécialement en ce qui concerne ce pays comme membre de la Communauté Atlantique.

Le Comité Scientifique a été créé en Décembre 1957 par le Conseil Ministériel de l'OTAN. Chaque pays membre de l'Organisation y est représenté par un scientiste qualifié. Son but principal est de prendre et proposer les mesures necéssaires pour activer le développement scientifique et technologique des pays membres, «base essentielle de la culture, de l'économie et de la force politique et militaire de la Communauté Atlantique».

Pour atteindre ce but, le Comité Scientifique de l'OTAN maintient actuellement un certain nombre de programmes dont j'indiquerai ici les plus importants.

Le programme des bourses d'études scientifiques est destiné à la formation et spécialisation de personnel scientifique. Deux millions et demi de dollars ont été attribués en 1963 à ce programme, duquel ont bénéficié jusqu'à présent 197 diplomés universitaires portugais.

Des projets internationaux de recherches sont subventionnés, totale ou partiellement, par le programme de subventions pour la recherche scientifique. Le montant actuel du budget de ce programme est 735 000 dollars par an. Les chercheurs portugais ont reçu jusqu'à présent des subventions dont le total atteint 140 000 dollars.

Le but du programme d'études supérieures avancées est de permettre qu'un certain nombre de diplomés universitaires puissent acquérir des connaissances sur quelques disciplines scientifiques plus necéssaires pour la recherche, ou encore peu connues parce que récentes. Le montant actuel du budget de ce programme est 650 000 dollars.

Quelques secteurs spécialisés de la recherche scientifique, tels que océanographie, recherche opérationnelle, radioastronomie, radiométéorologie, etc. sont aussi subventionnés par le Comité Scientifique de l'OTAN.

Pour ce qu'il s'agit du programme des cours d'été, la commission consultative du Comité Scientifique a choisi, sur un total de 70 demandes, 40 activités qui feront l'objet de cours d'été en 1964. Celui qui va commencer à Lisbonne, sur la théorie des distributions, est le 14ème de la liste et le troisième qui se réalise au Portugal. Le premier a été sur l'utilisation des calculateurs électroniques dans le domaine du génie civil. Le deuxième a bénéficié, comme le troisième, non seulement d'une subvention de l'OTAN, mais de l'appui financier de la Fondation Calouste Gulbenkian.

*

Le Comité National Portugais de la Recherche Scientifique pour l'OTAN est d'avance sûr du bon succès des travaux de ce cours d'été, dans lequel participeront six professeurs distingués et quelques dizaines d'étudiants de plusieurs nationalités.

En travaillant ensemble, les participants du cours d'été viendront à mieux se connaître les uns les autres. Par cette voie ils arriveront facilement à se comprendre et à s'apprécier, condition éssentielle pour que les hommes puissent vivre heureux sur la Terre, en paix.

ALLOCUTION DU PROFESSEUR J. SEBASTIÃO E SILVA DIRECTEUR DU COURS

Monsieur le Vice-Recteur de l'Université de Lisbonne

Monsieur le Président de la Commission Portugaise de Coordination de la Recherche Scientifique de l'OTAN

Monsieur le Représentant du Président de la Fondation Gulbenkian

Monsieur le Représentant du Portugal au Comité Scientifique de l'OTAN

Mesdames, Messieurs:

Il y a deux ans, un de mes amis m'a suggéré d'organiser au Portugal un cours international sur la théorie des distributions. À ce moment-là, cette idée m'a paru un rêve. Aujourd'hui, je tiens à remercier vivement le Comité Scientifique de l'OTAN et la Fondation Gulbenkian, d'avoir permis, avec leur généreuse contribution, de transformer ce rêve en réalité. J'adresse aussi mes vifs remerciements au Rectorat de l'Université de Lisbonne, pour avoir mis à notre disposition ses excellentes installations, pour toutes les séances du Cours. Enfin, je dois souligner la contribution essentielle du Professeur Alves Martins, dans l'organisation de ce Cours. Dès le premier moment, depuis deux ans, il a soutenu ce projet avec tout l'enthousiasme et tout le dynamisme qui le caractérisent, et il a mis à notre disposition la magnifique machine administrative du Centre de Calcul Scientifique. Au nom de nous tous, qui sommes venus ici pour mieux connaître les progrès et les nouveaux problèmes de la théorie des distributions, je lui adresse l'expression de toute notre reconnaissance.

Aux mathématiciens distingués de tant de pays qui sont accourus ici je souhaite cordialement la bienvenue, et je remercie vivement les professeurs qui ont bien voulu prêter leur précieuse collaboration à ce cours. Les conférences qui seront tenues ici seront publiées en un volume spécial par le Centre de Calcul Scientifique. Elles donneront, je l'espère, une idée assez juste des progrès de la théorie des distributions et de ses applications, accomplis pendant les trois dernières années, après le Cours International sur cette théorie, tenu en Italie au mois de Septembre 1961.

Je n'ai nullement l'intention de faire ici l'histoire de la théorie des distributions. Je veux en tout cas rappeler que cette théorie est née en 1945. Evidemment, elle a eu des ancêtres: les procédés heuristiques des electrotechniciens de l'école de Heaviside et des physiciens comme Dirac, par exemple. On peut dire que les physiciens utilisaient les distributions, comme M. Jourdan faisait de la prose. Mais on sait que ces méthodes manquaient complètement de fondements rationnels. Quelques mathématiciens ont fait des tentatives pour construire une théorie rendant compte de ces méthodes hétérodoxes. Je dois aussi rappeler que Bochner, dans l'étude de la transformation de Fourier, et Sobolev, dans l'étude des équations aux dérivées partielles, avaient introduit des concepts précurseurs de la théorie des distributions. Mais cette théorie, qui est venue mettre définitivement de l'ordre partout, est née en 1945, comme je l'ai déjà rappelé. Depuis lors, elle s'est développée rapidement, par l'œuvre de son fondateur et d'autres chercheurs. Nombre de mathématiciens, dans plusieurs pays, se sont jetés sur ce nouveau filon. Il est aujourd'hui difficile, dans plusieures questions concernant les équations aux dérivées partielles ou la physique théorique, d'ignorer les distributions, sans devenir obsolète. C'est comme si l'on prétendait ignorer les nombres complexes dans la théorie des équations algébriques à coefficients numériques.

Moi-même je me suis intéressé aux distributions depuis dix ans. Quelques amis me disent que, depuis dix ans, je ne fais que parler de distributions, en suggérant qu'il s'agit là d'une sorte d'idée fixe. Alors je leur observe que, depuis des siècles, les mathématiciens parlent de fonctions: voilà aussi une idée fixe. Et, désormais, les mathématiciens devront aussi parler de distributions, en employant ce terme ou un autre équivalent.

Pour terminer, je dois parler de la belle surprise qui nous a été offerte au commencement de ce Cours. Le Professeur Laurent Schwartz n'était pas sûr de pouvoir venir: c'est pourquoi sa conférence n'avait pas été annoncée. Mais, en même temps, il m'avait promis de faire l'impossible pour être présent, fût-ce seulement à l'inauguration. Il y a exactement une semaine M. Schwartz m'a communiqué par télégramme sa décision finale. Donc, l'impossible s'est réalisé: le créateur de la théorie des distributions est parmi nous, il va nous parler. Et je vais finir, parce que, comme tous les autres auditeurs, je suis impatient de l'écouter.

LECTURES

This page intentionally left blank

MESURES DE RADON SUR DES ESPACES NON LOCALEMENT COMPACTS

PAR

L. SCHWARTZ

This page intentionally left blank

MESURES DE RADON SUR DES ESPACES NON LOCALEMENT COMPACTS

par

L. SCHWARTZ

§ 1. Introduction

Sur un espace localement compact X, une mesure de Radon est une forme linéaire continue sur l'espace topologique $C(X)$ des fonctions continues à support compact. Par rapport à cette mesure, si elle est $\geqslant 0$, on peut définir les mesures des ensembles, les fonctions intégrables à valeurs dans des espaces de Banach et les intégrales de ces fonctions, les applications mesurables, au sens de Lusin, de X dans des espaces topologiques Y (1).

Il y a une autre théorie, très différente, celle des mesures abstraites. Une tribu de parties sur un ensemble X est un ensemble de parties, contenant $\emptyset$ et X, et stable par complémentation et par réunions et intersections dénombrables. Une mesure abstraite $\geqslant 0$, sur la tribu $\mathcal{T}$, est une fonction m sur $\mathcal{T}$, à valeurs $\geqslant 0$ finies ou non, dénombrablement additive, c. à d. telle que, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles disjoints de la tribu $\mathcal{T}$, on ait $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$.

Par rapport à une mesure abstraite, on peut encore définir les ensembles mesurables et leurs mesures, les fonctions intégrables à valeurs dans des espaces de Banach et leurs intégrales; et les applications mesurables dans les espaces topologiques Y (2).

Toute mesure de Radon $\geqslant 0$ sur un espace localement compact X définit une mesure abstraite sur la tribu borélienne $\mathcal{T}$ de X. Les ensembles mesurables et leurs mesures, les fonctions intégrables à valeurs dans les Banach et leurs intégrales, sont alors les mêmes pour la mesure de Radon et la mesure abstraite qu'elle définit; par contre les applications mesurables dans les espaces topolo-

---

(1) On trouvera un exposé de la théorie des mesures de Radon dans BOURBAKI [1], [2], [3].

(2) On trouvera un exposé de la théorie des mesures abstraites dans un grand nombre d'ouvrages; voir par exemple HALMOS [1].

giques Y, si elles sont les mêmes pour les espaces métrisables séparables Y, mais ne sont pas en général les mêmes pour Y arbitraire. Redonnons donc les deux définitions:

A) *Soit X un espace localement compact, μ une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur X. Une application H de X dans Y est μ — mesurable au sens de Lusin, si, quel que soit le compact K de X et quel que soit $\delta > 0$, il existe un compact $K_\delta \subset K$, tel que $\mu(K - K_\delta) \leqslant \delta$, et que la restriction de H à K soit continue.*

B) *Soient X un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur X, m une mesure $\geqslant 0$ abstraite sur $\mathcal{T}$. L'application H de X dans Y est m-mesurable, si, pour tout borélien B de Y, $H^{-1}(B)$ est m-mesurable.*

La mesurabilité-Lusin de H, pour une mesure de Radon μ, entraîne sa mesurabilité pour la mesure abstraite définie par μ; mais non l'inverse, comme le montrent des contre-exemples connus.

Pourquoi beaucoup d'analystes se sont-ils entêtés à considérer surtout des mesures de Radon, ce qui exige l'hypothèse de locale compacité de X? Les probabilistes ont cependant besoin, de toute évidence, de mettre des lois de probabilité sur des espaces de Banach de dimension infinie. D'où un état de tension et de guerre froide entre les divers partisans de diverses théories de la mesure. Il y a à celà une raison assez impérieuse. Les mesures de Radon ont des propriétés très fortes, d'un usage constant en analyse, que n'ont pas les mesures abstraites:

1) En utilisant la partition de l'unité, on montre que la mesure extérieure d'une réunion filtrante *(même non dénombrable)* d'ouverts est la borne supérieure de leurs mesures extérieures. En particulier, toute mesure de Radon qui induit 0 sur une famille (même non dénombrable) d'ouverts induit 0 sur leur réunion.

Rien de tel ne subsiste pour les mesures abstraites, *qui ne permettent jamais de sortir des réunions dénombrables.* On étend d'ailleurs ce résultat aux limites filtrantes croissantes de fonctions semi-continues inférieurement; et d'autre part on démontre un théorème de recollement des morceaux de mesures, qui n'a pas d'équivalent en théorie des mesures abstraites. De même la mesure d'une intersection filtrante *(même non dénombrable)* de fermés de mesures finies est la borne inférieure de leurs mesures.

2) Soit m une mesure abstraite $\geqslant 0$ sur une tribu $\mathcal{T}$ d'un ensemble X, et soit H une application m-mesurable de X dans Y. On peut alors définir une mesure image $H(m)$ sur la tribu borélienne de Y; pour B borélien dans Y, on pose $(H(m))(B) = m(H^{-1}(B))$. Si alors B est une partie quelconque $H(m)$-mesurable de Y, on montre que $H^{-1}(B)$ est m-mesurable, et que l'on a encore $m(H^{-1}(B)) = (H(m))(B)$. *Mais la réciproque est inexacte.*

Exemple (1.1) Soit Y l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$; et soit X une partie de Y, non mesurable pour la mesure de Lebesgue $\nu = dx$, de mesure extérieure 1. Tout borélien A de X est l'intersection de X avec un borélien A' de Y; posons $m(A)=\nu(A')$. La valeur trouvée est indépendante du choix de A', car, si A'' est un autre choix, la différence entre A' et A'' (c. à d. l'ensemble des points qui appartiennent à un seul des deux) est un borélien de $Y-X$, donc sa mesure pour ν est nulle puisque la ν-mesure intérieure de $Y-X$ est supposée nulle. Alors $A \rightarrow m(A)$ est une mesure abstraite sur la tribu borélienne de X. La mesure image de m par l'injection naturelle H de X dans Y est la mesure de Lebesgue ν sur Y, puisque, pour tout borélien B de Y, on a justement $\nu(B)=m(H^{-1}(B))=m(X \cap B)$. Si alors on prend l'ensemble non borélien $B=Y-X$, son intersection avec X est vide donc m-mesurable, et cependant lui-même n'est pas $\nu=H(m)$-mesurable, par hypothèse; il donne le contre-exemple souhaité.

On peut naturellement retourner la situation de diverses manières, on ne supprime pas cet inconvénient. Au contraire, si μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$, H une application μ-mesurable-Lusin de X dans un espace topologique Y (condition plus forte que la mesurabilité abstraite en général), et moyennant certaines conditions supplémentaires (par exemple si μ est bornée), on a une mesure de Radon image $H(\mu)$ sur Y; *mais, cette fois,* $B \subset Y$ *est* $H(\mu)$*-mesurable, si et seulement si* $H^{-1}(B)$ *est* μ*-mesurable, et les mesures sont égales* [1]. Le but de cet article est de donner une théorie des *mesures de Radon valable sur des espaces non localement compacts*, avec les mêmes propriétés que les mesures de Radon sur des espaces localement compacts; et de provoquer ainsi la fin de la guerre froide et la réconciliation générale. Que les probabilistes aient ou non besoin du caractère Radon de la mesure, *les mesures qu'ils considèrent sont en fait de Radon*, à cause de notre proposition (8.3.).

Bien que la théorie soit valable pour des mesures quelconques, nous ne la donnerons, pour simplifier, que pour des mesures bornées $\geqslant 0$, de masse totale 1, c. a. d. pour des lois de probabilité; *mesure voudra dire, partout, mesure* $\geqslant 0$ *de masse* 1.

§ 2. Définition. Principales propriétés. Prolongement de Lebesgue

Soit $\mathcal{B}(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur l'espace topologique X, muni de la norme $\|\varphi\| = \underset{x \in X}{Sup} |\varphi(x)|$.

DÉFINITION (2.1). *On appelle mesure de Radon sur* X *une forme linéaire continue* μ *sur* $\mathcal{B}(X)$, *vérifiant* $\mu(\varphi) \geqslant 0$ *pour* $\varphi \geqslant 0$, $\mu(1)=1$, *et en outre la condition que nous appellerons* (ε, K):

(ε, K): *Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* K *de* X *tel que* $\varphi \in \mathcal{B}(X)$,

[1] BOURBAKI [2], § 6, n.° 2, corollaire de la prop. 3.

$|\varphi|\leqslant 1, \varphi=0$ sur K, entraîne $|\mu(\varphi)|\leqslant \varepsilon$ (¹). Cette définition coïncide bien avec la définition habituelle des mesures si X est compact (il suffit de prendre $K=X$); et on démontre sans peine qu'elle redonne les mesures habituelles ($\geqslant 0$ de masse 1) si X est localement compact.

Dans la suite, *nous supposerons toujours*, *même si ce n'est pas explicitement répété*, *que les espaces considérés sont complètement réguliers* (c. à d. uniformisables ou plongeables dans des compacts); c'est dans ce cas seulement que les mesures auront de bonnes propriétés. Rappelons que tout espace vectoriel topologique séparé est complètement régulier. Nous appellerons $\mathfrak{M}(X)$ l'espace des mesures de Radon sur X.

DÉFINITION (2.2). *Soit μ une mesure de Radon sur X. Si f est une fonction semi-continue inférieurement sur $X, \geqslant 0$, à valeurs finies ou non, on appelle intégrale supérieure de f par rapport à μ, et on note $\int_X^* f(x)d\mu(x)$ ou $\int_X^* fd\mu$, la borne supérieure des $\mu(\varphi)$ pour les φ de $\mathcal{B}(X)$ vérifiant $0\leqslant\varphi\leqslant f$. Si maintenant f est une fonction $\geqslant 0$ quelconque sur X, à valeurs finies ou non, on appelle intégrale supérieure de f et on note de la même manière, la borne inférieure des $\int_X^* gd\mu$, pour les fonctions g semi-continues inférieurement, vérifiant $f\leqslant g\leqslant +\infty$.*

En somme, les définitions sont exactement les mêmes que pour X localement compact. En outre, on démontre que toutes les propriétés sont les mêmes; en particulier l'inégalité de convexité dénombrable:

$$\int_X^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) d\mu \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_X^* f_n d\mu$$

pour des $f_n \geqslant 0$ quelconques, et la formule

$$\underset{i\in I}{Sup} \int_X^* f_i d\mu = \int_X^* \left(\underset{i\in I}{Sup}\ f_i\right) d\mu$$

si les f_i forment un ordonné filtrant croissant (non nécessairement à base dénombrable) de fonctions semi-continues inférieurement $\geqslant 0$. La mesure extérieure d'un ensemble étant l'intégrale supérieure de sa fonction caractéristique, la mesure extérieure d'une réunion dénombrable de parties est majorée par la

(¹) Ce sont ces mesures que LECAM a introduites dans [1] sous le nom de «tight measures». Cette définition est aussi équivalente à une autre donnée par CHOQUET dans [1]. Il y a d'ailleurs eu tellement de travaux sur la théorie de la mesure qu'il est probable que ces définitions figurent aussi chez d'autres auteurs. Il semble cependant que personne
la patience de vérifier que, parmi les diverses définitions possibles de classes particulières de mesures abstraites, celle-là et celle-là seule possédait exactement *toutes* les propriétés désirées, notamment celles qui sont données dans BOURBAKI [2].

somme des mesures, et la mesure extérieure d'une réunion filtrante croissante (non nécessairement dénombrable) d'ouverts est la borne supérieure des mesures extérieures de ces ouverts.

Soit maintenant F un espace de Banach, et soit $\mathcal{J}(X,\mu;F)$ l'espace vectoriel des fonctions f sur X, à valeurs dans F, telles que $N(f)=\int_X^* \|f\| d\mu$ soit fini; munissons-le de la semi-norme N. C'est un espace vectoriel semi-normé non séparé complet. La forme linéaire $\mu:\mathcal{B}(X)\to\mathbf{C}$, se prolonge en une application linéaire $\mathcal{B}(X)\otimes F\to F$ appelée intégrale, et notée $f\to\int_X f(x)d\mu(x)$ ou $\int_X fd\mu$. Alors:

Définition (2.3). *On appelle espace des fonctions μ-intégrables sur X à valeurs dans F, et on note $\mathcal{L}^1(X,\mu;F)$, l'adhérence de $\mathcal{B}(X)\otimes F$ dans $\mathcal{J}(X,\mu;F)$. L'intégrale $\mathcal{B}(X)\otimes F\to F$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de norme $\leqslant 1$ de $\mathcal{L}^1(X,\mu;F)$ dans F, encore appelée intégrale et notée de la même manière. On appelle mesure d'une partie A de X l'intégrale de sa fonction caractéristique; elle se note aussi $\mu(A)$.*

Cette intégrale a toutes les propriétés habituelles, en particulier le théorème de convergence majorée de Lebesgue.

§ 3. Mesure image

Définition (3.1) *Soient $H:X\to Y$ une application d'un espace complètement régulier X dans un espace topologique Y, μ une mesure sur X. On dit que H est μ-mesurable si elle vérifie la propriété de Lusin:*

Quel que soit $\delta>0$, il existe un compact K_δ de X tel que $\mu(X-K_\delta)\leqslant\delta$ et que la restriction de H à K_δ soit continue.

Une partie A de X est dite μ-mesurable si sa fonction caractéristique est μ-mesurable. Les parties mesurables sont exactement les parties intégrables. Les parties boréliennes sont mesurables, et μ définit donc une mesure abstraite sur la tribu borélienne de X (Voir à ce sujet le § 8).

Proposition (3.1). *Si X et Y sont complètement reguliers, si μ est une mesure sur X, si H est une application μ-mesurable de X dans Y, alors, pour toute $\varphi\in\mathcal{B}(Y)$, l'image réciproque $\varphi\circ H$ est μ-intégrable sur X. En posant $(H(\mu))(\varphi)=$ $=\int_X(\varphi\circ H)d\mu$, on définit $H(\mu)$ comme mesure de Radon sur Y. On l'appelle la mesure image de μ par H.*

En outre, on conserve toutes les propriétés qui font les avantages des mesures de Radon sur les mesures abstraites:

Proposition (3.2) *Une partie B de Y est $H(\mu)$-mesurable, si et seulement si $H^{-1}(B)$ est μ-mesurable, et leurs mesures sont les mêmes. Plus généralement,* *si F est un espace de Banach et f une application de Y dans F, f est $H(\mu)$-intégrable, si et seulement si $f\circ H$ est μ-intégrable, et les intégrales sont les mêmes; si Z est un espace topologique, f une application de Y dans Z, f est $H(\mu)$-mesurable, si et seulement si $f\circ H$ est μ-mesurable, et alors $(f\circ H)(\mu)=f(H(\mu))$ (transitivité des mesures images).*

Si F est un Banach, f une fonction sur X à valeurs dans F, f est μ-intégrable si et seulement si f est μ-mesurable et $\|f\|$ d'intégrale supérieure finie (1).

Proposition (3.3). *Soit H une application continue injective de X dans Y. Alors $\mu\to H(\mu)$ est injective de $\mathfrak{M}(X)$ dans $\mathfrak{M}(Y)$. Pour qu'une mesure ν sur Y soit l'image par H d'une mesure sur X, il faut et il suffit que ν soit concentrée sur $H(X)$, et que l'application réciproque H^{-1}: $H(X)\to X$, définie ν-presque partout sur Y, soit ν-mesurable; et alors l'unique mesure μ sur X telle que $\nu=H(\mu)$ est $H^{-1}(\nu)$.*

Il en résulte en particulier que, si T_1 et T_2 sont deux topologies complètement régulières sur le même ensemble X, T_1 plus fine que T_2, toute mesure de Radon μ_1 sur (X,T_1) définit une mesure de Radon μ_2 sur (X,T_2), et que l'application ainsi définie $\mu_1\to\mu_2$ est injective: *on peut considérer l'ensemble $\mathfrak{M}(X,T_1)$ des mesures de Radon sur (X,T_1) comme un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{M}(X,T_2)$ des mesures de Radon sur (X,T_2).*

Définition (3.2). *Soient X et Y deux espaces topologiques, X complètement régulier, et soit H une application de X dans Y. On dit que H est universellement mesurable, si elle est mesurable par rapport à toute mesure de Radon sur X.*

On dit que deux topologies complètement régulières T_1 et T_2 sur un ensemble X sont Radon-équivalentes, si l'application identique de T_1 dans T_2 et l'application identique de T_2 dans T_1 sont toutes deux universellement mesurables. Alors il existe une correspondance bijective entre les espaces $\mathfrak{M}(X,T_1)$ et $\mathfrak{M}(X,T_2)$ de mesures de Radon sur (X,T_1) et (X,T_2).

En particulier, si T_1 est plus fine que T_2, T_1 et T_2 sont Radon-équivalentes, si et seulement si l'application identique de T_2 dans T_1 est universellement mesurable, ou encore si l'injection $\mu_1\to\mu_2$ de $\mathfrak{M}(X,T_1)$ dans $\mathfrak{M}(X,T_2)$ définie ci-dessus est une bijection. Alors:

Proposition (3.4). *Si X est un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable, toutes les topologies intermédiaires entre sa topologie initiale et sa topologie affaiblie sont Radon-équivalentes, et elles ont les mêmes mesures de Radon* (2).

(1) Voir Bourbaki [2], § 6.

(2) Ceci n'est que la traduction, dans le langage des mesures de Radon sur des espaces topologiques non localement compacts, d'un théorème dû essentiellement à Philipps. Voir à ce sujet Grothendieck [1], § 4, n.º 1, théorème 4, page 104.

PROPOSITION (3.5) *Soit H: $X \to Y$ une application continue de X dans Y. Soit ν une mesure de Radon sur Y. Pour que ν soit l'image par H d'une mesure de Radon sur X, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que $\nu(H(K)) \geqslant 1-\varepsilon$.*

Si H est un homéomorphisme de X dans Y, alors il faut et il suffit que ν soit concentrée sur $H(X)$; l'application $\mu \to H(\mu)$ est alors une bijection de l'ensemble $\mathfrak{M}(X)$ des mesures sur X, sur l'ensemble $\mathfrak{M}_{H(X)}(Y)$ des mesures sur Y concentrées sur $H(X)$.

Prenons le cas particulier où X est simplement un sous-espace topologique de Y, H étant l'injection canonique. *Alors on peut canoniquement idêntifier les mesures sur X, et les mesures sur Y qui sont concentrées sur X.*

Ceci permet de donner une nouvelle définition des mesures de Radon sur un espace topologique X complètement régulier. Soit en effect $\check{X}$ son compactifié universel de Čech; dire que X est complètement régulier revient à dire que X peut être identifié à un sous-espace topologique dense de $\check{X}$. On connaît alors les mesures de Radon sur $\check{X}$, qui est compact. *On pourra donc définir une mesure de Radon sur X comme une mesure de Radon sur $\check{X}$, concentrée sur X.* Cette définition est nécessairement identique à la définition antérieure (en outre on pourrait remplacer $\check{X}$ par n'importe quel autre compact Y dont X soit un sous-espace topologique).

On dispose donc en fait de deux méthodes complètement différentes pour faire cette théorie des mesures de Radon sur des espaces non localement compacts. Ou bien on donne la définition du § 2; on regarde alors pas à pas tous les théorèmes démontrés dans les espaces localement compacts, en lisant Bourbaki page après page, et on vérifie que l'on peut partout éliminer la locale compacité. Ou bien au contraire, on adopte la définition donnée ici, utilisant la théorie des mesures supposée déjà faite sur le compact $\check{X}$. Par exemple, si l'on veut démontrer le théorème de convergence majorée de Lebesgue, on considèrera une suite de fonctions f_n sur X à valeurs dans un Banach, convergeant μ-presque partout vers une limite f, μ-intégrables, et majorées en norme par une fonction $g \geqslant 0$, μ-intégrable. On peut alors identifier μ à une mesure $\check{\mu}$ sur $\check{X}$, concentrée sur X. Les f_n, f, g, sont alors $\check{\mu}$-presque partout définies sur $\check{X}$. On peut leur appliquer le théorème de Lebesgue, demontré pour les mesures sur le compact $\check{X}$. Donc f est $\check{\mu}$-intégrable, et $\lim_{n\to\infty} \int_{\check{X}} f_n \, d\check{\mu} = \int_{\check{X}} f d\check{\mu}$; donc f est μ-intégrable, et $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f d\mu$, *cqfd.* De toute façon, bien entendu, on doit montrer que les deux définitions données sont équivalentes, pour toutes les notions introduites.

Il est bien évident que la premère méthode est la seule qui soit justifiable, au point de vue logique; car pourquoi introduire d'abord une théorie de la mesure sur les espaces localement compacts pour démontrer ensuite que l'hypothèse de locale compacité ne servait à rien ? Néanmoins, tout en gardant pour le présent exposé cette méthode pure, c'est la deuxième méthode, plus courte et plus paresseuse, que j'ai, en fait, utilisée, pour toutes les démonstrations.

§ 4. Produit par une fonction. Mesure induite. Produit tensoriel de deux mesures

Proposition (4.1). *Soit μ une mesure de Radon sur X, et soit p une fonction $\geqslant 0$, μ-intégrable, d'intégrale 1. Alors la forme linéaire sur $\mathcal{B}(X)$ définie par $\varphi \to \int_X p\varphi d\mu$ est une mesure de Radon sur X; on l'appelle produit de μ par p et on l'écrit $p\mu$.*

Si f est une fonction sur X à valeurs dans un Banach F, f est $p\mu$-intégrable si et seulement si pf est μ-intégrable, et l'on a toujours $\int_X f d(p\mu) = \int_X (pf) d\mu$.

Soient μ et ν deux mesures sur X. Pour que ν soit de base μ, c. à d. de la forme $p\mu, p$ μ-intégrable, $p \geqslant 0$, $\int p d\mu = 1$, il faut et il suffit que toute partie μ-négligeable de X soit aussi ν-négligeable (Lebesgue-Nikodym) (1).

Proposition (4.2). *Soit μ une mesure sur X, et soit Z une partie μ-mesurable de X. La forme linéaire sur $\mathcal{B}(Z)$ définie par $\varphi \to \int_Z \varphi d\mu$ (où l'intégrale sur Z d'une fonction est l'intégrale sur X de sa prolongée par 0 sur $X - Z$) est une mesure de Radon sur Z ; on l'appelle la mesure induite par μ sur Z, et on la note μ_Z. L'image de μ_Z par l'injection de Z dans X est le produit de μ par la fonction caractéristique χ_Z de Z ; on peut donc aussi définir μ_Z en utilisant la définition du § 3, en l'identifiant à la mesure $\chi_Z \mu$ sur X concentrée sur Z. On a les propriétés habituelles, en particulier la transitivité des mesures induites*; et, *si f est une fonction sur Z à valeurs dans un Banach F, elle est μ_Z-intégrable si et seulement si elle est μ-intégrable sur Z, et l'on a $\int_Z f d\mu_Z = \int_Z f d\mu$* (2).

Proposition (4.3). *Soient X et Y deux espaces complètement réguliers, μ et ν des mesures sur X et Y respectivement. Il existe une mesure λ et une seule sur $X \times Y$ qui vérifie, pour $\varphi \in \mathcal{B}(X)$ et $\psi \in \mathcal{B}(Y)$, la formule $\lambda(\varphi \otimes \psi) = \mu(\varphi)\nu(\psi)$. Cette mesure s'appelle produit tensoriel de μ et ν et se note $\mu \otimes \nu$. Elle vérifie les propriétés habituelles, en particulier le théorème de Fubini* (3).

---

(1) Voir Bourbaki [2], § 5.

(2) Voir Bourbaki [2], §§ 1 et 7.

(3) Bourbaki [1], chapitre III, § 5, et Bourbaki [2], § 8.

§ 5. Limites projectives de mesures

Les théorèmes de la théorie de la mesure sur les espaces localement compacts s'étendent aux mesures sur des espaces complètement réguliers. Il n'y a que deux exceptions: les théorèmes relatifs aux limites projectives non dénombrables, et les théorèmes relatifs aux intégrales de mesures. Pour ceux-là, certaines hypothèses supplémentaires sont nécessaires. Nous regarderons dans ce paragraphe le cas des limites projectives non dénombrables.

Soit I un ensemble ordonné filtrant d'indices. Pour tout i, soit X_i un espace topologique complètement régulier. On suppose en outre donné, pour tout couple $(i,j), i\leqslant j$, une application continue $\pi_{i,j}$ *de* X_j dans X_i, de manière que, pour $i\leqslant j\leqslant k$, on ait $\pi_{i,j}\circ\pi_{j,k}=\pi_{i,k}$, et que $\pi_{i,i}$ soit l'identité pour tout i. Il existe alors une limite projective du système considéré; elle est définie par un certain espace topologique Z et des applications continues π_i de Z dans les X_i, telles que, pour $i\leqslant j$, on ait $\pi_i=\pi_{i,j}\circ\pi_j$. Il peut arriver que Z soit vide; mais, si les X_i sont compacts, Z est non vide et compact.

Supposons données des mesures μ_i sur les X_i, telles que, pour $i\leqslant j$, on ait $\mu_i=\pi_{i,j}(\mu_j)$. Existe-t-il sur Z une mesure μ telle que, pour tout i, $\mu_i=\pi_i(\mu)$? C'est vrai si les X_i sont compacts ou si I est dénombrable (ou si X_i est compact sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de $i\in I$), mais ce n'est en général pas vrai si les X_i sont seulement des espaces complètement réguliers (même localement compacts), et I non dénombrable.

Posons-nous un problème plus général. Soient un système projectif du type précédent, et en outre un espace topologique complètement régulier X et des applications continues H_i de X dans les X_i, telles que, pour $i\leqslant j$ on ait $H_i=\pi_{i,j}\circ H_j$. Celà revient exactement à se donner une application continue H de X dans la limite projective Z, avec $H_i=\pi_i\circ H$. Les mesures μ_i sur les X étant données, existe-t-il une mesure μ sur X telle que, pour tout i, $\mu_i=H_i(\mu)$? Le système de X, des X_i, des $\pi_{i,j}$, des H_i, des μ_i, s'appellera un système projectif d'espaces topologiques munis de mesures de Radon.

PROPOSITION (5.1). *Soit* $X, (X_i)_{i\in I}, (\pi_{i,j})_{i\in I, j\in I, i\leqslant j}, (H_i)_{i\in I}, (\mu_i)_{i\in I}$, *un système projectif d'espaces topologiques munis de mesures de Radon. Pour qu'il existe une mesure* μ *sur* X, *telle que* $\mu_i=H_i(\mu)$ *pour tout* i, *il faut et il suffit que, pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe un compact* K *de* X *tel que, pour tout* i, $\mu_i(H_i(K))\geqslant 1-\varepsilon$.

La démonstration se fait en utilisant la proposition (3.5) et le fait que, puisqu'il s'agit de mesures de Radon, la mesure d'un ordonné filtrant décroissant *(même non dénombrable)* de fermés est la borne inférieure des mesures. Aucun théorème aussi général ne peut donc exister en théorie des mesures abstraites (1).

§ 6. Mesures cylindriques sur un espace vectoriel localement convexe (2)

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur le corps $\mathbb{R}$ (pour simplifier). Soit I l'ensemble de sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie de E, ordonné en sens inverse de l'inclusion. Pour $i \in I$, nous désignerons aussi par E_i l'élément i de I. Appelons H_i l'application canonique de E sur son quotient de dimension finie E/E_i; pour $i \leqslant j$, c. à d. $E_i \supset E_j$, appelons $\pi_{i,j}$ l'application canonique de E/E_j sur E/E_i. Alors les espaces E/E_i, munis des $\pi_{i,j}$, ont une limite projective Z, qui est, comme on le voit aisément, le complété faible de E, ou dual algébrique E'^* du dual topologique E' avec la topologie $\sigma(E'^*, E')$. Les H_i déterminent une application linéaire continue H de $X = E$ dans Z, qui n'est autre que l'injection canonique de E dans E'^*.

Définition (6.1). *On appelle mesure cylindrique μ sur E un système projectif de mesures au sens du § 5, relatif aux E/E_i, $\pi_{i,j}$, H_i; c. à d. la donnée, pour chaque i, d'une mesure μ_i, sur E/E_i, de manière que, pour $i \leqslant j$, on ait $\mu_i = \pi_{i,j}(\mu_j)$.*

Il en résulte qu'*une mesure cylindrique n'est pas en général une mesure* (sauf évidemment si E est de dimension finie); pour qu'elle soit une mesure, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de E tel que, pour tout i, $\mu_i(H_i(K)) \geqslant 1 - \varepsilon$ (proposition (5.1)).

On peut cependant faire avec les mesures cylindriques des opérations remarquables. Si μ et ν sont deux mesures cylindriques, on peut les convoler, et définir une nouvelle mesure cylindrique $\mu * \nu$ sur E. Si u est une application linéaire continue de E dans un espace localement convexe séparé F, et si μ est une mesure cylindrique sur E, on peut définir une image $u(\mu)$, mesure cylindrique sur F; et $u(\mu * \nu) = u(\mu) * u(\nu)$. Enfin on peut définir l'image de Fourier $\mathfrak{F}\mu = \varphi$ de μ; c'est une fonction à valeurs complexes de type positif sur le dual E', égale à 1

(1) Il existe précisément un théorème analogue démontré par Prokhorov, [1], mais où les X_i sont supposés être des espaces vectoriels de dimension finie, X un espace de Fréchet séparable, les π_{ij}, et les H_i linéaires continues. Il s'agit certes là d'hypothèses excessives, mais de toute façon, en théorie des mesures abstraites, *on ne peut jamais sortir* des réunions et intersections dénombrables, et des restrictions sévères sont inévitables. En outre, la démonstration est plus compliquée.

(2) Voir Gelfand-Vilenkin [1], chap. IV.

à l'origine, dont la restriction à tout sous-espace vectoriel de dimension finie est continue; et inversement, toute fonction φ sur E' ayant ces propriétés est l'image de Fourier d'une mesure cylindrique unique sur E. Si u est linéaire continue de E dans F, si μ est une mesure cylindrique sur E, d'image de Fourier φ sur E', alors l'image de Fourier de $u(\mu)$ est l'image réciproque ${}^tu^*(\varphi)=\varphi \circ {}^tu$, par ${}^tu$, de φ.

DÉFINITION (6.2). *On dit qu'une mesure de Radon μ sur E est concentrée à δ près sur une partie A de E, si $\mu(A)\geqslant 1-\delta$.*

On dit qu'une mesure cylindrique μ sur E est cylindriquement concentrée à δ près sur une partie A de E, si, pour tout i, $\mu_i(H_i(A))\geqslant 1-\delta$; on dit qu'elle est scalairement concentrée à δ près sur A, si l'on a l'inégalité précédente toutes les fois que E_i est de codimension 1 dans E (c'est donc une condition plus faible).

Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E; on dira que μ est $\mathfrak{S}$-concentrée ou cylindriquement ou scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, si, pour tout $\delta>0$, il existe $A\in\mathfrak{S}$ telle que μ soit concentrée ou cylindriquement ou scalairement concentrée à δ près sur A. On peut alors dire que μ est une mesure de Radon si et seulement si elle est cylindriquement c-concentrée, c étant l'ensemble des parties compactes de E, et elle est alors c concentrée.

PROPOSITION (6.1). *Supposons l'ensemble $\mathfrak{S}$ filtrant et invariant par les homothéties. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *La mesure cylindrique μ est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée;*
2) *La fonction de type positif $\varphi=\mathfrak{F}\mu$ est continue sur $E'_{\mathfrak{S}}$ (E' muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence);*
3) *L'application $\xi\to\xi(\mu)$ est continue de $E'_{\mathfrak{S}}$ dans l'espace $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ des mesures sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie vague* (¹).

On peut aussi raisonner en termes de variables et fonctions aléatoires. Si (Ω,m) est l'espace des épreuves (nous supposerons Ω complètement régulier et m de Radon), une variable aléatoire à valeurs dans un espace topologique X est une classe d'équivalence d'applications m-mesurables de Ω dans X (deux applications étant équivalentes si elles sont m-presque partout égales).

L'espace de ces variables aléatoires sera noté $Mes(\Omega,m;X)$. Si X est un espace uniforme, $Mes(\Omega,m;X)$ peut être muni de la structure uniforme de la convergence en probabilité:

Si U est un entourage de la structure uniforme de X, et si $\varepsilon>0$, l'ensemble des éléments (x,y) de $Mes(\Omega,m;X)\times Mes(\Omega,m;X)$ tels que $Pr\{(x,y)\notin U\}=$

(¹) Si $\xi\in E'$, ξ est une application linéaire continue de E dans $\mathbf{R}$, donc il existe une image $\xi(\mu)\in\mathfrak{M}(\mathbf{R})$ de la mesure cylindrique μ sur E.

$=m(\{w\in\Omega;(x(w),y(w))\notin U\})\leqslant\varepsilon$ est un entourage de cette structure; et on obtient ainsi un système fondamental d'entourages.

La topologie correspondante est dite topologie de la convergence en probabilité. On appelle maintenant fonction aléatoire f sur un ensemble T à valeurs dans l'espace topologique X, une application de T dans $Mes(\Omega,m;X)$; pour tout $t\in T, f(t)\in Mes(\Omega,m;X)$ est donc une variable aléatoire sur X. Deux variables aléatoires $x\in Mes(\Omega,m;X), x'\in Mes(\Omega',m';X)$ (correspondant éventuellement à des (Ω,m) et (Ω',m') distincts, mais au même X supposé complètement régulier), sont dites *isonomes* (ou de même loi de probabilité), si les mesures images $x(m), x'(m)$, sur X, coïncident. Deux fonctions aléatoires f, f', (correspondant à des (Ω,m), (Ω',m') éventuellement distincts, mais aux mêmes T, X) sont dites isonomes, si, pour tout système fini de valeurs $t_1,t_2,\ldots,t_n$, de T, les variables aléatoires $(f(t_1),f(t_2),\ldots,f(t_n))$, $(f'(t_1),f'(t_2),\ldots,f'(t_n))$, à valeurs dans X^n, sont isonomes. La fonction aléatoire f sera dite canonique, s'il existe une variable aléatoire $\check{f}$ à valeurs dans le produit $\check{X}^T$ ($\check{X}$ compactifié de Čech de X), telle que, pour tout t de T, $f(t)=pr_t\circ\check{f}$, ou encore $(f(t))(w)=pr_t\check{f}(w)$ m-presque sûrement; nous abrégerons par $f=pr\circ\check{f}$.

Les propriétés des limites projectives de mesures sur des espaces compacts, montrent alors que toute fonction aléatoire est isonome à une fonction aléatoire canonique (pour laquelle $\Omega=\check{X}^T, \check{f}=$ identité). En outre, si deux fonctions aléatoires canoniques $f=pr\circ\check{f}$ et $f'=pr\circ\check{f}'$, sont isonomes, les variables aléatoires $\check{f},\check{f}'$, à valeurs dans $\check{X}^T$, sont isonomes; si en outre $f'=f$, alors $\check{f}=\check{f}'$ presque sûrement. Noter qu'en général, $\check{f}$ est à valeurs dans $\check{X}^T$ et non X^T.

Si T est topologique et X muni d'une structure uniforme, la fonction aléatoire f sur T à valeurs dans X est dite continue en probabilité, si elle est une application continue de T dans l'espace topologique $Mes(\Omega,m;X)$; c. à d. si, lorsque t tend vers t_0 dans T, la variable aléatoire $f(t)$ sur X converge en probabilité vers la variable aléatoire $f(t_0)$.

Pour T et X topologiques, une fonction aléatoire canonique $f=pr\circ\check{f}$ est dite *presque sûrement continue (sous-entendu à valeurs dans X lui-même et non seulement dans $\check{X}$)* si, pour m-presque tout w de Ω, l'élément $\check{f}(w)$ de $\check{X}^T$, qui est donc une application de T dans $\check{X}$, est une application continue de T dans X. Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de X^T, on dira que f est presque sûrement dans $\mathcal{A}$, si, pour m-presque tout $w, \check{f}(w)$ appartient à $\mathcal{A}$.

Proposition (6.2). *Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, localement convexe séparé. Il existe une correspondance bijective entre les mesures cylindriques μ sur E et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires f réelles linéaires sur E'. La mesure cylindrique μ est scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, si et seulement si la fonction aléatoire f est continue en probabilité sur $E'_{\mathfrak{S}}$. Si μ est cylindriquement $\mathfrak{S}$-concentrée, et f canonique, alors f est presque sûrement continue sur $E'_{\mathfrak{S}}$; la réciproque est vraie si E est semi-réflexif et quasi complet et si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble* *de toutes les parties convexes équilibrées faiblement compactes. Enfin, si f est canonique, μ est une mesure de Radon sur E faible, si et seulement si f est presque sûrement à valeurs dans E, et une mesure de Radon sur E, si et seulement si f est presque sûrement à valeurs dans une réunion dénombrable de compacts de E.*

En changeant les rôles de E et E':

Proposition (6.3). *Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Il y a une correspondance bijective entre les mesures $*$-cylindriques μ sur son dual F' muni de la topologie $\sigma(F',F)$ (¹), et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires f linéaires sur F.*

La mesure $*$-cylindrique μ sur F' est $*$-scalairement ε-concentrée (ε désignant l'ensemble des parties convexes équilibrées équicontinues faiblement fermées), si et seulement si f est continue en probabilité sur F. Si f est canonique et si μ est $*$ cylindriquement ε-concentrée, alors f est presque sûrement continue; la réciproque est vraie si F est tonnelé. Enfin, si f est canonique, μ est une mesure de Radon sur F' muni de la topologie $\sigma(F',F)$, si et seulement si f est presque sûrement continue.

§ 7. Les théorèmes de Minlos

Cette théorie des mesures de Radon permet de généraliser les théorèmes, démontrés (et énoncés sous une autre forme) par Minlos dans le cas particulier d'espaces de Fréchet séparables; la raison fondamentale est qu'on peut utiliser la proposition (5.1), qui ne fait pas d'hypothèses de dénombrabilité.

Définition (7.1). *Soient E et F deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de E dans F. On dit que u est radonifiante, si, pour toute mesure cylindrique μ sur E, scalairement concentrée sur l'ensemble des boules, l'image $u(\mu)$ est une mesure de Radon sur F.*

Proposition (7.1). *(Minlos) Si E et F sont hilbertiens, u est radonifiante si et seulement si elle est de Hilbert-Schmidt* (²).

J'ignore si un opérateur nucléaire d'un Banach E dans un autre F est radonifiant.

(¹) Le symbole $*$ exprime que F' est considéré comme dual de F, muni de la topologie $\sigma(F',F)$. Par exemple, «$*$-scalairement...» veut dire: «pour tout $f \in F$,...», alors que: «scalairement...» voudrait dire ou pourrait vouloir dire: «pour tout f'' du dual F'' de F' fort,...».

(²) Voir Gelfand-Vilenkin [1], chap. IV, et Minlos, [1].

DÉFINITION (7.2). *Rappelons qu'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé E est dit nucléaire, si, pour tout voisinage convexe équilibré ouvert U de O dans E, il en existe un autre $V \subset U$ tel que l'application naturelle $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$ soit nucléaire. Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties convexes équilibrées fermées complétantes* (1) *de E, E est dit $\mathfrak{S}$-conucléaire, si, pour toute $A \in \mathfrak{S}$, il en existe une autre $B \supset A$, telle que l'injection canonique $E_A \to E_B$ soit nucléaire.*

Alors E est nucléaire si et seulement si E' est ε-conucléaire, ε étant la famille des parties convexes équilibrées équicontinues faiblement fermées; si c est l'ensemble des parties convexes équilibrées compactes de E, E'_c est nucléaire si et seulement si E est c-conucléaire.

On a alors:

PROPOSITION (7.2) (THÉOREME DE MINLOS GÉNÉRALISÉ) (2). *Si E est $\mathfrak{S}$-conucléaire, toute mesure cylindrique sur E, scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, est une mesure de Radon sur E, $\mathfrak{S}$-concentrée; toute fonction continue de type positif sur $E'_{\mathfrak{S}}$ est l'image de Fourier d'une mesure de Radon sur E, $\mathfrak{S}$-concentrée.*

Si $\mathfrak{S}$ a un système fondamental de parties A hilbertiennes (c. à d. telles que E_A soit hilbertien), la réciproque est vraie: si toute mesure cylindrique sur E, scalairement $\mathfrak{S}$-concentrée, est une mesure de Radon $\mathfrak{S}$-concentrée, ou encore si toute fonction continue de type positif sur $E'_{\mathfrak{S}}$ est l'image de Fourier d'une mesure de Radon $\mathfrak{S}$-concentrée sur E, alors E est $\mathfrak{S}$-conucléaire.

Si E est quasi-complet et admet un système fondamental de parties convexes équilibrées compactes hilbertiennes, alors E'_c est nucléaire ou E est c-conucléaire, si et seulement si toute mesure cylindrique sur E, scalairement c-concentrée, est une mesure de Radon, ou encore si et seulement si toute fonction continue de type positif sur E'_c est l'image de Fourier d'une mesure de Radon sur E.

COROLLAIRE. *Soit E l'un des espaces $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{O}_M, \mathcal{O}'_c$, de la théorie des distributions; toute mesure cylindrique sur E, scalairement concentrée sur la famille des parties bornées, est une mesure de Radon; toute fonction continue de type positif sur E' est l'image de Fourier d'une mesure de Radon sur E.*

Le théorème de Minlos ne donnait de résultat que pour $E = \mathcal{S}', \mathcal{D}'$.

(1) Une partie A de E, convexe équilibrée fermée, est dite complétante, si l'espace normé E_A est un Banach. Si A est complète, donc si E est quasi-complet et A fermée, elle est complétante. Voir SCHWARTZ [1], page 198.

(2) Ce même théorème, sans hypothèse de dénombrabilité, a été trouvé indépendamment par d'autres auteurs. (Yasuo UMEMURA, BADRIKIAN; à paraître prochainement).

§ 8. Espaces radoniens, polonais, lusiniens, sousliniens

DÉFINITION (8.1). *Une mesure abstraite m (comme toujours, $\geqslant 0$ et de masse $m(X)=1$) sur la tribu borélienne d'un espace topologique X est dite intérieurement régulière si, pour tout borélien B, $m(B)$ est la borne supérieure des mesures des compacts de X contenus dans B.*

PROPOSITION (8.1). *Toute mesure de Radon μ sur un espace complètement régulier X définit, par $B \to \mu(B)$, une mesure abstraite sur la tribu borélienne, intérieurement régulière. Inversement, toute mesure abstraite sur la tribu borélienne de X, intérieurement régulière, provient d'une mesure de Radon unique.*

En d'autres termes, *on peut identifier l'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des mesures de Radon sur X, au sous-ensemble de l'ensemble des mesures abstraites sur la tribu borélienne, formé des mesures abstraites intérieurement régulières.*

On aurait pu prendre cela comme définition des mesures de Radon sur X, à la place de celle du § 2. Elle est, en tant que définition, plus simple que celle du § 2; mais certaines complications s'introduisent dans les démonstrations, ce qui la rend sans doute équivalente en difficulté.

Reprenons l'exemple (1.1). La mesure m sur X est une mesure abstraite sur la tribu borélienne de X, qui n'est pas intérieurement régulière; en effet, si elle l'était, cela reviendrait à dire que X a la mesure intérieure 1 pour ν, et comme il a la mesure extérieure 1, il serait mesurable, contrairement à l'hypothèse. Comme d'ailleurs l'injection $X \to Y$ est continue, si m était une mesure de Radon sur X, on n'aurait plus trouvé là le contre-exemple cherché au § 1, en vertu des propriétés des mesures de Radon images. Donc m n'est pas de Radon, mais son image ν est de Radon.

DÉFINITION (8.2). *Un espace topologique complètement régulier X est dit radonien, si toute mesure abstraite sur la tribu borélienne de X est intérieurement régulière, en d'autres termes, est une mesure de Radon sur X.*

PROPOSITION (8.2). *Si X est radonien, il est universellement mesurable, au sens suivant: pour tout espace complètement régulier Y ayant X comme sous-espace topologique, et toute mesure de Radon μ sur Y, X est μ-mesurable. Soit X un espace radonien, et soit Z un sous-espace de X; alors Z est radonien si et seulement s'il est mesurable pour toute mesure de Radon sur X.*

C'est là le secret de la construction du contre-exemple (1.1). On verra que $Y=[0,1]$ est radonien (proposition (8.3)); alors, X étant non-mesurable pour la mesure de Lebesgue ν sur Y, il n'est sûrement pas radonien.

Définition (8.3). *Un espace topologique X est polonais s'il peut être défini par une métrique pour laquelle il est complet, et s'il est séparable (c. à d. admet une partie dénombrable dense).*

Par exemple, un espace de Fréchet séparable est polonais.

Un espace topologique X est dit lusinien s'il est séparé et s'il existe une topologie plus fine pour laquelle il est polonais (autrement dit s'il existe une bijection continue d'un espace polonais sur X).

Un espace topologique X est dit souslinien s'il est séparé et s'il existe une surjection continue d'un espace polonais sur X (1).

Un espace lusinien ou souslinien le reste si l'on affaiblit sa topologie, pourvu qu'elle reste séparée. Un sous-espace lusinien d'un espace séparé est borélien dans cet espace; un sous-espace d'un lusinien est lusinien si et seulement s'il est borélien; tout borélien d'un souslinien est souslinien.

Proposition (8.3). *Un espace topologique complètement régulier souslinien est radonien, et le reste pour toute topologie complètement régulière plus faible. Sa topologie est Radon-équivalente à toutes les topologies complètement régulières plus faibles* (2).

Proposition (8.4). *Soient E, F, deux espaces vectoriels topologiques, limites inductives strictes d'espaces de Fréchet séparables. Alors $\mathcal{L}_c(E;F)$ est lusinien; en particulier F et E'_c sont lusiniens* (3).

Corollaire. *Les espaces $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_c$, de la théorie des distributions, sont lusiniens; ils sont donc boréliens dans tout espace topologique dont ils sont sous-espaces; ils sont radoniens et le restent pour toute topologie complètement régulière plus faible; et leur topologie est Radon-équivalente à toute topologie complètement régulière plus faible.*

Depuis la première impression de cet article, quelques perfectionnements ont été apportés. André Meyer a donné une définition différente, rendant inutile l'hypo-

---

(1) On trouvera ces définitions dans Bourbaki [5], § 6. Cependant, dans cet ouvrage, les espaces lusiniens ou sousliniens sont, avec beaucoup de précaution, supposés métrisables. Le lecteur se convaincra que c'est *complètement inutile*, et que cela a pour unique résultat d'introduire des complications, car on est alors obligé de montrer ou de supposer qu'un espace est métrisable, pour démontrer qu'il est lusinien ou souslinien!

C'est à cause de cette hypothèse de métrisabilité que P. Cartier avait introduit dans [1] les *espaces standards*; il a remarqué ultérieurement que l'hypothèse de métrisabilité de Bourbaki était superflue, de sorte que désormais les lusiniens ne sont plus nécessairement métrisables, et la notion d'espace standard disparaît.

(2) Conséquence facile du théoreme de Choquet; voir Bourbaki [4], théoreme 5 du § 6, n.º 9.

(3) Le résultat relatif à E'_c et F est dû à P. Cartier, voir [1].

thèse de complète régularité des espaces topologiques. D'autre part, j'ai donné en Août-Septembre 1965 des conférences au Tata Institute of Fundamental Research de Bombay, où les mesures de Radon sont introduites, comme il est dit à la proposition 8.1, sans aucune théorie supposée connue antérieurement pour les espaces localement compacts, et sans hypothèse de complète régularité; les mesures ne sont pas nécessairement finies ni $\geqslant 0$. Ces conférences, ainsi que d'autres que j'ai données à Paris, paraîtront ultérieurement, avec toutes les démonstrations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, N. — *Intégration.* Paris. Hermann. 1952. Chapitres 1, 2, 3, 4.

[2] ———— — *Intégration.* Paris. Hermann. 1956. Chapitre 5.

[3] ———— — *Intégration.* Paris. Hermann. 1959. Chapitre 6.

[4] ———— — *Topologie Générale.* Paris. Hermann. 1958. Chapitre 9.

[1] LE CAM, L. — *Convergence in Distribution of stochastic Processes.* University of California Publications in Statistics. *2* (11): 207-236.

[1] CARTIER, P. — *Processus aléatoires généralisés.* In: *Séminaire Bourbaki*, n.º 272. Paris. Institut Henri Poincaré. 1964.

[1] CHOQUET, G. — *Theory of Capacities.* Annales de l'Institut Fourier. *5*: 131-295. 1953-1954. (Voir page 207).

[1] GEL'FAND, I. M. et VILENKIN, N. I. — *Fonctions généralisées.* Tome IV.

[1] GROTHENDIECK, A. — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Memoirs of the American Mathematical Society. (16). 1955.

[1] HALMOS, P. R. — *Measure Theory.* Princeton. D. Van Nostrand. 1950.

[1] MINLOS, R. A. — *Generalised random processes and their extension to a measure.* Trudy Moscov Math. Obšč. *8*: 497-518. 1956.

[1] PROKHOROV, J. V. — *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory.* In: *Theory of Probability and applications.* 1956. Vol. I: p. 157-214. (Traduction de l'article original en russe dans Teor. Verojatn.i Prim. *1*: 177-238. 1956).

[1] SCHWARTZ, L. — *Théorie des Distributions à valeurs vectorielles.* Annales de l'Institut Fourier. *8* (Chapitre II): 1-209. 1959.

RÉSUMÉ

Les mesures de Radon sont habituellement définies seulement sur des espaces topologiques localement compacts; elles sont un cas particulier des mesures abstraites, qui peuvent se définir sur des ensembles arbitraires. Mais les mesures abstraites n'ont pas toutes les propriétés des mesures de Radon.

Le présent article définit des mesures de Radon sur des espaces topologiques séparés arbitraires. Elles ont toutes les propriétés des mesures de Radon classiques sur les espaces localement compacts. Pour qu'une mesure abstraite $\geqslant 0$ finie, définie sur la tribu borélienne d'un espace topologique, soit une mesure de Radon, il faut et il suffit qu'elle soit «intérieurement régulière».

Sur certains espaces, dits radoniens, toutes les mesures abstraites sur la tribu borélienne sont des mesures de Radon. Les bons espaces topologiques de l'analyse sont des espaces radoniens.

Sur les espaces vectoriels localement convexes, on peut introduire la notion de mesure cylindrique, plus générale que celle de mesure de Radon.

Le théorème de Minlos permet de reconnaître, sur les espaces nucléaires, à quelles conditions une mesure cylindrique est une mesure de Radon. Le théorème de Minlos nécessitait des conditions assez particulières de dénombrabilité. Le présent article étend les résultats aux cas plus généraux, et des applications aux fonctions aléatoires sont esquissées.

QUELQUES APPLICATIONS AUX PROBLÈMES AUX LIMITES DES DISTRIBUTIONS ET DES FONCTIONNELLES ANALYTIQUES

PAR

J. L. LIONS

This page intentionally left blank

QUELQUES APPLICATIONS AUX PROBLÈMES AUX LIMITES DES DISTRIBUTIONS ET DES FONCTIONNELLES ANALYTIQUES

par

J. L. LIONS

Introduction

1. Soit Q un ouvert d'un espace euclidien $\mathbb{R}^m$ et P un opérateur différentiel donné dans Q; soit P^* l'adjoint formel de P.

On suppose qu'on a pu attacher à P^* un problème aux limites bien posé dans Q; plus précisément, on suppose connus deux espaces $E(Q)$ et $F(Q)$ de fonctions (de distributions, $\{M_k\}$ — distributions ......) sur Q tels que *P^* soit un isomorphisme de $E(Q)$ sur $F(Q)$.*

Evidemment, de très nombreuses situations de ce genre sont connues; en outre, lorsque l'on est dans une situation où l'on connait *un* couple $\{E(Q), F(Q)\}$ tel que P^* soit un isomorphisme de $E(Q)$ sur $F(Q)$, alors, en général, on connait une *infinité* de couples $\{\tilde{E}(Q), \tilde{F}(Q)\}$ donnant lieu à la même propriété. Par transposition, (et X' désignant l'anti-dual de l'espace X), on en déduit que *P est un isomorphisme de $F'(Q)$ sur $E'(Q)$.*

L'interprétation de cet isomorphisme conduit à la théorie des problèmes aux limites non homogènes, selon E. Magenes et l'A.

2. Le chapitre 1 développe l'idée précédente, dans le cas le plus simple où P est l'opérateur Laplacien, le problème aux limites étant celui de Dirichlet. C'est un cas où le choix du couple $\{E(Q), F(Q)\}$ est particulièrement large. Nous prenons ici un cas (développé dans un article de E. Magenes et l'A., Annali di Mat., 1963) conduisant naturellement à l'utilisation *de fonctionnelles analytiques.*

Les démonstrations, dans ce Chapitre, ne sont pas en général détaillées, puisque déjà (dans un cas plus général) dans le travail cité de Magenes et l'A.

3. Comme on pourra s'en rendre compte, la difficulté principale dans le Chapitre 1 est dans le *théorème de traces* du n.º 6; par ex. le n.º 6 contient, comme cas particulier, le résultat suivant (dû à Cimmino): si u est une fonction (indéfiniment différentiable) *harmonique* dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, à frontière Γ analytique réelle, on peut définir, dans un sens raisonnable, la trace de u sur Γ soit $u/_\Gamma$ et $u/_\Gamma$ est *fonctionnelle analytique* sur Γ.

Il est alors naturel de voir dans quelle mesure on peut étendre ce genre de résultat au cas général du 1.

C'est ce que nous avons fait, toujours en collaboration avec E. Magenes, pour les *opérateurs paraboliques* (voir bibliographie placée dans les Commentaires aux Chapitres 2, 3).

Mais il est alors indiqué de se placer dans un cadre «abstrait» plus général. C'est l'objet des Chapitres 2 et 3.

4. Le Chapitre 2 étudie les équations d'évolution (ou différentielles opérationnelles) abstraites dans les espaces hilbertiens, de la forme

$$A(t)u + \frac{du}{dt} = f. \tag{1}$$

On y étudie *les propriétés de régularité* de la solution du problème (1); par transposition, selon le programme de 1, on en déduit l'existence de *solutions distributions* de (1).

A partir de là, repassant au cas concret des opérateurs paraboliques, on peut étudier la situation selon 1; c'est l'objet d'un travail de E. Magenes et l'A., Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, 1964 — travail qui n'est pas analysé ici.

Les résultats du Chap. 2 sont, pour l'essentiel, contenus dans notre livre, Springer, Collection Jaune, t. III (1961). La méthode du n.º 3 (régularisation elliptique) a été donnée dans notre cours au C. I. M. E., Varenna, Mai 1963; nous reproduisons cela, avec quelques compléments.

5. On étudie ensuite (Chap. 3) le problème de *l'ultra-régularité* de la solution de (1); moyennant des hypothèses supplémentaires sur f et sur $A(t)$ — par ex.

$$\| A^{(k)}(t) \| \leqslant c\ L^k M_k \quad \forall k ,$$

(dans une norme convenable) — on en déduit (sous certaines hypothèses sur la suite $\{M_k\}$) des propriétés analogues pour u.

Par transposition, on en déduit l'existence *de solutions* $\{M_k\}$ — *distributions.*

On peut ensuite retourner au cas concret des opérateurs paraboliques; cela est fait dans un travail à paraître de E. Magenes et l'A.

6. D'autres cas (opérateurs de Schroedinger, opérateurs «bien posés» au sens de Petrousley, opérateurs hypo-elliptiques) sont ou seront étudiés dans des articles ultérieurs de E. Magenes et l'A. (1); des problèmes de même type sont étudiés dans des travaux de Baiocchi, Geymonat, Pulvirenti.

Nous espérons possible d'arriver à une classification des opérateurs différentiels P selon les propriétés *des traces* des distributions u — ou $\{M_k\}$ — distributions — solutions de $Pu=0$.

7. Chaque chapitre est suivi de commentaires, contenant, en particulier, l'essentiel de la bibliographie.

8. *Plan*

Chapitre 1. Fonctionnelles analytiques et problèmes aux limites elliptiques.

1. Le problème de Dirichlet pour $-\Delta$
2. Transposition.
3. Espace $\equiv(\Omega)$.
4. Fonctionnelles analytiques sur Γ.
5. Choix de la forme L.
6. Théorème de traces.
7. Interprétation de résultats.

Chapitre 2. Régularisation elliptique et équations d'évolution.

1. Equations d'évolution du ler ordre.
2. Démonstration de l'unicité dans le théorème 1.2.
3. Le problème «régularisé elliptique».
4. Un résultat de régularité.
5. Résultats «locaux».
6. Transposition.

Chapitre 3. Ultra-régularisation et solutions $\{M_k\}$ — distributions d'équations d'évolution.

1. Espaces $\mathcal{E}_{M_k}(X)$, $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$, ...
2. Espace $\mathcal{D}'_{+,M_k}(X)$.
3. Résultat d'ultra-régularité pour les équations d'évolution du ler ordre.
4. Solutions $\{M_k\}$ — distributions des équations d'évolution.
5. Exemples.

(1) Cf. aussi Lions, J. L.; Magenes, E., Ann. Mat. Pura et Appl., *68:* 341-418, 1965; *69*, 1966; et Livre à paraitre. t. 1, 1967; t. 2, 1968.

CHAPITRE 1 — FONCTIONNELLES ANALYTIQUES ET PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

1. Le problème de Dirichlet pour Δ

1.1 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ que l'on suppose variété *indéfiniment différentiable*, Ω étant d'un seul coté de Γ.

Considérons le *problème de Dirichlet:*

(1.1) $-\Delta u = f, \qquad \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots\cdots + \partial^2/\partial x_n^2\ ,$

(1.2) $u|_\Gamma = 0\ ,$

où f est donnée dans Ω.

Sous diverses hypothèses sur f, le problème (1.1), (1.2) admet une solution unique.

Si f parcourt un espace $F(\Omega)$ de fonctions ou de distributions sur Ω, alors u parcourt un espace $E(\Omega)$ de fonctions ou distributions sur Ω (1). Il est clair — et, en outre, démontré — que l'on peut choisir $F(\Omega)$ d'une infinité de façons différentes.

Nous allons prendre ici:

(1.3) $F(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support compact dans Ω (muni de la topologie de L. Schwartz).

1.2 On sait (c'est *la régularité au bord* du problème de Dirichlet) que lorsque $f \in D(\Omega)$, la fonction u est indéfiniment différentiable dans $\overline{\Omega}$ (en abrégé: $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$).

Supposons en outre que

(1.4) la frontière Γ de Ω est analytique réelle.

Alors, il est connu que u est analytique dans $\overline{\Omega}$ en dehors du support de f.

(1) Naturellement, on précisera ces espaces dans la suite!

Résumons:

(1.5) *Si* $F(\Omega)=\mathcal{D}(\Omega)$ *alors toute fonction* u *de* $E(\Omega)$ *a les propriétés suivantes:*

(i) $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$;

(ii) u *est analytique réelle dans un voisinage (variable) de* Γ.

(iii) $u|_\Gamma = 0$.

Munissant $E(\Omega)$ de la topologie image réciproque de celle de $\mathcal{D}(\Omega)$ par $(-\Delta^{-1})$, on a évidemment:

(1.6) $-\Delta$ *est un isomorphisme de* $E(\Omega)$ *sur* $\mathcal{D}(\Omega)$.

2. Transposition

2.1 Transposons (1.6).

Désignons par $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, espace des distributions sur Ω — et par $E'(\Omega)$ le dual de $E(\Omega)$.

Alors (${}^t\pi$ désignant le transposé de l'application π):

${}^t(-\Delta)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sur $E'(\Omega)$.

Autrement dit:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{si } L \in E'(\Omega)\text{ , il existe } u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ unique, telle que} \\ <u,-\Delta\varphi> = L(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in E(\Omega)\,.\end{array}\right. \tag{2.1}$$

2.2 Raisonnons maintenant *formellement*, le reste du chapitre consistant précisément à justifier ce qui suit.

Prenons

$$L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\, dx - \int_\Gamma g \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma \quad , \quad \varphi \in E(\Omega)\,, \tag{2.2}$$

f, g donnés dans des espaces convenables pour que les intégrales (généralisées) écrites *aient* un sens, et $d\sigma$ désignant l'élément d'aire de Γ. Mais (toujours formellement!):

$$<u,-\Delta\varphi> = \int_\Omega u(-\Delta\varphi)dx = -\int_\Gamma u \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, \varphi d\sigma - \int_\Omega (\Delta u)\varphi dx\,,$$

et comme $\varphi|\Gamma = 0$ si $\varphi \in E(\Omega)$, on a:

$$<u, -\Delta\varphi> = \int_{\Omega} (-\Delta u)\varphi dx - \int_{\Gamma} u \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma$$

et (2.1) et (2.2) donnent alors:

(2.3) $$-\Delta u = f \ ,$$

(2.4) $$u|_{\Gamma} = g \ .$$

Ceci est le problème de Dirichlet *non homogène* ($g \neq 0$) avec les caractéristiques suivantes:

(i) la solution est une distribution dans Ω, telle que $-\Delta u = f$;

(ii) les deuxièmes membres f, g doivent être pris tels que (2.2) définisse une forme linéaire continue sur $E(\Omega)$.

Les problèmes à résoudre sont alors les suivants:

(j) trouver les f «les plus générales» ([2]) telles que

$$\varphi \to \int_{\Omega} f\varphi dx$$

définisse une forme linéaire continue sur $E(\Omega)$;

(jj) trouver les g les plus générales telles que

$$\varphi \to + \int_{\Gamma} g \frac{d\varphi}{\partial n} d\sigma$$

définisse une forme linéaire continue sur $E(\Omega)$;

(jjj) si u est une distribution sur Ω telle que $-\Delta u = f$, définir *sa trace* sur $\Gamma, u/_{\Gamma}$.

Nous allons résoudre successivement ces problèmes, puis interpréter les résultats.

([2]) Il n'y a probablement pas de solution optimale à ce problème.

3. Espace $\equiv(\Omega)$

3.1 Soit $\equiv(\Omega)$ un espace de fonctions sur Ω tel que

(3.1) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\equiv(\Omega)$;

(3.2) $E(\Omega) \subset \equiv(\Omega)$.

Alors, d'après (3.1), le dual $\equiv'(\Omega)$ de $\equiv(\Omega)$ est un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc un espace de distributions sur Ω, et, d'après (3.2), si $f \in \equiv'(\Omega)$, la forme

$$v \to \langle f, v \rangle$$

(le crochet désignant la dualité entre $\equiv'(\Omega)$ et $\equiv(\Omega)$) est continue sur $E(\Omega)$.

Donc:

(3.3) *on peut prendre* $f \in \equiv'(\Omega)$ *pour satisfaire* (j), point 2.2.

3.2 Reste maintenant à choisir $\equiv(\Omega)$ «le plus petit possible».

C'est ici qu'il n'existe probablement pas de solution optimale. Voici l'espace que nous choisirons.

Soit ρ une fonction continue dans $\bar{\Omega}$, telle que

$\rho(X) = (\text{distance de } X \text{ à } \Gamma) = d(x,\Gamma)$ si $X \in \Omega$ et $d(X,\Gamma) \leqslant \rho_0$.

$\rho(X) = \rho_0$ si $d(X,\Gamma) \geqslant \rho_0$.

On pose alors:

(3.4) $$\equiv(\Omega) = \left\{u \mid \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \in L_2(\Omega) \quad \forall\, \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}\right\}$$

$$\left(|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \ , \ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \ , \ D_i = \partial \big/ \partial x_i\right) .$$

L'espace $\equiv(\Omega)$ est un *espace de Fréchet* pour la famille de normes:

$$\| \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \|_{L_2(\Omega)}$$

Il est clair que (3.2) a lieu; la vérification de (3.1) est laissée en exercice — (cf. [1], Lemme 5.1, dans la bibliographie placée dans les commentaires).

3.3 *Structure du dual*

Proposition 3.1. *L'espace* $\equiv'(\Omega)$ *est formé des distributions* f *pouvant se représenter* (de façon non unique) *sous la forme*

$$f = \sum_{\text{finie}} D^{\alpha}(\rho^{|\alpha|} f_{\alpha}) \quad , \quad f_{\alpha} \in L_2(\Omega) . \tag{3.5}$$

Cela résulte du Théorème de Hahn-Banach.

4. Fonctionnelles analytiques sur Γ

4.1 On désigne par $\mathcal{H}(\Gamma)$ *l'espace des fonctions analytiques réelles sur* Γ. Voici une définition, commode pour notre objet, de $\mathcal{H}(\Gamma)$.

Soit Δ_Γ l'opérateur de Laplace-Beltrani sur Γ.

On montre (en utilisant un théorème de Kotake-Narsimhann, *Fractionnal powers of a linear elliptic operator*, Bull. Soc. Math. France, t. 90 (1962), pp. 449-471) que $\mathcal{H}(\Gamma)$ coincide avec l'espace des fonctions f indéfiniment dérivables sur Γ telles que l'on puisse trouver des constantes c et L telles que

$$\|\Delta_\Gamma^k f\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant c\, L^k (2k)! \quad , \quad \forall k \geqslant 0 \ , \quad k \text{ entier}; \tag{4.1}$$ (3)

et ceci avec p fixé quelconque, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ($L_p(\Gamma)$ est l'espace de (classes de) fonctions L_p sur Γ pour la mesure de surface $d\sigma$).

Désignons par $\mathcal{H}^{(L)}(\Gamma)$ l'espace des f telles que (4.1) ait lieu avec L donné; c'est un espace de Banach pour la norme

$$\sup_{k \geqslant 0} . \frac{1}{L^k (2k)!} \|\Delta^k{}_\Gamma f\|_{L_2(\Gamma)} \tag{4.2}$$

(on prend $p=2$ dans (4.1), pour fixer les idées).

Alors

$$\mathcal{H}(\Gamma) = \bigcup_{L_n} \mathcal{H}^{(L_n)}(\Gamma) , \tag{4.3}$$

L_n suite tendant vers $+\infty$, et on munit $\mathcal{H}(\Gamma)$ de la topologie ($\mathcal{L}\mathcal{J}$) (limite inductive de Fréchet — et même de Banach) correspondante.

4.2 On peut alors définir $\mathcal{H}'(\Gamma)$, dual de $\mathcal{H}(\Gamma)$; c'est l'espace des *fonctionnelles analytiques sur* Γ.

(3) Une démonstration immédiate de ce résultat se fait en «ajoutant une variable»; cf. Lions; Magenes, Annali di Mat. Pura ed Appl. 1965.

On montre [1] la

Proposition 4.1. Soit $g \in \mathcal{H}'(\Gamma)$; *il existe alors des fonctions* $g_k \in L_2(\Gamma)$, *vérifiant*

$$\sum_{h=0}^{\infty} L^k (2k)! \quad \|g_k\|_{L_2(\Gamma)} < \infty \quad \forall L , \tag{4.4}$$

telles que

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_\Gamma^k g_k \tag{4.5}$$

5. Choix de la forme L

Si $\varphi \in E(\Omega)$, on sait ((1.5), (ii)) que φ est analytique réelle au voisinage de Γ, donc

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_\Gamma \in \mathcal{H}(\Gamma) \tag{5.1}$$

et l'application $\varphi \to \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_\Gamma$ est linéaire continue de $E(\Omega) \to \mathcal{H}(\Gamma)$.

Par conséquent

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si } g \in \mathcal{H}'(\Gamma), \text{ la forme} \\ \varphi \to \left\langle g , \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_\Gamma \right\rangle \quad (\text{dualité entre } \mathcal{H}'(\Gamma) \text{ et } \mathcal{H}(\Gamma)) \\ \text{est linéaire et continue sur } E(\Omega) \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Noter que, utilisant (4.5), on peut écrire

$$\left\langle g , \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_\Gamma \right\rangle = \sum_{h=0}^{\infty} \int_\Gamma g_k \, \Delta_\Gamma^k \left(\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_\Gamma \right) d\sigma$$

On peut donc énoncer:

Proposition 5.1 *Si* $f \in \Xi'(\Omega)$ *et* $g \in \mathcal{H}'(\Gamma)$, *la forme*

$$\varphi \to \left\langle f , \varphi \right\rangle - \left\langle g , \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_\Gamma \right\rangle = L(\varphi) \tag{5.3}$$

est continue sur $E(\Omega)$.

6. Théorème de traces

6.1 Revenons mantenant à (2.1), L étant choisie par (5.3):
Il existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *unique telle que*

$$\left\langle u, -\Delta\varphi \right\rangle = \left\langle f, \varphi \right\rangle - \left\langle g, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} \right\rangle \quad , \quad \forall\, \varphi \in E(\Omega) \tag{6.1}$$

Prenant en particulier $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on déduit de (6.1) que

$$-\Delta u = f \tag{6.2}$$

Définissons alors

$$D_\Delta = \{ u \mid \ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad , \quad \Delta u \in \Xi'(\Omega) \} , \tag{6.3}$$

espace muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continuees les applications $u \to u$ et $u \to \Delta u$ de D_Δ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\Xi'(\Omega)$ respectivement.

Alors (on a fait ce qu'il fallait pour ça!) la solution u de (6.1) appartient à D_Δ — et, conformément à ce qu'on a vu en 2.2, *le problème est maintenant d'essayer de définir la trace* $u\big|_{\Gamma}$ *de* $u \in D_\Delta$.

6.2 On montre d'abord [1]:

Lemme 6.1. *L'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* D_Δ.
Le résultat de traces est alors [1]:

Théorème 6.1 *L'application*

$$u \to u\big|_{\Gamma}$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *dans* $\mathcal{D}(\Gamma)$ (fonctions indéfiniment différentiables sur Γ) *se prolonge par continuité, en une application linéaire continue, encore notée* $u \to u\big|_{\Gamma}$, *de* $D_\Delta \to \mathcal{H}'(\Gamma)$.

La fonctionnelle analytique $u\big|_{\Gamma}$ será encore appelée *trace de u.*

Cette fonctionnelle donne lieu à *la formule de Green*:

$$\left\langle \Delta u, \varphi \right\rangle - \left\langle u, \Delta\varphi \right\rangle = -\left\langle u\Big|_{\Gamma}, \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\rangle , \ u \in D_\Delta \ , \ \varphi \in E(\Omega) \ ; \tag{6.4}$$

dans (6.4) le premier crochet désigne la dualité entre $\Xi'(\Omega)$ et $\Xi(\Omega)$, le deuxième entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$, le troisième entre $\mathcal{H}'(\Gamma)$ et $\mathcal{H}(\Gamma)$. La démonstration du théorème 6.1 utilise, entre autres, le théorème de Cauchy — Kovalewska — Cf. [1].

7. Interprétation des résultats

Il est maintenant immédiat d'interpréter (6.1). On obtient:

Théorème 7.1 *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ analytique réelle. Pour f donné dans $\Xi'(\Omega)$ et g donné dans $\mathcal{H}'(\Gamma)$, il existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ unique, vérifiant*

$$-\Delta u = f, \tag{7.1}$$

$$u\big|_{\Gamma} = g. \tag{7.2}$$

En outre l'application $\{f, g\} \to u$ est continue de $\Xi'(\Omega) \times \mathcal{H}'(\Gamma) \to \mathcal{D}'(\Omega)$.

COMMENTAIRES SUR LE CHAPITRE 1

Tous les résultats de ce chapitre sont (strictement) contenus dans

[1] LIONS, J. L.; MAGENES, E. — *Problèmes aux limites non homogènes* — (VII). Annali di Matematica, Vol. LXIII: 201-224. 1963.

Nous avons pris ici $F(\Omega)=\mathcal{D}(\Omega)$, et considéré uniquement l'opérateur Δ et le problème de Dirichlet. On peut prendre pour $F(\Omega)$ des espaces de Sobolev et prendre des opérateurs elliptiques d'ordre quelconque, avec des conditions aux limites «générales»; pour cela, nous renvoyons à

[2] LIONS, J. L.; MAGENES, E. — *Problèmes aux limites non homogènes* — (I) ... (VI). Annali Scuola Norm. Pisa, 61, 62, 1960; Annales Institut Fourier, 1961; Journal d'Analyse Israel, 1963.

Il y a d'autres possibilités ,qui n'ont pas encore été étudiées systématiquement, en prenant pour $F(\Omega)$ des espaces *plus petits* que $\mathcal{D}(\Omega)$, de fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour lesquelles existent des constantes c et L telles que

$$|D^p\varphi(x)| \leqslant c\, L^{|p|} M_p \quad \forall\, p = \{p_1, \dots, p_n\}, \tag{1}$$

la suite M_p étant une suite *non quasi-analytique donnée.* De tels espaces sont étudiés dans

[3] ROUMIEU. C. — *Sur quelques extensions de la notion de distribution.* Annales E. N. S., t. 77: 47-121. 1960.

[4] ROUMIEU, C. — *Ultra-distributions....* Journal d'Analyse Israel. Vol. X: 153-192. 1962-63.

Le problème est alors, $F(\Omega)$ étant choisi par (1), de décrire aussi précisément que possible l'espace $E(\Omega)$ des solutions.

On peut également songer à prendre pour $F(\Omega)$ un espace de fonctions qui ne s'annulent pas identiquement au voisinage de Γ — tout en satisfaisant à des inégalités du type (1).

Le théorème de trace du N.º 6 généralise un théorème de

[5] CIMMINO, G. — *Su alcuni esempi notevoli di dualità fra spazi lineari topologici*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. 1962.

Chapitre 2 — RÉGULARISATION ELLIPTIQUE ET ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

1. Equations d'évolution du 1er ordre

1.1 *Notations*

On désigne par V, H deux espaces de Hilbert, de produits scalaires respectifs $((u, v))$, (f, g). Les normes correspondantes sont désignées par $\|u\|$ et $|f|$. On suppose que

1) $V \subset H$, l'injection de V dans H étant continue,
2) V est dense dans H.

De façon générale, X' désignera *l'anti-dual* [1] d'un espace vectoriel topologique X; on identifiera H à son anti-dual; alors

$$V \subset H \subset V' .$$

Si $v' \in V'$, $v \in V$, (v', v) désigne le produit scalaire entre V' et V (il est donc anti-linéaire en v); si $v' \in H$, (v', v) coincide avec le produit scalaire dans H.

1.2 *Opérateurs* $A(t)$.

Dans la suite t désigne un paramètre réel, (le temps), de signe quelconque. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on se donne une forme sur $V \times V$:

$$u, v \to a(t; u, v)$$

qu'on suppose continue, linéaire en u, anti-linéaire en v.

---

[1] i. e. l'espace des formes anti-linéaires continues sur X.

Ou supposera pour commencer [2]

(1.1) pour tout $u,v \in V$, la fonction $t \to a(t;u,v)$ est *mesurable* et

$$|a(t;u,v)| \leqslant M\|u\| \quad \|v\| \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \;;$$

(1.2) $$Re\, a(t;u,v) \geqslant \alpha\|v\|^2 \;,\; \alpha > 0 \;,\; \forall\, t \in \mathbb{R} \;,\; \forall\, v \in V\,.$$

Puisque $v \to a(t;u,v)$ est anti-linéaire continue sur V, elle peut s'écrire (par définition de V'!):

(1.3) $$a(t;u,v) = (A(t)u,v) \quad , \quad A(t)u \in V' \;;$$

alors

(1.4) $$A(t) \in \mathcal{L}(V,V') \quad , \quad \|A(t)\|_{V \to V'} \leqslant M$$

On va, dans ce qui suit, et sous les hypothèses (1.1) (1.2) [3] résoudre le problème de Cauchy relatif à l'opérateur d'évolution

$$A(t) + \frac{d}{dt}$$

Il nous faut auparavant introduire quelques espaces supplémentaires.

1.3 *Espaces* $L_2(X)\,, L_{2,+}(X)\,, \ldots$.

Soit X un espace de Banach.

On désigne par $L_2(a,b;X)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur (a,b) à valeurs dans X; c'est un espace de Banach pour la norme

$$\left(\int_a^b \|f(t)\|_X^2 dt\right)^{1/2}$$

et c'est un espace de Hilbert si X est lui même un espace de Hilbert. On écrira

$$L_2(-\infty\,, +\infty\,; X) = L_2(X)\,.$$

---

[2] Des variantes ou des renforcements de cette hypothèse seront donnés au fur et à mesure des besoins.

[3] Ce ne sont pas *les plus générales* sous lesquelles on peut résoudre ce problème!

On désigne par $L_{2,+}(X)$ le sous espace de $L_2(X)$ des fonctions à support limité à gauche; plus précisément *on pose*:

$$L_{2,+}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{L}_2(-n, +\infty; X) \tag{1.5}$$

où

$$\tilde{L}_2(-n, +\infty; X) = \{f \mid f \in L_2(X), f = 0 \text{ si } t < -n\} . \tag{1.6}$$

Si X est un Banach (resp. Hilbert), $L_{2,+}(X)$ est muni de la topologie de limite inductive de Banach (resp. Hilbert) correspondante à (1.5). Si $f \in L_2(a,b; X)$, on peut définir sa dérivée $\frac{df}{dt}$ au sens des *distributions* sur $]a,b[$ à valeurs dans X.

On posera:

$$W_2^m(a,b; X) = \left\{ f \mid f, \frac{df}{dt}, \ldots, \frac{d^m f}{dt^m} \in L_2(a,b; X) \right\} ;$$

muni de la norme

$$\left(\sum_{j=0}^{m} \left\| \frac{d^j f}{dt^j} \right\|^2_{L_2(a,b; X)} \right)^{1/2}$$

c'est un espace de Banach (resp. Hilbert) si X est un Banach (resp. Hilbert).

On pourra définir de façon analogue à (1.6) (1.5):

$$\tilde{W}_2^m(-n, +\infty; X) = \{f \mid f \in W_2^m(-\infty, +\infty; X), f = 0 \text{ si } t < -n\}$$

$$W_{2,+}^m(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_2^m(-n, +\infty; X)$$

Noter que si

$$f \in \tilde{W}_2^m(-n, +\infty; X), \text{ alors } f(-n) = f'(-n) = \ldots = f^{(m-1)}(-n) = 0$$
$$\left(f' = \frac{df}{dt}, \ldots \right) .$$

1.4 *Premier théorème d'isomorphisme*

Si $f \in L_2(V)$, on désigne par $A(t)f$ la fonction $t \to A(t)f(t)$, à valeurs dans V'; alors

$$A(t)f \in L_2(V') \text{ (grâce à (1.1))}.$$

Nous introduisons:

$$(1.7) \qquad L_2(V;V') = \left\{ u \mid u \in L_2(V)\,, \frac{du}{dt} \in L_2(V') \right\};$$

$$(1.8) \qquad \tilde{L}_2(-n,\infty;V;V') = \{ u \mid u \in L_2(V;V')\,, u \text{ nulle pour } t<-n \};$$

$$(1.9) \qquad L_{2,+}(V;V') = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{L}_2^1(-n,+\infty;V;V')$$

Ceci posé:

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses* (1.1) (1.2), *l'opérateur* $A(t)+\frac{d}{dt}$ *définit un isomorphisme de* $L_{2,+}(V;V')$ sur $L_{2,+}(V')$.

Ce théorème est conséquence immédiate du

Théorème 1.2 *Sous les hypothèses* (1.1) (1.2) *l'opérateur* $A(t)+\frac{d}{dt}$ *définit un isomorphisme de* $L_2(t_0,\infty;V,V')$ *sur* $L_2(t_0,\infty;V')$, $t_0 \in \mathbb{R}$ *fixé quelconque.*

Le plan du chapitre est le suivant:
on démontrera d'abord le théorème 1.2 (avec quelques variantes) puis l'on démontrera un *théorème de régularité* [4] qui, *par transposition* (comme au Chap. 1) *fournira des solutions distributions.* Au chapitre suivant, des théorèmes *d'ultra-régularité* fourniront des solutions *ultra-distributions.*

2. Démonstration de l'unicité dans le Théorème 1.2

On peut évidemment prendre $t_0=0$.

On a donc une fonction $u \in L_2(V)$, nulle pour $t<0$, telle que $\frac{du}{dt} \in L_2(V')$ et $A(t)u(t)+u'(t)=0$. On veut montrer que $u=0$.

Prenant le produit scalaire entre V' et V, on a:

$$(2.1) \qquad \big(A(t)u(t)\,,u(t)\big) + \big(u'(t)\,,u(t)\big) = 0 \quad \text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}\,.$$

On montre que

$$2Re\int_0^t \big(u'(s),u(s)\big)ds = |\,u(t)\,|^2 - |\,u(0)\,|^2 = |\,u(t)\,|^2 \quad \big(\text{car } u(0)=0\big)$$

---

[4] Sous des hypothèses supplémentaires sur $A(t)$.

de sorte que (2.1) entraine:

$$2Re\int_0^t a(s;u(s),u(s))ds+|u(t)|^2=0 \tag{2.2}$$

d'où (utilisant (1.2)):

$$2\alpha\int_0^t \|u(s)\|^2 ds+|u(t)|^2\leqslant 0 \tag{2.3}$$

d'où le résultat suit.

REMARQUE 2.1 On a implicitement démontré que si

$$A(t)u+\frac{du}{dt}=f\,, \tag{2.4}$$

f donné dans $L_2(t_0,+\infty;V')$, alors

$$2Re\int_{t_0}^t a(s;u(s),u(s))ds+|u(t)|^2-|u(t_0)|^2=2Re\int_{t_0}^t (f(s),u(s))ds\,. \tag{2.5}$$

3. Démonstration de l'existence dans le Théorème 1.2 par la méthode de «régularisation elliptique».

3.1 *Le problème «régularisé elliptique».*

Définissons

$$\hat{V}=\left\{v\;\middle|\;v\in L_2(0,\infty;V)\;,\;\frac{dv}{dt}\in L_2(0,\infty;H)\;,\;v(0)=0\right\}, \tag{3.1}$$

espace de Hilbert pour la norme

$$\left(\int_0^\infty (\|v(t)\|^2+|v'(t)|^2)dt\right)^{1/2}=\|v\|_{\hat{V}}.$$

Pour $u,v \in \hat{V}$, on pose:

$$(3.2) \qquad b_\varepsilon(u,v) = \int_0^\infty a(t;u,v)dt + \varepsilon \int_0^\infty (u',v')dt + \int_0^\infty (u',v)dt\,.$$

où ε est un paramètre > 0.

On a:

$$2Re \int_0^\infty (v',v)dt = -|v(0)|^2 = 0$$

(car $v(t) \to 0$ dans H si $t \to +\infty$), de sorte que

$$(3.3) \qquad 2Re\ b_\varepsilon(v,v) \geqslant 2\alpha \int_0^\infty \| v(t) \|^2 dt + \varepsilon \int_0^\infty | v'(t) |^2 dt$$

Par conséquent:

Proposition 3.1 *Sous les hypothèses* (1.1) (1.2), *pour chaque* $\varepsilon > 0$, *et pour f donnée dans* $L_2(0,\infty;V')$, *il existe* $u_\varepsilon \in \hat{V}$ *unique, tel que*

$$(3.4) \qquad b_\varepsilon(u_\varepsilon,v) = \int_0^\infty (f,v)dt \qquad \forall\, v \in \hat{V}\,.$$

(le problème (3.4) est ce que nous appelons le problème «régularisé elliptique»).

3.2 *Interprétation du problème* (3.4)

Prenant dans (3.4)

$$v = \varphi \otimes \chi\ ,$$

φ étant dans $\mathcal{D}(]0,\infty[)$ (fonction indéfiniment différentiable et à support compact dans $]0,+\infty[$) ,

$$\chi \in V\ ,$$

on en déduit que

$$(3.5) \qquad -\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon'' + A(t)u_\varepsilon = f\,,$$

à quoi on ajoute (par définition de $\hat{V}$):

$$(3.6) \qquad u_\varepsilon(0) = 0$$

3.3 *Passage à la limite (I)*

La majoration (3.3) nous apprend que, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\left\| u_\varepsilon \right\|_{L_2(0,\infty;V)} + \left\| \sqrt{\varepsilon}\, \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|_{L_2(0,\infty;H)} \leqslant C \tag{3.7}$$

Par conséquent, de toute suite $\varepsilon \to 0$, on peut extraire une sous-suite ε' telle que

$$u_{\varepsilon'} \to u \quad \text{dans } L_2(0,\infty;V) \quad \text{faible,} \tag{3.8}$$

$$\sqrt{\varepsilon'}\, \frac{du_{\varepsilon'}}{dt} \to g \quad \text{dans } L_2(0,\infty;H) \quad \text{faible.} \tag{3.9}$$

Mais, d'après (3.8), $\frac{du_{\varepsilon'}}{dt} \to \frac{du}{dt}$ dans $\mathcal{D}'(0,\infty;V)$ (distributions sur $]0,\infty[$ à valeurs dans V), donc $\sqrt{\varepsilon'}\, \frac{du_{\varepsilon'}}{dt} \to 0$ dans $\mathcal{D}'(0,\infty;V)$, donc $g=0$.

Ecrivons «ε» au lieu de «ε'»; de (3.8) et (3.5) on déduit que

$$\begin{cases} -\varepsilon\, u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' = h_\varepsilon \big(= f - A(t)u_\varepsilon\big)\,, \\ h_\varepsilon \to h\big(= f - A(t)u\big) \quad \text{dans } L_2(0,\infty;V') \quad \text{faible.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Mais alors $\big($puisque $u_\varepsilon' \in L_2(0,\infty;H)\big)$:

$$\begin{cases} u_\varepsilon' = E_\varepsilon * h_\varepsilon\,, \\ * = \text{produit de composition en } t \text{ sur } \mathbb{R}\,, \\ E_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} \exp\left(^{-t}/_{\varepsilon}\right) & \text{si } t>0 \end{cases} \end{cases} \tag{3.11}$$

Il en résulte (avec (3.10)) que

$$\frac{du_\varepsilon}{dt} \to \frac{du}{dt} \quad \text{dans } L_2(0,\infty;V') \quad \text{faible}. \tag{3.12}$$

De (3.8) (3.12) résulte que $u_{\varepsilon'}(0)(=0) \to u(0)$ dans H faible donc que $u(0)=0$.

Passant à la limite dans (3.5) avec ($\varepsilon = \varepsilon'$), on obtient finalement:

$$\text{(3.13)} \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = f\,, \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

Donc $u \in W_2^1(0,\infty; V, V')$ et le Théorème 1.2 est démontré.

3.4 *Remarques diverses*

1) Vérifions le

THÉORÈME 3.1 *Lorsque* $\varepsilon \to 0, u_\varepsilon \to u$ *dans* $L_2(0,\infty;V)$ *fort et* $\dfrac{du_\varepsilon}{dt} \to \dfrac{du}{dt}$ *dans* $L_2(0,\infty;V')$ *fort.*

DÉMONSTRATION

Tout d'abord, d'après l'unicité de la solution de (3.13) on sait déjà que $u_\varepsilon \to u$ dans $L_2(0,\infty;V)$ faible, $\dfrac{du_\varepsilon}{dt} \to \dfrac{du}{dt}$ dans $L_2(0,\infty;V')$ faible.

Ensuite, introduisons la quantité

$$X_\varepsilon = \varepsilon \int_0^\infty |\, u_\varepsilon'(t)\,|^2\, dt + \int_0^\infty (u_\varepsilon' - u'\,,\, u_\varepsilon - u)dt + \int_0^\infty a(t; u_\varepsilon - u\,,\, u_\varepsilon - u)dt\,.$$

Utilisant (3.4) et la définition de $b_\varepsilon(u,v)$ on peut écrire

$$X_\varepsilon = \int_0^\infty (f, u_\varepsilon)dt - \int_0^\infty [(u', u_\varepsilon - u) + a(t; u, u_\varepsilon - u)]dt -$$

$$- \int_0^\infty [(u_\varepsilon', u) + a(t; u_\varepsilon, u)]dt$$

$$= \int_0^\infty (f, u)dt - \int_0^\infty (u_\varepsilon' + A(t)u_\varepsilon, u)dt\;;$$

comme $u_\varepsilon' + A(t)u_\varepsilon \to u' + A(t)u = f$ dans $L_2(0,\infty;V')$ faible, il en résulte que

$$\text{(3.14)} \qquad X_\varepsilon \to 0\,.$$

Or

$$2ReX_\varepsilon = 2\varepsilon \int_0^\infty |u'_\varepsilon(t)|^2 dt + 2Re \int_0^\infty a(t; u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u)\, dt \tag{3.15}$$

d'où résulte que

(3.16) $u_\varepsilon \to u$ dans $L_2(0,\infty; V)$ *fort*

(et que $\sqrt{\varepsilon}\, u'_\varepsilon \to 0$ dans $L_2(0,\infty; H)$ fort).

De (3.16) résulte que $h_\varepsilon \to h$ dans $L_2(0,\infty; V')$ *fort* (Cf. (3.10)) ce qui, avec (3.11) entraine que $u'_\varepsilon \to u'$ dans $L_2(0,\infty; V')$ fort et achève la démonstration du Théorème.

2) De la Remarque 2.1 on déduit que, si u est la solution du problème (3.13), on a:

$$\|u\|_{L_2(0,\infty\,; V)} \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L_2(0,\infty\,; V')} \tag{3.17}$$

3) On aura des résultats entièrement analogues aux précédents en introduisant la «régularisation elliptique» que voici. Définissons

$$\tilde{V} = \left\{ v \mid v \in L_2(0,\infty; V), \frac{dv}{dt}, \dots, \frac{d^m v}{dt^m} \in L_2(0,\infty; H),\ v(o) = v'(o) = \cdots = v^{(m-1)}(o) = 0 \right\}$$

Pour $u, v \in \tilde{V}$, posons:

$$\tilde{b}_\varepsilon(u,v) = \int_0^\infty a(t; u, v)\, dt + \varepsilon \int_0^\infty (u^{(m)}, v^{(m)})\, dt + \int_0^\infty (u', v)\, dt$$

Il existe ici encore un u_ε unique dans $\tilde{V}$, satisfaisant à

$$\tilde{b}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_0^\infty (f, v)\, dt \quad \forall\, v \in \tilde{V} \tag{3.18}$$

et on a des résultats analogues aux précédents.

4) Si $A(t)$ correspond à un *opérateur elliptique* $A\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *d'ordre* $2m$, alors l'équation correspondante à (3.18), i. e.

$$(-1)^m \varepsilon \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} u_\varepsilon + \frac{du_\varepsilon}{dt} + A(t)u_\varepsilon = f, \tag{3.19}$$

est une *équation elliptique d'ordre* $2m$ — d'où la terminologie adoptée.

4. Un résultat de régularité

4.1

THÉORÈME 4.1 *On suppose que les hypothèses* (1.1) (1.2) *ont lieu et qu'en outre*

$$\begin{cases} t \to a(t;u,v) \text{ est une fois continûment dérivable sur } \mathbb{R}, \\ \forall\, u, v \in V, \text{ avec } |a'(t;u,v)| \leqslant M_1 \|u\| \; \|v\| \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Alors si $f \in W^1_{2,+}(V')$, *la solution* u *de*

$$A(t)u + \frac{du}{dt} = f \tag{4.2}$$

est dans $W^1_{2,+}(V)$ *et* $\frac{du}{dt} \in W^1_{2,+}(V')$

DÉMONSTRATION

Soit $h \in \mathbb{R}$ et $u^h(t) = \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$, $A^h(t) = \frac{A(t+h)-A(t)}{h}$.

On déduit de (4.2):

$$(A(t)u)^h + \left(\frac{du}{dt}\right)^h = f^h$$

d'où

$$A(t+h)u^h + \frac{du^h}{dt} = f^h - A^h(t)u. \tag{4.3}$$

Supposons f fixé dans $W^1_{2,+}(V')$ à support limité à gauche par t_0. Alors, pour $|h|\leqslant 1$ par exemple, f^h est à support limité à gauche par t_0-1 et u^h est *la* solution dans $L_{2,+}(V;V')$, à support limité à gauche par t_0-1, de (4.3).

De 3.4, 2), on déduit alors que

$$\|u^h\|_{L_2(t_1,\infty\,;V)} \leqslant \frac{1}{\alpha}\;\|f^h-A^h(t)_u\|_{L_2(t_1,\infty\,;V)}\;,\; t_1=t_0-1\;. \tag{4.4}$$

Mais grâce à l'hypothèse faite sur f et à (4.1),

$$\|\, f^h-A^h(t)u\,\|_{L_2(t_1,\infty\,;V)} \leqslant \text{ constante,}$$

de sorte que u^h demeure dans un borné de $L_2(t_1,\infty;V)$. On peut alors extraire $h'\to 0$ tel que

$$u^{h'}\to w \quad \text{dans } L_2(t_1,\infty;V) \text{ faible.}$$

Mais nécessairement $w=\dfrac{du}{dt}$, donc

$$u^{h'}\to\frac{du}{dt} \quad \text{dans } L_2(t_1,\infty;V) \tag{4.5}$$

On peut passer à la limite dans (4.3); il vient:

$$A(t)u'+\frac{du'}{dt}=f-A'(t)u \tag{4.6}$$

d'où résulte que $\dfrac{du'}{dt}\in L_2(t_1,\infty;V')$. Le Théorème suit.

4.2 *Autre formulation du théorème* 4.1

On définit de façon générale, pour m entier $\geqslant 0$:

$$W^m_{2,+}(V;V')=\left\{\varphi\;|\;\varphi\in W^m_{2,+}(V)\;,\;\frac{d\varphi}{dt}\in W^m_{2,+}(V')\right\}\;; \tag{4.7}$$

alors

$$W^0_{2,+}(V;V')=L_{2,+}(V;V') \tag{4.8}$$

Alors:

THÉORÈME 4.1 bis. *Sous les hypothèses* (1.1) (1.2) (4.1), $A(t)+\dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $W^1_{2,+}(V;V')$ *sur* $W^1_{2,+}(V')$.

4.3 *Généralisation*

Par réitération de la démonstration de 4.1, on obtient:

THÉORÈME 4.2 *On suppose que* (1.1) (1.2) *ont lieu, ainsi que*

$$\text{(4.9)}\quad \begin{cases} t\to a(t;u,v) \text{ est une fois continûment dérivable dans } \mathbb{R} \\ \text{et } |a^{(m)}(t;u,v)| \leqslant M_m \ \|u\| \ \|v\| \ (^5) \end{cases}$$

Alors $A(t)+\dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $W^j_{2,+}(V;V')$ *sur* $W^j_{2,+}(V')$, *pour tout entier* j *avec*

$$0\leqslant j\leqslant m\,.$$

4.4 *Cas limite*

Faisons maintenant «$m=\infty$» dans le théorème 4.2.
Pour cela, introduisons d'abord l'espace $\mathcal{D}_{L_{2,+}}(X)$ (X=Banach).
On définit

$\mathcal{E}_{L_2}(X)=\{f\,|\,f$ indéfiniment différentiable de $\mathbb{R}\to X, f^{(j)}\in L_2(X)\ \forall j\}$, muni de la topologie (d'espace de Fréchet) définie par les semi-normes

$$\|f^{(j)}\|_{L_2(X)}$$

Puis

$$\mathcal{D}_{L_2}(-n,+\infty;X)=\{f\,|\,f\in\mathcal{E}_{L_2}(X)\,,\ f=0 \ \text{ si } \ t\leqslant -n\}$$

et

$$\mathcal{D}_{L_{2,+}}(X)=\bigcup_{n-1}^{\infty}\mathcal{D}(-n,+\infty;X)\,.$$

(5) D'où résulte que $|a^{(j)}(t;u,v)|\leqslant M_j\ \|u\|\ \|v\|\,,\ 1\leqslant j\leqslant m-1\,.$

On déduit du Théorème 4.2 le

Théorème 4.3 *On suppose que* (1.1) (1.2) *ont lieu, et que*

(4.10) $t \to a(t;u,v)$ est indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}$,

$\forall u,v \in V$, *bornée ainsi que chacune de ses dérivées.*

Alors $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}_{L_2,+}(V)$ *sur* $\mathcal{D}_{L_2,+}(V')$.

5. Résultats «locaux».

5.1 Posons:

$$L_{2,loc}(X) = \{f \mid f \in L_2(a,b;X) \quad \text{pour } tout\ a,b, \text{ finis}\} ;$$

c'est un espace de Fréchet pour les semi-normes

$$\left(\int_a^b \|f(t)\|_X^2 \, dt\right)^{1/2} ,$$

où a,b sont pris dans deux suites tendant respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$. Soit

$$L_{2,loc}(t_0,+\infty;X) = \{f \mid f \in L_2(t_0,b;X) \text{ pour tout } b \text{ fini}\} ,$$

également espace de Fréchet.

Posons ensuite:

$$L_{2,+,loc}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{2,loc}(-n,+\infty;X);$$

$$W^m_{2,+,loc}(X) = \{u \mid u,u',\dots,u^{(m)} \in L_{2,+,loc}(X)\};$$

$$W^m_{2,+,loc}(V;V') = \{u \mid u \in W^m_{2,+,loc}(V),\ u' \in W^m_{2,+,loc}(V')\} .$$

On a alors le

Théorème 5.1 *On suppose que*

(5.1) $\forall u,v \in V$, $t \to a(t;u,v)$ est m fois continûment différentiable;

(5.2) $\forall T$, il existe λ_T tel que

$$Re\ a(t;v,v)+\lambda_T|v|^2 \geqslant \alpha_T \|v\|^2\ ,\ \alpha_T>0\ ,\quad \forall v\in V\ ,\ |t|\leqslant T.$$

Alors $A(t)+\dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $W^m_{2,+,loc}(V;V')$ *sur* $W^m_{2,+,loc}(V')$.

DÉMONSTRATION

1) Soit $B(t)$ un opérateur ayant des propriétés analogues à $A(t)$ avec

$$B(t)=A(t) \quad \text{si} \quad t\in(o,T)\ .$$

Soit $f,g\in L_2(0,\infty;V')$ avec $f=g$ sur $(0,T)$ (p. p.).

Alors si $u,v\in L_{2,loc}(0,\infty;V)\,,\dfrac{du}{dt}\,,\dfrac{dv}{dt}\in L_{2,loc}(0,\infty;V')\,,$

$u(o)=v(o)=0$, et si

$$A(t)u+u'=f\ ,$$
$$B(t)v+v'=g\ ,$$

alors (démonstration analogue à celle du n.º 2) $u=v$ (p.p.) sur $(0,T)$.

Il suffit donc de résoudre l'équation

$$A(t)u+u'=f \tag{5.3}$$

sur (t_0,T) — puis faire $T\to\infty$—; on peut donc se ramener au cas où (4.9) a lieu.

2) Changeant u en $exp(kt)u$, on peut changer dans (5.3) $A(t)$ en $A(t)+k$ et l'on peut donc supposer que (5.2) a lieu avec $\lambda_T=0$. Prenant $B(t)$ coincidant avec $A(t)$ sur (t_0,T) et donnant lieu à (5.2) pour *tout* t avec $\lambda_T=0$, on se ramène aux conditions du n.º 4. Le Théorème suit.

5.2

Si $\mathcal{D}_+(X)=$ espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans X et à support limité à gauche, on a:

$$\mathcal{D}_+(X)=\bigcap_{m=0}^{\infty} W^m_{2,+,loc}(X)\ .$$

Alors

THÉORÈME 5.2 *On suppose que* (5.2) *a lieu et que*

(5.4) $\forall\, u,v \in V,\ t \to a(t;u,v)$ *est indéfiniment différentiable.*

Alors $A(t)+\dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}_+(V)$ *sur* $\mathcal{D}_+(V')$.

6. Transposition

6.1 *Opérateur* $A^*(t)$.

On pose par définition:

(6.1) $$a^*(t;u,v)=a(t;v;u)\ ,$$

et on désigne par $A^*(t)$ l'opérateur défini $\big($dans $\mathcal{L}(V;V')\big)$ par $a^*(t;u,v)$:

(6.2) $$a^*(t;u,v)=(A^*(t)u,v)\ .$$

Tous les résultats établis jusqu'ici sont évidemment valables en remplaçant $A(t)$ par $A^*(t)$.

6.2

Notons aussi que tous les résultats établis jusqu'ici sont valables en remplaçant $\dfrac{d}{dt}$ par $-\dfrac{d}{dt}$ et les espaces $L_{2,+}(X),\ldots$ par $L_{2,-}(X),\ldots$, où $L_{2,-}(X)=\{f\,|\,f\in L_2(X), f$ à support limité *à droite*$\}$.

Donc en particulier:

(6.3) $\left\{\begin{array}{l}\text{Hypothèses (5.1) (5.2), alors } A^*(t)-\dfrac{d}{dt} \text{ est un isomorphisme de} \\ W^m_{2,-,loc}(V;V') \text{ sur } W^m_{2,-,loc}(V')\ ;\end{array}\right.$

(6.4) $\left\{\begin{array}{l}\text{Hypothèses (5.2) (5.4), alors } A^*(t)-\dfrac{d}{dt} \text{ est un isomorphisme de} \\ \mathcal{D}_-(V) \text{ sur } \mathcal{D}_-(V')\ .\end{array}\right.$

La transposition de ces résultats est un simple exercice de dualité: il suffit de déterminer «explicitement» les duals des espaces intervenant dans (6.3) (6.4).

6.3

Notons que le dual de $L_{2,-,loc}(X)$ est $L_{2,+,loc}(X')$. On en déduit que

$$(6.5)\quad \begin{cases} \left(W^{m}_{2,-,loc}(V')\right)' = W^{-m}_{2,+,loc}(V) = \\ = \text{espace des distributions } f = \sum_{j=0}^{m} \dfrac{d^j f_j}{dt^j}\ ,\ f_j \in L_{2,+,loc}(V)\ . \end{cases}$$

On vérifie ensuite que

$$(6.6)\quad \begin{cases} \left(W^{m}_{2,-,loc}(V;V')\right)' = W^{-m}_{2,+,loc}(V') + \dfrac{d}{dt}\, W^{-m}_{2,+,loc}(V) = \\ = \text{espace des distributions } g + \dfrac{d}{dt} h\,,\ g \in W^{-m}_{2,+,loc}(V')\,,\ h \in W^{-m}_{2,+,loc}(V). \end{cases}$$

Alors, par transposition de (6.3):

Théorème 6.1 *Sous les hypothèses* (5.1) (5.2), *l'opérateur* $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $W^{-m}_{2,+,loc}(V)$ *sur* $W^{-m}_{2,+,loc}(V') + \dfrac{d}{dt} W^{-m}_{2,+,loc}(V)$.

Transposons maintenant (6.4); le dual de $\mathcal{D}_-(V)$ est l'espace $\mathcal{D}'_+(V')$ des distributions sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans V' et à support limité à gauche.

Alors:

Théorème 6.2 *Sous les hypothèses* (5.2) (5.4), *l'opérateur* $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(V)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(V')$.

COMMENTAIRES SUR LE CHAPITRE 2

Pour des *exemples* d'équations d'évolution correspondant à la théorie de ce chapitre, cf.

[1] Lions, J. L. — *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites.* Springer. 1961. Collection Jaune, t. III.

— en particulier Chap. VI.

Le Théorème 1.1 (et 1.2) est contenu dans [1], ainsi que la méthode du n.º 2 (Unicité).

La démonstration de l'existence utilise le procédé dit de «*régularisation elliptique*», introduit dans

[2] Lions, J. L. — Cours du CIME. Varenna. Mai 1963.

La démonstration est analogue à celle donnée dans [2], les résultats étant ici un peu plus précisés en ce qui concerne le mode de convergence.

Sur un intervalle *fini* $[0,T)$, on pourra utiliser la méthode de la façon suivante:

$$\hat{V} = \left\{ V \mid V \in L_2(0,T;V) , \quad v' \in L_2(0,T;H) , \quad v(o) = 0 \right\}$$

$$b_\varepsilon(u,v) = \varepsilon \int_0^T (u',v')dt - \int_0^T (u,v')dt + \int_0^T a(t;u,v)dt + (u(T),v(T))$$

Les détails sont laissés au lecteur.

Cette méthode est susceptible de nombreuses variantes (dont l'une, immédiate, est donnée en 3.4.3) utiles en diverses occasions; pour certains systèmes différentiels linéaires. Cf.

[3] Cohn, J.; Nirenberg, L. — Comm. Pure Applied Maths. 1965.

Pour des équations d'évolution non linéaires, cf.

[4] Lions, J. L. — *Singular perturbations and some non-linear boundary value problems. M. R. C.* Univ. of Wisconsin. Octobre 1963.

[5] Lions, J. L. — Simp. Inter. Fisica Mat. Cagliari—Sassari. 1964.

Les résultats du n.º 4 sont démontrés autrement dans [1], Chap. V, n.º 1 à 6; la méthode suivie ici, simple variante de [1], Chap. V, n.º 7, est l'adaptation au cas présent de la méthode de

[6] NIRENBERG, L. — *Remarks on strongly elliptic partial differential equations.* Comm. Pure Applied Maths. 8: 648-674. 1955.

Naturellement, comme il est dit également dans le texte, il y a bien d'autres méthodes de résolution des équations d'évolution, correspondant à des hypothèses différentes sur $A(t)$; consulter en particulier

[7] KATO, T. — Cours CIME, Varenna, Mai 1963.

Il *ne semble pas* que le problème de remplacer dans, par ex., le n.º 4 l'espace L_2 par $L_p, 1 < p < \infty, p \neq 2$, ait été systématiquement abordé; mais il a été étudié lorsque $A(t)$ n'est plus un opérateur abstrait mais un opérateur différentiel; cf. en particulier

[8] SOLONNIKOV, A. — *Evaluations à priori pour les equations du 2ème ordre de type parabolique.* Troudi Stekloff. LXX: 133-212. 1964.

Notons que ce travail correspond à remplacer V (espace de Hilbert) par un espace de Banach (construit sur $L_p(\Omega), \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$). Nous ignorons si l'étude de ces problèmes d'évolution dans les espaces $L_p(o, T; L_q(\Omega)), p, q$ quelconques, a été abordée systématiquement; cela serait, très probablement, utile dans les problèmes non linéaires. Cf. P. Grisvard, C. R. Acad. Sc. Paris, 1965 et 1966.

Pour les conditions aux limites différentielles les plus générales pour les opérateurs paraboliques d'ordre quelconque, cf.

[9] AGRANOVITCH, M. S.; VIŠIK, I. M. — Ouspechi Mat. Nauk, t. XIX (117): 53-161. 1964.

Signalons en passant qu'il serait probablement intéressant d'appliquer aux résultats de [8] et [9] les méthodes de E. Magenes et l'A. (cf. pour bibliographie les Commentaires du Chap. 1). Dans un ordre d'idée voisin, signalons

[10] LIONS, J. L.; MAGENES, E. — C. R. Acad. Sc. Paris. t. 251: 2118-2220. 1960.

[11] LIONS, J. L.; MAGENES, E. — *Sur certains aspects des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs paraboliques.* Annali Scuola Norm. Pisa. 1964.

[12] BAIOCCHI, C. — *Sui problemi ai limiti per le equazioni paraboliche.* Boll. U. M. I. Vol. *19:* 407-422. 1964.

Il est évidemment indiqué *d'interpoler en m entre tous les résultats des* n.º 4 et 5. Cela est esquissé dans [1], Chap. V, n.º 7 (le problème indiqué à la fin de ce n.º n'étant toujours pas résolu, à notre connaissance).

Chapitre 3 — ULTRA-RÉGULARISATION ET SOLUTIONS $\{M_k\}$ — DISTRIBUTIONS DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

1. Espaces $\mathcal{E}_{M_k}(X)$, $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$, ...

1.1 Soit X un espace de Banach et M_k une suite de nombres > 0,

$$k = 1, 2, \ldots$$

Définition 1.1 On désigne par $\mathcal{E}_{M_k}(X)$ l'espace des fonctions $t \to f(t)$ de $\mathbb{R} \to X$, indéfiniment différentiables, telles que, pour tout T fini, il existe c et L, (dépendant de T et de f) tels que

$$\| f^{(k)}(t) \|_X \leqslant c\, L^k M_k\,, \quad \forall k = 0, 1, \ldots\,, \quad \forall t, |t| \leqslant T\,. \tag{1.1}$$

On munit $\mathcal{E}_{M_k}(X)$ de la *topologie suivante.*

Soit d'abord I un intervalle *borné* de $\mathbb{R}$; et soit L_n une suite tendant vers $+\infty$ en croissant; on désigne par $\mathcal{E}_{M_k}^{L_n}(I;X)$ l'espace des $f \in \mathcal{E}(X)$ (indéfiniment différentiables à valeurs dans X) telles qu'il existe une constante c (dépendant de f) avec

$$\| f^{(k)}(t) \|_X \leqslant c\, L_n^k M_k \quad , \quad \forall t \in I \quad , \quad \forall k\,.$$

On munit cet espace des semi-normes usuelles sur $\mathcal{E}(X)$ et de

$$\underset{k \geqslant 0}{sup.} \quad \underset{t \in I}{sup.} \quad \frac{\| f^{(k)}(t) \|_X}{L_n^k\, M_k} \tag{1.2}$$

On pose ensuite

$$\mathcal{E}_{M_k}(I;X) = \bigcup_{L_n} \mathcal{E}_{M_k}^{L_n}(I;X)\,, \tag{1.3}$$

muni de la topologie de limite inductive (d'espace $\mathfrak{J}$). Enfin:

$$\mathcal{E}_{M_k}(X) = \bigcap_{I_n} \mathcal{E}_{M_k}^{L_n}(I_n;X) , \tag{1.4}$$

les I_n formant un recouvrement de $\mathbb{R}$, espace muni de la topologie de limite projective.

Définition 1.2 On pose

$$\mathcal{D}_{+,M_k}(X) = \mathcal{E}_{M_k}(X) \cap \mathcal{D}_{+}(X) , \tag{1.5}$$

espace que l'on munit de la topologie bornée supérieure.

On supposera la suite M_k non quasi-analytique, de sorte que $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (cf. commentaires).

1.2 On fera toujours dans la suite l'hypothèse suivante:

$$\begin{cases} \text{il existe des constantes } d \text{ et } H \text{ telles que} \\ M_{k+1} \leqslant dH^k M_k \qquad \forall\, k \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Il résulte aussitôt de cette hypothèse que si $f \in \mathcal{E}_{M_k}(X)$ (resp. $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$) alors $\frac{df}{dt} \in \mathcal{E}_{M_k}(X)$ (resp. $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$), l'application $f \to \frac{df}{dt}$ étant linéaire *continue* dans les espaces correspondants.

Verifions le

Lemme 1.1 *Soit q fixé, $1 \leqslant q < \infty$. On suppose que* (1.6) *a lieu.*

Alors $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$ coincide (algébriquement) avec l'espace des fonctions f vérifiant:

i) *f est à support limité à gauche;*

ii) *pour tout $T < \infty$, il existe c_1, L_1 tels que*

$$\left(\int_{-\infty}^{T} \| f^{(k)}(t) \|_X^q \, dt \right)^{1/q} \leqslant c_1 L_1^k M_k \ , \ \forall k . \tag{1.7}$$

DÉMONSTRATION

1) Soit $f \in \mathcal{D}_{+,M_k}(X)$ et soit a la limite à gauche de son support;

alors
$$\left(\int_{-\infty}^{T} \left\| f^{(k)}(t) \right\|_X^q dt\right)^{1/q} \leqslant (T-a)^{1/q} \quad sup. \quad \left\| f^{(k)}(t) \right\|_X$$
$$\leqslant (T-a)^{1/q} \, c L^k M_k \quad , \quad \text{d'où (1.7)}$$

2) Soit maintenant f indéfiniment différentiable à valeurs dans X, satisfaisant à (1.7), et soit encore a la limite à gauche de son support; on a:

$$f^{(k)}(t) = \int_a^t f^{(k+1)}(s) ds$$

d'où

$$\left\| f^{(k)}(t) \right\|_X \leqslant (t-a)^{1/q'} \left(\int_a^t \left\| f^{(k+1)}(s) \right\|_X^q ds\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

d'où le résultat suit, en utilisant (1.6).

Considérons maintenant les topologies. On peut munir l'espace $\mathcal{D}_{M_k}^{(L_n)}(-n, +\infty; X)$ des semi-normes:

$$\text{(1.8)} \qquad \underset{k \leqslant 0}{Sup.} \; \frac{1}{L_n^k M_k} \left(\int_{-n}^{T_n} \left\| f^{(k)}(t) \right\|_X^q dt\right)^{1/q}$$

Il résulte de la démonstration de Lemme 1.1 que cela définit sur $\mathcal{D}_{M_k}^{(L_n)}(-n, +\infty; X)$ *la même* topologie que celle considérée initialement.

1.3 *Espace* $\mathcal{D}_{M_k}(X)$

DÉFINITION 1.3 On pose

$$\text{(1.9)} \qquad \mathcal{D}_{M_k}(X) = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}_{M_k}(X) \,, \; \varphi \text{ à support compact}\}.$$

Précisons la topologie dont on munit $\mathcal{D}_{M_k}(X)$.

Soit L fixé; posons:

(1.10) $$\mathcal{D}^{(L)}_{M_k}(-n,n;X) = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}_{M_k}(X) \ , \ \varphi=0 \ \text{ si } \ |t| \geqslant n, \ \text{ et } \ \|\varphi^{(k)}(t)\|_X \leqslant c\,L^k M_k \ \ \forall\, k\,, \ \ c \text{ constante convenable}\}\,.$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\underset{k\geqslant 0}{Sup.} \quad \underset{|t|\leqslant n}{Sup.} \quad \left(\frac{1}{L^k M_k} \left\|\varphi^{(k)}(t)\right\|_X\right)$$

Alors

(1.11) $$\mathcal{D}_{M_k}(X) = \bigcup_n \mathcal{D}^{(L_n)}_{M_k}(-n,n;X) \ , \quad L_n \text{ suite} \to +\infty\,,$$

muni de la topologie ($\mathcal{L}\mathcal{F}$) correspondante.

Comme au Lemme 1.1, on voit que l'on peut munir $\mathcal{D}^{(L)}_{M_k}(-n,n;X)$ de la norme

(1.12) $$\underset{k\geqslant 0}{Sup.} \quad \frac{1}{L^k M_k} \left(\int_{-n}^{n} \left\|\varphi^{(k)}(t)\right\|_X^2 dt\right)^{1/2}.$$

Il est commode pour la suite de remplacer la condition «φ à support compact» par des *inégalités*. Vérifions ceci:

(1.13) la condition nécessaire et suffisante pour que φ, indéfiniment différentiable à valeurs dans X, appartienne à $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ et soit nulle hors de $(-n, +n)$ est qu'il existe une constante c telle que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\,|t|^q \varphi^{(k)}(t)\right\|_X^2 dt\right)^{1/2} \leqslant c\,L^k n^q M_k \quad \forall\, k\,, \quad \forall\, q(q=0,1,\ldots)$$

En effet si φ est nulle hors de $(-n,n)$, alors

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\,|t|^q \varphi^{(k)}(t)\right\|_X^2 dt\right)^{1/2} \leqslant n^q \left(\int_{-n}^{+n} \left\|\varphi^{(k)}(t)\right\|_X^2 dt\right)^{1/2}$$

d'où les inégalités voulues si $\varphi \in \mathcal{D}_{M_k}(X)$.

Réciproquement, soit φ indéfiniment différentiable à valeurs dans X telle que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{|t|}{n}\right)^{2q}\left\|\varphi^{(k)}(t)\right\|_X^2 dt\right)^{1/2} \leqslant c\,L^k M_k \quad \forall\, q\,.$$

Nécessairement $\varphi=0$ si $|t|> n$— et alors, pour $q=0$, il vient

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\varphi^{(k)}(t)\right\|_X^2 dt\right)^{1/2} \leqslant c\,L^k M_k$$

d'où le résultat.

Alors, à toute $\varphi\in\mathcal{D}_{M_k}(X)$ on va faire correspondre la suite double $|t|^q\varphi^{(k)}$ et, à l'aide de l'application

$$\varphi \to |t|^q \varphi^{(q)}\,, \tag{1.14}$$

on va considérer $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ *comme un sous espace d'un espace de suites doubles, dont les éléments* $(|t|^q\varphi^{(k)})$ *sont dans* $L_2(X)$ (notations du Chap. 2).

Définissons donc

$$E=\Big\{e=\{g_{kq}\},\ k=0,1,\dots,q=0,1,\dots\ |\,g_{kq}\in L_2(X)\ \forall\, k,q, \tag{1.15}$$
$$\text{et il existe } c, L, n \text{ tels que } \|g_{kq}\|_{L_2(X)}\leqslant c\,L^k n^q M_k\Big\}.$$

Il est clair que (1.14) applique $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ dans E.

Munissons E de la topologie suivante.

Choisissons une suite $L_n\to+\infty$ et définissons

$$E^{(n)}=\Big\{e\,|\,e=\{g_{k,q}\},\quad \text{tels qu'il existe } c \text{ avec } \|g_{kq}\|_{L_2(X)}\leqslant c\,L_n^k n^q M_k\ \ \forall k,q\Big\}. \tag{1.16}$$

On munit $E^{(n)}$ de la norme

$$\operatorname*{Sup.}_{k,q}\ \frac{1}{L_n^k n^q M_k}\ \left\|g_{kq}\right\|_{L_2(X)}$$

et

$$E=\bigcup_n E^{(n)}$$

de la topologie de limite inductive correspondante.

Alors (on a fait ce qu'il fallait pour ça!) l'espace $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ est isomorphe au sous espace de E image de $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ dans l'application (1.14).

Ce résultat nous sera utile pour établir la structure des *espaces duals.* Notons encore ceci:

(1.17) $\mathcal{D}_{M_k}(X)$ est dense dans $\mathcal{D}(X)$.

2. Espaces $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$, $\mathcal{D}'_{+,M_k}(X)$.

2.1 On supposera pour simplifier que X est un espace de Banach *reflexif*; soit X' son dual fort (on pourrait tout aussi bien considérer les anti-duals). On pose, par définition

$$\mathcal{D}'_{M_k}(X) = \left(\mathcal{D}_{M_k}(X')\right)' \tag{2.1}$$

[On peut montrer que cet espace coincide avec l'espace

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_{M_k};X')$$

des applications linéaires continues de $\mathcal{D}_{M_k} = \mathcal{D}_{M_k}(\mathbb{C})$ dans X', muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de $\mathcal{D}_{M_k}$].

Définition 2.1 $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$ est l'espace des $\{M_k\}$ — *distributions* à valeurs dans X.

D'après (1.17), $\mathcal{D}'(X)$ (dual de $\mathcal{D}(X')$), espace des distributions à valeurs dans X est un sous-espace de $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$.

Voici maintenant la structure de $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$:

Proposition 2.1 *Tout $f \in \mathcal{D}'_{M_k}(X)$ peut se représenter, de façon non unique, sous la forme*:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} f_k \tag{2.2}$$

où

$$f_k \in L_{2,loc}(X) \tag{2.3}$$

$$(2.4) \qquad \sum_{k \geqslant 0} M_k L^k \left(\int_{-n}^{n} \| f_k(t) \|_X^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty \quad \forall L \quad \text{et} \quad \forall n .$$

Réciproquement, tout f de la forme (2.2), *avec* (2.3) (2.4), *représente un élément de $\mathcal{D}'_{M_k}(X)$.*

Si $\varphi \in \mathcal{D}_{M_k}(X')$, le produit scalaire $< f, \varphi >$ est donné par

$$(2.5) \qquad < f, \varphi > = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} < f_k(t) \, , \, \varphi^{(k)}(t) > dt \, ,$$

(où le crochet dans les intégrales désigne le produit scalaire entre X et X').

DÉMONSTRATION

La réciproque est immédiate.

Montrons le théorème direct. Par hypothèse

$$\varphi \rightarrow < f, \varphi >$$

est donc une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_{M_k}(X')$. Considérons l'application (cf. (1.14))

$$\varphi \rightarrow | t |^q \varphi^{(k)} = \pi(\varphi)$$

de $\mathcal{D}_{M_k}(X')$ dans E (E défini par (1.15), en remplaçant X par X') et soit E_0 l'image de $\mathcal{D}_{M_k}(X')$ dans E par π. Alors

$$e_0 \rightarrow < f, \pi^{-1} e_0 >$$

est linéaire continue sur E_0 et, d'après Hahn-Banach, il existe donc $e' \in E'$ telle que

$$< e' \, , e_0 > = < f, \pi^{-1} e_0 > \quad \forall \, e_0 \in E_0$$

i. e.

$$(2.6) \qquad < e', \pi(\varphi) > = < f, \varphi > \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}_{M_k}(X') \, .$$

Mais la structure de E' est connue: tout $e' \in E'$ peut se représenter, de façon non unique, par une suite double

$$e' = \{g_{kq}\} , \tag{2.7}$$

$$g_{kq} \in \big(L_2(X')\big)' = L_2(X) ,$$

telle que

$$\sum_{k,q} L^k n^q M_k \, \| g_{kq} \|_{L_2(X)} < \infty \quad \forall L, \quad \forall n , \tag{2.8}$$

et

$$< e' , \pi\varphi > = \sum_{k,q} \int_{-\infty}^{+\infty} < g_{kq}(t) , | t |^q \varphi^{(k)}(t) > dt . \tag{2.9}$$

Utilisant (2.6), on en déduit le résultat, en posant:

$$f_k = (-1)^k \sum_{q \geqslant 0} | t |^q g_{kq} . \tag{2.10}$$

Vérifions que (2.4) a bien lieu:

$$\left(\int_{-n}^{n} \left\| f_k(t) \right\|_X^2 dt \right)^{1/2} \leqslant \sum_{q \geqslant 0} \left(\int_{-n}^{n} \left\| \, | t |^q g_{kq} \right\|_X^2 dt \right)^{1/2} \leqslant n^q \left\| g_{kq} \right\|_{L_2(X)} .$$

et (2.4) résulte de (2.8).

2.2 On peut définir le *support* des $\{M_k\}$—distributions (vectorielles) comme on le fait pour les distributions vectorielles ordinaires.

De façon générale, il faut alors soigneusement distinguer entre, par ex., les distributions à *support compact* et celles qui sont *scalairement* à support compact. Mais cette distinction est sans object dans le cas, en particulier, des distributions à *valeurs dans un Banach*, — et il en va de même dans le cas des ultra-distributions.

On pose alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}'_{+,M_k}(X) = \big(\mathcal{D}_{-,M_k}(X')\big)' = \{M_k\} \text{ distributions à valeurs} \\ \text{dans } X \text{ et à support limité à gauche,} \end{array} \right. \tag{2.11}$$

$$(2.12)\quad \begin{cases} \mathcal{E}'_{M_k}(X) = (\mathcal{E}_{M_k}(X'))' = \{M_k\} \text{ distributions à valeurs dans} \\ X \text{ et à support compact.} \end{cases}$$

Comme $\mathcal{D}_{M_k}(X') \subset \mathcal{D}_{-,M_k}(X') \subset \mathcal{E}_{M_k}(X')$,

chaque espace étant dense dans le suivant, on a:

$$(2.13)\qquad \mathcal{E}'_{M_k}(X) \subset \mathcal{D}'_{+,M_k}(X) \subset \mathcal{D}'_{M_k}(X) .$$

Le résultat de structure de la Prop. 2.1 s'applique donc; on peut naturellement préciser; par exemple:

Proposition 2.2 *Soit* $f \in \mathcal{D}'_{+,M_k}(X)$; *on peut la représenter (de façon non unique) sous la forme*

$$(2.14)\qquad f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} f_k ,$$

(2.15) $f_k \in L_{2,loc}(X)$, $f_k = 0$ si $t < t_0$ (t_0 indépendant de k).

$$(2.15)\qquad \sum_{k \geq 0} M_k L^k \left(\int_{t_0}^{k} \| f_k(t) \|_X^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty \quad \forall L \quad \text{et} \quad \forall n .$$

Si f *est nulle pour* $t < t_1$ *on peut choisir* $t_0 = t_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ *fixé quelconque.*

Démonstration

On peut, sans diminuer la généralité, supposer le suite M_k logarithmiquement convexe, i. e.

$$(2.16)\qquad M_k^2 \leqslant M_{k-1} M_{k+1} \quad , \quad k \geqslant 1 .$$

Soit $\alpha \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathbb{C}) = \mathcal{E}_{M_k}$, nulle pour $t \leqslant t_0 = t_1 - \varepsilon$, $\alpha = 1$ pour $t \geqslant t_1 - \varepsilon/_2$. Alors $< f, \varphi > = < f, \alpha\varphi > \ \forall \varphi \in \mathcal{D}_{-,M_k}(X')$; d'après la Proposition 2.1, on peut écrire

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} g_k \quad \text{(on écrit } g_k \text{ au lieu de } f_k\text{)} ,$$

d'où

$$<f,\varphi> = \sum_{k=0}^{\infty} < g_k , (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} (\alpha \varphi) > = \sum_{p=0}^{\infty} < (-1)^p f_p , \varphi^{(p)} >$$

où

$$f_p = (-1)^p \sum_{k \geqslant p} (-1)^p \binom{k}{p} \alpha^{(k-p)} g_k \ ;$$

comme

$$| \alpha^{(k-p)}(t) | \leqslant c L^{k-p} M_{k-p} \ ,$$

on a:

$$\sum_{p \geqslant 0} L^p M_p \left(\int_{t_0}^{n} \left\| f_p(t) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{p \geqslant 0} \sum_{k \geqslant p} L^p M_p \binom{k}{p} L^{k-p} M_{k-p} \left(\int_{t_0}^{n} \| g_k(t) \|_X^2 dt \right)^{1/2}$$

$$= c \sum_{k \geqslant 0} L^k \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} M_{k-p} M_p \right) \left(\int_{t_0}^{n} \| g_k(t) \|_X^2 dt \right)^{1/2}$$

Mais d'après (2.16), $M_p M_{k-p} \leqslant M_0 M_k$, donc

$$\leqslant c M_0 \sum_{k \geqslant 0} (2L)^k M_k \left(\int_{t_0}^{n} \| g_k(t) \|_X^2 dt \right)^{1/2}$$

d'où (2.15).

3. Un résultat d'ultra-régularité pour les équations d'évolution du 1er ordre

3.1 *Hypothèses*

Les notations sont celles du Chap. 2. On désignera par $\| \ \|_*$ la norme dans V'.

On suppose que $a(t; u, v)$ est fonction indéfiniment différentiable de $t \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$ et que

$$
(3.1) \quad \begin{cases} \text{pour tout } T < \infty, \text{ il existe } \lambda_T \text{ et } \alpha_T \text{ tels que} \\ Re\ a(t; v, v) + \lambda_T |v|^2 \geqslant \alpha_T \ \|v\|^2, \quad \forall v \in V, \quad |t| \leqslant T . \end{cases}
$$

La fonction $t \to A(t)$ est indéfiniment différentiable de $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(V; V')$. On supposera davantage:

(3.2) $t \to A(t)$ est dans $\mathcal{E}_{M_k}(\mathcal{L}(V; V'))$ (notations du n.º 1).

3.2 Voici maintenant le résultat d'ultra-régularité que nous avions en vue:

THÉORÈME 3.1 *On suppose que* (3.1) (3.2) *ont lieu. On suppose que la suite* M_k *satisfait à* (1.6), *ainsi qu'à la condition suivante:*

(3.3) *il existe une constante* $\bar{c}$ *telle que*

$$
\binom{k}{j} M_{k-j} M_j \leqslant \bar{c}\, M_k , \quad \forall k , \quad \forall j \leqslant k .
$$

Alors $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ *sur* $\mathcal{D}_{+,M_k}(V')$.

La démonstration de ce théorème occupe les points 3.3 et 3.4 ci après.

3.3 Montrons d'abord que $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ dans $\mathcal{D}_{+,M_k}(V')$.

Tout d'abord, grâce, à (1.6), $\dfrac{d}{dt}$ est un opérateur continu de $\mathcal{D}_{+,M_k}(V')$.

On a:

$$
(3.4) \qquad (A(t)u)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A(t)^{(k-j)} u^{(j)}(t) .
$$

Soit T fini quelconque. On a:

$$\| u^{(k)}(t) \| \leqslant c\, L^k M_k \ , \quad \text{pour } |t| \leqslant T$$
$$\|A^{(k)}(t)\|_{\mathcal{L}(V;V')} \leqslant c L^k M_k \ , \quad \text{pour } |t| \leqslant T \ ;$$

donc (3.4) donne:

$$\| \big(A(t)u(t)\big)^k \|_* \leqslant c\, c_1 \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} L_1^{k-j} L^j M_{k-j} M_j \ , \ |t| \leqslant T \ ;$$

utilisant (3.3) (cette hypothèse pourrait être, ici, considérablement affaiblie), il en résulte:

$$\| \big(A(t)u(t)\big)^{(k)} \|_* \leqslant c\, c_1 \bar{c}\, M_k \sum_{j=0}^{k} L_1^{k-j} L^j \ , \ |t| \leqslant T$$

d'où, en particulier

$$\| \big(A(t)u(t)\big)^{(k)} \|_* \leqslant c_2 (L+L_1)^k M_k \ , \quad \forall\, k \ , \ |t| \leqslant T \ . \tag{3.5}$$

Donc $A(t)u \in \mathcal{D}_{+,M_k}(V')$ (étant, évidemment, à support limité à gauche). l'application $u \to A(t)u$ est en outre continue, d'où notre assertion.

3.4 Reste maintenant à démontrer le point essentiel: soit f donné dans $\mathcal{D}_{+,M_k}(V')$ et soit u *la* solution dans $\mathcal{D}_+(V)$ (cf. Chap. 2) de

$$A(t)u + \frac{du}{dt} = f \tag{3.6}$$

Alors $u \in \mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ (et dépend continûment de f dans les espaces correspondants).

Soit t_0 la limite à gauche du support de f; alors t_2 est également la limite à gauche du support de u:

Soit T fini fixé quelconque avec $|t_0| < T$.

Pour montrer que $u \in \mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ il est équivalent de montrer que $e^{\lambda t} u \in \mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ (λ fixé quelconque dans $\mathbb{R}$), puisqu'alors $u = e^{-\lambda t}(e^{\lambda t} u)$, et que la multiplication par $e^{\xi t}$, $\xi \in \mathbb{R}$, est linéaire continue de $\mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ dans lui même.

Donc, changeant u en $e^{\lambda_T t} u$, on voit, d'après (3.1), que l'on peut supposer que

$$Re\ a(t; v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2 \ (\alpha = \alpha_T > 0) \ \ \forall\, v \in V \ , \ |t| \leqslant T \tag{3.7}$$

Pour un peu simplifier la suite, on peut modifier la norme dans V (en une norme équivalente!) de sorte que, au lieu de (3.7), on ait:

$$Re\ a(t; v, v) \geqslant \|v\|^2 . \tag{3.8}$$

Désignons par $\| \quad \|_*$ la norme duale de $\| \quad \|$.

Si v (resp. g) est une fonction à valeurs dans V (resp. V'), on pose:

$$N(v) = \left(\int_{t_0}^{T} \left\| v(t) \right\|^2 dt \right)^{1/2} ,$$

$$N_*(g) = \left(\int_{t_0}^{T} \left\| g(t) \right\|_*^2 dt \right)^{1/2}$$

Nous savons que

$$\| A^{(k)}(t) \|_{\mathcal{L}(V;V')} \leqslant c_1 L_1^k M_k \ , \ |t| \leqslant T \ , \ \forall k \tag{3.9}$$

et que (Lemme 1.1):

$$N_*(f^{(k)}) \leqslant c_2 L_2^k M_k \ , \ \forall k . \tag{3.10}$$

Nous introduisons

$$\begin{cases} \delta = 2c_2 \ , \\ \mathrm{B} = max\left((1 + 2c_1\bar{c})L_1 , L_2\right) . \end{cases} \tag{3.11}$$

Nous allons montrer

$$N(u^{(k)}) \leqslant \delta B^k M_k \quad \forall k , \tag{3.12}$$

ce qui implique (Lemme 1.1) que $u \in \mathcal{D}_{+,M_k}(V)$ (puisque T est quelconque).

On va raisonner par récurrence sur k.

On déduit de (3.6) — en prenant le produit scalaire avec $u(t)$ —

$$2Re\ a\left(t; u(t), u(t)\right) + \frac{d}{dt}\left| u(t) \right|^2 = 2Re\left(f(t), u(t)\right) ;$$

intégrant de t_0 à T, et utilisant (3.8), on en déduit

$$(3.13) \qquad 2\int_{t_0}^{T} \| u(t) \|^2 dt + | u(T) |^2 = 2Re \int_{t_0}^{T} (f(t), u(t))\, dt$$

d'où

$$\int_{t_0}^{T} \| u(t) \|^2 dt = N(u)^2 \leqslant \int_{t_0}^{T} \| f(t) \|_* \| u(t) \| \, dt \leqslant N(u) N_*(f) \quad \text{donc}$$

$$(3.14) \qquad N(u) \leqslant N_*(f)\,.$$

Alors, avec (3.10): $N(u) \leqslant c_2 M_0 = \frac{1}{2}\, \delta M_0$, d'où, en particulier (3.12) pour $k = 0$.

Admettons le résultat par récurrence jusqu'à $k-1$ et démontrons le pour k. On déduit de (3.6), par dérivation (loisible d'aprés le Chapitre 2):

$$(3.15) \qquad A(t) u^{(k)} + \frac{d}{dt}\, u^{(k)} = f^{(k)} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} A^{(k-j)}(t) u^{(j)} = g_k\,.$$

On peut appliquer à cette situation l'inégalité (3.14):

$$(3.16) \qquad N(u^{(k)}) \leqslant N_*(g_k)\,.$$

Mais

$$N_*(g_k) \leqslant N_*(f^{(k)}) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} N_*\big(A^{(k-j)}(t) u^{(j)}\big)\,;$$

Grâce à (3.9),

$$N_*\big(A^{(k-j)}(t) u^{(j)}\big) \leqslant c_1 L_1^{k-j} M_{k-j} N\big(u^{(j)}\big)$$

et grâce à l'hypothèse de récurrence, ceci est $\leqslant c_1 L_1^{k-j} M_{k-j} \delta B^j M_j$.

Alors, utilisant (3.3):

$$\binom{k}{j} N_*\big(A^{(k-j)}(t) u^{(j)}\big) \leqslant \bar{c}\, c_1\, \delta L_1^{k-j} B^j M_k\,.$$

Ceci, joint à (3.10), entraine:

$$N_*(g_k) \leqslant \left[c_2 L_2^k + c_1 \bar{c}\, \delta \sum_{j=0}^{k-1} L_1^{k-j} B^j\right] M_k \,. \tag{3.17}$$

Mais

$$\sum_{j=0}^{k-1} L_1^{k-j} B^j = \frac{B^k - L_1^k}{\dfrac{B}{L_1} - 1} \leqslant \frac{B^k}{\dfrac{B}{L_1} - 1}$$

et comme $L_2 \leqslant B$, on déduit de (3.17):

$$N_*(g_k) \leqslant \left[c_2 \delta^{-1} + c_1 \bar{c} \frac{1}{\dfrac{B}{L_1} - 1}\right] \delta B^k M_k =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + c_1 \bar{c} \frac{1}{\dfrac{B}{L_1} - 1}\right] \delta B^k M_k \,.$$

et grâce au choix de B, $c_1 \bar{c} \dfrac{1}{\dfrac{B}{L_1} - 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$, d'où

$$N_*(g_k) \leqslant \delta B^k M_k \,,$$

ce qui, joint à (3.16) montre (3.12).

La continuité de l'application $f \to u$ résulte des majorations obtenues.

4. Solutions $\{M_k\}$ — distributions des équations d'évolution.

Naturellement, sous les hypothèses du Théorème 3.1, $A^*(t) - \dfrac{d}{dt}$ est un ismorphisme de $\mathcal{D}_{-,M_k}(V)$ sur $\mathcal{D}_{-,M_k}(V')$, par transposition, en en déduit

Théorème 4.1 *Sous les hypothèses du Théorème* 3.1, $A(t) + \dfrac{d}{dt}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_{+,M_k}(V)$ *sur* $\mathcal{D}'_{+,M_k}(V')$.

Par conséquent, pour une $\{M_k\}$—distribution $f \in \mathcal{D}'_{+,M_k}(V')$, il existe une $\{M_k\}$ — distribution $u \in \mathcal{D}'_{+,M_k}(V)$ et une seule, telle que

$$A(t)u + \frac{du}{dt} = f \ .$$

5. Exemples

Prenons

$$M_k = (k!)^{\alpha}, \quad \alpha > 1 \ . \tag{5.1}$$

Alors la suite M_k est non-quasi-analytique (cf. commentaires ci après). La condition (1.6) a lieu, ainsi que (3.3) [on a:

$$\binom{k}{j} M_{k-j} M_j \leqslant M_k \Big]$$

Les résultats des n.º 3 et 4 sont donc valables dans ce cas.

Les espaces $\mathcal{D}_{+,M_k}(X)$ sont, dans ce cas, *des espaces de Gevrey d'ordre* α.

Les $\{M_k\}$ — distributions ont été introduites dans

[1] Roumieu, C. — *Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables.* Journal d'Analyse Math. *X:* 153-192. 1962-63.

M. Roumieu appelle «ultra-distributions» ce que nous appelons ici «$\{M_k\}$ distributions», nous nous sommes écartés de sa terminologie parce que le terme «ultra-distributions» a été antérieurement utilisé, pour désigner *une notion différente*, par

[2] Silva, J. Sebastião e — *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel.* Math. Annalen. 136: 58-96. 1958.

On a considéré ici le cas de fonctions vectorielles, à valeurs dans un espace de Banach X, ce qui n'entraine pas de difficultés nouvelles.

On peut supposer la suite M_k logarithmiquement convexe, i. e.

$$M_k^2 \leqslant M_{k-1} \, M_{k+1} \, , \quad k \geqslant 1 \tag{1}$$

Alors, d'après les résultats de Denjoy-Carleman et de Mandelbrojt, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} < \infty \tag{2}$$

alors la suite M_k est non quasi-analytique, et il existe des fonctions $\rho_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M_k}(\mathbb{R})$ (cas $X = \mathbb{R}$), $\rho_\varepsilon(t) \geqslant 0$, paire, de support $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et telle que $\int \rho_\varepsilon(t)dt = 1$.

Cf.

[3] Carleman, T. — *Les fonctions quasi-analytiques.* Paris. Gauthier-Villars. 1926.

[4] Mandelbrojt, S. — *Séries adhérentes, régularisation des suites. Applications.* Paris. Gauthier-Villars. 1952.

Le n.º 2 donne quelques indications sur les ultra-distributions à valeurs vectorielles. Pour les distributions à valeurs vectorielles, cf.

[5] Schwartz, L. — *Théorie des distributions à valeurs vectorielles, I, II.* Annales Institut Fourier. t. VII: 1-141, 1957; t. VIII: 1-209. 1958.

On a suivi les méthodes de [1], étendues (sans peine) au cas vectoriel et utilisé, dans le résultat de structure des Ultra-distributions vectorielles, les résultats de

[6] Köthe, Gottfried — *Die Stufenräume......* Math. Z. t. 51: 317-345. 1948.

Selon [1] th. 4, p. 103 on ne peut en général prendre $t_0=t_1$, dans la Prop. 2.2, mais c'est possible dans un certain sens, si la suite M_k est logarithmiquement convexe et si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_{k-1}}{M_k} \log\left(\frac{M_k}{M_{k-1}}\right) < \infty .$$

les résultats des n.º 3,4 sont extraits de

[7] Lions, J. L.; Magenes, E. — Annali di Mat. Pura ed Applicata, t. LXVIII: 341-418. 1965.

Dans le cas du problème de Cauchy pour des opérateurs paraboliques, un résultat du type de celui du théorème 3.1 est donné dans

[8] Friedman, A. — *Classes of solutions of linear systems of partial differential equations of parabolic type.* Duke Math. Journal. *24:* 433-442. 1957.

Dans [8], variables d'espace et de temps jouent des rôles analogues; cela est différent du Théorème 3.1.

Pour les opérateurs paraboliques, on peut considérer la situation d'un point de vue analogue à celui du Chapitre I (et alors différent de celui de ce Chapitre!); c'est ce qui a été fait dans

[9] Lions, J. L.; Magenes, E. — *Sur certains aspects des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs paraboliques.* Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa. 1964.

Toujours pour les opérateurs paraboliques, il serait, semble-t-il, intéressant de voir comment on peut étendre les résultats de ce chapitre à la situation de

[9] Commentaires du Chap. 2.

De même serait-il intéressant d'étendre, autant que possible, les résultats des Chapitres 2 et 3, à la situation de [1] (Commentaires Chap. 2). Chapitre VII (complété par les résultats de Kato, T., Tanabe, T. et l'A., Osaka Math. Journal, 1962).

Les résultats de ce chapitre s'étendent, au moins partiellement, à des équations d'évolution du 2ème ordre en $t\left(A(t)+\frac{d^2}{dt^2}\right)$ et à des équations du type Schrödinger, cette dernière situation sera étudiée, dans un travail en préparation de E. Magenes et l'A.

(Date de reception du Manuscrit: Septembre 1964).

SOLUTION OF THE SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR A SINGULAR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE MATHEMATICAL THEORY OF DYNAMICAL ELASTICITY; REFLECTION PRINCIPLES FOR LINEAR ELLIPTIC SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS; AND REMARKS ON THE GENERALIZATION OF BANACH'S PRINCIPLE OF CONTRACTION MAPPINGS

BY

J. B. DIAZ

This page intentionally left blank

SOLUTION OF THE SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR A SINGULAR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE MATHEMATICAL THEORY OF DYNAMICAL ELASTICITY; REFLECTION PRINCIPLES FOR LINEAR ELLIPTIC SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS; AND REMARKS ON THE GENERALIZATION OF BANACH'S PRINCIPLE OF CONTRACTION MAPPINGS

by

J. B. DIAZ *

Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics,
University of Maryland
College Park, Maryland

I

SOLUTION OF THE SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR A SINGULAR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE MATHEMATICAL THEORY OF DYNAMICAL ELASTICITY

1. The singular system of partial differential equations and the corresponding singular Cauchy problem

An important rôle in mathematical physics is played by the so called wave equation, that is, by the partial differential equation (in the n real «space» variables $x_1,\ldots,x_n$ and a single real «time» t):

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{W}$$

* The research of this author was supported in part by the Air Force Office of Scientific Research, under Grant AFOSR 400-64 with the University of Maryland, and in part by the U. S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland. Present Address: University of California, Riverside.

where the second order partial differential operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$ is the Laplacian, and $u(x_1,\ldots x_n,t)$

is a real valued function, the speed of sound having been taken as unity. The theory of the (regular) wave equation (W) is closely connected with the theory of the (singular) second order partial differential equation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t} \frac{\partial u}{\partial t} , \tag{EPD}$$

where k is a parameter. This singular partial differential equation has occurred, for special values of k and n, in many important and classical problems since the time of Euler. (For self contained accounts of the theory of the Euler-Poisson-Darboux equation, (EPD), which has been extensively studied by the Maryland school, reference is made to A. Weinstein [1], [2], J. B. Diaz and H. F. Weinberger [3], J. B. Diaz and G. S. S. Ludford [4], J. B. Diaz [5], for solutions in the classical sense; and to J. L. Lions [6] and R. W. Carroll [7], for solutions in a generalized or «distributional» sense).

Another important rôle in mathematical physics is played by the system of the dynamical equations of elasticity (which will be referred to, for brevity, as the «elasticity system»), that is, the system of partial differential equations:

$$a^2 \Delta u_i + (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \tag{E}$$

$i = 1,\ldots,n$, where the n real functions u_i are the displacements, and the real numbers a^2, b^2 are physical constants. The present discussion originated from a conversation between J. L. Lions and the writer, during which they realized that (essentially) they had asked themselves, in equivalent forms, the following specific question: does there exist a (singular) system of partial differential equations which plays the same part, in the theory of the (regular) elasticity system, as the single (singular) Euler-Poisson-Darboux partial differential equation plays in the theory of the single (regular) wave equation? It is clear that, if such a singular system does exist, then it appears highly desirable to develop its theory, as a counterpart to the known results concerning the single Euler-Poisson-Darboux partial differential equation, or even purely for its own mathematical sake, if nothing else. Accordingly, the following question was formulated explicitly, at the time of the initial conversation: Question I: Is there a singular system of partial differential equations, call it (S), such that (expressed in the familiar geometrical language of proportion ratios) the system (S) is to the regular elasticity system (E) as the (single) singular partial differential equation (EPD) is to the (single) regular partial differential equation (W)? To repeat this question in an obvious symbolical notation: Is there a system (S) such that (S): (E) = (EPD): (W)?

In a sense, question I is not well posed, because it appears, on the one hand, that the choice of the system (S) is, without further detailed specification, largely arbitrary; while, on the other hand, the system

$$a^2\Delta u_i + (b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad i=1,\dots,n,$$

(a system which is obtained merely by replacing $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$, on the right hand side of the elasticity system (E), by $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t}$) presents itself immediately to the mind as a logical candidate for the system (S). But, in order that this system may be truly regarded as a system (S), in the sense of the symbolic proportion (S) : (E) = (EPD) : (W), it must be true that there is «something», in the explicit solution of the singular Cauchy problem for this system:

$$a^2\Delta u_i + (b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t}$$

$$u_i(x_1,\dots,x_n,0)=f_i(x_1,\dots,x_n), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_1,\dots,x_n,0)=0, \; i=1,\dots,n,$$

which plays a rôle exactly analogous to that played by the «peripheral spherical mean value of a single function» in the explicit solution of the singular Cauchy problem for the Euler-Poisson-Darboux equation:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$u(x_1,\dots,x_n,0)=g(x_1,\dots,x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,\dots,x_n,0)=0.$$

This raises the second question, roughly speaking, for the moment, as to just exactly what this «something» really is. In order to arrive at a more precise formulation of this second question in a natural manner, it is appropriate, at this juncture, to recall briefly the pertinent known results concerning the singular Cauchy problem for the Euler-Poisson-Darboux equation (compare, e. g., the references given above, for a more detailed discussion of all the matters under review).

When $k=0$, the (EPD) equation reduces to the wave equation (W), while if $k\neq 0$ then the coefficient k/t occurring in the (EPD) equation is infinite on the «plane» $t=0$. «The» singular Cauchy problem for the (EPD) equation consists in the determination of a solution $u(x_1,\dots,x_n,t)$ of the (EPD) equation which satisfies the following initial conditions on the «singular» plane $t=0$:

$$u(x_1,\dots,x_n,0)=g(x_1,\dots,x_n) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,\dots,x_n,0)=0 \,,$$

where $g(x_1,\dots,x_n)$ is a given function. For k any real number, this problem was first solved by A. Weinstein [1], who employed what he termed the «method of recurrence» and a «generalized method of descent».

It is well known that, for $k=n\text{-}1$, the singular Cauchy problem consisting of the particular (EPD) equation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{n\text{-}1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} \,,$$

i. e., the (EPD) equation with the *particular* value of k taken to be $n\text{-}1$, and the same initial conditions

$$u(x_1,\dots,x_n,0)=g(x_1,\dots,x_n) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,\dots,x_n,0)=0 \,,$$

is given by a generalization of a formula of Poisson:

$$u^{n\text{-}1}(x_1,\dots,x_n,t) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=1} g(x_1+\xi_1 t, x_2+\xi_2 t,\dots,x_n+\xi_n t)\,d\omega_n(\xi) \,,$$

where the exponent $n\text{-}1$ is a reminder that $k=n-1$; $d\omega_n(\xi)$ is the surface element of the unit sphere in real n-dimensional Euclidean space, and $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ is the area of the same sphere, in terms of Euler's gamma function. Using the formula just written, and Hadamard's «method of descent», the following explicit formula for the solution of the singular Cauchy problem for the Euler-Poisson-Darboux equation:

$$u^k(x_1,\ldots,x_n,t) =$$

$$= \frac{\omega_{k+1-n}}{\omega_{k+1}} \int\limits_{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 < 1} g(x_1+\xi_1 t,\ldots,x_n+\xi_n t) \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{k-n-1}{2}} d\xi_1\ldots d\xi_n \ ,$$

may be obtained when k is any positive integer of the infinite sequence n, $n+1$, $n+2,\ldots$. This formula may then be readily verified to give a solution of the singular Cauchy problem for *any* real $k>n-1$ (Notice that the ratio of the ω's is defined for any such k in terms of Euler's gamma function). (This procedure is called by Weinstein the «generalized method of descent»). For $k<n-1$, with $k \neq -1, -3, -5,\ldots$ (the odd negative integers, $-1, -3, -5,\ldots$, play an «exceptional» rôle in the singular Cauchy problem, as was first pointed out by Weinstein [1]), one may obtain a solution of the singular Cauchy problem by *either*: (1) analytic continuation of the last definite integral, with respect to the parameter k, to values of $k<n-1$, as was done by J. B. Diaz and H. F. Weinberger [3], *or else* (2): as was done by Weinstein [1], by employing his «recurrence relations» which relate solutions of the (EPD) equation for various values of the parameter k. Thus, it is clear that the explicit solution of the singular Cauchy problem for the (EPD) equation for the particular value $k=n-1$ is of fundamental importance in order to construct the above described theory of the singular Cauchy problem for the (EPD) equation for an arbitrary value of the parameter k.

Now, the «regular» Cauchy problem for the elasticity system (E) which corresponds, in a natural manner, to the regular Cauchy problem considered above for the wave equation (W), is precisely that which consists in determining a solution, i. e. an n-tuple of functions $u_1(x_1,\ldots,x_n,t),\ldots,u_n(x_1,\ldots,x_n,t)$, which satisfies the elasticity system (E) and at the same time fulfills the initial conditions

$$u_i(x_1,\ldots,x_n,0)=f_i(x_1,\ldots,x_n) \quad ; \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_1,\ldots,x_n,0)=0 \ ,$$

for $i=1,\ldots,n$, where the n functions $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n)$ are given functions. (The Cauchy data now consists of an n-tuple of given functions $f_1,\ldots,f_n$, rather than of a single function g). Supposing that the singular system described before is indeed a singular system (S), of the nature required by question I above, then the system (S) does contain a linear parameter k and a coefficient k/t which is singular on the plane $t=0$. Further, the «singular» Cauchy problem for the system (S) will consist merely in finding a solution $u_1(x_1,\dots,x_n,t),\dots,u_n(x_1,\dots,x_n,t)$ of the singular system which fulfills the same initial conditions just encountered, to wit

$$u_i(x_1,\dots,x_n,0)=f_i(x_1,\dots,x_n) \quad ; \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_1,\dots,x_n,0)=0 \; ,$$

for $i=1,\dots,n$. Still further, when one puts $k=0$ in this particular singular system (S), the singular Cauchy problem for the singular system (S) will reduce to the above described «regular» Cauchy problem for the elasticity system (E), because when $k=0$ the singular system (S) does reduce to the (regular) elasticity system (E).

The second question alluded to above, just after the first question, now poses itself. Presumably, for this particular system (S) there is a «distinguished» value of the parameter k (perhaps it is $n-1$, as for the (EPD) equation) which is fundamental in the solution of the singular Cauchy problem for the particular system (S). For this particular («distinguished») value of k there should be an explicit formula for the solution of the singular Cauchy problem for the system (S), purely in terms of the n given functions $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)$. By analogy with what happens in the singular Cauchy problem for the (EPD) equation, this expected explicit formula for the solution of the singular Cauchy problem for the singular system (S), with the parameter k equal to the «distinguished» value, will be termed, for the time being, the «peripheral spherical mean value of an n-tuple of functions $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)$». Using this terminology, the second question mentioned above may be formulated thus: Question II: What is the explicit formula for the «peripheral spherical mean value of n functions $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)$», and what is the «distinguished» value of the parameter k? The answer to this question, and the explicit solution of the singular Cauchy problem for the singular system (S), which is to appear in full in [8], will be discussed in the next three sections only for the particular «distinguished» value of k.

2. The heuristic process leading to the definition of the «peripheral spherical mean value of n functions»

The procedure which was actually followed in finding an answer to question II will now be presented. The single guiding idea behind the procedure is the special part played, in the solution of the Cauchy problem for the wave equation in three dimensional space, by the «peripheral spherical mean value of a single function $g(x_1,x_2,x_3)$» (see the exposition in Goursat [9, pp. 99-104], for example).

Now, consider the following regular Cauchy problem for the *three* dimensional wave equation (W), i. e.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

plus the initial conditions

$$v(x_1,x_2,x_3,0)=0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x_1,x_2,x_3,0)=g(x_1,x_2,x_3),$$

(notice that here the value g is assigned to the time derivative $\frac{\partial v}{\partial t}$ for $t=0$, and *not* to the function v itself, which is assigned the value 0). The solution $v(g;x_1,x_2,x_3,t)$ of this Cauchy problem, as is well known (see, e. g., Goursat [9], pp. 99-104) is given by the formula

$$v(g;x_1,x_2,x_3,t)=t\ u(g;x_1,x_2,x_3,t),$$

where the function $u(g;x_1,x_2,x_3,t)$ is just the «peripheral spherical mean value» (here, $d\omega_3(\xi)$ is the surface element of the unit sphere whose equation is $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1$):

$$u(g;x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1} g(x_1+\xi_1 t,\ x_2+\xi_2 t,\ x_3+\xi_3 t)d\omega_3(\xi),$$

which is a solution of the singular Cauchy problem (notice that, since $n=3$, here $n-1=2$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2}{t}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$u(x_1,x_2,x_3,0)=g(x_1,x_2,x_3) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,x_2,x_3,0)=0.$$

These formulas can be interpreted as follows: in order to obtain the peripheral spherical mean value $u(g;x_1,x_2,x_3,t)$ of a function $g(x_1,x_2,x_3)$, one first solves the particular regular Cauchy problem for the wave equation which has $v(g;x_1,x_2,x_3,t)$ for solution, and then divides v by t to obtain the peripheral spherical mean value; that is

$$u(g;x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{t}v(g;x_1,x_2,x_3,t)\ .$$

This last equation gives a «recipe» for finding the «peripheral spherical mean value», i e.: first find v, and then divide v by t. Applying this «recipe» (proceeding strictly by analogy) to the system of elasticity, one is led to suppose that the «peripheral spherical mean value of 3 functions $f_1(x_1,x_2,x_3)$, $f_2(x_1,x_2,x_3)$, $f_3(x_1,x_2,x_3)$» consists of the three functions

$u_i(f_1,f_2,f_3;x_1,x_2,x_3,t)=\dfrac{1}{t}v_i(f_1,f_2,f_3;x_1,x_2,x_3,t)$, $i=1, 2, 3$, where the three functions v_i solve the regular Cauchy problem for the elasticity system (E) for $n=3$:

$$a^2\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2}\right]+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}\ ,$$

with the initial conditions

$$v_i(x_1,x_2,x_3,0)=0\quad ;\quad \frac{\partial v_i}{\partial t}(x_1,x_2,x_3,0)=f_i(x_1,x_2,x_3)\ ,$$

for $i=1, 2, 3$ (notice that here the values f_i are assigned to the time derivative $\dfrac{\partial v_i}{\partial t}$ for $t=0$, and *not* to the functions v_i themselves, which are all assigned the value 0). The solution of this last mentioned Cauchy problem, as given in Tedone's ([10], pp. 232-243) paper, may be expressed in the following form, in the standard customary notation of three dimensional vector analysis:

$$(v_1(x_1,x_2,x_3,t),v_2(x_1,x_2,x_3,t),v_3(x_1,x_2,x_3,t))=t(f_1(x_1,x_2,x_3),f_2(x_1,x_2,x_3),f_3(x_1,x_2x_3))$$

$$+\frac{t}{4\pi}\,grad\left\{\int_{\tau=0}^{bt}\left[\int_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1}(f.\xi)d\omega_3(\xi)\right]bd\tau\right\}$$

$$+\frac{t}{4\pi}\,curl\left\{\int_{\tau=0}^{at}\left[\int_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1}(f\times\xi)d\omega_3(\xi)\right]ad\tau\right\}\ ,$$

where $f=(f_1,f_2,f_3)$, for example, denotes the three dimensional vector whose x_1 component is f_1, its x_2 component is f_2, and its x_3 component is f_3, and $t(f_1,f_2,f_3)$ denotes the same vector, but with its components all multiplied by t; the vector differential operator grad $=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ and the vector differential operator curl $f=curl\ (f_1,f_2,f_3)=\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$; the vector f in the integrands is evaluated at the point $(x_1+\xi_1\tau, x_2+\xi_2\tau, x_3+\xi_3\tau)$; the notation $f.\xi$ stands for the three dimensional *scalar* product of the two vectors f and ξ, that is to say $f.\xi=f_1\xi_1+f_2\xi_2+f_3\xi_3$; and, finally, the notation $f\times\xi$ stands for the three dimensional *vector*, or *cross*, product of the two vectors f and ξ, that is to say $f\times\xi=(f_2\xi_3-f_3\xi_2, f_3\xi_1-f_1\xi_3, f_1\xi_2-f_2\xi_1)$. Dividing this formula for $v=(v_1,v_2,v_3)$ by t; which, *luckily*, it seems, occurs as a common factor, one arrives at the *conjecture* that the «peripheral spherical mean value of the 3 functions f_1,f_2,f_3», if it is anything at all, must be precisely the vector function

$$(u_1(x_1,x_2,x_3,t), u_2(x_1,x_2,x_3,t), u_3(x_1,x_2,x_3,t) =$$

$$=(f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3))+grad\left\{\int_{\tau=0}^{bt}\frac{1}{4\pi}\left[\int_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1}(f.\xi)d\omega_3(\xi)\right]d\tau\right\}+$$

$$+\,curl\left\{\int_{\tau=0}^{at}\frac{1}{4\pi}\left[\int_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1}(f\times\xi)d\omega_3(\xi)\right]d\tau\right\}.$$

Moreover, again to judge from the considerations immediately preceding, there is a very strong suspicion that «the distinguished value of the parameter k» is just the number 2 in this particular case under consideration, and that the putative «peripheral spherical mean value of 3 functions f_1,f_2,f_3» is just a solution of the singular Cauchy problem:

$$a^2\Delta u_i+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\frac{2}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t},$$

$$u_i(x_1,x_2,x_3,0)=f_i(x_1,x_2,x_3)\ ;\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_1,x_2,x_3,0)=0\ ,$$

for $i=1, 2, 3$, where $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ is the three dimensional Laplacian. The next step would be, it appears at first glance, the direct verification that the supposed «peripheral spherical mean value of 3 functions f_1,f_2,f_3» does solve the singular Cauchy problem just indicated above.

However, before embarking upon this verification, it should be observed that the supposed «peripheral spherical mean value of 3 functions f_1,f_2,f_3», as defined above, is still linked to the particular number of dimensions (or of functions, i. e., 3) — because of the presence of the *three* dimensional differential operator curl and the three dimensional cross product of two vectors — in such a way that it does not, at first blush, seem to lead in a perfectly straightforward way to the definition of the «peripheral spherical mean value of n functions $f_1,f_2,\ldots,f_n$». For the express purpose of removing this difficulty that the extension of the concept to n functions $f_1,\ldots,f_n$, is not obvious, the above tentative definition of «the peripheral spherical mean value of 3 functions» will now be expressed differently.

In the same notation as will be employed in section 3 below, let $M(g;x_1,x_2,x_3,t)$ denote the «peripheral spherical mean value of the function $g(x_1,x_2,x_3)$», that is

$$M(g;x_1,x_2,x_3,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 = 1} g(x_1+\xi_1 t,\ x_2+\xi_2 t,\ x_3+\xi_3 t)\, d\omega_3(\xi) \ ;$$

and also, let $M_j(g;x_1,x_2,x_3,t)$ denote the «j'th first spherical peripheral moment of the function g» for $j=1, 2, 3$, that is

$$M_j(g;x_1 x_2 x_3,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 = 1} g(x_1+\xi_1 t,\ x_2+\xi_2 t,\ x_3+\xi_3 t)\xi_j\, d\omega_n(\xi) \ ,$$

for $j=1, 2, 3$. Now, the *first component*, $u_1(f_1,f_2,f_3;x_1,x_2,x_3,t)$ of the above supposed expression for the «peripheral spherical mean value of 3 functions f_1,f_2,f_3» is given by the formula

$$u_1(f_1,f_2,f_3;x_1,x_2,x_3,t) = f_1(x_1,x_2,x_3)$$

$$+\int_{\tau=0}^{bt}\left[\frac{1}{4\pi}\int_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1+\xi_1\tau,x_2+\xi_2\tau,x_3+\xi_3\tau)\xi_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\xi_2+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\xi_3\right)d\omega_3(\xi)\right]d\tau$$

$$+\int_{\tau=0}^{at}\left[\frac{1}{4\pi}\int_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\xi_3-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\xi_3\right)d\omega_3(\xi)\right]d\tau$$

$$-\int_{\tau=0}^{at}\left[\frac{1}{4\pi}\int_{\sum_{i-1}^{3}\xi_i^2=1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\xi_2-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\xi_2\right)d\omega_3(\xi)\right]d\tau\ ,$$

since the first component of the cross product of the two vectors curl f and ξ, that is, of the vector (curl $f)\times\xi$, is just $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\xi_3-\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\xi_2$. This formula may be written a bit more concisely in terms of the M_j notation introduced above; one obtains

$$u_1(f_1,f_2,f_3;x_1,x_2,x_3,t)=f_1(x_1,x_2,x_3)$$

$$+\int_{\tau=0}^{bt}\left[\sum_{j-1}^{3}M_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)\right]d\tau$$

$$+\int_{\tau=0}^{at}\left[M_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)-M_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)\right]d\tau$$

$$-\int_{\tau=0}^{at}\left[M_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)-M_3\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)\right]d\tau\ .$$

Now, on the other hand, in order to beautify this formula one must first observe that, for any function $g(x_1,x_2,x_3)$, one has the following obvious identity

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1} g(x_1+\xi_1 t,x_2+\xi_2 t,x_3+\xi_3 t)d\omega_3(\xi)-g(x_1,x_2,x_3)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tau=0}^{t}\frac{\partial}{\partial\tau}\Bigg[\int\limits_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1} g(x_1+\xi_1\tau,x_2+\xi_2\tau,x_3+\xi_3\tau)d\omega_3(\xi)\Bigg]d\tau\ ,$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tau=0}^{t}\Bigg[\int\limits_{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2=1}\Bigg\{\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial g}{\partial x_j}\ (x_1+\xi_1\tau,x_2+\xi_2\tau,x_3+\xi_3\tau)\xi_j\Bigg\}\,d\omega_3(\xi)\Bigg]d\tau\ ;$$

which, in the M, M_j notation, becomes

$$M(g\,;x_1,x_2,x_3,t)-g(x_1,x_2,x_3)$$

$$=\int\limits_{\tau=0}^{t}\Bigg[\sum_{j=1}^{3}M_j\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)\Bigg]d\tau\ .$$

Replacing t by at in this last formula, and also replacing g by f_1, the result is the equation

$$M(f_1\,;x_1,x_2,x_3,at)-f_1(x_1,x_2,x_3)$$

$$=\int\limits_{\tau=0}^{at}\Bigg[M_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)+M_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)$$

$$+M_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\ ;\ x_1,x_2,x_3,\tau\right)\Bigg]d\tau\ ;$$

which, when it is solved for $f_1(x_1,x_2,x_3)$, and the value of $f_1(x_1,x_2,x_3)$ so obtained is substituted into the last formula given above for $u_1(f_1,f_2,f_3;\, x_1,x_2,x_3,t)$, yields simply

$$
\begin{aligned}
u_1(f_1,f_2,f_3;\, x_1,x_2,x_3,t) &= M(f_1;\, x_1,x_2,x_3,at) \\
&+ \int_{\tau=0}^{bt} \Big[\sum_{j=1}^{3} M_j \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} ;\, x_1,x_2,x_3,\tau \Big) \Big] d\tau \\
&- \int_{\tau=0}^{at} \Big[\sum_{j=1}^{3} M_j \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} ;\, x_1,x_2,x_3,\tau \Big) \Big] d\tau\,, \\
&= M(f_1,x_1,x_2,x_3,at) \\
&+ \int_{\tau=at}^{bt} \Big[\sum_{j=1}^{3} M_j \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} ;\, x_1,x_2,x_3,\tau \Big) \Big] d\tau\,.
\end{aligned}
$$

Finally, in view of the equalities (the desire of performing this particular transformation right here was the *actual origin* of the «integration by parts on the unit sphere» lemma which appears as Lemma 3.1 below):

$$
M_j \Big(\frac{\partial g}{\partial x_i} \Big) = M_i \Big(\frac{\partial g}{\partial x_j} \Big)\,,
$$

where $i,j=1,2,3$, which are valid for any function $g(x_1x_{,2},x_3)$, the last formula for v_1 may be rewritten

$$
\begin{aligned}
u_1(f_1,f_2,f_3;\, x_1,x_2,x_3,t) &= M(f_1;\, x_1,x_2,x_3,at) \\
&+ \int_{\tau=at}^{bt} \Big[\sum_{j=1}^{3} M_1 \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_j} ;\, x_1,x_2,x_3,\tau \Big) \Big] d\tau \\
&= M(f_1;\, x_1,x_2,x_3,at) \\
&+ \int_{\tau=at}^{bt} M_1 \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} ;\, x_1,x_2,x_3,\tau \Big) d\tau\,,
\end{aligned}
$$

which is the desired formula for u_1. Although only u_1 has been considered in the computation, it is clear that one must have

$$u_i(f_1,f_2,f_3;x_1,x_2,x_3,t) = M(f_i;x_1,x_2,x_3,at) + \int_{\tau=at}^{bt} M_i(div\ f;x_1,x_2,x_3,\tau)\,d\tau\ ,$$

where $i=1, 2, 3,$ and div $f=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}$. There is no difficulty now in extending this formula from $n=3$ to n arbitrary.

In view of the preceding considerations, the long heuristic quest for the «peripheral spherical mean value of n functions $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n)$» is now at an end, and this desired mean value appears, on purely circumstantial evidence, to be given by the formula

$$u_i(f_1,f_2,\ldots,f_n;x_1,x_2,\ldots,x_n,t) = M(f_i;x_1,x_2,\ldots,x_n,at) + \int_{\tau=at}^{bt} M_i(div\ f;x_1,x_2,\ldots,x_n,\tau)d\tau\ ,$$

where $i=1,2,\ldots,n$; the divergence operator div $f=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}$; and M and M_i are the mean values in n dimensional space as defined in section 3 below, for a function $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$M(g;x_1,x_2,\ldots,x_n,t) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2=1} g(x_1+\xi_1 t,\ldots,x_n+\xi_n t)d\omega_n(\xi)\ ,$$

and

$$M_j(g;x_1,x_2,\ldots,x_n,t) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2=1} g(x_1+\xi_1 t,\ldots,x_n+\xi_n t)\xi_j d\omega_n(\xi)\ ,$$

for $j=1,\dots,n$, with ω_n and $d\omega_n(\xi)$ being the area and the area element, respectively, of the n dimensional unit sphere $\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2=1$. This answers the first part of question II. The second part of question II is answered by: «the distinguished» value of k is the number $n-1$. That is to say, the functions $u_i(f_1,\dots,f_n;x_1,\dots,x_n,t)$, $i=1,\dots,n$, are expected to be a solution of the singular Cauchy problem

$$a^2\Delta u_i+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\frac{n-1}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t},$$

$$u_i(x_1,x_2,\dots,x_n,0)=f_i(x_i,x_2,\dots,x_n);\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_1,x_2,\dots,x_n,0)=0,$$

for $i=1,\dots,n$. But this means that question I has also been completely answered, and that a sought singular system (S) of the nature desired is indeed, as was suspected all along, exactly:

$$a^2\Delta u_i+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t},$$

$i=1,\dots,n$, and that the singular Cauchy problem consists of this system, together with the initial conditions

$$u_i(x_1,x_2,\dots,x_n,0)=f_i(x_1,x_2,\dots,x_n);\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_1,x_2,\dots,x_n,0)=0,\ \text{for}\ i=1,\dots,n\,.$$

3. Notations and auxiliary lemmas

With the heuristic considerations of sections 1 and 2 now out of the way, the present section discusses the prerequisites for an exact formulation and proof, in section 4, of the two intuitive statements that «the distinguished value of the parameter k is $n-1$» and that «the peripheral spherical mean value of n functions $f_1,\dots,f_n$ solves the singular Cauchy problem for the system (S) when k equals precisely $n-1$».

Let n be a positive integer, and R^n be real Euclidean space of n dimensions, with $x=(x_1,\ldots,x_n)$ a typical point of R^n. The Laplacian operator will be denoted, as usual, by Δ:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} .$$

In general, the chief concern will be with *vector* valued functions $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ defined on a subset of R^n and having values in R^n itself, i. e.

$$f(x_1,\ldots,x_n)=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n)) ;$$

or, more briefly, $f=(f_1,\ldots,f_n)$, where each (component) function $f_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=1,\ldots,n$, is real valued. In dealing with such functions, the following notation will be employed:

$$\Delta f=(\Delta f_1,\Delta f_2,\ldots,\Delta f_n) .$$

The *elasticity operator* E will be understood to be

$$E=a^2\Delta+(b^2-a^2) \quad grad\ div ,$$

where a and b are *real* constants; and, as usual, «grad» denotes the gradient operator:

$$grad\ \varnothing=\left(\frac{\partial\varnothing}{\partial x_1},\frac{\partial\varnothing}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial\varnothing}{\partial x_n}\right) ,$$

whenever $\varnothing(x_1,\ldots,x_n)$ is a real valued (differentiable) function, while «div» denotes the divergence operator

$$div\ f=div(f_1,\ldots,f_n)=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j} ,$$

whenever $f=(f_1,\ldots,f_n)$ is a vector valued (differentiable) function. The (physical) constants a^2 and b^2 occurring in the operator E are given, in terms of the Lamè constants of elasticity λ and μ, and the density ρ, by the relations

$$a^2=\frac{\mu}{\rho} , \; b^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho} , \; b^2-a^2=\frac{\lambda+\mu}{\rho} .$$

More explicitly, if $f=(f_1,\ldots,f_n)$ is a twice continuously differentiable vector valued function, then $Ef=((Ef)_1,(Ef)_2,\ldots,(Ef)_n)$ is again a vector valued function, with real components

$$(Ef)_i=a^2\Delta f_i+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}(div\ f)\ .$$

Using the summation convention for repeated indices (over the set of integers $1,2,\ldots,n$), and letting subscripts preceded by a comma denote partial differentiation with respect to the corresponding component of $x=(x_1,\ldots,x_n)$, this last equation may be rewritten, in abbreviated form,

$$(Ef)_i=a^2f_{i,jj}+(b^2-a^2)f_{j,ji}\ ;$$

where, by definition,

$$f_{i,jj}\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}=\Delta f_i\ ,$$

and, by definition,

$$f_{j,ji}\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}div\ f\ .$$

If t is the time, consider the operators L_k defined by

$$L_k\equiv\frac{\partial}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\ ,$$

where k is a real parameter. If $f(x,t)=f(x_1,\ldots,x_n,t)$ is a vector valued function of x and t, that is

$$f(x,t)=(f_1(x,t),f_2(x,t),\ldots,f_n(x,t))\ ,$$

then

$$L_kf=(L_kf_1,L_kf_2,\ldots,L_kf_n)\ ,$$

where $f_1(x_1,\ldots,x_n,t),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_n,t)$ are the n real valued components of f.

In order to treat the singular Cauchy problem for the system (S), certain *surface spherical means* will be employed, which are defined as follows (for the sake of definiteness, it may be supposed at first that the integer $n \geqq 2$; under a suitable interpretation the considerations are also valid when $n=1$):

Surface mean. Let $g(x)=g(x_1,\dots,x_n)$ be a continuous *real* valued function defined on *all* of R^n. If t is any real number, then the *surface mean* $M(g;x,t)$ of the function g is, by definition, the definite integral

$$M(g;x,t) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} g(x+\xi t)d\omega_n(\xi) \ , \tag{3.1}$$

where $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ and $|\xi| = +(\xi_1^2+\dots+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$; the constant $\omega_n=2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ is the surface area of the unit sphere in n dimensional space R^n; and $d\omega_n$ is the surface element of this sphere. Notice that $M(g;x,t)$ is defined and continuous for all x in R^n and any real t, and is an *even* function of t, that is

$$M(g;x,t)=M(g;x,-t) \ . \tag{3.2}$$

Further, if $g(x_1,\dots,x_n)$ has continuous partial derivatives up to and including the order r for all $(x_1,\dots,x_n)$ (briefly: «is of class C^r for all $(x_1,\dots,x_n)$») then $M(g;x_1,\dots,x_n,t)$ is of class C^r for all $(x_1,\dots,x_n,t)$. For $t>0$, and this justifies the use of the name «surface mean», $M(g;x,t)$ is the mean value of the function g over the surface of the sphere with center x and radius $t>0$; since, putting $y=x+\xi t$, one has that

$$\begin{aligned} M(g;x,t) &= \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} g(x+\xi t)d\omega_n(\xi) \ , \\ &= \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=t} g(y)d\Sigma(y) \ , \end{aligned} \tag{3.3}$$

where, in the last surface integral, $d\Sigma(y)=t^{n-1}d\omega_n$ is the surface element of the sphere with center x and radius t, which has as its equation $|y-x|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2=t^2$.

Weighted surface means. Again, let $g(x)=g(x_1,\dots,x_n)$ be a continuous real valued function defined on all of R^n. If $j=1,\dots,n$, and t is any real number, *the* *j'th weighted surface mean of g* («j'th first surface moment» of g), denoted by $M_j(g;x,t)$, will be understood to be the following definite integral-:

$$M_j(g;x,t) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} g(x+\xi t)\xi_j d\omega_n(\xi) \ . \tag{3.4}$$

Notice that, for each $j=1,\dots,n$, the function $M_j(g;x,t)$ is defined and continuous for all $(x_1,\dots,x_n)$ and any real t, and is an *odd* function of t, that is

$$M_j(g;x,t) = -M_j(g;x,-t) \ . \tag{3.5}$$

Further, if $g(x_1,\dots,x_n)$ has continuous partial derivatives up to and including the order r for all $(x_1,\dots,x_n)$ («is of class C^r for all $(x_1,\dots,x_n)$») then $M_j(g;x,t)$ is of class C^r for all $(x_1,\dots,x_n,t)$. For $t>0$, and this justifies the use of the term «weighted surface mean», $M_j(g;x,t)$ is the mean value, with weight $\frac{y_j-x_j}{t}$, of the function g over the surface of the sphere with center x and radius $t>0$; since, putting $y=x+\xi t$, so that $y_j=x_j+\xi_j t$, one has

$$\begin{aligned} M_j(g;x,t) &= \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} g(x+\xi t)\xi_j d\omega_n(\xi) \ , \\ &= \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=t} g(y) \cdot \left(\frac{y_j-x_j}{t}\right) d\Sigma(y) \ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Similarly, if $i=1,\dots,n$ and $j=1,\dots,n$, and t is any real number, the *i,j th weighted surface mean of g* («the i,j th second surface moment of g»), denoted by $M_{ij}(g;x,t)$, will be understood to be the following definite integral:

$$M_{ij}(g;x,t) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} g(x+t)\xi_i\xi_j d\omega_n(\xi) \ . \tag{3.7}$$

The function $M_{ij}(g;x,t)$ is defined and continuous for all $(x_1,\dots,x_n)$ and any real t; is an *even* function of t when $i=j$, and an *odd* function of t when $i\neq j$, and

$$M_{ij}(g;x,t) = M_{ji}(g;x,t) \ . \tag{3.8}$$

Further, if $g(x)$ is of class C^r for all x, then $M_{ij}(g;x,t)$ is of class C^r for all x,t. For $t>0$, and this justifies the use of the term «weighted surface mean», $M_{ij}(g;x,t)$ is the mean value, with «weight» $\frac{y_i-x_i}{t} \cdot \frac{y_j-x_j}{t}$, of the function g over the surface of the sphere with center x and radius $t>0$, that is

$$\begin{aligned} M_{ij}(g;x,t) &= \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} g(x+\xi t)\xi_i\xi_j d\omega_n(\xi) , \\ &= \frac{1}{\omega_n t^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=t} g(y) \left(\frac{y_i-x_i}{t}\right)\left(\frac{y_j-x_j}{t}\right) d\Sigma(y) . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Section 3 of J. B. Diaz and J. L. Lions [8] contains several fundamental properties of the mean values M, M_j, M_{jk}. Besides their use for later considerations, these results appear to be of interest in themselves. A few of the results are not new, for example, the Euler-Poisson-Darboux partial differential equation of corollary 3.6, but the systematic unified presentation of all these basic properties of the various mean values is essential for the purposes of [8]. In the present exposition, use will be made of these mean value properties in section 4. For this reason, the present section 3 will conclude with detailed statements, without proofs, of relevant results from section 3 of [8], to which a general reference is made for the complete proofs.

The initial lemma 3.0 determines the values, for $t=0$, of M, M_j, M_{jk}, and their x and t partial derivatives:

LEMMA 3.0. (0) Suppose that the real valued function $g(x_1,\ldots,x_n)$ is of class C for all $(x_1,\ldots,x_n)$. Then

$$M(g;x,0)=g(x) .$$

If, further, g is of class C^1, then

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M(g;x,0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) ,$$

for $i=1,\ldots,n$, and

$$\frac{\partial}{\partial t} M(g;x,0)=0 .$$

(1) Suppose that the real valued function $g(x_1,\ldots,x_n)$ is of class C for all $(x_1,\ldots,x_n)$. Then

$$M_j(g;x,0)=0 ,$$

for $j=1,\ldots,n$; and

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_j(g;x,0)=0$$

for $i,j=1,\ldots,n$. If, further, g is of class C', then

$$\frac{\partial}{\partial t} M_j(g;x,0) = \frac{1}{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} (x) .$$

(2) Suppose that the real valued function $g(x_1,\ldots,x_n)$ is of class C for all $(x_1,\ldots,x_n)$. Then

$$M_{jk}(g;x,0) = \begin{cases} 0 , \ \mathit{if}\ j\neq k , \\ \dfrac{1}{n}\, g(x) , \ \mathit{if}\ j=k , \end{cases}$$

for $j,k=1,\ldots,n$. If, further, g is of class C', then

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk}(g;x,0) = \begin{cases} 0 , \ \mathit{if}\ j\neq k , \\ \dfrac{1}{n} \dfrac{\partial g}{\partial x_i} (x) , \ \mathit{if}\ j=k , \end{cases}$$

for $i,j,k=1,\ldots,n$, and

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{jk}(g;x,0)=0 .$$

Lemma 3.1. furnishes a formula for «integration by parts» on the unit sphere, which is needed for the derivation of the subsequent lemmas:

Lemma 3.1. Suppose that the real valued function $g(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ is of class C' for all $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Then

$$\int\limits_{|\xi|=1} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \cdot \xi_j d\omega_n(\xi) = \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \cdot \xi_i d\omega_n(\xi) ,$$

for every i, $j=1,\ldots,n$.

The equality of lemma 3.1 is to be compared with the «identité curieuse» of Ghermanescu ([11], p. 290, equation (1.7)), which contains as a special case (when the domain of integration is the unit sphere) the result of lemma 3.1. Notice also the related considerations of F. John ([12], p. 135) (the equality of lemma 3.1 can be obtained by putting $r=1$ and choosing the $a_i(x)$ in a particular way in equation (7.27) on page 135 of John's book).

Lemmas 3.2, 3.3, 3.4, and 3.5 give formulas for the first order partial derivatives of the four mean values M, M_j, M_{jk}, and M_{jkl}, respectively:

LEMMA 3.2. Suppose that the real valued function $g(x_1,\dots,x_n)$ is of class C' for all $(x_1,\dots,x_n)$. Then

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M(g;t) = \frac{\partial}{\partial t} M_i(g;t) + \frac{n-1}{t} M_i(g;t) ,$$

for $i=1,\dots,n$, and $t\neq 0$; where the abbreviated notation $M_j(g;t)$, for example, stands for $M_j(g;x,t)$, the dependence upon x being understood. (This abbreviated notation will be employed in the sequel, wherever deemed convenient.)

LEMMA 3.3. Suppose that the real valued function $g(x_1,\dots,x_n)$ is of class C' for all $(x_1,\dots,x_n)$. Then

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_j(g;t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{t} \right) M_{ij}(g;t) - \frac{1}{t} M(g;t)\delta_{ij} ,$$

for $i,j=1,\dots,n$, and $t\neq 0$; where δ_{ij} is the usual Kronecker delta, having value one when $i=j$ and value zero when $i\neq j$.

LEMMA 3.4. Suppose that the real valued function $g(x_1,\dots,x_n)$ is of class C' for all $(x_1,\dots,x_n)$. Then

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk}(g;t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n+1}{t} \right) M_{ijk}(g;t)$$

$$- \frac{1}{t} M_j(g;t)\delta_{ik} - \frac{1}{t} M_k(g;t)\delta_{ik} ,$$

for $i,j,k=1,\dots,n$, and $t\neq 0$; and where, by definition (compare the definitions (3.1), (3.4) of M and M_i, respectively)

$$M_{ijk}(g;t)=M_{ijk}(g;x,t)$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} g(x+\xi t)\xi_i\xi_j\xi_k d\omega_n(\xi)\ ,$$

for $i,j,k=1,\dots,n$.

LEMMA 3.5. Suppose that the real valued function $g(x_1,\dots,x_n)$ is of class C' for all $(x_1,\dots,x_n)$. Then

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M_{jkl}(g;t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n+2}{t}\right) M_{ijkl}(g;t)$$

$$-\frac{1}{t} M_{jl}(g;t)\delta_{ik}-\frac{1}{t} M_{jk}(g;t)\delta_{il}-\frac{1}{t} M_{kl}(g;t)\delta_{ij}\ ,$$

for $i,j,k,l=1,\dots,n$, and $t\neq 0$; and where, by definition (compare the definition of M_{ijk} in lemma 3.4)

$$M_{ijkl}(g;t)=M_{ijkl}(g;x,t)=$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} g(x+\xi t)\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l d\omega_n(\xi)\ ,$$

for $i,j,k,l=1,\dots,n$.

Lemmas 3.6, 3.7 and 3.8 yield formulas for the second order partial derivative $\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$ of the three mean values M, M_k, M_{kl}, respectively.

LEMMA 3.6. Suppose that the real valued function $g(x_1,\dots,x_n)$ is of class C^2 for all $(x_1,\dots,x_n)$. Then

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} M(g;t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n(n-2)}{t^2}\right)M_{ij}(g;t)-\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n-2}{t}\right)M(g;t)\delta_{ij}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n-1}{t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n}{t}\right)M_{ij}(g;t)-\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n-2}{t}\right)M\delta_{ij},$$

for $i,j=1,\dots,n$, and $t\neq 0$.

Corollary 3.6. Under the same hypotheses as lemma 3.6, one has

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} M(g;x,t) \equiv \Delta M(g;x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right) M(g;x,t)$$

for $t \neq 0$ and all x, which is the fundamental singular partial differential equation (the Euler-Poisson-Darboux equation) satisfied by the mean value function $M(g;x,t)$.

Lemma 3.7. Suppose that the real valued function $g(x_1,\ldots,x_n)$ is of class C^2 for all $(x_1,\ldots,x_n)$. Then

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} M_k(g;t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2n+1}{t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{n^2-1}{t^2}\right) M_{ijk}(g;t)$$

$$-\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n-1}{t}\right)\left[M_i(g;t)\delta_{jk} + M_j(g;t)\delta_{ik} + M_k(g;t)\delta_{ij}\right]$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n+1}{t}\right) M_{ijk}(g;t)$$

$$-\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n-1}{t}\right)\left[M_i(g;t)\delta_{jk} + M_j(g;t)\delta_{ik} + M_k(g;t)\delta_{ij}\right],$$

for $i,j,k=1,\ldots,n$, and $t \neq 0$.

Corollary 3.7. Under the same hypotheses as lemma 3.7, one has

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} M_k(g;x,t) \equiv \Delta M_k(g;x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{n-1}{t^2}\right) M_k(g;x,t),$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(M_k(g;x,t)) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n-1}{t} \cdot M_k(g;x,t)\right),$$

where $k=1,\ldots,n$, for $t \neq 0$ and all x, which is the fundamental singular partial differential equation satisfied by each of the n «peripheral first moment functions» $M_k(g;x,t), k=1,\ldots,n$.

It appears to be worthy of notice that this singular partial differential equation bears a close relationship to the Euler-Poisson-Darboux partial differential equation, for, upon dividing both sides by $t \neq 0$, the last equation may be rewritten thus

$$\Delta \frac{M_k(g;x,t)}{t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n+1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{M_k(g;x,t)}{t}\right)$$

for $k=1,\dots,n$.

Lemma 3.8. Suppose that the real valued function $g(x_1,\dots,x_n)$ is of class C^2 for all $(x_1,\dots,x_n)$. Then

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} M_{kl}(g;t) = & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2n+3}{t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(n+2)n}{t^2}\right) . \, M_{ijkl}(g;t) \\
& - \frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{t}\right)[M_{jl}(g;t)\delta_{ik} + M_{jk}(g;t)\delta_{il} + M_{kl}(g;t)\delta_{ij} + \\
& \qquad + M_{ik}(g;t)\delta_{jl} + M_{il}(g;t)\delta_{jk}] \\
& + \frac{1}{t^2} M(g;t)[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] \\
= & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n+1}{t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n+2}{t}\right) M_{ijkl}(g;t) \\
& - \frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{n}{t}\right)[M_{jl}(g;t)\delta_{ik} + M_{jk}(g;t)\delta_{il} + M_{kl}(g;t)\delta_{ij} + \\
& \qquad + M_{ik}(g;t)\delta_{jl} + M_{il}(g;t)\delta_{jk}] \\
& + \frac{1}{t^2} M(g;t)[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] ,
\end{aligned}$$

for $i,j,k,l=1,\dots,n$, and $t \neq 0$.

COROLLARY 3.8. Under the same hypotheses as lemma 3.8, one has

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} M_{kl}(g;x,t) \equiv \Delta M_{kl}(g;x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2n}{t^2}\right) M_{kl}(g;x,t) +$$

$$+ \frac{2}{t^2} M(g;x,t)\delta_{kl} \ ,$$

where $k,l=1,\ldots,n$, for $t\neq 0$ and all x.

It appears to be worthy of notice that the n^2 weighted second order spherical surface means of g, the n^2 functions $M_{kl}(g;x,t)$, where $k,l=1,\ldots,n$ (which are of class C^2 in (x,t) when g is of class C^2 for all x) are a solution of the singular Cauchy problem consisting of the singular *system* of n^2 partial differential equations (which arises from the last equation merely upon replacing $M(g;x,t)$ by $\sum_{i=1}^{n} M_{ii}(g;x,t)$):

$$\Delta M_{kl}(g;x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2n}{t^2}\right) M_{kl}(g;x,t) + \frac{2}{t^2}\sum_{i=1}^{n} M_{ii}(g;x,t)\delta_{kl}$$

for $k,l=1,\ldots,n$, for $t\neq 0$ and all x, plus the following initial conditions (see lemma 3.0):

$$M_{kl}(g;x,0) = \frac{1}{n}\, g(x)\delta_{kl} \ , \quad \frac{\partial}{\partial t} M_{kl}(g;x,0) = 0 \ ,$$

for $k,l=1,\ldots,n$, for all x on the «plane» $t=0$, which is a «singular» plane for the system of partial differential equations.

Finally, lemma 3.9 contains a singular system of partial differential equations which is satisfied by certain n linear combinations of the M_{ij} and M. This special and, at first glance, totally unrelated result is employed at a crucial point in part (B) of section 4, in the direct verification of the formula for the solution of the singular Cauchy problem for the particular value $n-1$ of the parameter k, for the system (S). This special result is included in section 3 in order not to interrupt the continuity of the argument during the course of part (B) of section 4.

LEMMA 3.9. Suppose that the n real valued functions $f_1(x_1,\dots,x_n)$, $f_2(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)$ are of class C^2 for all $(x_1,\dots,x_n)$, and define, for $i=1,\dots,n$, the functions $\varphi_i(f_i,\dots,f_n;x_1,\dots,x_n,t)=\varphi_i(x_1,\dots,x_n,t)$ by means of the equation

$$\varphi_i(f_1,\dots,f_n;x_1,\dots,x_n,t)=n\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f_j;x,t)-M(f_i;x,t)$$

for any (x,t). Then, for $t\neq 0$ and all x, one has

$$\frac{1}{t}\Delta\varphi_i=\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{n}{t^2}\varphi_i+\frac{1}{t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right],$$

for $i=1,\dots,n$, which is a system of n «singular» partial differential equations satisfied by the n functions $\varphi_1,\dots,\varphi_n$.

4. Solution of the singular Cauchy problem for $k=n-1$. Existence theorem.

The purpose of the present section is to prove the following existence theorem for the solution, in the «classical» sense, of the singular Cauchy problem for the singular system of partial differential equations (S), in the special case when the parameter k has the particular value $n-1$. It is to be noticed (see the introductory section 1) that the explicit solution to be given here of the singular problem for the singular system (S) is the «analogue», in the theory of the singular system (S), of the peripheral spherical mean value $M(g;x,t)$ — see equation (3.1) for the definition of M — in the theory of the Euler-Poisson-Darboux partial differential equation

$$\Delta u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)u\,. \tag{4.1}$$

Because, when the real valued function g is of class C^2 for all x, then the spherical mean value function $M(g;x,t)$ is of class C^2 for all x,t, and is a solution of the singular Cauchy problem consisting of the singular partial differential equation (4.1), *with* $k=n-1$, for $t\neq 0$ and all x, plus the initial conditions

$$u(x,0)=g(x)\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,, \tag{4.2}$$

on the singular «plane» $t=0$, for all x. Thus, the solution to be given explicitly below, appears to be, loosely speaking, a certain sort of «peripheral spherical mean value» of a vector valued function $f=(f_1,\ldots,f_n)$. The solution, in the «classical» sense, of the singular system (S), will be sought here explicitly for all t, $-\infty<t<+\infty$, as was done in J. B. Diaz and G. S. S. Ludford ([4], pp. 73-81) for the classical solutions of the Euler-Poisson-Darboux equation (EPD).

THEOREM 4.1. Suppose that the vector valued function $f(x)$ is of class C^2 for all $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Let the vector valued function $u(x,t)$ be defined for all (x,t), in terms of the vector valued function f, by means of the formula

$$u_i(f;x,t)=M(f_i;x,at)+\int_{\tau=at}^{bt} M_i(div\, f;x,\tau)d\tau \ , \tag{4.3}$$

for $i=1,\ldots,n$, where $u_i(f;x,t)\equiv u_i(f_1,\ldots,f_n;x,t)$, of course, and the mean values M and M_i are defined by (3.1) and (3.4), respectively. This vector valued function $u(x,t)$ is of class C^2 for all $(x,t)=(x_1,\ldots,x_n,t)$; it is a solution of the singular system of partial differential equations (S), with the parameter $k=n-1$:

$$Eu=L_{n-1}u \ , \tag{4.4}$$

for $t\neq 0$ and all x; and satisfies the initial conditions

$$u(x,0)=f(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \ , \tag{4.5}$$

for all x. Further for $t=0$, and any x, the function $u(x,t)$ satisfies the system of partial differential equations

$$Eu=n\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ . \tag{4.6}$$

(Since, as pointed out above, in the introduction, the right hand side of (4.3) is a sort of a «spherical mean» of the vector valued function f, it seems of some interest to record here the definition (4.3) of u without the intervention of the letters M and M_i, but only as a sum of definite integrals taken over the unit sphere:

$$
\begin{aligned}
u_i(f;x,t) &= \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} f_i(x+\xi\, at)\, d\omega_n(\xi) + \\
&+ \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\tau=at}^{bt} \left\{ \int\limits_{|\xi|=1} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x+\xi\tau) \right] \xi_i\, d\omega_n(\xi) \right\} d\tau \,.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Proof. The argument will be divided into two parts, (A) and (B), each of which furnishes a complete proof of the theorem, each of interest in itself, but proceeding along different lines. In part (A) it is assumed at the outset that the vector function f is of class C^3 rather than C^2, and then the argument is completed in part (B) by means of a «Weierstrass approximation theorem» procedure. It turns out that the additional smoothness assumption on f, that f is of class C^3, simplifies the calculations somewhat in part (A). In part (B) it is only assumed, from the start, that f is of class C^2. The calculations are a bit more involved in part (B), but the verification again follows directly upon employing some of the lemmas from section 3.

Part (A). Suppose first that the vector function f is of class C^3 for all x. Then equation (4.3) clearly defines a function u which is of class C^2 for all (x,t), in view of the definitions (3.1) of M and (3.4) of M_i (see (4.7)). Further, since M is *even* in t (see (3.2)), and M_i is *odd* in t, it follows from (4.3), (4.7) that u is *even* in t:

$$u(f;x,t)=u(f;x,\ -t)\ . \tag{4.8}$$

Since u is of class C^2 in x and t (that f be only of class C^2, which would imply that u is of class C^1 only, would be enough for this initial condition) it follows from (4.8) that $\dfrac{\partial u}{\partial t}(f;x,0)=0$, and the second initial condition of (4.5) is indeed fulfilled. As to the first initial condition of (4.5), it follows at once from the definition (3.1) of M (here, that f be of class C^1 would suffice for this particular result) that

$$u_i(f;x,0)=M(f_i,x,0)=f_i(x)\ ,$$

for $i=1,\dots,n$, and the first initial condition of (4.5) is also fulfilled. It remains only to verify that u satisfies the singular system (4.4) for $t\neq 0$; since this, together with the fact that u is of class C^2 for all (x,t), *and* the fact that u satisfies the second initial condition, $\frac{\partial u}{\partial t}(f;x,0)=0$, of (4.5), immediately implies (4.6). (For an application of the same argument in the classical solution case of the Euler-Poisson-Darboux equation (4.1) see J. B. Diaz and G. S. S. Ludford ([4], pp. 73-81). Taking the derivative with respect to t of (4.3) yields

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(f;x,t)=\frac{\partial}{\partial t}M(f_i;at)+bM_i(div\, f;bt)-aM_i(div\, f;\, at)\ . \tag{4.9}$$

It should be recalled that, in (4.9), as usual, $\frac{\partial}{\partial t}M(f_i;at)$ stands for the partial derivative with respect to t, at the point (x,t), of the function whose value at each point (x,t) is the number $M(f_i;x,at)$, that is to say, for the following limit:

$$\frac{\partial}{\partial t}M(f_i;x,at)=\lim_{h\to 0}\frac{M(f_i;x,a(t+h))-M(f_i;x,at)}{h}$$

and that, if $a\neq 0$, as will be of use below, then

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}M(f_i;x,at)&=a\lim_{h\to 0}\frac{M(f_i;at+ah)-M(f_i;at)}{ah}\\&=a\lim_{H\to 0}\frac{M(f_i;at+H)-M(f_i;at)}{H}\ .\end{aligned}$$

Differentiating (4.9) with respect to t now gives

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(f;x,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}M(f_i;at)+b\frac{\partial}{\partial t}M_i(div\, f;bt)-a\frac{\partial}{\partial t}M_i(div\, f;at)\,. \tag{4.10}$$

Formulas for $L_{n-1}u_i$, for $(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div} u$, and for $a^2\Delta u_i$ will now be derived; these are, respectively, equations (4.12), (4.16) and (4.19) below. It should be observed that, in the derivation of equations (4.12) and (4.16), only the fact that the function f is of class C^2 will be used. It is *only* in the deduction of equation (4.19) that the extra hypothesis that the function f is of class C^3 enters. This remark will be employed in part (B) of the proof of the present theorem.

First, from (4.9) and (4.10), one computes $L_{n-1}u_i$ for $t\neq 0$:

$$
\begin{aligned}
L_{n-1}u_i(f;x,t) &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t}, \\
&= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} M(f_i;at) + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} M(f_i;at)\right] \\
&+ b\left[\frac{\partial}{\partial t} M_i(div\ f;bt) + \frac{n-1}{t} M_i\,(div\ f;bt)\right] \\
&- a\left[\frac{\partial}{\partial t} M_i(div\ f;at) + \frac{n-1}{t} M_i(div\ f;at)\right].
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

(It should be noticed that if $a=0$ then the first and third terms on the right hand side of (4.11) are zero, while if $b=0$ then the middle term on the right hand side is zero). In view of the Euler-Poisson-Darboux equation of corollary 3.6 (notice that all that is needed for this is that f be of class C^2), equation (4.11) becomes

$$
\begin{aligned}
L_{n-1}u_i(f;x,t) &= a^2\Delta M(f_i;at) \\
&+ b\left[\frac{\partial}{\partial t} M_i(div\ f;bt) + \frac{n-1}{t} M_i(div\ f;bt)\right. \\
&- a\left[\frac{\partial}{\partial t} M_i(div\ f;at) + \frac{n-1}{t} M_i(div\ f;at)\right],
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

with the same provisos concerning a and b. It should be noticed that what is being used here is just that if the function $w(x,t)$ satisfies, for $t\neq 0$, the partial differential equation

$$\Delta w(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) + \frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t} w(x,t),$$

and, by definition, the function z is defined by the equation $z(x,t)\equiv w(x,ct)$, where $c\neq 0$ is a real constant; then, since (see the considerations following equation (4.9))

$$\Delta w(x,ct) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,ct) + \frac{n-1}{ct}\frac{\partial}{\partial t} w(x,ct),$$

it follows that

$$\Delta z(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,z(x,t) + \frac{n-1}{ct}\,\cdot\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,z(x,t)\ ,$$

and

$$\Delta z(x,t) = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,z(x,t) + \frac{n-1}{t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,z(x,t)\right].$$

Next, one computes $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}(f;x,t)$. From the definition (4.3) of u_j one has that (see the definition (3.1) of M, the definition (3.4) of M_j, and notice that

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\,M_j\left(div\ f;\tau\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}\,M(div\ f,\tau))$$

the following equation holds:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= M(div\ f;at) + \int_{\tau=at}^{bt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\,M_j(div\ f;\tau)d\tau\ ,\\ &= M(div\ f;at) + \int_{\tau=at}^{bt}\frac{\partial}{\partial \tau}\,M(div\ f;\tau)d\tau\ , \qquad (4.13)\\ &= M(div\ f;at) + \left[M(div\ f;\tau)\right]_{at}^{bt},\\ &= M(div\ f;bt)\ .\end{aligned}$$

Therefore (notice that only the hypothesis that f is of class C^2 is used in this computation):

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,M(div\ f;bt)\ ; \qquad (4.14)$$

which, in view of lemma 3.2 (again, only the fact that f is in C^2 is used), becomes, for $t\neq 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t} M_i(div\, f; bt) + \frac{n-1}{bt} M_i(div\, f; bt) \tag{4.15}$$

for $b\neq 0$ (if $b=0$ then the right hand side of (4.13) equals zero and also that of (4.14) and (4.15)). (It should be noticed that, in the application just made of lemma 3.2, one employs the fact that, if $c\neq 0$, then,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} M(g; ct) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} M_j(g; ct) + \frac{n-1}{ct} M_j(g; ct) ,$$

because (see the considerations immediately following equation (4.9)), here

$$\frac{\partial}{\partial t} M_j(g; ct) = \lim_{h\to 0} \frac{M_j(g; c(t+h)) - M_j(g; ct)}{h} .$$

Thus, finally,

$$(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i} div\, u = (b^2-a^2)\left[\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t} M_i(div\, f; bt) + \frac{n-1}{bt} M_i(div\, f; bt)\right]. \tag{4.16}$$

Lastly, one computes $a^2\Delta u_i(f; x,t)$. From the definition (4.3) of u_i one has that (it is here that the hypothesis that f is of class C^3 is first really used, notice the integrand in (4.17))

$$\Delta u_i(f; x,t) = \Delta M(f_i, at) + \int_{\tau=at}^{bt} \Delta M_i(div\, f; \tau)\, d\tau \;; \tag{4.17}$$

which, in view of the singular partial differential equation satisfied by M_k, see corollary 3.7, may be rewritten as follows

$$\begin{aligned}\Delta u_i(f; x,t) &= \Delta M(f_i, at) + \int_{\tau=at}^{bt} \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} M_i(div\, f; \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{n-1}{\tau} M_i(div\, f; \tau)\right)\right] d\tau , \\ &= \Delta M(f_i; at) + \left[\frac{\partial}{\partial \tau} M_i(div\, f; \tau) + \frac{n-1}{\tau} M_i(div\, f; \tau)\right]_{at}^{bt} .\end{aligned} \tag{4.18}$$

Therefore (recall the considerations following equation (4.9)):

$$
\begin{aligned}
a^2\Delta u_i(f;x,t) &= a^2\Delta M(f_i;at)+\\
&+a^2\left[\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t}M_i(div\,f;bt)+\frac{n-1}{bt}M_i(div\,f;bt)\right]\\
&-a^2\left[\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}M_i(div\,f;at)+\frac{n-1}{at}M_i(div\,f;at)\right].
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

The desired conclusion, equation (4.4):

$$
a^2\Delta u_i+(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}(div\ u)=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\frac{n-1}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t}\,, \tag{4.20}
$$

for $i=1,\dots,n$, now follows immediately from equation (4.12), which gives $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\frac{n-1}{t}\frac{\partial u_i}{\partial t}=L_{n-1}u_i$; equation (4.16), which gives $(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}div\ u$; and equation (4.19), which gives $a^2\Delta u_i$. This completes the proof that, when the function $f(x)$ is of class C^3 for all x, then the function $u(f;x,t)$, defined in terms of f by means of (4.3), is a solution of the singular system of partial differential equations (4.4) for $t\neq 0$ and all x.

PART (B). Suppose now that f is only of class C^2 for all x. The proof of the theorem may now be completed in *two* different ways, both based on the argument given in part (A) above. First, and the idea will only be *sketched* here, one may use what essentially amounts to employing Weierstrass' theorem on the approximation of continuous functions by polynomials. That is, one may deduce the desired result for f in C^2 by «approximating» f and its partial derivatives by a suitable sequence of functions of class C^3 (for each of which the desired conclusion holds, by part (A) above) and then «passing to the limit». In the second place, and this will be carried out here in detail, since it is of interest in itself, one may seek to verify (4.20) directly, now using only the hypothesis that f is of class C^2.

As was remarked in part (A) above, equation (4.12) for $L_{n-1}u_i$, and equation (4.16) for $(b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_i}div\ u$, remain valid, with the same argument given in part (A), under the sole hypothesis that f is of class C^2. Therefore, since the desired equation (4.20) follows immediately from (4.12), (4.16) and (4.19), it only remains, in order to complete the present direct deduction of (4.20), to prove that (4.19) itself still holds under the sole hypothesis that f is of class C^2.

In part (A), in the argument leading to (4.19), the hypothesis that f is of class C^3 was explicitly employed in obtaining (4.17) from the definition (4.3) of u, and also in applying the singular partial differential equation, of corollary 3.7, satisfied by the first moments M_k, in passing from equation (4.17) to equation (4.18), since one needs that div f be of class C^2. In the argument to be given now, the starting point will be an alternative definition of u, which is equivalent to (4.3) and (4.7), and then use will be made of the singular system of partial differential equations of corollary 3.8, which is satisfied by the second moments M_{kl}.

Now to obtain the alternative definition of u. For f of class C', from (4.3) and lemma 3.3, it follows that, for $t\neq 0$,

$$\begin{aligned} u_i(f;x,t) &= M(f_i;at) + \int_{\tau=at}^{bt} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} M_i(f_j;\tau)\,d\tau\,, \\ &= M(f_i;at) + \int_{\tau=at}^{bt} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{n}{\tau}\right) M_{ij}(f_j;\tau) - \frac{1}{\tau} M(f_j;\tau)\delta_{ij}\right] d\tau\ ; \end{aligned} \tag{4.21}$$

and hence, for $t\neq 0$ and all x,

$$\begin{aligned} u_i(f;x,t) &= M(f_i,x,at) + \sum_{j=1}^{n} \left[M_{ij}(f_j;x,bt) - M_{ij}(f_j;x,at)\right] \\ &+ \int_{\tau=at}^{bt} \left\{\frac{n\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f_j;x,\tau) - M(f_i;x,\tau)}{\tau}\right\} d\tau\,, \end{aligned} \tag{4.22}$$

which is the desired alternative formula for u. It is to be noticed that the definite integral in (4.22) is convergent, because the numerator in the integrand has the value zero for $\tau=0$, since

$$n\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f_j;x,0) = M(f_i;x,0)\,,$$

for $i=1,\dots,n$. If it is understood that the definite integral in (4.22) has the value zero when $t=0$, for any x, then (4.22) may be regarded as defining u for all (x,t), just as (4.3) does; furthermore, already for functions f of class C^1 these two definitions coincide for all (x,t).

Is is interesting to rewrite the alternative definition of u, equation (4.22), as a sum of definite integrals, without the intervention of the letters M and M_{ij} (compare equations (4.3) and (4.7) above):

$$u_i(f;x,t) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} f_i(x+\xi at)d\omega_n(\xi) + \frac{1}{\omega_n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|\xi|=1} [f_j(x+\xi bt) - f_j(x+\xi at)]\xi_i\xi_j d\omega_n(\xi)$$

$$+\frac{1}{\omega_n} \int_{\tau=at}^{bt} \left\{ \frac{1}{\tau} \int\limits_{|\xi|=1} \left[n\sum_{j=1}^{n} f_j(x+\xi\tau)\xi_i\xi_j - f_i(x+\xi\tau) \right] d\omega_n(\xi) \right\} d\tau . \tag{4.23}$$

Now, using f in C^2, and the singular system of partial differential equations of lemma 3.9, it follows that, for $\tau \neq 0$

$$\frac{1}{\tau} \Delta \left[n \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f_j; x,\tau) - M(f_i; x,\tau) \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\tau} \left\{ \frac{n}{\tau^2} \left[n \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f_j; x,\tau) - M(f_i; x,\tau) \right] + \right. \tag{4.24}$$

$$\left. + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial\tau} \left[n \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f_j; x,\tau) - M(f_i; x,\tau) \right] \right\} ;$$

which, together with (4.22), and the singular system of partial differential equations of corollary 3.8 for the M_{kl}, implies that (recall again the considerations immediately following equations (4.9) and (4.12):

$$\Delta u_i(f; x,t) = \Delta M(f_i; at) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2n}{t^2} \right) M_{ij}(f_j; bt) + \frac{1}{b^2} \frac{2}{t^2} M(f_j; bt)\delta_{ij} \right]$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n-1}{t^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2n}{t^2} \right) M_{ij}(f_j; at) + \frac{1}{a^2} \frac{2}{t^2} M(f_j; at)\delta_{ij} \right] \tag{4.25}$$

$$+ \int_{\tau=at}^{bt} \frac{\partial}{\partial\tau} \left\{ \frac{n}{\tau^2} \left[n \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f_j; \tau) - M(f_i; \tau) \right] + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial\tau} \left[n \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(f_j; \tau) - M(f_i; \tau) \right] \right\} d\tau .$$

When the last integration is carried out in full, equation (4.25) becomes (attention should be paid here to the «extra» factors $\frac{1}{a}$ and $\frac{1}{b}$, which arise upon carrying out the integration; they arise for exactly the same reason explicitly indicated in the considerations immediately following equation (4.9) above):

$$
\begin{aligned}
\Delta u_i(f;x,t) &= \Delta M(f_i;at) \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2n}{t^2}\right)M_{ij}(f_j;bt)\right]+\frac{2}{b^2t^2}M(f_i;bt) \\
&- \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2n}{t^2}\right)M_{ij}(f_j;at)\right]-\frac{2}{a^2t^2}M(f_i;at) \\
&+ \frac{n}{b^2t^2}\left[n\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(f_j;bt)-M(f_i;bt)\right] \qquad (4.26) \\
&+ \frac{1}{bt}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[n\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(f_j;bt)-M(f_i;bt)\right] \\
&- \frac{n}{a^2t^2}\left[n\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(f_j;at)-M(f_i;at)\right] \\
&- \frac{1}{at}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[n\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(f_j;at)-M(f_i;at)\right].
\end{aligned}
$$

Upon collecting like terms on the right hand side, equation (4.26) may be rewritten thus:

$$\begin{aligned}\Delta u_i(f;x,t)=&\Delta M(f_i;at)\\ &+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n^2-2n}{t^2}\right)M_{ij}(f_j;bt)\\ &+\frac{2-n}{b^2t^2}M(f_i;bt)-\frac{1}{b^2t}\frac{\partial}{\partial t}M(f_i;bt)\\ &-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2n-1}{t}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n^2-2n}{t^2}\right)M_{ij}(f_j;at)\\ &-\frac{2-n}{a^2t^2}M(f_i;at)+\frac{1}{a^2t}\frac{\partial}{\partial t}M(f_i;at)\ ;\end{aligned}\tag{4.27}$$

which is readily seen to coincide with

$$\begin{aligned}\Delta u_i(f;x,t)=&\Delta M(f_i,at)\\ &+\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n}{bt}\right)M_{ij}(f_j;bt)-\frac{1}{bt}M(f_j;bt)\delta_{ij}\right\}\\ &+\frac{n-1}{bt}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n}{bt}\right)M_{ij}(f_j;bt)-\frac{1}{bt}M(f_j;bt)\delta_{ij}\right\}\\ &-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n}{at}\right)M_{ij}(f_j;at)-\frac{1}{at}M(f_j;at)\delta_{ij}\right\}\\ &-\frac{n-1}{at}\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{n}{at}\right)M_{ij}(f_j;at)-\frac{1}{at}M(f_j;at)\delta_{ij}\right\}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Since, for example (compare lemma 3.3), for $t \neq 0$, $b \neq 0$ one has that

$$\frac{\partial}{\partial x_j} M_i(g; bt) = \left(\frac{1}{b\partial t} + \frac{n}{bt}\right) M_{ij}(g; bt) - \frac{1}{bt} M(g; bt) ,$$

it follows from (4.28) that, for $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \Delta u_i(f; x,t) &= \Delta M(f_i; at) \\ &\quad + \left[\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial t} M_i(div\ f; bt) + \frac{n-1}{bt} M_i(div\ f; bt)\right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} M_i(div\ f; at) + \frac{n-1}{at} M_i(div\ f; at)\right] ; \end{aligned} \tag{4.29}$$

which, upon multiplication by a^2, is immediately seen to be identical with the sought equation (4.19). The particular cases when either $a=0$ or $b=0$ being easy to dispose of, this completes the proof that, when the function $f(x)$ is of class C^2 for all x, then the function $u(f;x,t)$, defined in terms of f by means of (4.3), is a solution of the singular system of partial differential equations (4.4) for $t \neq 0$ and all x.

II

REFLECTION PRINCIPLES FOR LINEAR ELLIPTIC SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

5. Reflection principles for the Helmholtz equation

Reflection principles, analogous to the classical Schwarz [13] reflection principle for harmonic functions, were obtained in [14] (see also section 3 of [15]), for functions satisfying the Helmholtz equation (see (5.1) below). The results of [14] are an improvement over previous results in that the boundary conditions employed are supposed to be satisfied in a limiting sense only, and do not require (a priori) the existence of the functions or their derivatives on the boundary. This is true even in the case of the Neumann condition (zero normal derivative) for the Laplace equation (see Sobolev [16], pp. 182-183), or for the Helmholtz equation (see Courant [17]), both of which are included as special cases in [14]. In connection with reflection with respect to the boundary condition appearing in theorem 5.2 below, special reference must be made to Poritsky [18].

The main device employed in the proofs of [14] is what Hadamard [19] calls the «method of descent». The following two theorems will illustrate the type of results obtained:

THEOREM 5.1. Let D be a domain (i. e., an open, connected set) in real Euclidean n dimensional space, which is symmetric about a hyperplane P, and d denote the (supposed non-empty) intersection of P and D, while D^+ and D^- designate, respectively, the two open symmetric parts into which $D-d$ is divided by P. Suppose that $u(x_1,\dots,x_n)$ is a real, single-valued, twice continuously differentiable solution of the Helmholtz equation

$$H_n(u) \equiv \Delta_n u + \lambda u = 0 \ , \tag{5.1}$$

in D^+, where $\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ is the Laplacian, and λ is a real constant; and that, further

$$\lim_{x \to \overline{x}} u(x) = 0 \ , \tag{5.2}$$

for $x=(x_1,\dots,x_n)$ in D^+ and $\bar{x}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ in d. Then the function U, defined in D by «odd reflection»:

$$U(x)=\begin{cases} u(x)\ , & \text{for } x \text{ in } D^+\ , \\ 0\ , & \text{for } x \text{ in } d\ , \\ -u(x^*), & \text{for } x \text{ in } D^-\ , \end{cases} \tag{5.3}$$

where x^* is the «mirror image» of x with respect to the hyperplane P, is an analytic solution of the Helmholtz equation (5.1) throughout D.

Proof: Since the partial differential equation (5.1) is invariant under translations and rotations, the plane P may be taken to be $x_1=0$, without loss of generality, with D^+ lying in the half space $x_1>0$, and D^- in the half-space $x_1<0$.

Consider the cylindrical open set $\hat{D}$ in real Euclidean $n+1$ dimensional space which is defined as follows: $\hat{D}$ is the set of all points $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$ such that $(x_1,\dots,x_n)$ is in D and $-\infty<x_{n+1}<+\infty$. Then, clearly, $\hat{D}$ is divided by its subset in the hyperplane $x_1=0$ (this subset will be denoted by $\hat{d}$) into two parts $\hat{D}^+$ and $\hat{D}^-$, corresponding respectively to D^+ and D^-. Let the function $\hat{u}$ be defined in $\hat{D}^+$ by the equation

$$\hat{u}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=\begin{cases} u(x_1,\dots,x_n)\, e^{x_{n+1}\sqrt{\lambda}}\ , & if\ \lambda\geqq 0\ , \\ u(x_1,\dots,x_n)\ cos\ (x_{n+1}\sqrt{-\lambda})\ , & if\ \lambda\leqq 0\ , \end{cases} \tag{5.4}$$

whenever $(x_1,\dots,x_n)$ is in D^+. This function $\hat{u}$ is a twice continuously differentiable solution, in $\hat{D}^+$, of Laplace's equation in $n+1$ variables:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x_i^2}\equiv\Delta_{n+1}\hat{u}=0\ , \tag{5.5}$$

as is readily verified. (Notice that, since such a solution of Laplace's equation in $n+1$ dimensions is necessarily analytic in $(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$ it then follows immediately that any twice continuously differentiable solution of the n dimensional Helmholtz equation (5.1) is analytic in $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, from the theory of Laplace's equation, without appeal to any general theorem on the analyticity of solutions of elliptic equations. Further, the function $\hat{u}$ is such that

$$\lim_{X \to \overline{X}} \hat{u} \quad (X) = 0 \tag{5.6}$$

for $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})$ in $\hat{D}^+$ and $\overline{X}=(0,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1})$ in $\hat{d}$. Hence, according to the classical reflection principle for harmonic functions (see Kellogg [20], p. 262, Ex. 2), it follows that the function $\hat{U}$, defined on $\hat{D}$ by the equation

$$\hat{U}(X) = \begin{cases} \hat{u}(X)\ , & \text{for } X \text{ in } \hat{D}^+, \\ 0\ , & \text{for } X \text{ in } \hat{d}\ , \\ -\hat{u}(X)\ , & \text{for } X \text{ in } \hat{D}^-\ , \end{cases} \tag{5.7}$$

where $X^*=(-x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})$ is the mirror image of $X=(x_1,x_2,\ldots,x_nx_{n+1})$ with respect to the hyperplane $x_1=0$, satisfies Laplace's equation

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x_i^2} = 0 \tag{5.8}$$

throughout $\hat{D}$, and hence is analytic in $(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})$ throughout $\hat{D}$.

Now, when $(x_1,\ldots,x_n)$ is in D, it follows from the definitions (5.3), (5.4), and (5.7) of U, $\hat{u}$, and $\hat{U}$, respectively, that

$$\hat{U}(x_1,\ldots,x_n,0) = U(x_1,\ldots,x_n)\ .$$

Since $\hat{U}$ is analytic in its $n+1$ arguments, the function U must be analytic in its n arguments (notice that U is the «restriction» of the function $\hat{U}$ to the plane $x_{n+1}=0$). Further, again from the definitions of $\hat{U}$, $\hat{u}$, U, and the fact that $\hat{U}$ satisfies Laplace's equation (5.8) in $\hat{D}$, an easy computation yields that U is a solution of the Helmholtz equation

$$\Delta_n U + \lambda U = 0 \tag{5.9}$$

in D, and the proof is complete.

A second reflection theorem given in [14], is concerned with the boundary condition (instead of (5.2) of the theorem just proved).

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left[\frac{\partial u}{\partial n} (x) + k\, u(x) \right] = 0 \quad , \quad k = \text{a real constant} \ ,$$

where $\frac{\partial u}{\partial n}$ denotes differentiation in a fixed normal direction to the plane P. In this case the function u defined in D^+ can be extended analytically, in general, only to a proper subset of D^-, as may be shown by examples (see [14]). In order to avoid this difficulty, (of possible lack of extension of u to all of D), this second reflection theorem of [14] will now be given in an equivalent form, by imposing an additional geometric restriction on the domain D. The proof to be given here is simpler than that given on pages 89-92 of [14]; it was kindly suggested to the writer, in a conversation, by Dr. S. R. Kraft.

THEOREM 5.2. Let D and u be as in theorem 5.1, except that now the domain D is further required to possess the geometric property that, if x is any point of D, then D also contains the entire closed straight line interval, on the perpendicular from x to d, which joins x to a point of d; and that the boundary condition (5.2) on the function u is now replaced by

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left[\frac{\partial u}{\partial n} (x) + k\, u(x) \right] = 0 \quad , \quad k = \text{a real constant}, \tag{5.10}$$

for $x=(x_1,\ldots,x_n)$ in D^+ and $\bar{x}=(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ in d, where $\frac{\partial}{\partial n}$ denotes differentiation in the direction of the unit normal vector to the plane P which points into D^+. Then there is a uniquely determined real single-valued function U (for its definition see equation (5.21) and the proof below), defined throughout D, which satisfies the Helmholtz equation throughout D, and coincides with u in D^+.

Proof: As in the proof of theorem 5.1, there is no loss of generality in taking the plane P to be simply the plane $x_1=0$, with D^+ lying in the half space $x_1>0$, and D^- lying in the half space $x_1<0$. The boundary condition (5.10) is then

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} (x_1,\ldots,x_n) + k\, u(x_1,\ldots,x_n) \right] = 0 \ , \tag{5.11}$$

where $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ is in D^+ and $\bar{x}=(0,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ is in d .

Since u is twice continuously differentiable and satisfies the Helmholtz equation (5.1) in D^+ it follows that (see the parenthetical remark just after (5.5) above) the function u is analytic in $(x_1,\ldots,x_n)$ on D^+. Hence if one defines (compare the boundary condition (5.10))

$$v \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} + k\,u \tag{5.12}$$

in D^+, it follows that the function v satisfies the hypotheses required of the function u of theorem 5.1, and hence the function V defined on D by

$$V(x) = \begin{cases} v(x)\ , & \text{for } x \text{ in } D^+\ , \\ 0\ , & \text{for } x \text{ in } d\ , \\ -v(x^*)\ , & \text{for } x \text{ in } D^-\ , \end{cases} \tag{5.13}$$

where $x^*=(-x_1,x_2,\ldots,x_n)$ is the mirror image of $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ with respect to the hyperplane $x_1=0$, is analytic in $(x_1,\ldots,x_n)$, and satisfies the Helmholtz equation

$$\Delta_n V + \lambda V = 0\ , \tag{5.14}$$

throughout D.

The geometric restriction placed upon D means simply that if $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ is a point of D^+ then the set of all points $(s,x_2,\ldots,x_n)$, where $0 \leqslant s \leqslant x_1$, is a subset of D^+; while if $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ is a point of D^- then the set of all points $(s,x_2,\ldots,x_n)$, where $x_1 \leqslant s \leqslant 0$, is a subset of D^-. The desired extension U of u will be obtained from the function V, making use of this additional geometric property of D just mentioned, by integrating V along straight line segments which are perpendicular to the plane $x_1=0$.

A priori, the hypotheses of the theorem (and, in particular, the boundary condition (5.11)) do not seem to guarantee the existence of the limit.

$$\lim_{x \to \bar{x}} u(x)\,, \tag{5.15}$$

where x is in D^+ and $\bar{x}$ is in d. It will be shown, however, that this limit does indeed exist, and that the function U, which will at first be defined only locally in D, is actually single valued throughout D.

For each point $(0,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ in d, choose a number $h=h(\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)>0$ so small that all points $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ satisfying both $|x_1|<h$ and $|x_i-\bar{x}_i|<h$, for $i=2,\ldots,n$, are points of D. Such a choice of h is always possible, since $(0,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$

is an interior point of D. Now, let $T_h = T_h(\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n)$ denote the «open cylindrical tube» consisting of all $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ in D such that the «perpendicular projection on d», i. e. the point $(0,x_2,\dots,x_n)$, satisfies $|x_i-\bar{x}_i|<h$, for $i=2,\dots,n$. Each T_h is an open subset of D. A function U_h will be defined on each $T_h(\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n)$ by means of the formula (compare the boundary condition (5.11)):

$$U_h(x_1,x_2,\dots,x_n)=e^{-kx_1}\left[\int_{t=h}^{x_1} e^{kt}V(t,x_2,\dots,x_n)dt+e^{kh}u(h,x_2,\dots,x_n)\right]. \tag{5.16}$$

Since $V=\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+k\,u$ in D^+, a simple computation shows that $U_h(x_1,x_2,\dots,x_n)=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ for $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ in T_h and $x_1>0$ (for then the integrand in (5.16) is just $\dfrac{\partial}{\partial t}\,[e^{kt}\,u(t,x_2,\dots,x_n)]$). Hence, without any computation, from (5.1) it follows that $\Delta_n U_h+\lambda U_n=0$ for $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ in T_h and $x_1>0$. But, from (5.16), since the integrand is analytic in $(t,x_2,\dots,x_n)$ and the second term inside the square bracket is certainly analytic for $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ on *all* of T_h, it follows that U_h is analytic in $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ throughout T_h, and this means that the function $\Delta_n U_h+\lambda U_h$ is also analytic throughout T_h. Since it has just been shown that this function, $\Delta_n U_h+\lambda U_h$, is zero for $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ in T_h and $x_1>0$, it follows, from its analyticity throughout T_h, again without any computation, that one must have

$$\Delta_n U_h+\lambda U_h=0 \tag{5.17}$$

throughout T_h. This simple argument leading from (5.16) to (5.17), suggested by S. R. Kraft, replaces the computational argument in [14], p. 91, leading from equation (10) to the equation on top of p. 92, which is the same as the present (5.17).

So far, the desired analytic extension of u has only, apparently, been obtained locally, on each tube T_h. However, it is readily seen that formula (5.16), upon varying $(0,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n)$ in d, may be used to define a single-valued function U throughout D, this function U being the sought extension of u to all of D. The function U is single valued in D, because, whenever the tubes $T_h(\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n)$ and $T_h(\bar{x}'_2,\dots,\bar{x}'_n)$ have a non-empty intersection, then their corresponding analytic functions U_h and U'_h must coincide with u for all points of T_h and T_h' lying in D^+, and hence U_h and U'_h must be identical troughout the entire common part of T_h and T_h'. This completes the proof of theorem 5.2.

Since U is continuous in D, the limit appearing in (5.15) exists, and is given by

$$\lim_{x\to\bar{x}} u(x) = \lim_{x\to\bar{x}} U(x) = U(\bar{x}) \ , \tag{5.18}$$

for x in D^+ and $\bar{x}$ in d, and will be denoted, for simplicity, by $u(0,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$.

Thus, a posteriori, and with this agreement as to the meaning of $u(0,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$, which was not initially included in the hypotheses, one may «put $h=0$» in the definition (5.16), to obtain

$$U(x_1,x_2,\ldots,x_n) = e^{-kx_1}\left[\int_{t=0}^{x_1} e^{kt}\,V(t,x_2,\ldots,x_n)dt + u(0,x_2,\ldots,x_n)\right] . \tag{5.19}$$

For $x_1<0$, the definite integral in (5.19) may be rewritten, using the definition (5.13) of V:

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{x_1} e^{kt}[-v(-t,x_2,\ldots,x_n)dt &= \int_{s=0}^{-x_1} e^{-ks}v(s,x_2,\ldots,x_n)\,ds \\ &= \int_{s=0}^{-x_1} e^{-ks}[u_{x_1}(s,x_2,\ldots,x_n)+ku(s,x_2,\ldots,x_n)]\,ds;\end{aligned} \tag{5.20}$$

and by integrating this last integral

$$U(x) = \begin{cases} u(x) \ , \quad \text{for } x \text{ in } D^+ \ ; \\[1ex] \lim\limits_{y\to x} u(x) \ , \text{ where y is in } D^+, \text{ for } x \text{ in } d \ , \\[1ex] u(-x_1,x_2,\ldots,x_n)+2k\,e^{-kx_1}\displaystyle\int_{s=0}^{x_1} e^{ks}u(s,x_2,\ldots,x_n)\,ds \ , \\[1ex] \text{for } x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ in } D^- . \end{cases} \tag{5.21}$$

Another reflection theorem given in [14] concerns the boundary condition (instead of the boundary condition (5.10) of theorem 5.2):

$$\lim_{x\to\bar{x}}\left[\frac{\partial u}{\partial s}\,(x)+k\,u(x)\right] = 0 \ , \ k=\text{a real constant,} \tag{5.22}$$

for x in D^+ and $\bar{x}$ in d, where $\frac{\partial}{\partial s}$ denotes differentiation in a fixed direction which is *not* tangential to the plane P. This theorem, whose proof is similar to that of theorem 5.2, will not be considered here in detail.

The following simple example, given in [15], pp. 87-88, shows that reflection need not be possible, at least when $n=3$, when the differentiation in the boundary condition (5.22) is actually tangential to the plane P. For definiteness, take $n=3$, and write x,y,z for x_1,x_2,x_3, respectively. Let $f(x,y)$ be continuous in the closed half plane $x \geqslant 0, -\infty < y < +\infty$, and satisfy Laplace's equation in the open half plane $x>0, -\infty <y< +\infty$. Further, suppose that the function $f(0,y)$ is *not* an analytic function of y. (Such a function f can be easily obtained, by means of Poisson's integral formula for the solution of the Dirichlet problem for Laplace's equation $f_{xx}+f_{yy}=0$ for the half plane $x>0$). Now define $u(x,y,z) \equiv f(x,y)$ for $x>0, \ -\infty < y, \ z < +\infty$. One has then that $\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)=0$ there, and consequently

$$\left.\begin{aligned} & u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \ , && x>0 \ , \\ & \lim_{\substack{(x,y,z) \to (0,\bar{y},\bar{z}) \\ x>0}} \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)=0 \ . && \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

In this example, D^+ is the half space $x>0$, the plane P is the plane $x=0$, and the boundary condition in (5.23) involves the tangential derivative $\frac{\partial}{\partial z}$. But, since the function $f(0,y)$ is not analytic in y, the function $u(x,y,z)$ cannot be continued analytically across the plane $x=0$.

6. Reflection principles for elliptic equations

Consider the general linear elliptic second order partial differential equation with real constant coefficients

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial w}{\partial y_i} + Cw=0 \ , \tag{6.1}$$

where the second order coefficients A_{ij} are not all zero, they are symmetric, i. e. $A_{ij}=A_{ji}$, and also the quadratic form $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}Z_iZ_j \geqq 0$ for any real numbers Z_i, with $i=1,\ldots,n$. It is well known that under a suitable orthogonal (i. e. such that the row vectors of the transformation matrix are mutually perpendicular, and of non-zero, but not necessarily unit length) linear transformation of the independent variables, such an equation goes over into

$$\Delta_n w + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + cw=0 \ ; \ \Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} , \tag{6.2}$$

where the b_i and c are also constants. If one now writes

$$w=u \ . \ exp \left(- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right) , \tag{6.3}$$

then u satisfies the Helmholtz equation (5.1) with $\lambda = c - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. Under such transformations it is clear that a boundary condition such as (5.22) is transformed into a boundary condition of the same kind. This implies that the results obtained for the Helmholtz equation extend immediately to the larger class of linear elliptic second order partial differential equations with constant coefficients.

It has been demonstrated in the present section 6 that the consideration of the general elliptic equation (6.1) can be reduced to that of the Helmholtz equation (5.1), while the essence of section 5 is simply that the consideration of the Helmholtz equation can be reduced to that of the Laplace equation. Consequently, the «moral», so to speak, to be drawn from sections 5 and 6, is that the derivation of reflection principles (of the nature considered here) for the general linear elliptic second order partial differential equation with constant coefficients (6.1) can be reduced to the derivation of reflection principles for Laplace's equation.

III

REMARKS ON A GENERALIZATION
OF BANACH'S PRINCIPLE OF CONTRACTION MAPPINGS

7. Introduction

A generalization of Banach's ([21]; pp. 160-161; Théorème 6) principle of contraction mappings appears in the book of Kolmogorov and Fomin [22]. The purpose of the note [23], by Sherwood C. Chu and J. B. Diaz, is to simplify the proof of the generalization in the book; and to obtain, by proceeding along the lines of the simpler argument, several improvements to the above mentioned generalization (thereby showing that this generalization is merely a special case of an elementary fact). The present discusssion is patterned after that in [23].

Section 8 contains a succinct summary of both Banach's principle and its generalization. In Section 9, a simpler proof and several improvements of the generalization of Banach's principle are given. Finally, section 10 consists of several examples, showing that the results of section 9 hold for a wider class of transformations than theorem 2.

8. Banach's principle of contraction mappings and its generalization

The following exposition of Banach's [21] principle of contraction mappings appears in the book of Kolmogorov and Fomin ([22], p. 43):

«Let R be an arbitrary metric space. A mapping A of the space R into itself is said to be a *contraction* if there exists a number $\alpha<1$ such that

$$\rho(Ax,Ay) \leqslant \alpha\, \rho(x,y) , \tag{1}$$

for any two points $x,y \varepsilon R$. Every contraction mapping is continuous. In fact if $x_n \to x$, then, by virtue of (1), we also have $Ax_n \to Ax$.

THEOREM 1 (PRINCIPLE OF CONTRACTION MAPPINGS). *Every contraction mapping defined in a complete metric space R has one and only one fixed point (i. e., the equation $Ax=x$ has one and only one solution).*

Proof. Let x_0 be an arbitrary point. Set $x_1=Ax_0, x_2=Ax_1=A^2x_0$, and in general let $x_n=Ax_{n-1}=A^nx_0$. We shall show that the sequence $\{x_n\}$ is fundamental [i. e., Cauchy]. In fact

$$\rho(x_n,x_m)=\rho(A^nx_0,A^mx_0)\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_{m-n})$$

$$\leqslant\alpha^n\{\rho(x_0,x_1)+\rho(x_1,x_2)+\ldots+\rho(x_{m-n-1},x_{m-n})\}$$

$$\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_1)\{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-n-1}\}\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_1)(1-\alpha)^{-1}$$

Since $\alpha<1$, this quantity is arbitrarily small for sufficiently large n. Since R is complete, $\lim_{n\to\infty} x_n$ exists. We set $x=\lim_{n\to\infty} x_n$. Then by virtue of the continuity of the mapping A, $Ax=A\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} Ax_n=\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=x$.

Thus, the existence of a fixed point is proved. We shall now prove its uniqueness. If $Ax=x$, $Ay=y$, then $\rho(x,y)\leqslant\alpha\rho(x,y)$, where $\alpha<1$; this implies that $\rho(x,y)=0$, i. e., $x=y$».

In the same book of Kolmogorov and Fomin ([22], p. 50), there also appears the following generalization of Banach's theorem:

«We note first of all that the principle of contraction mappings can be generalized in the following manner:

THEOREM 2. *If A is a continuous mapping of a complete metric space R into itself, such that the mapping A^n is a contraction for some* [*positive integer*] *n, then the equation*

$$Ax=x$$

has one and only one solution.

In fact, if we take an arbitrary point $x\varepsilon R$ and consider the sequence $A^{kn}x(k=0,1,2,\ldots)$, a repetition of the argument introduced in § 14 [see theorem 1 quoted above] yields the convergence of this sequence. Let $x_0=\lim_{k\to\infty} A^{kn}x$. Then $Ax_0[=A(\lim_{k\to\infty} A^{kn}x)]=\lim_{k\to\infty} A^{kn}Ax$.

Since the mapping A^n is a contraction, [there is a constant α, with $0<\alpha<1$, such that $\rho(A^nx, A^ny)\leqslant\alpha\rho(x,y)$] and we have

$$\rho(A^{kn}Ax,A^{kn}x)\leqslant\alpha\rho(A^{(k-1)n}Ax,A^{(k-1)n}x)\leqslant\ldots\leqslant\alpha^k\rho(Ax,x).$$

Consequently,

$$\lim_{k\to\infty} \rho(A^{kn}Ax, A^{kn}x)=0$$

i. e., $Ax_0=x_0$».

[Clearly, A has a unique fixed point, for if $Ay=y$, then $A^n y=y$, hence $y=x_0$, since A^n has only one fixed point].

In the above quotations, the numbering of the theorems as 1 and 2, and also the statements within square brackets, are our own.

9. Improvements of the generalization of Banach's principle of contraction mappings

REMARK 1. The proof of theorem 2 may be simplified somewhat, as follows: Since A^n is a contraction, it possesses, by theorem 1, a unique fixed point, call it x_0, such that $A^n x_0=x_0$. It will now be shown that $Ax_0=x_0$. Since

$$\rho(Ax_0,x_0)=\rho(AA^n x_0, A^n x_0)=\rho(A^n Ax_0, A^n x_0)\leqslant \alpha\, \rho(Ax_0,x_0) \ ,$$

and $\alpha<1$, one has $\rho(Ax_0,x_0)=0$, i. e., $Ax_0=x_0$.

Thus, the argument just given shows that the assumption that A itself is continuous, made among the hypotheses of theorem 2, is superfluous. However, it should be noticed that the proof of theorem 2 reproduced in section 8, nevertheless, does make use of the continuity of A, specifically when it is asserted that, since $x_0=\lim\limits_{k\to\infty} A^{kn}x$, one has

$$Ax_0=A(\lim_{k\to\infty} A^{kn}x)=\lim_{k\to\infty} A^{kn}Ax \ .$$

Therefore, the following theorem is an extension of theorem 2:

THEOREM 3. If A is a (single valued) function defined on a complete metric space R into itself, such that the function A^n is a contraction for some (positive integer) n, then A has a unique fixed point.

REMARK 2. The conclusion that A has a fixed point can be reached in an even more direct manner, still without assuming that A itself is continuous.

Since A^n is contracting, it follows from theorem 1 that A^n has a *unique* fixed point x_0, such that $A^n x_0 = x_0$. Hence

$$Ax_0 = AA^n x_0 = A^n A x_0 ,$$

which means that Ax_0 is also a fixed point of A^n. But A^n has only one fixed point, and therefore $Ax_0 = x_0$. Thus, x_0 is a fixed point of A. It is clear that x_0 is a unique fixed point of A, as was shown earlier.

REMARK 3. An examination of the preceding argument shows that there is no need to assume that A^n is contracting and defined on a complete metric space. All that is used in obtaining the conclusion of theorem 3 is that A^n has exactly one fixed point. Hence one has

THEOREM 4. Let S be any non-empty set of elements, (called «points») and A be a single valued function defined on S and with values in S. Suppose that, for some positive integer n, the function A^n has a unique fixed point x_0. Then A also has a unique fixed point, namely x_0.

(When S is a complete metric space R, and A is a single valued function on R to R, such that A^n, for some positive integer n, is contracting, then theorem 4 reduces to theorem 3).

REMARK 4. An inspection of the argument leading to the last theorem reveals that the essential property (besides uniqueness of the fixed point for A^n) employed is that A^n and A commute with each other. This suggests immediately the following:

THEOREM 5. Let S be any non-empty set of elements, and B be a single valued function defined on S and with values in S. Suppose further that B possesses a unique fixed point x_0. Then, if A is *any* single valued function on S to S which commutes with B, that is, such that $AB = BA$, then A also has x_0 as a fixed point (not necessarily unique; however, if B happens to be an iterate of A, that is $B = A^n$, with n a positive integer, then it is unique).

It should be noticed that theorem 5 includes theorems 2, 3 and 4 as special cases.

The proof is immediate, starting from the equation $Bx_0 = x_0$, upon noticing that

$$Ax_0 = ABx_0 = BAx_0 ,$$

which means that Ax_0 is also a fixed point of B, but B has only x_0 as a fixed point, by hypothesis.

Notice that all that is really used in the above argument is that both x_0 and Bx_0 are in the domain of definition of A, which need not be all of S, and that A and B commute *at* x_0, i. e., that $ABx_0=BAx_0$.

It should also be noticed that it is precisely the above argument, with $B=A^n$, which is employed in the proof of theorem 4.

10. Examples

Example 1. This example shows that theorem 3 is indeed more general than theorem 2, by displaying a transformation which is not continuous, but whose second iterate is contracting. We are indebted to I. I. Glick for this example. The metric space R is taken to be the Banach space of all real valued continuous functions, $C([0,1])$, on the closed interval $0\leqslant x\leqslant 1$, with the norm of a function $f(t)$ being the maximum of $|f(x)|$ for x in this interval. Consider the linearly independent elements (i. e., such that any finite subset is linearly independent) of $C([0,1])$:

$$e^x, 1, x, x^2, x^3, \ldots,$$

and extend this linearly independent set to a Hamel basis H (i. e., a maximal linearly independent set; see N. Dunford and J. T. Schwartz [24], p. 36). The transformation A is defined, for elements of H, as follows:

$$A(e^x)=\frac{1}{2}\cdot 1, \text{ and } A(1)=\frac{1}{2}\cdot e^x,$$

while $A(h)=\frac{1}{2}h$ for any element of H which is different from 1 or e^x (notice that, therefore, $A(x^n)=\frac{1}{2}x^n$ for $n=1,2,\ldots$). Since H is a basis for $C([0,1])$, the definition of A may be extended, from H to all of $C([0,1])$, merely by defining $A(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A(h_i)$ whenever $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i$ (with n a positive integer, real numbers $\alpha_i\neq 0$ for $i=1,\ldots,n$, and h_i in H for $i=1,\ldots,n$); further, let $A(0)=0$. Then $A^2=\frac{1}{4}I$, where I is the identity mapping. Thus, A^2 is contracting. But A is not continuous at e^x, that is

$$\lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k\right)\neq A(e^x)=\frac{1}{2},$$

because

$$\lim_{n\to\infty}\left[A\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}(e^x-1)$$

$$=e^x-\frac{1}{2}.$$

Example 2. It is of interest to notice that an example of a discontinuous transformation A, with A^2 contracting, can be given even when the metric space R is the set of all real numbers. Let the numbers 1 and π be contained in a Hamel basis H for the real numbers (i. e., a set H of rationally independent real numbers such that every non-zero real number may be uniquely written as a finite sum, $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i$, where n is a positive integer, the α_i are non-zero rational numbers, and the h_i are numbers of H (see G. Hamel [25]). The transformation A will be defined, for elements of H, as follows:

$$A(1)=\frac{1}{2}\pi, \text{ and } A(\pi)=\frac{1}{2}\cdot 1,$$

while $A(h)=\frac{1}{2}h$ for any number of H which is different from 1 or π. The definition of A may be extended, from H to all the real numbers, by defining

$A(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A(h_i)$ for any non-zero real number $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i$; and by putting $A(0)=0$. The transformation A satisfies $A(A(y))=\frac{1}{4}y$ for every real y, hence A^2 is a contraction. But A cannot be continuous. For, from the way it was defined, A satisfies the Cauchy functional equation $A(x)+A(y)=A(x+y)$. If the function A were continuous, then it would have to be linear, that is

$$Ay=cy,$$

for some real number c, and any real y. Since $c=A(1)=\frac{\pi}{2}$, then one would then have that $A(\pi)=c\cdot\pi=\frac{\pi^2}{2}$, contradicting the original definition of A, which states that $A(\pi)=\frac{1}{2}$.

Example 3. This example shows the «power» of theorem 5, as compared with the preceding theorems. This is done by displaying a transformation A which is not contracting, not continuous, and such that no iterate of A is contracting. Nevertheless, it may be shown, «strictly» as a consequence of theorem 5, that A has a fixed point, while this conclusion cannot be inferred as a consequence of the previous theorems 1 to 4 (since A has, obviously, as will be seen from its definition, more than one fixed point). The set S is taken to be the set of all finite complex numbers $z=x+iy$, with x and y real. The function A is defined as follows:

$$A(z) = \frac{1}{\bar{z}} \;;$$

for z not zero, where $\bar{z}=x-$ iy is the complex conjugate of the number z (so far, A is essentially a «Kelvin» inversion); further, let $A(0)=0$. It is not a surprise that the function A, obviously, has zero, and the set of numbers of absolute value one, as its fixed points. Hence, it is not possible to «deduce», strictly as a consequence of any of theorems 1, 2, 3, 4, that A has a fixed point. However, if B is a rotation of the complex number plane about the origin, through an angle which is not an integral multiple of 2π, then B has zero as its only fixed point, and B commutes with A. Hence, it is strictly possible to «deduce», as a consequence of theorem 5, that zero is also a fixed point of A.

BIBLIOGRAPHY

PART I

[1] WEINSTEIN, A. — *Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson et l'équation des ondes.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 234: 2584-2585. 1952.

[2] WEINSTEIN, A. — *On the Cauchy problem for the Euler-Poisson-Darboux equation.* Bull. Amer. Math. Soc. 59: 454. 1953.

[2a] WEINSTEIN, A. — *On the wave equation of Euler-Poisson.* Proc. 5º Symposium in Applied Mathematics. 137-147. 1952.

[3] DIAZ, J. B. and WEINBERGER, H. F. — *A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation.* Proc. Amer. Math. Soc. *4:* 703-718. 1953.

[4] DIAZ, J. B. and LUDFORD, G. S. S. — *On the Euler-Poisson-Darboux equation, integral operators, and the method of descent.* Proceedings of the Conference on Differential Equations (dedicated to A. Weinstein on the occasion of his 60th. birthday). University of Maryland: 73-89. 1956.

[5] DIAZ, J. B. — *On singular and regular Cauchy problems.* Communications on Pure and Applied Mathematics. *9:* 383-390. 1956 (Presented at the Symposium on Differential Equations held at the University of California at Berkeley, June, 1955).

[6] LIONS, J. L. — *Equations différentielles-operationnelles et problèmes aux limites.* Springer. 1961.

[7] CARROLL, R. W. — *Some singular Cauchy problems.* Annali di matematica pura de applicata, Serie IV. *LVI:* 1-31. 1961.

[8] DIAZ, J. B. and LIONS, J. L. — *Solution of the singular Cauchy problem for a singular system of partial differential equations in the mathematical theory of dynamical elasticity* (to appear).

[9] GOURSAT, E. — *Cours d'analyse mathématique.* Troisième édition. Paris. Gauthier--Villars. 1923. Tome III.

[10] TEDONE, O. — *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi.* Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Serie 2. *47:* 181-258. 1897.

[11] GHERMANESCU, M. — *Sur les valeurs moyennes des fonctions.* Mathematische Annalen. 119: 288-320. 1944.

[12] JOHN, F. — *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations.* New York. Interscience Publishers. 1955.

PART II

[13] Schwarz, H. A. — *Ueber einige Abbildungsaufgaben.* Journal fur die reine und angewandte Mathematik. *70:* 105-120. 1869. (See also «Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Berlin. 1890, vol. II, pages 65-83, specially pages 66-67).

[14] Diaz, J. B. and Ludford, G. S. S. — *Reflection principles for linear elliptic second order partial differential equations with constant coefficients.* Annali di Matematica pura ed applicata. Serie IV. *XXXIX:* 87-95. 1955.

[15] Diaz, J. B. and Ludford, G. S. S. — *On the Euler-Poisson- Darboux equation, integral operators, and the method of descent.* Proceedings of the Conference on Differential Equations (dedicated to A. Weinstein on the occasion of his 60th. birthday). University of Maryland: 73-89. 1956.

[16] Sobolev, S. L. — *Equations of mathematical physics* (in Russian). Moscow. 1950. pp. 182-183.

[17] Courant, R. — *Beweis des Satzes, dass von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt.* Mathematische Zeitschrift. *1:* 321-328. 1918.

[18] Poritsky, H. — *Reflection of singularities of harmonic functions corresponding to the boundary condition* $\frac{\partial u}{\partial n} + au = \sigma$. Bulletin of the American Mathematical Society. *43:* 837-884. 1937.

[19] Hadamard, J. — *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations.* New York. 1952.

[20] Kellogg, O. D. — *Foundations of potential theory.* Berlin. Springer. 1929.

PART III

[21] Banach, S. — *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (Thèse présentée en juin 1920 à l'Université de Leopol [=Lwow] pour obtenir le grade de docteur en philosophie). Fundamenta Mathematicae. *III:* 133-181. 1922.

[22] Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V. — *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis.* Volume I: *Metric and Normed Spaces.* Rochester, N. Y. Graylock Press. 1957.

[23] Chu, Sherwood C. and Diaz, J. B. — *Remarks on a generalization of Banach's principle of contraction mappings* (issued March 2, 1964, as U. S. Naval Ordnance Laboratory report NOLTR 64-39, White Oak, Maryland). Journal of Mathematical Analysis and Applications. Academic Press. New York. *II:* 440-446. 1965.

[24] N. Dunford and Schwartz, J. T. — *Linear Operators. Part I, General Theory.* New York. Interscience. 1958.

[25] Hamel, G. — *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Mathematische Annalen. 60: 459-462. 1905.

SUMMARY

The present account is divided into three distinct parts, according to the three different topics which are indicated in the title of the paper. Part I, entitled «Solution of the singular Cauchy problem for a singular system of partial differential equations in the mathematical theory of dynamical elasticity», is based upon a paper of the same title, written with J. L. Lions [8] (numbers in square brackets refer to the bibliography at the end of the paper). Part II, entitled «Reflection principles for linear elliptic second order partial differential equations with constant coefficients», is based upon a paper of the same title, written with G. S. S. Ludford [14]. Finally, part III, entitled «Remarks on a generalization of Banach's principle of contraction mappings», is based upon a paper of the same title, written with Sherwood C. Chu [23].

TEMPERATE DISTRIBUTIONS IN INFINITELY MANY DIMENSIONS

BY

EBBE THUE POULSEN

This page intentionally left blank

TEMPERATE DISTRIBUTIONS IN INFINITELY MANY DIMENSIONS (1)

by

EBBE THUE POULSEN

1. Introduction

Quantum theory has motivated the study of families of linear operators, which

a) are defined in a vector space with a scalar product, and

b) are required to satisfy certain specified algebraic relations (commutation relations, symmetry, etc.).

The best known example is the finite or countable twofold family of operators $p_1,p_2,\ldots$ and $q_1,q_2,\ldots$ which are required to be self-adjoint and to satisfy the canonical commutation relations

$$[p_j,p_k]=[q_j,q_k]=0\ ,$$
$$[p_j,q_k]=-i\delta_{jk}\ ,$$

where $[a,b]=ab-ba$.

Since it is required that a scalar product exist in the carrier space, most investigations have naturally been concerned with the situation, where the carrier space is taken as a Hilbert space. It is then easily seen that the conditions stated above do not suffice to determine the family of operators p_j and $q_j, j=1,2,\ldots$ uniquely (modulo unitary equivalence, of course), and the problem most intensively studied has been that of formulating weak additional conditions which ensure uniqueness.

(1) A report on joint investigations by P. Kristensen, L. Mejlbo and E. T. Poulsen ([13] and [14]).

For the case of a finite number of pairs of operators p_j and q_j, the most important realization of the commutation relations is obtained by taking the carrier space as $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n)$ and defining p_j and q_j by

$$p_j x = -i \frac{\partial x}{\partial t_j}$$

$$q_j x(t) = t_j \cdot x(t)$$

with the maximal domains of definition. This canonical realization is characterized by irreducibility together with the existence of an element ψ_0 (a Gauss-function), called the cyclic element, satisfying $(p_j - iq_j)\psi_0 = 0$ for $j = 1,2,\ldots,n$. Weaker conditions, which characterize the canonical situation have been formulated by v. NEUMANN [16], RELLICH [17], DIXMIER [2], FOIAS, GEHÉR and Sz.-NAGY [4], KILPI [12], FOIAS and GEHÉR [5], and TILLMANN [21,22].

The case of a countable number of pairs of operators p_j and q_j has proved much more involved. From the early days of quantum field theory one solution —the so-called canonical solution, for which a cyclic element (in this case called a vacuum element) exists—was known. A rigorous mathematical analysis of this solution has been given by COOK [1].

To the surprise of most physicists it was shown by VAN HOVE [11], FRIEDRICHS [6], FUGLEDE [unpubl.], and others, that there exist several sensible solutions which are not unitarily equivalent. A complete characterization of all solutions satisfying the canonical commutation relations (and further weak conditions) was then given by GÅRDING and WIGHTMAN [9] (see also WIGHTMAN and SCHWEBER [25].

A slightly different version of the problem of infinitely many pairs of operators is obtained when the indices $j = 1,2,\ldots$ are identified with the elements e_j of a real orthonormal basis in some space of functions. If we then write $P(e_j)$ and $Q(e_j)$ instead of p_j and q_j, and extend P and Q by linearity, we obtain a pair of operators P and Q, called canonical field operators, with the following properties:

(i) P and Q are distributions defined on a space of testing functions and with values in the space of linear operators in the carrier space. $P(x)$ and $Q(x)$ are self-adjoint, when x is a real testing function.

(ii)
$$[P(x),P(y)] = [Q(x),Q(y)] = 0\,,$$
$$[P(\bar{x}),Q(y)] = -i\langle x,y\rangle\,,$$

where $\langle x,y\rangle$ denotes the scalar product in the testing space.

If the testing functions x are functions of a point t in some Euclidean space, these commutation relations can also be written formally as

$$[P(t),P(s)]=[Q(t),Q(s)]=0$$
$$[P(t),Q(s)]=-i\delta(t-s)\,.$$

A motivation for the study of such mathematical structures also arises in non-linear functional analysis. Taking for the carrier space some space of (non-linear) functionals, defined on ordinary functions $x(t)$ of a real variable, the operations

$$Q(t)\Psi(x)=x(t)\Psi(x)\,,$$
$$P(t)\Psi(x)=-i\frac{\delta\Psi(x)}{\delta x(t)}\,,$$

constitute, in a formal sense, a representation of the canonical field operators. We have here adopted the notation $\delta/\delta x(t)$ for the first *Volterra derivative*, viz.

$$\Psi(x+y)-\Psi(x)=\int\frac{\delta\Psi(x)}{\delta x(t)}y(t)dt+o(y)\,,$$

where these symbols of course do not have a well defined meaning until appropriate topologies are chosen.

The present lectures are primarily concerned with describing an alternative approach to the study of such a pair of canonical field operators. One of the main difficulties of the classical theory is that even though the theory of Hilbert spaces is extremely well developed and in most respects very simple, operators satisfying the canonical commutation relations cannot be bounded and everywhere defined (cf. WIELANDT [24]). Consequently, when several such operators are involved, difficult questions concerning their common domain of definition arise.

Instead of requiring the carrier space to be a Hilbert space, we require the operators to be everywhere defined and continuous, and then we analyze the structure of the possible carrier spaces. When we require the operators to be continuous, we imply in particular that the carrier space has a topology, and, in fact, we require the carrier space to be a locally convex vector space.

For applications it is desirable to have a theory, which — in the end — can deliver numerical results expressed by means of continuous linear functionals, and it is well known that a topological vector space can be given a locally convex topology, such that the continuous linear functionals are the same in the two topologies. In fact, ultimately the relation between theory and physical reality will be established via an interpretation of certain quantities, expressed in terms of bilinear forms, as expectation values. Obviously the topology determined by the totality of all such expectation values is a locally convex topology on the carrier space (the expectation values are semi-norms), and all desired continuity properties hold for this topology. Hence, from the point of view of applications, the assumption of local convexity is no essential restriction.

It turns out that the choice of a carrier space which in a sense is smaller than a Hilbert space, offers another advantage in addition to the facilitation in the algebraic manipulation with the operators: In the formulation of the algebraic properties of the operators p_j and q_j, the assumption of self-adjointness is essential. We replace this assumption with the requirement that they be symmetric with respect to the scalar product on the carrier space. This scalar product induces a natural embedding of the carrier space into its dual space, which is larger than Hilbert space. Now, in quantum theory as well as in non-linear functional analysis, representations of a pair of canonical field operators are desired as tools for the investigation of linear operator equations (linear variational equations). The natural way to impose (homogeneous) boundary conditions on equations of this nature is to require the solution to be an element of some linear space. To take this space as Hilbert space is in many cases so restrictive that only trivial manifolds of solutions are obtained. Thus, to give an example, the structurally extremely simple «gradient» equation $P(x)\Psi=0$ possesses no proper solutions with the boundary condition that Ψ be an element of Hilbert space, but it does have a solution in the dual of our carrier space.

2. Summary of results

It is well known from the study of the canonical commutation relations that for technical reasons it is convenient to work with the operators

$$b_j=2^{-1/2}(p_j-iq_j)$$

and their adjoints

$$b_j^*=2^{-1/2}(p_j+iq_j)\,.$$

Correspondingly, for the case of the field operators, we introduce

$$\begin{aligned} a\ &=2^{-1/2}(P-iQ)\\ a^*&=2^{-1/2}(P+iQ)\,. \end{aligned}$$

As a and a^* are operator valued distributions, a space of testing functions for these distributions has to be decided upon. In most applications it is requested that differentiation and other «one-particle operations» can be given a meaning on the field operators. To make such operations possible, we have chosen as a space of testing functions for a and a^* a space of type S whereby we understand a space with the following properties:

(i) The space is a locally convex space with a continuous scalar product.
(ii) There exist operators b and b^*, which are continuous linear mappings from the whole of the space into itself, which are adjoint with respect to the scalar product, and which satisfy the canonical commutation relation $[b,b^*]=1$.
(iii) In the space there exists a normed element ψ_0, which verifies the equation $b\psi_0=0$, and which is *cyclic* relative to b and b^*, i. e. $R\psi_0$ is dense in the space, where R denotes the algebra of all polynomials in b and b^*.

It is known from the works quoted above on the finite dimensional problem in the framework of Hilbert space that the condition (iii) has here been given an unnecessarily strong formulation. As shown by MEJLBO [15], the condition (iii) can be weakened also in the framework of locally convex spaces. However, we shall not worry about this here.

Obviously, such a set of requirements comes close to a characterization of a subspace of Hilbert space which bears essentially the same relationship to Hilbert space as does Schwartz' space (S) of rapidly decreasing infinitely often differentiable functions to $\mathcal{L}^2$.

An analysis of spaces of type S is given in Section 3, where also the corresponding problem for the case of an arbitrary finite number of operators b_j and b_j^* is considered. This analysis is carried through in relatively great detail in order that a similar analysis in Section 4 may be reduced. Apart from some technical material needed in later sections, the main results are:

There exist a minimal space $\tilde{S}$ *and a maximal space* S *both of type* S, *such that if* $S^?$ *is any space of type* S *then*

$$\tilde{S} \subseteqq S^? \subseteqq S$$

algebraically and topologically. The space $\tilde{S}$ *is dense in* $S^?$, *and* $S^?$ *is dense in* S. We further prove that the topology of the maximal space S is determined by a sequence of increasing norms $\|\cdot\|_r$, $r=0,1,2,\ldots$, where $\|\varphi\|_r^2=<\varphi,(bb^*)^r\varphi>$. *The maximal space may be identified with the space of all sequences* $c=\{c_\nu\}$, *which are rapidly decreasing with respect to the index in the sense that all norms* $\|c\|_r^2=\Sigma|c_\nu|^2(\nu+1)^r$

are finite. Finally, we prove that *the maximal space S can be identified with Schwartz' space* (S).

Thus, the space of testing functions for temperate distributions may be characterized uniquely up to unitary equivalence as a subspace of abstract Hilbert space in this way: (S) is a maximal space of type S.

For the case of n pairs of canonical operators we define spaces of type S^n in a similar way and obtain corresponding results.

For the investigation of the canonical field operators we have chosen the maximal space S as the space of testing elements. Precisely speaking, we have investigated *spaces of type* $\mathfrak{S}$, which we define as spaces with the following properties:

(i) The space is a locally convex space with a continuous scalar product.

(ii) There exist operator valued distributions a and a^*, which are continuous linear mappings from S into the space of continuous linear mappings from the whole of the space of type $\mathfrak{S}$ into itself. This space of continuous linear mappings is here equipped with the topology of uniform convergence on bounded sets. Further, $a(\bar{\varphi})$ and $a^*(\varphi)$ are adjoint and satisfy the commutation relations

$$[a(\varphi),a(\psi)]=[a^*(\varphi),a^*(\psi)]=0\ ,$$
$$[a(\bar{\varphi}),a^*(\psi)]=<\varphi,\psi>$$

for all elements φ,ψ of S. Here $\bar{\varphi}$ denotes the conjugate of the element φ in the sense of the natural conjugation in S.

(iii) There exists an element Ψ_0, called the vacuum element, which satisfies the equation $a(\varphi)\Psi_0=0$ for all $\varphi\in S$, and which is cyclic relative to a and a^*, i e. $\mathbb{R}\Psi_0$ is dense in the space, where $\mathbb{R}$ denotes the algebra of all polynomials in all $a(\varphi)$ and $a^*(\varphi)$.

(iv) To every self-adjoint operator $k\in R$ there exists a self-adjoint continuous mapping K from the space of type $\mathfrak{S}$ into itself, such that

$$[K,a^*(\varphi)]=a^*(k\varphi)\ .$$

Here, by the condition (iii) we single out the particular (canonical) solution for which a vacuum element exists. This greatly facilitates the analysis and also leads to a case of interest for quantum physics. However, this might not be the only interesting case. The condition (iv) is motivated in the quantum theory of free fields (K is called a *bi-quantization* of k).

An analysis of spaces of type $\mathfrak{S}$ is given in Section 4. The main results are: *There exist a minimal space* $\tilde{\mathfrak{S}}'$, *a minimal complete space* $\tilde{\mathfrak{S}}$ *and a maximal* *space* $\mathfrak{S}$ *of type* $\mathfrak{S}$. The topology of the maximal space is determined by a sequence of seminorms $|||\cdot|||_{(r)}$, where $|||\Phi|||_{(r)}^2 = \langle\!\langle \Phi, H^r\Phi \rangle\!\rangle$. Here $\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle$ denotes the scalar product in $\mathfrak{S}$, and H is the mapping which according to (iv) corresponds to the operator $bb^* \in R$. All spaces of type $\mathfrak{S}$ have so-called Fock representations [3], in which the elements are represented as $\{\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}, \ldots\}$, where the n'th coordinate is an element in the symmetric part of a space of type S^n. In this representation we have $|||\Phi|||_{(r)}^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|\varphi^{(n)}\|_r^2$.

The Fock representations of the extreme spaces $\tilde{\mathfrak{S}}'$, $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$, and $\mathfrak{S}$ are characterized explicitly, and it is shown that they all have simple topological structures.

In Section 5 the dual spaces of $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ and $\mathfrak{S}$ are studied. In the Fock representation $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*$ *consists of all sequences* $\mathbf{T} = \{T^{(n)}\}$ *of symmetric temperate distributions*, while $\mathfrak{S}^*$ *consists of sequences* $\mathbf{T}$, *which in a certain sense are of at most polynomial growth with respect to n.* Furthermore we have the situation

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^* \subset \tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*$$

algebraically and topologically, and each of these spaces is dense in each of the larger spaces.

As $\mathfrak{S}$ is a counterpart of Schwartz' space (S) for the case of infinitely many dimensions, elements of $\mathfrak{S}^*$ may be looked upon as temperate distributions in infinitely many dimensions.

It is further shown that the field operators and certain tensor products of them (Wick products, cf. [23]) have continuous extensions to various dual spaces, the main results being: *The operator a^* has a unique continuous extension which maps S^* into the space $L(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S}^*)$ of continuous linear mappings in $\mathfrak{S}^*$. The operator a has a unique continuous extension which maps S^* into $L(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$.*

In particular, putting $a(x) = a(\delta_x)$ and $a^*(x) = a^*(\delta_x)$, we give a well-defined meaning to the field operators at the point x. We note that $a^*(x)a(x)$ is well defined as a continuous linear operator from $\mathfrak{S}$ into $\mathfrak{S}^*$, while it is not possible to give a meaning to the expression $a(x)a^*(x)$, a fact which is well-known (cf., for instance, Haag [10]).

In Section 6 we generalize to $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*$ the notion of Gaussian functions in S^n. It seems natural to include such limiting cases as δ and *1* among the Gaussian elements, and hence to investigate the existence of Gaussian temperate distributions. Accordingly, in the infinite-dimensional case, we look for analogous Gaussian elements in the largest available space $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*$, and in particular we identify a δ-element in $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*$.

Section 7 is concerned with an extension to the infinite-dimensional case of the group of translations in S^n. This group, of course, is parametrized by means of vectors $h \in \mathbf{R}^n$, and in the infinite-dimensional case, we consider a family of operators $D(f) \in L(\tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}}^*)$, parametrized by means of vectors $f \in \mathcal{S}^*$. Since these operators map $\tilde{\mathfrak{S}}$ into $\tilde{\mathfrak{S}}^*$, they cannot, in general, be composed, but for $f \in \mathcal{H}$ (the completion of $\mathcal{S}$ in the norm $\|\cdot\|$), the operator $D(f)$, which is determined up to a numerical factor only, can be normalized so as to be isometric with respect to the norm $|||\cdot|||$ in $\tilde{\mathfrak{S}}$, and its isometric extension to $\mathfrak{H}$ (the completion of $\tilde{\mathfrak{S}}$ in this norm) is a unitary operator in $\mathfrak{H}$. This family of unitary operators in $\mathfrak{H}$ is of course identical with the family considered by all writers on the Hilbert space version of the commutation problem.

Finally, in Section 8, the space $\tilde{\mathfrak{S}}$ is identified with a space of (non-linear) functionals on the real part of $\mathcal{S}$ by means of the above-mentioned δ-element in $\tilde{\mathfrak{S}}^*$ and the normalized displacement operators constructed in Section 7, and it is shown that in this functional representation the operators $P(\varphi)$ and $Q(\varphi), \varphi \in \mathrm{Re}\mathcal{S}$ act in a way completely analogous to the finite dimensional case. Finally, a Fourier transform is constructed in the functional representation of the space $\tilde{\mathfrak{S}}$, and it is shown that this Fourier transform plays the role of a Fourier transform with respect to the (non-existing!) Lebesgue measure on the real part of $\mathcal{H}$. We remark that unfortunately the domain of this Fourier transform is so small that it appears to be of almost no use for applications.

3. Spaces of type $\mathcal{S}^n$

DEFINITION.

By a *space of type* $\mathcal{S}^n$ we understand a locally convex space $\mathcal{S}^?$ with the following properties:

(3.1) There exists a scalar product $<\cdot,\cdot>$ on $\mathcal{S}^?$, and the corresponding norm $\|\cdot\|$ is continuous on $\mathcal{S}^?$.

(3.2) There exist continuous linear transformations $b_j, b_j^*, j=1,2,\ldots,n$ in $\mathcal{S}^?$ such that b_j and b_j^* are adjoint with respect to the scalar product, i. e.

$$<\varphi, b_j\psi> = <b_j^*\varphi, \psi>,$$

and the following commutation relations hold

$$[b_j, b_k] = [b_j^*, b_k^*] = 0\ , \tag{3.3}$$

$$[b_j, b_k^*] = \delta_{jk}\ . \tag{3.4}$$

(3.5) There exists an element $\psi_0 \in S^?$, called the *cyclic element*, such that $\|\psi_0\| = 1$ and $b_j \psi_0 = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, n$, and such that

(3.6) $R\psi_0$ is dense in $S^?$, where R denotes the algebra generated by all b_j and $b_j^*, j = 1, 2, \ldots, n$.

ANALYSIS.

It is an immediate consequence of (3.3) and (3.4) that every operator $k \in R$ can be written as a linear combination of operators of the form $b_1^{*\nu_1} \ldots b_n^{*\nu_n} b_1^{\mu_1} \ldots b_n^{\mu_n}$, and then it follows from (3.5) that $R\psi_0$ is generated by the vectors $b_1^{*\nu_1} \ldots b_n^{*\nu_n} \psi_0$.

For an arbitrary vector $\varphi \in S^?$ we have, applying (3.2) and the commutation relations,

$$< b_j^* \varphi, b_1^{*\nu_1} \ldots b_n^{*\nu_n} \psi_0 > = < \varphi, b_j b_1^{*\nu_1} \ldots b_n^{*\nu_n} \psi_0 >$$

$$= \begin{cases} \nu_j < \varphi, b_1^{*\nu_1} \ldots b_j^{*\nu_j - 1} \ldots b_n^{*\nu_n} \psi_0 > & \text{if } \nu_j > 0, \\ 0 & \text{if } \nu_j = 0. \end{cases}$$

Now let N^n denote the set of all ordered n-tuples $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n$ of non-negative integers. The above calculation shows that the elements $\psi_\nu, \nu \in N^n$, defined by

$$\psi_\nu = (\nu_1! \ldots \nu_n!)^{-\frac{1}{2}} b_1^{*\nu_1} \ldots b_n^{*\nu_n} \psi_0 \tag{3.7}$$

constitute an orthonormal basis for the subspace $R\psi_0$ of $S^?$. The elements ψ_ν are called the *Hermite elements* in $S^?$, and the subspace $R\psi_0$ spanned by them will henceforth be denoted $\tilde{S}^?$.

Straightforward calculation shows that

$$b_j^* \psi_\nu = (\nu_j + 1)^{1/2} \psi_{\nu_1 \ldots (\nu_j + 1) \ldots \nu_n}, \tag{3.8}$$

$$b_j \psi_\nu = \begin{cases} \nu_j^{1/2} \psi_{\nu_1 \ldots (\nu_j - 1) \ldots \nu_n} & \text{if } \nu_j > 0, \\ 0 & \text{if } \nu_j = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

We now turn to a study of the topology of a space $S^?$ of type S^n. It follows from (3.1) and (3.2) that all semi-norms $\|\cdot\|_k$ defined by

$$\|\varphi\|_k = \|k\varphi\|, \; \varphi \in S^?,$$

are continuous for $k \in R$, where R denotes the algebra defined in (3.6). Thus, the topology $\mathcal{T}$ on $S^?$ determined by these semi-norms is weaker than the topology of $\mathcal{S}^?$, and it is the weakest topology on $\mathcal{S}^?$ for which the norm $\|\cdot\|$ and the operators b_j and b_j^* are continuous.

(3.10) THEOREM. *The topology $\mathcal{T}$ on $\mathcal{S}^?$ is determined by the sequence of norms $\|\cdot\|_r$ defined by*

$$\|\varphi\|_r^2 = <\varphi, h^r\varphi> , \qquad r=0,1,\ldots, \tag{3.11}$$

where

$$h = \sum_{j=1}^{n} b_j b_j^* . \tag{3.12}$$

The norms $\|\cdot\|_r$ satisfy

$$\|\varphi\|_{r+1}^2 \geq n\,\|\varphi\|_r^2 . \tag{3.13}$$

Proof: First note that (3.13) is a consequence of the relation

$$h = n + \sum_{j=1}^{n} b_j^* b_j \geq n .$$

Note also that in view of (3.13) any subsequence of the sequence $\|\cdot\|_r$ determines the same topology as the whole sequence. Since $\|\varphi\|_{2s} = \|h^s\varphi\|$, all norms $\|\cdot\|_r$ are continuous in the topology $\mathcal{T}$, and hence, in order to prove that the norms $\|\cdot\|_r$ determine the topology $\mathcal{T}$, it is sufficient to prove that all norms $\|\cdot\|_k$, $k\in R$, or, equivalently, all operators b_j and b_j^*, are continuous in the topology determined by the norms $\|\cdot\|_r$. This, however, follows from the identities

$$b_j^* h^r b_j = (h-1)^r (b_j b_j^* - 1) ,$$

$$b_j h^r b_j^* = (h+1)^r b_j b_j^* ,$$

which give

$$\sum_{j=1}^{n} \|b_j\varphi\|_r^2 = <\varphi, (h-1)^r (h-n)\varphi> ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|b_j^*\varphi\|_r^2 = <\varphi, (h+1)^r h\varphi> .$$

THE MINIMAL SPACE $\tilde{s}^n$.

For each $\nu \in N^n$, let $\mathbf{C}_\nu$ denote a copy of the complex field, and define

$$\tilde{s}^n = \sum_{\nu \in N^n} \mathbf{C}_\nu$$

as the direct sum of the spaces $\mathbf{C}_\nu$. Thus, algebraically, $\tilde{s}^n$ is the space of all multiple sequences

$$c = \{c_\nu\}_{\nu \in N^n}$$

with only a finite number of coordinates c_ν different from zero, and the topology of $\tilde{s}^n$ is the direct sum topology, i. e., a semi-norm on $\tilde{s}^n$ in continuous iff its restriction to each summand space $\mathbf{C}_\nu$ is continuous (in this particular case this simply means that every semi-norm on $\tilde{s}^n$ is continuous — later, however, we shall need the general concept of a direct sum topology).

We define a scalar product in $\tilde{s}^n$ by

$$<c',c''> = \sum_{\nu \in N^n} \bar{c}'_\nu c''_\nu \,, \tag{3.14}$$

and operators b_j and b_j^* by

$$(b_j c)_{\nu_1 \dots \nu_j \dots \nu_n} = (\nu_j + 1)^{1/2} c_{\nu_1 \dots (\nu_j+1) \dots \nu_n} \,, \tag{3.15}$$

$$(b_j^* c)_{\nu_1 \dots \nu_j \dots \nu_n} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \nu_j = 0 \,, \\ \nu_j^{1/2} c_{\nu_1 \dots (\nu_j - 1) \dots \nu_n} & \text{if} \quad \nu_j > 0 \,. \end{cases} \tag{3.16}$$

It is then easily checked that $\tilde{s}^n$ is a space of type S^n.

Now let $S^?$ be any space of type S^n and let $\tilde{S}^?$ be the dense subspace of $S^?$ mentioned above. The mapping J defined by

$$J: \quad c \to \sum_{\nu \in N^n} c_\nu \psi_\nu \tag{3.17}$$

is then an algebraic isomorphism of $\tilde{s}^n$ onto $\tilde{S}^?$. By the properties of the direct sum topology, J is continuous. Furthermore, J preserves the scalar product and «commutes» with the operators b_j and b_j^* in the respective spaces in the sense that

$$b_j J = J b_j\,, \quad b_j^* J = J b_j^*\,. \tag{3.18}$$

Thus, J preserves the type-$\mathcal{S}^n$-structure, and hence it is justified to call $\tilde{s}^n$ a minimal space of type $\mathcal{S}^n$.

THE MAXIMAL SPACE s^n.

Since $\tilde{s}^n$ is a space of type $\mathcal{S}^n$, it has a topology $\mathcal{T}$ as explained above. The completion of $\tilde{s}^n$ with respect to this topology is denoted s^n. Since the scalar product and the operators b_j and b_j^* are continuous on $\tilde{s}^n$ in the topology $\mathcal{T}$, they have unique continuous extensions to s^n, the algebraic relations (3.2), (3.3), (3.4) and (3.5) hold for these extensions, the cyclic element ψ_0 of $\tilde{s}^n$ being also cyclic in s^n. Furthermore, in s^n we have $R\psi_0 = \tilde{s}^n$, which is dense in s^n, and hence s^n is a space of type $\mathcal{S}^n$.

We shall now prove that s^n is a maximal space of type $\mathcal{S}^n$.

Let $\mathcal{S}^?$ be any space of type $\mathcal{S}^n$, and let J be the mapping defined by (3.17). It is clear that J is a homeomorphism of $\tilde{s}^n$ onto $\tilde{\mathcal{S}}^?$ when both spaces are given the topology $\mathcal{T}$. It then follows from the analysis above that J^{-1} is continuous from $\tilde{\mathcal{S}}^?$ with the topology of $\mathcal{S}^?$ into $\tilde{s}^n$ with the topology $\mathcal{T}$, and since $\tilde{\mathcal{S}}^?$ is dense in $\mathcal{S}^?$, J^{-1} has a unique continuous extension J' which maps $\mathcal{S}^?$ into s^n.

Clearly J' maps the normalized cyclic element in $\mathcal{S}^?$ into the normalized cyclic element in s^n, it preserves the scalar product, and by continuity it follows from (3.18) that

$$b_i J' = J' b_i\,, \quad b_i^* J' = J' b_i^*\,.$$

Hence, J' preserves the type-$\mathcal{S}^n$-structure.

In the sequel we shall use the symbols $\tilde{\mathcal{S}}^n$ and $\mathcal{S}^n$ to denote an arbitrary minimal resp. maximal space of type $\mathcal{S}^n$—any two spaces $\tilde{\mathcal{S}}^n$ or $\mathcal{S}^n$ having of course isomorphic type-$\mathcal{S}^n$-structures.

With this convention, if $\mathcal{S}^?$ is any space of type $\mathcal{S}^n$, we may write

$$\tilde{\mathcal{S}}^n \subseteqq \mathcal{S}^? \subseteqq \mathcal{S}^n$$

algebraically and topologically, where $\tilde{\mathcal{S}}^n$ is the space formerly denoted $\tilde{\mathcal{S}}^?$, and provided with the topology of $\tilde{s}^n$, while $\mathcal{S}^n$ denotes the completion of $\mathcal{S}^?$ in the topology $\mathcal{T}$.

Before proceeding, we give a concrete representation of the space s^n as a space of fast decreasing multiple sequences.

(3.19) THEOREM. *The space s^n can be identified with the space of those multiple sequences $c=\{c_\nu\}_{\nu\in N^n}$ (with N^n defined as above), for which all the sums*

$$\sum_{\nu\in N^n}(|\nu|+n)^r|c_\nu|^2=\|c\|_r^2,$$

where $|\nu|=\nu_1+\ldots+\nu_n$, are finite. The topology of s^n is determined by the norms $\|\cdot\|_r$ defined above, the scalar product by (3.14), *and the operators b_j and b_j^* by* (3.15) *and* (3.16).

Proof: Trivial, since $h\psi_\nu=(|\nu|+n)\psi_\nu$.

REPRESENTATION OF S^n AS SCHWARTZ' SPACE (S^n) IN n DIMENSIONS.

Schwartz' space (S^n) over the n-dimensional space $\mathbf{R}^n$ is the space of those infinitely often differentiable functions φ on $\mathbf{R}^n$ for which all the semi-norms

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^n}|t^\alpha D^\beta\varphi(t)|$$

are finite, where

$$t^\alpha D^\beta\varphi(t)=t_1^{\alpha_1}\ldots t_n^{\alpha_n}\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial t_1^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial t_n^{\beta_n}}\varphi(t)\,.$$

The space (S^n) is given the topology determined by these semi-norms. It is clear that if we put

$$q_j=t_j\cdot\,,\quad p_j=-i\frac{\partial}{\partial t_j}$$

$$b_j=2^{-1/2}(p_j-iq_j)\,,\qquad b_j^*=2^{-1/2}(p_j+iq_j)\,,$$

then the operators b_j and b_j^* satisfy (3.2), (3.3), and (3.4), the semi-norms

$$\|\varphi\|_k^{(S^n)}=\sup_{t\in\mathbf{R}^n}|k\varphi(t)|$$

are continuous in the topology of $(\mathcal{S}^n)$ for all operators $k\in R$, and the topology of $(\mathcal{S}^n)$ is determined by these semi-norms.

It is well known that $(\mathcal{S}^n)\subset\mathcal{L}^2$ (w. r. t. Lebesgue measure) and that the $\mathcal{L}^2$-norm $\|\cdot\|$ can be estimated by

$$\|\varphi\|\leqq C\|\varphi\|_k^{(\mathcal{S}^n)},$$

where

$$k=(1+\sum_{j=1}^{n} q_j^2)^s$$

with $4s>n$.

On the other hand we have

(3.20) Sobolev's lemma ([20]). *If s is an integer with $s>\frac{n}{2}$, then there exists a constant K such that*

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^n}|\varphi(t)|\leqq K(\|\varphi\|+\sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=s}\|p_1^{\beta_1}\ldots p_n^{\beta_n}\varphi\|)$$

for all $\varphi\in(\mathcal{S}^n)$.

Consequently, the topology of $(\mathcal{S}^n)$ is determined by the system of semi-norms

$$\|\varphi\|_k=\|k\varphi\|,\quad k\in R,$$

so that the topology of $(\mathcal{S}^n)$ is in fact the topology $\mathcal{T}$.

It is well known that the Hermite functions

$$\psi_\nu=(\nu_1!\ldots\nu_n!)^{-1/2}b_1^{*\nu_1}\ldots b_n^{*\nu_n}\psi_0,$$

where

$$\psi_0(t)=\pi^{-n/4}\exp(-\Sigma t_j^2/2)$$

are elements of $(\mathcal{S}^n)$, that they constitute a complete orthonormal system in $\mathcal{L}^2$, and that (3.5) holds. Let $(\tilde{\mathcal{S}}^n)$ denote the linear subspace of $(\mathcal{S}^n)$ spanned by the Hermite functions. Evidently, $(\tilde{\mathcal{S}}^n)$ can be identified algebraically with $\tilde{\mathcal{S}}^n$.

Since $(\mathcal{S}^n)$ has the topology $\mathcal{T}$ of the maximal space $\mathcal{S}^n$ and is complete, it follows that $(\mathcal{S}^n)$ contains a maximal space $\mathcal{S}^n$.

On the other hand, for any element $\varphi \in (\mathcal{S}^n)$, the norm $\| h^r \varphi \| = \| \varphi \|_{2r}$ is finite, since $h^r\varphi$ is an element of $(\mathcal{S}^n)$.

Now, if

$$\varphi = \sum_{\nu \in N^n} c_\nu \psi_\nu ,$$

then

$$<\psi_\nu, h^r\varphi> = <h^r\psi_\nu, \varphi> = (|\nu| + n)^r c_\nu ,$$

and hence, by Parsevals formula,

$$\sum_{\nu \in N^n} (|\nu| + n)^{2r} |c_\nu|^2 = \|\varphi\|_{2r}^2 < \infty .$$

Thus, $(\mathcal{S}^n)$ may be identified with a subspace of the maximal space $\mathcal{S}^n$.

Hence we have the result: *Schwartz' space $(\mathcal{S}^n)$ in n dimensions is a copy of the maximal space $\mathcal{S}^n$.*

We remark that the algebraic and topological isomorphism of Schwartz' space $(\mathcal{S}^n)$ with the space s^n of fast decreasing sequences is well known (cf., for instance, Schwartz [18]).

The remaining part of this section contains material needed later.

A conjugation in the space $\mathcal{S}$.

In the sequel $\mathcal{S}$ will always denote the maximal space $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1$, which, as noted above, can be represented as a space of sequences or as Schwartz' space $(\mathcal{S})$ over the real line.

If we interpret $\mathcal{S}$ as Schwartz' space of rapidly decreasing testing functions on the real line, then there is defined a natural conjugation $\varphi \to \varphi^*$ in $\mathcal{S}$ by $\varphi^*(t) = \overline{\varphi(t)}$.

It is easily verified that $\psi_0^* = \psi_0$ and $(b^*\varphi)^* = -b^*\varphi^*$, and hence, in the sequence representation,

$$(\Sigma c_n \psi_n)^* = \Sigma(-1)^n \bar{c}_n \psi_n ,$$

ψ_n being the Hermite elements in $\mathcal{S}$.

THE TENSOR PRODUCT $S^{n\otimes}$ AS A SPACE OF TYPE S^n.

Let $S^{n\otimes}$ denote the n-fold algebraic tensor product

$$S^{n\otimes}=S\otimes\ldots\otimes S \ ,$$

i. e. $S^{n\otimes}$ is a vector space having the family of ordered n-ics of the form

$$\varphi=\varphi_1\cdots\varphi_n \ , \qquad \varphi_j\in S \quad \text{for} \quad j=1,\ldots,n,$$

as generators.

We define a scalar product on $S^{n\otimes}$ by putting

$$<\varphi_1\cdots\varphi_n,\omega_1\cdots\omega_n> = \prod_{j=1}^{n} <\varphi_j,\omega_j>$$

for the generating n-ics and then extending by linearity.

Let b and b^* denote the operators b_1 and b_1^* in $S=S^1$, and define

$$b_j(\varphi_1\cdots\varphi_j\cdots\varphi_n)=\varphi_1\cdots(b\varphi_j)\cdots\varphi_n \ ,$$
$$b_j^*(\varphi_1\cdots\varphi_j\cdots\varphi_n)=\varphi_1\cdots(b^*\varphi_j)\cdots\varphi_n \ .$$

It is clear that if we determine a topology on $S^{n\otimes}$ by means of the norms $\|\cdot\|_r$ defined by (3.11), then $S^{n\otimes}$ is a space of type S^n, and its topology is the topology $\mathcal{T}$. Observe that $S^{n\otimes}$ is not complete for $n>1$.

THE SYMMETRIC SPACES $S_+^{n\otimes}$ AND S_+^n.

We add a few remarks on the symmetric parts of the n-fold algebraic tensor product $S^{n\otimes}$ and of S^n.

On the generating elements of $S^{n\otimes}$ we define an operator sym by

$$\text{sym}\ (\varphi_1\cdots\varphi_n)=(n!)^{-1}\sum_{\pi\in S_n}\varphi_{\pi(1)}\cdots\varphi_{\pi(n)} \ ,$$

where S_n denotes the symmetric group of degree n, and extend sym by linearity to the whole of $S^{n\otimes}$. It is easily verified that sym is an orthogonal projection w. r. t. the scalar product in $S^{n\otimes}$.

Furthermore, if k is any linear operator in $\mathcal{S}$, and if we define k_j by

$$k_j(\varphi_1 \dots \varphi_j \dots \varphi_n) = \varphi_1 \dots (k\varphi_j) \dots \varphi_n \tag{3.21}$$

on the generating elements of $\mathcal{S}^{n\otimes}$ and extend by linearity, then

$$\text{sym } k^{(n)} = k^{(n)} \text{ sym},$$

where

$$k^{(n)} = k_1 + \dots + k_n . \tag{3.22}$$

Hence, if we define

$$\mathcal{S}_+^{n\otimes} = \text{sym } (\mathcal{S}^{n\otimes}) ,$$

then $\mathcal{S}_+^{n\otimes}$ is invariant under $k^{(n)}$ for any linear operator k in $\mathcal{S}$.

In particular, $\mathcal{S}_+^{n\otimes}$ is invariant under the operator $h^{(n)}$, which we earlier denoted h, and which determines the topology $\mathcal{T}$.

It also follows that

$$\| \text{sym } \varphi \|_{2s} = \| h^{(n)\ s} \text{ sym } \varphi \| \leqq \| h^{(n)\ s} \varphi \| = \| \varphi \|_{2s}$$

for $\varphi \in \mathcal{S}^{n\otimes}$, which shows that sym is continuous on $\mathcal{S}^{n\otimes}$ in the topology $\mathcal{T}$.

Consequently, sym has a unique continuous extension to $\mathcal{S}^n$; we shall also denote this extension by sym — it is of course a projection in $\mathcal{S}^n$, and its effect in any of the two standard representations of $\mathcal{S}^n$ is exactly what one could expect. The symmetric part sym $\mathcal{S}^n$ of $\mathcal{S}^n$ is denoted $\mathcal{S}_+^n$.

Finally, let us prove the following useful lemma.

(3.23) LEMMA. *If T is a linear transformation from $\mathcal{S}^{n\otimes}$ into some vector space V and if*

$$T(\varphi^n) = T(\varphi \dots \varphi) = 0 \quad \textit{for all } \varphi \in \mathcal{S} ,$$

then $T(\omega) = 0$ for all $\omega \in \mathcal{S}_+^{n\otimes}$.

Proof: It is sufficient to prove that $T(\mathrm{sym}(\varphi_1\dots\varphi_n))=0$ for all generating elements $\varphi_1\dots\varphi_n$ in $S^{n\otimes}$. By assumption we have, for all complex numbers $c_1,\dots,c_n$,

$$T((c_1\varphi_1+\dots+c_n\varphi_n)^n)=0 \ .$$

The left hand side is a polynomial in $c_1,\dots,c_n$, and since it is identically 0, all coefficients must be 0. In particular, the coefficient to the term $c_1c_2\dots c_n$ must be 0, and this coefficient is $n!T(\mathrm{sym}(\varphi_1\dots\varphi_n))$.

(3.24) COROLLARY. *The elements of the form* φ^n, $\varphi\in S$, *generate* $S_+^{n\otimes}$.

4. Spaces of type $\mathfrak{S}$.

DEFINITION.

By a *space of type* $\mathfrak{S}$ we understand a locally convex space $\mathfrak{S}^?$ with the following properties:

(4.1) There exists a scalar product $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ on $\mathfrak{S}^?$, and the corresponding norm $|||\cdot|||$ is continuous on $\mathfrak{S}^?$.

(4.2) There exist continuous linear mappings a and a^* from S into $L(\mathfrak{S}^?,\mathfrak{S}^?)$ (the space of all continuous linear transformations of $\mathfrak{S}^?$ into $\mathfrak{S}^?$ provided with the topology of uniform convergence on bounded sets), such that

(4.3) $a(\varphi^*)$ and $a^*(\varphi)$ are adjoint with respect to the scalar product in $\mathfrak{S}^?$ for all $\varphi\in S$,

(4.4) $[a(\varphi^*),a(\psi^*)]=[a^*(\varphi),a^*(\psi)]=0$,

(4.5) $[a(\varphi^*),a^*(\psi)]=\langle\varphi,\psi\rangle$.

(4.6) There exists an element $\Psi_0\in\mathfrak{S}^?$, called the *vacuum element*, such that $|||\Psi_0|||=1$ and $a(\varphi^*)\Psi_0=0$ for all $\varphi\in S$, and such that

(4.7) $\mathbb{R}\Psi_0$ is dense in $\mathfrak{S}^?$, where $\mathbb{R}$ denotes the subalgebra of $L(\mathfrak{S}^?,\mathfrak{S}^?)$ generated by all operators $a(\varphi^*)$ and $a^*(\varphi)$, $\varphi\in S$.

(4.8) To every symmetric operator $k\in R$ (cf. (3.6)), there exists a symmetric operator $K\in L(\mathfrak{S}^?,\mathfrak{S}^?)$, satisfying

(4.9) $[K,a^*(\varphi)]=a^*(k\varphi)$.

ANALYSIS.

Exactly as in Section 3 we conclude that the subspace $\tilde{\mathfrak{S}}^{?}=\mathcal{R}\Psi_0$ of an arbitrary space $\mathfrak{S}^{?}$ of type $\mathfrak{S}$ is spanned by all elements of the form $a^*(\varphi_1)a^*(\varphi_2)\ldots a^*(\varphi_n)\Psi_0$, $n=0,1,\ldots$, $\varphi_j\in S$.

The operator $a^{*n\otimes}$ defined on the generating elements of $S^{n\otimes}$ by

$$a^{*n\otimes}(\varphi_1\ldots\varphi_n)=a^*(\varphi_1)\ldots a^*(\varphi_n)$$

can be extended by linearity to all of $S^{n\otimes}$. Since any two operators $a^*(\varphi)$ and $a^*(\psi)$ commute, we have

$$a^{*n\otimes}=a^{*n\otimes}\ \mathrm{sym}\ ,$$

so that the range of $a^{*n\otimes}$ is attained on $S_+^{n\otimes}$.

As in Section 3 we further prove that

$$\langle\!\langle a^*(\varphi)^m\Psi_0, a^*(\psi)^n\Psi_0\rangle\!\rangle=\delta_{mn}n!<\varphi,\psi>^n,$$

and from Corollary (3.24) we then conclude

(4.10) THEOREM. *If $\mathfrak{S}^{?}$ is any space of type $\mathfrak{S}$, then the mapping*

$$\omega\to(n!)^{-\frac{1}{2}}a^{*n\otimes}(\omega)\Psi_0$$

is an isometry of $S_+^{n\otimes}$ into $\mathfrak{S}^{?}$.

The images of these mappings are pairwise orthogonal, and their direct sum is equal to $\tilde{\mathfrak{S}}^{?}$ (for convenience, we define $S^{0\otimes}=S_+^{0\otimes}=\mathbf{C}$, and for $c\in\mathbf{C}$ we define $a^{*0\otimes}(c)=cI$). *Thus, every element $\Phi\in\tilde{\mathfrak{S}}^{?}$ has a unique representation as a finite orthogonal sum*

$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}{}'(n!)^{-\frac{1}{2}}a^{*n\otimes}(\varphi^{(n)})\Psi_0$$

with $\varphi^{(n)}\in S_+^{n\otimes}$.

When investigating the consequences of the requirements (4.8) and (4.9), we need the following lemma.

(4.11) LEMMA. *The set of equations*

$$a(\varphi^*)\Psi=0 \quad \textit{for all } \varphi\in S$$

have in $\mathfrak{S}^?$ *the only solutions*

$$\Psi=c\Psi_0, \quad c\in\mathbf{C}\,.$$

Proof. A solution orthogonal to Ψ_0 is easily seen to be orthogonal to all of $\tilde{\mathfrak{S}}^?$, which, however, is dense in $\mathfrak{S}^?$.

Next, note that if K is symmetric and satisfies (4.9), then we get, taking adjoints,

$$[a(\varphi^*),K]=a((k\varphi)^*)\ . \tag{4.12}$$

(4.13) LEMMA. *If k is any linear operator in S, then there exists a unique linear operator K in $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ satisfying the conditions* (4.9), (4.12), *and*
(4.14) $K\Psi_0=0$.

Any operator K_1 satisfying (4.9) *and* (4.12) *differs from K by a multiple of the identity.*

The operator K is characterized by (4.14) *and*

$$K((n!)^{-\frac{1}{2}}\,a^{*n\otimes}(\omega)\Psi_0)=(n!)^{-\frac{1}{2}}\,a^{*n\otimes}(k^{(n)}\omega)\Psi_0 \tag{4.15}$$

for $n>0$ and $\omega\in S_+^{n\otimes}$, where $k^{(n)}$ is the operator defined in (3.22).

Proof. It follows from (4.9) that

$$Ka^*(\varphi)^n=a^*(\varphi)^nK+na^*(k\varphi)a^*(\varphi)^{n-1}\,,$$

and then from Corollary (3.24) that

$$[K,a^{*n\otimes}(\omega)]=a^{*n\otimes}(k^{(n)}\omega) \tag{4.16}$$

for $\omega\in S_+^{n\otimes}$. The formula (4.15), and hence the uniqueness of K, now follows from (4.14) and (4.16).

On the other hand, it is easily verified that the operator K defined on $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ by (4.14) and (4.15) satisfies (4.9) and (4.12).

Finally, if K_1 satisfies (4.9) and (4.12), then it follows from Lemma (4.11) that $K_1\Psi_0=c\Psi_0$, and hence the operator $K=K_1-cI$ satisfies (4.14). Obviously, K satisfies (4.9) and (4.12), and the lemma is proved.

Note that since $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ is dense in $\mathfrak{S}^?$, a continuous operator K on $\mathfrak{S}^?$ is uniquely determined by the conditions (4.9), (4.12) and (4.14).

For any operator $k\in L(S,S)$, both the operator K defined on $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ by (4.14) and (4.15) and its continuous extension to $\mathfrak{S}^?$ (if it exists) are called the *normalized bi-quantization* of k.

THE MINIMAL SPACE $\tilde{\mathfrak{S}}'$ AND ITS FOCK REPRESENTATION.

We define the space $\tilde{\mathfrak{S}}'$ as the direct sum

$$\tilde{\mathfrak{S}}' = \sum_{n=0}^{\infty} S_+^{n\otimes} , \tag{4.17}$$

and we shall write elements $\Phi\in\tilde{\mathfrak{S}}'$ in one of the forms

$$\Phi=\{\varphi^{(n)}\}=\{\varphi^{(0)},\varphi^{(1)},\ldots\} .$$

Theorem (4.10) can now be formulated: *The mapping*

$$J: \quad \{\varphi^{(n)}\} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}{}' (n!)^{-\frac{1}{2}}\, a^{*n\otimes}(\varphi^{(n)})\Psi_0 \tag{4.18}$$

is an algebraic isomorphism of $\tilde{\mathfrak{S}}'$ onto the dense subspace $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ of any space $\mathfrak{S}^?$ of type $\mathfrak{S}$.

We give $\tilde{\mathfrak{S}}'$ the direct sum topology as explained in Section 3. Then, if we define a scalar product in $\tilde{\mathfrak{S}}'$ by

$$\langle\!\langle \Phi,\Omega \rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}{}' < \varphi^{(n)},\omega^{(n)} > , \tag{4.19}$$

this scalar product is continuous.

We shall now show that $\tilde{\mathfrak{S}}'$ can be organized as a space of type $\mathfrak{S}$.

The operators $a^*(\varphi)$ and $a(\varphi^*)$ in $\tilde{\mathfrak{S}}'$ should of course be defined in such a way that J preserves the type-$\mathfrak{S}$-structure. It is clearly sufficient to define these operators on the subspaces $S_+^{n\otimes}$ of $\tilde{\mathfrak{S}}'$, and since we have

$$a^*(\varphi)\big((n!)^{-1/2}a^{*n\otimes}(\omega)\Psi_0\big)=\big((n+1)!\big)^{-1/2}a^{*(n+1)\otimes}\big((n+1)^{1/2}\ \mathrm{sym}\ \varphi\omega\big)\Psi_0\,,$$

and

$$a(\varphi^*)\big((n!)^{-1/2}a^{*n\otimes}(\psi^n)\Psi_0\big)=\big((n-1)!\big)^{-1/2}a^{*(n-1)\otimes}(n^{1/2}<\varphi,\psi>\psi^{n-1})\Psi_0$$

in any space $\mathfrak{S}^?$ (with trivial modifications for $n=0$), we are led to the following definitions, in which we consider the summand spaces $S_+^{n\otimes}$ as embedded in $\tilde{\mathfrak{S}}'$:

$$a^*(\varphi)\omega=(n+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sym}(\varphi\omega)\quad\text{for } \omega\in S_+^{n\otimes}\,, \tag{4.20}$$

$$a(\varphi^*)\omega=\begin{cases} n^{\frac{1}{2}}<\varphi,\omega>_{(1)} & \text{for}\quad \omega\in S_+^{n\otimes}\quad\text{if } n>0\,,\\ 0 & \text{for}\quad \omega\in S_+^{0\otimes}\,. \end{cases} \tag{4.21}$$

Here $<\varphi,\cdot>_{(1)}$ denotes that linear mapping from $S^{n\otimes}$ into $S^{(n-1)\otimes}$, which on the generating elements $\omega=\varphi_1\ldots\varphi_n\in S^{n\otimes}$ is given by

$$<\varphi,\omega>_{(1)}=<\varphi,\varphi_n>\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}\,.$$

Straightforward calculations show that the linear operators a and a^* thus defined satisfy the conditions (4.3) — (4.7). It remains to prove that the continuity requirement (4.2) is satisfied. The proof is based on the two lemmas (4.22) and (4.25) below, which, for purposes of later reference, are given a formulation slightly more general than presently needed.

(4.22) LEMMA. *If* $\varphi\in S^m$ *and* $\psi\in S^n$, *then* $\varphi\psi\in S^{m+n}$, *and*

$$\|\varphi\psi\|_r^2=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\|\varphi\|_s^2\ \|\psi\|_{r-s}^2\,. \tag{4.23}$$

Consequently, the bilinear mapping $(\varphi,\psi)\to\varphi\psi$ *from* $S^m\times S^n$ *into* S^{m+n} *is jointly continuous.*

Proof. If Schwartz' representation is used, then it is obvious that $\varphi\psi\in S^{m+n}$. The relation (4.23) is a consequence of

$$\begin{aligned}\|\varphi\psi\|_r^2 &= <\varphi\psi, h^{(m+n)\ r}\varphi\psi> \\ &= <\varphi\psi,(h^{(m)}+h^{(n)})^r\varphi\psi> \\ &= \sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}<\varphi\psi, h^{(m)\ s}\varphi\ h^{(n)\ r-s}\psi> \\ &= \sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\|\varphi\|_s^2\ \|\psi\|_{r-s}^2,\end{aligned}$$

the notation being obvious.

For $\varphi\in S^m$, $\psi\in S^n$, $m\leqq n$, we define $<\varphi,\psi>_{(m)}$ in analogy with the case $m=1$, that is, using the function representation,

$$<\varphi,\psi>_{(m)}(y)=\int\varphi^*(x)\psi(y,x)dx\,, \tag{4.24}$$

x and y denoting points in $\mathbf{R}^m$ and $\mathbf{R}^{n-m}$ respectively.

We then have

(4.25) LEMMA. *If $\varphi\in S^m$ and $\psi\in S^n$, where $m\leq n$, then $<\varphi,\psi>_{(m)}\in S^{n-m}$, and*

$$\|<\varphi,\psi>_{(m)}\|_r\leq\|\varphi\|\ \|\psi\|_r\,. \tag{4.26}$$

Consequently, the sesquilinear mapping $(\varphi,\psi)\to<\varphi,\psi>_{(m)}$ from $S^m\times S^n$ into S^{n-m} is jointly continuous.

Proof. We have

$$\begin{aligned}\|<\varphi,\psi>_{(m)}\|^2 &= \int\left|\int\varphi^*(x)\psi(y,x)dx\right|^2 dy \\ &\leq\|\varphi\|^2\left(\int\left|\psi(y,x)\right|^2 dx\right)dy \\ &= \|\varphi\|^2\ \|\psi\|^2\end{aligned}$$

for all $\psi \in S^n$, and consequently also

$$\begin{aligned} \|\langle\varphi,\psi\rangle_{(m)}\|_r &= \|(h_1+\ldots h_{n-m})^{r/2}\langle\varphi,\psi\rangle_{(m)}\| \\ &= \|\langle\varphi,(h_1+\ldots+h_{n-m})^{r/2}\psi\rangle_{(m)}\| \\ &\leq \|\varphi\| \; \|(h_1+\ldots+h_{n-m})^{r/2}\psi\| \\ &\leq \|\varphi\| \; \|\psi\|_r \,. \end{aligned}$$

From (4.23) and (4.26) it follows that $a^*(\varphi)$ and $a(\varphi^*)$, $\varphi \in S$, are continuous from $S_+^{n\otimes}$ (considered as a subspace of $\tilde{\mathfrak{S}}'$) into $\tilde{\mathfrak{S}}'$, and from the definition of the direct sum topology it then follows that $a^*(\varphi)$ and $a(\varphi^*)$ belong to $L(\tilde{\mathfrak{S}}',\tilde{\mathfrak{S}}')$

In order to prove that a^* and a are continuous from S into $L(\tilde{\mathfrak{S}}',\tilde{\mathfrak{S}}')$, when the latter space is provided with the topology of uniform convergence on bounded sets, we first note that every bounded set B in $\tilde{\mathfrak{S}}'$ is contained in a set of the form $\sum_{n=0}^{N} B_n$ with $N<\infty$, where each B_n is a bounded set in $S_+^{n\otimes}$.

Thus, it is sufficient to prove that a^* and a are continuous from S into $L(S_+^{n\otimes},\tilde{\mathfrak{S}}')$ for each n, and this again follows from (4.23) and (4.26).

Next, it follows from Lemma (4.13) that the normalized bi-quantization K of a symmetric operator $k \in R$ must be defined by

$$K\omega = \begin{cases} k^{(n)}\omega & \text{for } \omega \in S_+^{n\otimes} \quad \text{if } n>0\,, \\ 0 & \text{for } \omega \in S_+^{0\otimes}\,, \end{cases} \tag{4.27}$$

and it is easily verified that if K is defined by (4.27), then (4.9) holds. Also, if k is symmetric in S, then so is $k^{(n)}$ in $S_+^{n\otimes}$, and hence K is symmetric in $\tilde{\mathfrak{S}}'$. All that remains to be proved is the continuity of K. As in the case of $a^*(\varphi)$ and $a(\varphi^*)$, this follows from

(4.28) LEMMA. *If $k \in L(S,S)$, then for each $r=0,1,\ldots$ there exist constants $A(r)$ and $q(r)$, which do not depend upon n, such that*

$$\|k^{(n)}\omega\|_r \leq A(r)\;\|\omega\|_{q(r)} \quad \textit{for all } \omega \in S^{n\otimes}\,, \tag{4.29}$$

when $n>0$.

Proof. Since k is continuous in S, there exist constants $C(r)$ and $p(r)$ such that

$$\|k\varphi\|_r \leq C(r)\;\|\varphi\|_{p(r)} \quad \text{for all } \varphi \in S\,,$$

where we may assume $p(r) \geq r$ in view of (3.13).

Now consider one of the operators $k_j, j=1,\ldots,n$ (cf. (3.21)). For definiteness, let us assume $j=1$. Every element $\omega \in S^{n\otimes}$ can be written in the form

$$\omega = \sum_\nu \varphi_\nu \psi_\nu ,$$

where ψ_ν runs through the Hermite elements of $S^{(n-1)\otimes}$, while $\varphi_\nu = <\psi_\nu, \omega>_{(n-1)} \in S$, the multiple series being unconditionally convergent in $S^{n\otimes}$. The norms of ω are given by

$$\begin{aligned}\|\omega\|_r^2 &= <\sum_\nu \varphi_\nu\psi_\nu, (h_1 + \ldots + h_n)^r \sum_\nu \varphi_\nu\psi_\nu> \\ &= <\sum_\nu \varphi_\nu\psi_\nu, \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} h_1^{r-s} (h^{(n-1)})^s \sum_\nu \varphi_\nu\psi_\nu> \\ &= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \sum_\nu \|\psi_\nu\|_s^2 \ \|\varphi_\nu\|_{r-s}^2 ,\end{aligned}$$

so that also

$$\begin{aligned}\|k_1\omega\|_r^2 &= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \sum_\nu \|\psi_\nu\|_s^2 \ \|k\varphi_\nu\|_{r-s}^2 \\ &\leq 2^r C(r)^2 \sum_\nu \|\psi_\nu\|_{p(r)}^2 \ \|\varphi_\nu\|_{p(r)}^2 \\ &= 2^r C(r)^2 \sum_\nu <\varphi_\nu\psi_\nu, h_1^{p(r)} h^{(n-1)p(r)} \varphi_\nu\psi_\nu> \\ &\leq 2^r C(r)^2 \ \|\omega\|_{2p(r)}^2 .\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}\| k^{(n)}\omega \|_r &\leq nA(r) \ \| \omega \|_{2p(r)} \\ &\leq A(r) \ \| \omega \|_{2p(r)+2} .\end{aligned}$$

We have now proved

(4.30) THEOREM. *Let the space* $\mathfrak{S}'$ *defined in* (4.17) *be provided with the scalar product* (4.19), *and let the operators* a^* *and* a *be defined by* (4.20) *and* (4.21).

Then $\tilde{\mathfrak{S}}'$ is a space of type $\mathfrak{S}$, a normalized vacuum element being $\{1,0,0,\ldots\}$, *and the normalized bi-quantization of any operator $k \in R$ being given by* (4.27).

We shall next prove

(4.31) THEOREM. *$\tilde{\mathfrak{S}}'$ is a minimal space of type $\mathfrak{S}$, i. e., if $\mathfrak{S}^?$ is any space of type $\mathfrak{S}$, then there exists a continuous identification mapping J of $\tilde{\mathfrak{S}}'$ onto a dense subspace $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ of $\mathfrak{S}^?$, which preserves the type-$\mathfrak{S}$-structure.*

By this last statement we mean that J preserves scalar products, that it maps a normalized vacuum element into a normalized vacuum element, and that it «commutes» with all operators $a(\varphi^*)$ and $a^*(\varphi)$ as well as with all normalized biquantizations K of symmetric operators $k \in R$.

Proof. The identification mapping J of the theorem is of course the mapping defined by (4.18). Obviously, all we need prove is that J is continuous, and hence, it is sufficient to verify that the mapping

$$\omega \to (n!)^{-\frac{1}{2}} a^{*n\otimes}(\omega)\Psi_0 \tag{4.32}$$

from $S_+^{n\otimes}$ into $\mathfrak{S}^?$ is continuous for each n. By assumption, a^* is continuous from S into $L(\mathfrak{S}^?, \mathfrak{S}^?)$, and hence the multilinear mapping

$$(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \to (n!)^{-\frac{1}{2}} a^*(\varphi_1)\ldots a^*(\varphi_n)\Psi_0$$

is continuous in each variable separately. It then follows from results due to Grothendieck [8] that the mapping (4.32) is continuous. For completeness, we shall give an elementary direct proof for the case $n=2$.

Let U be a neighbourhood of 0 in $\mathfrak{S}^?$. We first prove that there exists a neighbourhood

$$K_{r,\sigma} = \{\varphi \in S \mid \|\varphi\|_r < \sigma\}$$

of 0 in S such that

$$\varphi \in K_{r,\sigma}, \psi \in K_{r,\sigma} \Rightarrow a^*(\varphi)a^*(\psi)\Psi_0 \in U\ .$$

Assume the contrary, then there exists a sequence of pairs φ_n, ψ_n, such that

$$\|\varphi_n\|_n < \frac{1}{n}, \quad \|\psi_n\|_n < \frac{1}{n}$$

and

$$a^*(\varphi_n)a^*(\psi_n)\Psi_0 \notin U \,. \tag{4.33}$$

Now, since $\psi_n \to 0$ in S, the set $\{\psi_n\}$ is bounded in S, and hence the set

$$B = \{\Psi \mid \Psi = a^*(\psi_n)\Psi_0 \quad \text{for some } n\}$$

is bounded in $\mathfrak{S}^?$.

On the other hand, since $\varphi_n \to 0$ in S, $a^*(\varphi_n)\Psi$ tends to 0 in $\mathfrak{S}^?$ uniformly on every bounded set, but that contradicts (4.33).

The continuity of the mapping (4.32) now follows from

(4.34) LEMMA. *Let $K^2_{r,\sigma}$ denote the subset*

$$K^2_{r,\sigma} = \{\chi \mid \chi = \varphi\psi, \varphi \in K_{r,\sigma}, \psi \in K_{r,\sigma}\}$$

of $S^{2\otimes}$. Then the convex hull $\operatorname{conv}(K^2_{r,\sigma})$ *contains a neighbourhood*

$$V_\rho = \{\chi \mid \|\chi\|_{2r+8} < \rho\}$$

of 0 in $S^{2\otimes}$.

Proof. We first remark that $\|\chi\|^2_{2s} \geqslant \langle \chi, h_1^s h_2^s \chi \rangle$ in $S^{2\otimes}$. Thus, for all elements χ of V_ρ,

$$\langle \chi, h_1^{r+4} h_2^{r+4} \chi \rangle < \rho^2 .$$

As $\chi \in S^{2\otimes}$, it is of the form

$$\chi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \psi_{n+j} , \quad \psi_k \in S , \quad k = 1,\ldots,2n ,$$

for some integer n. Consider the at most $2n$-dimensional space E spanned by $\psi_1,\ldots,\psi_{2n}$, and let P_E be the projection of S on E with respect to the scalar product $\langle \cdot , \cdot \rangle_r = \langle \cdot , h^r \cdot \rangle$. Further, let $h_E = P_E h^4 P_E$ denote the «projection on E» of the operator h^4, and let $\varkappa_\mu, \mu = 1,\ldots,\dim E \leqslant 2n$, be a system of eigenfunctions of h_E, orthonormal w. r. t. $\langle \cdot , \cdot \rangle_r$. Thus

$$\langle \varkappa_\mu , h^r \varkappa_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} ,$$

$$\langle \varkappa_\mu , h^{r+4} \varkappa_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu} \lambda_\mu .$$

Obviously, we may assume that the eigenvalues λ_μ do not decrease with μ. By the well known maximum-minimum properties of the eigenvalues of self-adjoint operators, we conclude that

$$\lambda_\mu \geqslant \mu^4 ,$$

the number on the right hand side being the μ' th eigenvalue of the operator h^4. For the application to the present case it is of course essential that the operator which enters the scalar product $<\cdot\,,\cdot>_r$ commutes with h^4.

If we expand χ in the form

$$\chi = \sum_{\mu,\nu=1}^{\dim E} t_{\mu\nu} \varkappa_\mu \varkappa_\nu ,$$

then

$$<\chi, h_1^{r+4} h_2^{r+4} \chi> = \sum_{\mu,\nu=1}^{\dim E} | t_{\mu\nu} |^2 \lambda_\mu \lambda_\nu < \rho^2 .$$

Thus, we have the upper bound

$$| t_{\mu\nu} | < \rho \mu^{-2} \nu^{-2} .$$

Further, as $\| \varkappa_\mu \|_r = 1$, we have, choosing $\hat{\sigma} < \sigma$,

$$\chi = \sum_{\mu,\nu=1}^{\dim E} t_{\mu\nu} \hat{\sigma}^{-2} \hat{\varkappa}_\mu \hat{\varkappa}_\nu ,$$

where $\hat{\varkappa}_\mu \in K_{r,\sigma}$. The proof of the lemma is now completed by use of the estimate

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\dim E} | t_{\mu\nu} | \hat{\sigma}^{-2} < \frac{\pi^4 \rho}{36 \hat{\sigma}^2} .$$

THE MINIMAL COMPLETE SPACE $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$.

We define the space $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ as the direct sum

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_+^n$$

with the same convention as above: S_+^0 is interpreted as $\mathbf{C}$. Elements in $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ are represented in the same way as elements in $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}'$.

It is easily seen that $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ is a complete space — in fact, that it is the completion of $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}'$. In particular, $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}'$ is dense in $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$, so that every continuous linear transformation from $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}'$ into some complete locally convex space S has a unique continuous extension from $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ into S.

If we apply this remark with $S = \tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$, it follows that $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ is of type $\mathfrak{S}$, and if we apply it with $S = \mathfrak{S}^?$, where $\mathfrak{S}^?$ is any complete space of type $\mathfrak{S}$, we get

(4.35) THEOREM. *$\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$ is a minimal complete space of type $\mathfrak{S}$.*

This statement is to be interpreted in the way elaborated in the formulation of the theorem (4.31).

THE MAXIMAL SPACE $\mathfrak{S}$ AND ITS FOCK REPRESENTATION.

We define the space $\mathfrak{S}$ as the completion of an arbitrary space $\mathfrak{S}^?$ of type $\mathfrak{S}$ in the topology $\mathfrak{T}$ determined by all semi-norms of the form $|||\cdot|||_T$, where

$$|||\Phi|||_T = |||T\Phi|||,$$

for operators T in the algebra generated by all $a(\varphi^*)$ and $a^*(\varphi)$ and all normalized bi-quantizations K of self-adjoint operators $k \in R$.

By exactly the same line of reasoning as was applied in Section 3 one proves

(4.36) THEOREM. *$\mathfrak{S}$ is a maximal space of type $\mathfrak{S}$.*

There is only one detail in the proof of this which is not obvious, and that is the fact that the operators a and $a^*\colon \mathcal{S} \to L(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ are continuous. The proof of this is postponed until later (lemma (4.47)).

First, we prove that the topology $\mathcal{J}$ of an arbitrary space $\mathfrak{S}^?$ of type $\mathfrak{S}$ arises from a metric by exhibiting a sequence of norms which determine this topology.

(4.37) THEOREM. *The topology $\mathcal{J}$ of any space $\mathfrak{S}^?$ of type $\mathfrak{S}$ is determined by the increasing sequence of norms $|||\cdot|||_r$ given by*

$$|||\Phi|||_r^2 = \langle\!\langle \Phi,(H+P_0)^r\Phi \rangle\!\rangle \quad \textit{for} \ \ r=0,1,\ldots,$$

or, equivalently, by the norm $|||\cdot|||$ and the increasing sequence of semi-norms $|||\cdot|||_{(r)}$ defined by

$$|||\Phi|||_{(r)}^2 = \langle\!\langle \Phi,H^r\Phi \rangle\!\rangle \quad \textit{for} \ \ r=1,2,\ldots,$$

where H is the normalized bi-quantization of the operator $h=bb^*$ in S, while P_0 is the projection on Ψ_0, i. e. $P_0\Phi = \langle\!\langle \Psi_0,\Phi \rangle\!\rangle \Psi_0$.

Proof. First note that $HP_0=P_0H=0$ on $\tilde{\mathfrak{S}}^?$, and hence that $HP_0=P_0H=0$ on $\mathfrak{S}^?$, so that $(H+P_0)^r=H^r+P_0$ for $r>0$.

It follows that if

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (n!)^{-\frac{1}{2}} a^{*n\otimes}(\varphi^{(n)})\Psi_0 \in \tilde{\mathfrak{S}}^? ,$$

then

$$|||\Phi|||_r^2 = |\varphi^{(0)}|^2 + |||\Phi|||_{(r)}^2 = |\varphi^{(0)}|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \|\varphi^{(n)}\|_r^2 , \tag{4.38}$$

and so it follows from (3.13) and the density of $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ in $\mathfrak{S}^?$ that the $|||\cdot|||_r$ are in fact norms, and that they are increasing.

Exactly as in the proof of Theorem (3.10) it is sufficient to prove that all operators $a(\varphi^*)$ and $a^*(\varphi)$ as well as all normalized bi-quantizations K of symmetric operators $k\in R$ are continuous in the topology $\mathcal{J}'$ defined by the norms $|||\cdot|||_r$.

Since $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ is dense in $\mathfrak{S}^?$ also with respect to the topology $\mathcal{J}'$, it is sufficient to consider $\tilde{\mathfrak{S}}^?$ or, equivalently, $\tilde{\mathfrak{S}}'$.

We divide the remaining part of the proof of (4.37) into three separate lemmas.

(4.39) LEMMA. *The operator* $a(\varphi^*)$ *on* $\tilde{\mathfrak{S}}'$ *is continuous in the topology* $\mathfrak{J}'$ *for every* $\varphi \in S$.

Proof. Assume that $\varphi \in S$ and that $\Phi = \{\varphi^{(n)}\} \in \tilde{\mathfrak{S}}'$. We then get from (4.21)

$$a(\varphi^*)\Phi = \{<\varphi,\varphi^{(1)}>, 2^{\frac{1}{2}} <\varphi,\varphi^{(2)}>_{(1)}, \ldots, n^{\frac{1}{2}} <\varphi,\varphi^{(n)}>_{(1)}, \ldots\},$$

whence by (4.26) and (3.13),

$$\text{(4.40)} \qquad \|| a(\varphi^*)\Phi \||_r^2 = |<\varphi,\varphi^{(1)}>|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n \, \| <\varphi,\varphi^{(n)}>_{(1)} \|_r^2$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n \, \|\varphi\|^2 \, \|\varphi^{(n)}\|_r^2$$

$$\leqslant \|\varphi\|^2 \, \||\Phi\||_{r+1}^2 .$$

(4.41) LEMMA. *The operator* $a^*(\varphi)$ *on* $\tilde{\mathfrak{S}}'$ *is continuous in the topology* $\mathfrak{J}'$ *for every* $\varphi \in S$.

Proof. First note that

$$\text{(4.42)} \qquad \|| a^*(\varphi)\Phi \||^2 = \|| a(\varphi^*)\Phi \||^2 + \|\varphi\|^2 \, \||\Phi\||^2$$

$$\leqslant 2 \, \|\varphi\|^2 \, \||\Phi\||_1^2$$

by (4.3), (4.5) and (4.40).

Next, by (4.9) and (4.20) we get

$$\text{(4.43)} \qquad (H^s + P_0)a^*(\varphi) = H^s a^*(\varphi)$$

$$= H^{s-1}a^*(h\varphi) + H^{s-1}a^*(\varphi)H$$

$$= \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} a^*(h^p\varphi)H^{s-p},$$

and the formulas (4.42) and (4.43) give

$$(4.44) \qquad \||| a^*(\varphi)\Phi \|||_{2s} = \||| (H^s+P_0)a^*(\varphi)\Phi \|||$$

$$\leqslant \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} \||| a^*(h^p\varphi)H^{s-p}\Phi \|||$$

$$\leqslant 2 \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} \| \varphi \|_{2p} \quad \||| \Phi \|||_{2s-2p+1} \, .$$

(4.45) LEMMA. *The normalized bi-quantization K of any operator $k \in L(S,S)$ is continuous on $\mathfrak{S}'$ in the topology $\mathcal{T}'$.*

Proof. An immediate consequence of (4.29).

This completes the proof of Theorem (4.37).

(4.46) THEOREM. *The maximal space $\mathfrak{S}$ can be identified with the space of all sequences.*

$$\Phi = \{\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}, \ldots\} \, , \quad \varphi^{(n)} \in S^n_+ \, ,$$

for which all norms $\||| \cdot \|||_r$ defined by

$$\||| \Phi \|||_r^2 = | \varphi^{(0)} |^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \| \varphi^{(n)} \|_r^2$$

are finite, the topology being determined by these norms.

Proof. Identical with the proof of Theorem (3.19).

For elements $\Phi \in \mathfrak{S}$, the sequences $\{\varphi^{(n)}\}$ are rapidly decreasing with respect to n in virtue of the inequality (3.13).

(4.47) LEMMA. *The operators a and a^* are continuous from S into $L(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$.*

Proof. As S is metrizable, it is sufficient to prove that when φ runs through a bounded set in S and Φ through a bounded set in $\mathfrak{S}$, then $a(\varphi^*)\Phi$ and $a^*(\varphi)\Phi$ run through bounded sets in $\mathfrak{S}$. This is an immediate consequence of the estimates (4.40) and (4.44), which in view of Theorem (4.46) are valid not only in $\mathfrak{S}'$, but also in $\mathfrak{S}$.

5. The dual spaces $\tilde{\mathfrak{S}}^*$ and $\mathfrak{S}^*$.

A CLASS OF SEQUENCE SPACES.

As we have seen, S^n may be represented as a space of multiple sequences, and hence $\mathfrak{S}$ may be represented as a space of sequences. It is easily seen that all spaces S^n, S^n_+ and $\mathfrak{S}$ can be represented as a space of the type described below.

Let $\rho = \{\rho_n\}$ be a sequence of non-negative real numbers with $\rho_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Denote by $S(=S(\rho))$ the locally convex space of all complex sequences $x = \{x_n\}$ satisfying

$$\|x\|_r^2 = \sum_n \rho_n^r |x_n|^2 < \infty, \quad r = 0,1,2,\ldots,$$

with the topology determined by the norms $\|\cdot\|_r$, $r=0,1,2,\ldots$.

For reference purposes we collect here a number of facts concerning spaces of this class. (These spaces are particular instances of countably Hilbertian spaces in the terminology of GEL'FAND and VILENKIN [7], and all facts in this paragraph are well known).

It is easily proved that S is a complete metrizable locally convex space.

Denote by H_r, r real, the Hilbert space of all complex sequences x, for which

$$\|x\|_r^2 = \sum_n \rho_n^r |x_n|^2 < \infty. \tag{5.1}$$

If $r' < r''$, then $H_{r'} \supset H_{r''}$ algebraically and topologically since ρ_n is bounded away from 0, and

$$S = \bigcap_r H_r.$$

More exactly, algebraically and topologically, S is the projective limit of the spaces H_r, $r \to \infty$.

Since $\rho_n \to \infty$, it follows that every bounded set in H_r is relatively compact in every H_s with $s<r$, and from this it further follows that every bounded set in S is relatively compact.

Since every continuous linear functional f on H_r can be represented in the form

$$<f,x> = \sum_n \bar{f}_n x_n$$

for some sequence $f=\{f_n\}\in H_{-r}$, it follows that

$$S^* = \bigcup_{r=1}^{\infty} H_{-r} = \bigcup_{r\in\mathbf{R}} H_{-r}$$

algebraically.

We shall now prove

(5.2) LEMMA. *A convex subset U^* of S^* is a neighbourhood of 0 if and only if $U^* \cap H_{-r}$ is a neighbourhood of 0 in H_{-r} for every real number r. Thus, algebraically and topologically, S^* is the inductive limit of the spaces $H_{-r}, r\to\infty$.*

Proof. It is trivial that $U^*_{-r} = U^* \cap H_{-r}$ is a neighbourhood of 0 in H_{-r} if U^* is a neighbourhood of 0 in S^*.

Assume conversely that U^*_{-r} is a neighbourhood of 0 in H_{-r} for every r. We may clearly assume $zU^* \subseteq U^*$ for all complex numbers z with $|z| \leqslant 1$.

If we define

$$\bar{B}_r = \{x\in H_r \mid |<f,x>| \leqslant 1 \quad \text{for all } f\in U^*_{-r}\}$$

and

$$B_r = \bar{B}_r \cap S,$$

then $\bar{B}_r$ is the closure of B_r in H_r, and

$$B = \bigcap_r B_r = \bigcap_r \bar{B}_r$$

is a bounded subset of S.

We shall now prove that

$$U^* \supseteq \{f\in S^* \mid |<f,x>| \leqslant 1/4 \quad \text{for all } x\in B\},$$

and the lemma follows.

Assume that $f\notin U^*$, and choose an integer r_0 such that $f\in H_{-r_0}$. For every integer $r \geqslant r_0$ we have $f\in H_{-r}$ and $f\notin U^*_{-r}$, and by Hahn-Banach's theorem there exists an element $x_r\in B_r$ such that

$$<f,x_r> \geqslant \frac{1}{2}.$$

Since $B_{r'} \subseteq B_r$ for $r<r'$, the sequence $\{x_r\}$ is bounded, hence it has a convergent subsequence, and its limit x belongs to B. Since f is continuous, we have $<f,x> \geqslant 1/2 > 1/4$, and the lemma follows.

It is easily proved that

(5.3) LEMMA. *A subset B^* of S^* is bounded if and only if there exists a number r such that $B \subset H_{-r}$ and B is bounded in H_{-r}.*

Finally, it is easily proved by means of (5.2) and (5.3) that

(5.4) THEOREM. *S is reflexive and S is dense in S^*.*

We remark that it is well-known that complete metrizable spaces, in which bounded sets are relatively compact, are reflexive.

ADJOINT AND DUAL MAPPINGS

We have already noted that if S is provided with a scalar product, and T and T^* are linear mappings in S satisfying

$$<x, Ty> = <T^*x,y> \quad \text{for all } x,y \in S,$$

then T and T^* are said to be *adjoint*.

On the other hand, if T is a continuous linear operator in S, then it is customary to call the continuous linear operator T^* in the dual space defined by

$$<T^*f,x> = <f,Tx> \quad \text{for all } x \in S,\ f \in S^* ,$$

the adjoint of T. Here we shall instead call this operator T^* the *dual* of T.

It is clear that if S is provided with a continuous scalar product, then this scalar product establishes a canonical embedding of S onto a subspace of S^*, and if a continuous operator T in S has a continuous adjoint, then this adjoint is the restriction to S of the dual of T.

Let us also note

(5.5) LEMMA. *If S is a reflexive locally convex space, then the mapping*

$$T \to T^*$$

of $L(S,S)$ into $L(S^*,S^*)$ is a conjugate linear homeomorphism.

THE DUAL SPACES S^{n*} AND S_+^{n*}.

As a preparation for the discussion of the dual spaces of the extreme spaces of type $\mathfrak{S}$, we first make a few remarks concerning S^{n*}, which, as we know, may be identified with Schwartz' space of temperate distributions.

The space S^n may be identified with the space s^n of all rapidly decreasing multiple sequences $c=\{c_\nu\}_{\nu\in N^n}$. Hence, the dual space S^{n*} may be identified with the space s^{n*} of all multiple sequences $T=\{t_\nu\}_{\nu\in N^n}$, which are temperate in the index. By this we mean that for each element T there exists a polynomial p such that

$$|t_\nu| \leqq p(\nu) \quad \text{for all } \nu\in N^n .$$

The duals of the continuous operators b_i, b_i^*, and sym in S^n are extensions to S^{n*} of the operators b_i^*, b_i, and sym in S^n, and since S^n is dense in S^{n*} we deduce that b_i^*, b_i, and sym have unique continuous extensions to S^{n*}. These extensions will also be denoted b_i^*, b_i, and sym, and in the two standard representations of S^n, the formal definitions of these operators in S^{n*} agree with the definitions in S^n.

Finally, the dual space S_+^{n*} of $S_+^n = \mathrm{sym}S^n$ can be identified with $\mathrm{sym}S^{n*}$.

THE SPACE $\tilde{\mathfrak{S}}^*$.

It follows from the definition of $\tilde{\mathfrak{S}}$ that the dual space $\tilde{\mathfrak{S}}^*$ may be identified with the space of all sequences

$$\mathbf{T}=\{T^{(0)},T^{(1)},\dots,T^{(n)},\dots\}, \quad T^{(n)}\in S_+^{n*}, \tag{5.6}$$

with the topology of coordinate-wise convergence. By this identification the formula

$$\langle\!\langle \mathbf{T},\Phi\rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}{}' < T^{(n)}, \varphi^{(n)}>$$

holds for all elements $\Phi=\{\varphi^{(n)}\}$ of $\tilde{\mathfrak{S}}$.

THE SPACE $\mathfrak{S}^*$.

Since $\tilde{\mathfrak{S}}\subset\mathfrak{S}$ algebraically and topologically, and since $\tilde{\mathfrak{S}}$ is dense in $\mathfrak{S}$, we have $\mathfrak{S}^*\subset\tilde{\mathfrak{S}}^*$. Thus, also elements of $\mathfrak{S}^*$ may be written in the form (5.6). However, obviously not all sequences (5.6) belong to $\mathfrak{S}^*$.

(5.7) THEOREM. *The space $\mathfrak{S}^*$ consists of those sequences $\mathbf{T}=\{T^{(n)}\}$ of symmetric temperate distributions for which the series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} < T^{(n)}, \varphi^{(n)} > \tag{5.8}$$

is convergent for all elements $\Phi = \{\varphi^{(n)}\}$ of $\mathfrak{S}$, and then $\langle\!\langle \mathbf{T},\Phi \rangle\!\rangle$ is equal to the sum of this series. Moreover, the series (5.8) *converges uniformly on bounded sets in $\mathfrak{S}$.*

Proof. Since $\mathfrak{S}$ is a complete metrizable space, the principle of uniform boundedness holds. Hence, if the series (5.8) is convergent for all $\Phi\in\mathfrak{S}$, the partial sums are equicontinuous, and from Arzela's theorem it follows that (5.8) converges uniformly on compact sets. The final assertion of the theorem now follows from the fact that bounded sets in $\mathfrak{S}$ are relatively compact.

Since the dual of a metrizable space is complete, the theorem follows.

We finally remark that

$$\tilde{\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^* \subset \tilde{\mathfrak{S}}^*$$

algebraically and topologically, and each of these spaces is dense in each of the larger spaces.

THE MAPPINGS $a^{*m\otimes} \otimes a^{n\otimes}$.

Let $\mathfrak{S}^?$ be any space of type $\mathfrak{S}$. We then define

$$a^{*m\otimes} \otimes a^{n\otimes}(\varphi_1\ldots\varphi_m\psi_1\ldots\psi_n)=a^*(\varphi_1)\ldots a^*(\varphi_m)a(\psi_1)\ldots a(\psi_n)$$

for $\varphi_1,\ldots,\psi_n\in S$, and extend the mapping $a^{*m\otimes} \otimes a^{n\otimes}$ to a linear mapping from $S^{(m+n)\otimes}$ into $L(\mathfrak{S}^?,\mathfrak{S}^?)$ (cf. Section 4). For $m=0$ or $n=0$ we simply write $a^{n\otimes}$ resp. $a^{*m\otimes}$.

From the proof of Theorem (4.31) we deduce that this mapping is continuous, and hence, if $L(\mathfrak{S}^?,\mathfrak{S}^?)$ is complete, it has a unique continuous extension to all of S^{m+n}. Since $\mathfrak{S}$ is a complete metrizable space, $L(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$ is complete, and hence we have in particular

(5.9) LEMMA. *The mapping $a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}$ exists as a continuous linear mapping from S^{m+n} into $L(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$.*

Since $a^*(\varphi)$ and $a(\varphi^*)$ are adjoint, then so are

$$a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}(\omega) \quad \text{and} \quad a^{*n\otimes}\otimes a^{m\otimes}\,(\operatorname{rev}\omega^*)\,,$$

where rev is the continuous linear mapping in S^p, which on the generating elements of $S^{p\otimes}$ is defined by

$$\operatorname{rev}(\varphi_1\ldots\varphi_p)=\varphi_p\ldots\varphi_1\,.$$

It follows from the preceding remarks that we have

(5.10) Lemma. *If $\mathfrak{S}^?$ is any space of type $\mathfrak{S}$, then $a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}(\omega)$ exists as a continuous linear mapping from $\mathfrak{S}^{?*}$ into $\mathfrak{S}^{?*}$ for all $\omega\in S^{(m+n)\otimes}$.*

From Lemma (5.5) and (5.9) we further get

(5.11) Lemma. *The mapping $a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}$ exists as a continuous linear mapping from $S^{(m+n)}$ into $L(\mathfrak{S}^*,\mathfrak{S}^*)$.*

We shall next prove

(5.12) Theorem. *The mapping $a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}$ has a unique continuous extension from $S^{(m+n)*}$ into $L(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^*)$.*

Proof. Since $L(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^*)$ is complete and $S^{(m+n)\otimes}$ is dense in $S^{(m+n)*}$, it is sufficient to prove that $a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}$ is continuous from $S^{(m+n)\otimes}$ into $L(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^*)$, when $S^{(m+n)\otimes}$ is given the topology of $S^{(m+n)*}$. Now let $\mathcal{H}^{m+n}_{-r}$ denote the completion of $S^{(m+n)\otimes}$ in the norm $\|\cdot\|_{-r}$ defined by (3.11) for arbitrary real r. It follows from Lemma (5.2) that it is sufficient to prove that for every positive real number r, the mapping $a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}$ is continuous, when $S^{(m+n)\otimes}$ is provided with the norm $\|\cdot\|_{-r}$.

Let $\Phi=\{\varphi_k\}$ and $\Psi=\{\psi_k\}$ be elements of $\mathfrak{S}$, and let $\chi_1,\ldots,\chi_m,\omega_1,\ldots,\omega_n$ be elements of S. The formula (4.21) gives

$$\langle\!\langle\Phi,a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}(\chi_1\ldots\omega_n)\Psi\rangle\!\rangle$$

$$=\langle\!\langle a(\chi_1^*)\ldots a(\chi_m^*)\Phi,a(\omega_1)\ldots a(\omega_n)\Psi\rangle\!\rangle$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(m+k)!(n+k)!}{k!\quad k!}\right)^{\frac12}<<\chi_1\ldots\chi_m,\varphi_{m+k}>_{(m)},<\omega_1^*\ldots\omega_n^*,\psi_{n+k}>_{(n)}>.$$

Using the function representation, and writing

$$x=(x_1,\dots,x_m), y=(y_1,\dots,y_n), z=(z_1,\dots,z_k),$$

we get

$$<<\chi_1\cdots\chi_m,\varphi_{m+k}>_{(m)},<\omega_1^*\dots\omega_n^*,\psi_{n+k}>_{(n)}>$$

$$=\iiint\varphi_{m+k}^*(z,x)\chi_1\cdots\chi_m\omega_1\dots\omega_n(x,y)\psi_{n+k}(z,y)dxdydz\,.$$

If we now write $h^{(m+n)}=h^{(m)}+h^{(n)}$ and take the symmetry of $h^{(m)}$ and $h^{(n)}$ into account, we get for all positive integers r:

$$\iiint\varphi_{m+k}^*(z,x)\chi_1\dots\omega_n(x,y)\psi_{n+k}(z,y)dxdydz$$

$$=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\iiint h^{(m)^s}\varphi_{m+k}^*\;h^{(m+n)^{-r}}\chi_1\dots\omega_n\;h^{(n)^{r-s}}\psi_{n+k}dxdydz\,,$$

and hence

$$\langle\!\langle\Phi,a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}(\omega)\Psi\rangle\!\rangle$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}c_{kmnrs}\iiint h^{(m)^s}\varphi_{m+k}^*\;h^{(m+n)^{-r}}\;\omega\;h^{(n)^{r-s}}\psi_{n+k}dxdydz$$

for all $\omega\in S^{(m+n)\otimes}$.

From Cauchy-Schwarz' inequality it follows that

$$\left|\iiint\psi_{12}(x_1,x_2)\psi_{23}(x_2,x_3)\psi_{31}(x_3,x_1)dx_1dx_2dx_3\right|$$

$$\leqslant\|\psi_{12}\|\;\|\psi_{23}\|\;\|\psi_{31}\|\,,$$

and since $h^{(m)} \leqslant h^{(m+k)}$ in S^{m+k} and similarly for $h^{(n)}$, we finally get the estimate

$$
\begin{aligned}
&| \langle\!\langle \Phi, a^{*m\otimes} \otimes a^{n\otimes}(\omega)\Psi \rangle\!\rangle | \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} (m+k)^{m/2}(n+k)^{n/2} \binom{r}{s} \| \varphi_{m+k} \|_{2s} \| \omega \|_{-2r} \| \psi_{n+k} \|_{2(r-s)} \\
&\leqslant \| \omega \|_{-2r} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \| \varphi_{m+k} \|_{2s+m} \| \psi_{n+k} \|_{2(r-s)+n} \\
&\leqslant \| \omega \|_{-2r} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} ||| \Phi |||_{2s+m} ||| \Psi |||_{2(r-s)+n}
\end{aligned}
$$

for $\omega \in S^{(m+n)\otimes}$.

Since the norms in $L(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^*)$ are given by

$$
\sup_{\Phi \in B_1} \sup_{\Psi \in B_2} | \langle\!\langle \Phi, T\Psi \rangle\!\rangle |
$$

for $T \in L(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^*)$, where B_1 and B_2 are bounded subsets of $\mathfrak{S}$, the theorem follows.

(5.13) THEOREM. *The mappings $a^{*n\otimes}$ and $a^{n\otimes}$ have unique continuous extensions from S^{n*} into $L(\mathfrak{S}^*,\mathfrak{S}^*)$ and $L(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$ respectively.*

Proof. Since the mappings $a^{*n\otimes}(\omega) \in L(\mathfrak{S}^*,\mathfrak{S}^*)$ and $a^{n\otimes}(\omega^*) \in L(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$ are dual for $\omega \in S^n$, it follows from Lemma (5.5) that it is sufficient to prove the assertion concerning $a^{n\otimes}$. If we apply Lemma (5.3) to $\mathfrak{S}^*$ and use the fact that $\mathfrak{S}$ is reflexive, the result follows from the estimate

$$
| \langle\!\langle \Phi, a^{n\otimes}(\omega)\Psi \rangle\!\rangle | \leqslant \| \omega \|_{-r} ||| \Phi |||_{-s} ||| \Psi |||_{r+s+n},
$$

which is valid for all pairs of non-negative real numbers r,s. The proof of the estimate is analogous to, and actually simpler than, the proof of the estimate applied in Theorem (5.12).

The preceding results are summarized below.

(5.14) *The operators* $a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}$ *admit the following continuous extensions:*

	$a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}$
$S^{m+n}\to L(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$	$+$
$S^{m+n}\to L(\mathfrak{S}^*,\mathfrak{S}^*)$	$+$
$S^{(m+n)*}\to L(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^*)$	$+$

	$a^{*n\otimes}$	$a^{n\otimes}$
$S^{n*}\to L(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$	$-$	$+$
$S^{n*}\to L(\mathfrak{S}^*,\mathfrak{S}^*)$	$+$	$-$

We finally note that all these results remain true if $\mathfrak{S}$ is replaced by $\tilde{\mathfrak{S}}$ everywhere. This follows from the above results when the simple properties of the topologies of $\tilde{\mathfrak{S}}$ and $\tilde{\mathfrak{S}}^*$ are taken into account together with the fact that $a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}(\omega)$ maps each summand S_+^p or factor S_+^{p*} into S_+^{p+m-n} or $S_+^{(p+m-n)*}$.

The negative statements follow from the fact that if $T\in S_+^{n*}$, but $T\notin S^n$, then $a^{*n\otimes}(T)\Psi$ does not belong to $\mathfrak{S}$ for any non-zero element $\Psi\in\tilde{\mathfrak{S}}$, and, on the other hand, $a^{n\otimes}(T)$ cannot be defined meaningfully on all of $\mathfrak{S}^*$.

We further remark that now the final assertion of Theorem (5.7) can be formulated: If $\mathbf{T}=\{T^{(n)}\}\in\mathfrak{S}^*$ (or $\tilde{\mathfrak{S}}^*$), then

$$\mathbf{T}=\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-\frac{1}{2}}\,a^{*n\otimes}(T^{(n)})\Psi_0\,,$$

the series being unconditionally convergent in $\mathfrak{S}^*$ (resp. $\tilde{\mathfrak{S}}^*$).

In conclusion, let us state the following almost trivial result:

(5.15) LEMMA. *For every double sequence* $\{T_{mn}\}$ *with* $T_{mn}\in S^{(m+n)*}$, *the double series*

$$\sum_{m,n}a^{*m\otimes}\otimes a^{n\otimes}(T_{mn})$$

is unconditionally convergent in $L(\tilde{\mathfrak{S}},\tilde{\mathfrak{S}}^*)$.

6. Gaussian elements

Gaussian elements in $\mathcal{S}^n$ and $\mathcal{S}^{n*}$.

If we use the function representation of $\mathcal{S}^n$, then clearly the Gaussian functions $g(x) = \exp(-\frac{1}{2}\sum \alpha_{jk}x_j x_k)$ are characterized (except for a numerical factor) by the differential equations

$$p_j g = i \sum_k \alpha_{jk} q_k g\,, \qquad j=1,\ldots,n\,,$$

or

$$b_j g = \sum_k \beta_{jk} b_k^* g\,, \qquad j=1,\ldots,n\,, \tag{6.1}$$

where the matrix $\beta = \{\beta_{jk}\}$ is determined from the matrix $\alpha=\{\alpha_{jk}\}$ by $\beta = (\alpha+1)^{-1}(\alpha-1)$.

Since the operators b_j and b_j^* have been extended to $\mathcal{S}^{n*}$, the equations (6.1) make sense in $\mathcal{S}^{n*}$ for any matrix $\{\beta_{jk}\}$, and by a *Gaussian element* in $\mathcal{S}^{n*}$ we shall understand one which satisfies a system of the form (6.1).

Gaussian elements of particular interest are ψ_0 and the distributions δ and 1 corresponding to $\beta=0,1$ and -1 respectively.

We shall not here discuss the conditions which β must satisfy in order that (6.1) have a non-zero solution belonging to $\mathcal{S}^{n*}$, but turn at once to the study of Gaussian elements in $\mathfrak{S}^*$.

Gaussian elements in $\mathfrak{S}^*$.

By analogy from the preceding paragraph we introduce the following definition:

If $\omega \in L(\mathcal{S},\mathcal{S}^*)$, then an element $\Gamma \in \mathfrak{S}^*$ is called a *Gaussian element corresponding to* ω iff

$$a(\varphi)\Gamma = a^*(\omega\varphi)\Gamma \quad \text{for all } \varphi \in \mathcal{S}\,. \tag{6.2}$$

Before we investigate the existence and structure of Gaussian elements, we reproduce the following version of *Schwartz' nuclear theorem:*

(6.3) LEMMA. *If* $\omega \in L(S,S^*)$, *then there exists a unique element* $\overline{\omega} \in S^{2*}$, *called the kernel of* ω, *such that*

$$\omega\varphi = <\overline{\omega}^*,\varphi>_{(1)} \qquad \textit{for all } \varphi \in S\ .$$

We first prove

(6.4) LEMMA. *A necessary condition that there exists a non-zero Gaussian element corresponding to a given operator* $\omega \in L(S,S^*)$ *is that the kernel* $\overline{\omega}$ *of* ω *be symmetric, i. e.* $\overline{\omega} = \mathrm{sym}\ \overline{\omega}$.

Proof. First note that it follows from Section 5 that we have

$$[a(\varphi^*),a^*(T)] = <\varphi,T>$$

in $L(\tilde{\mathfrak{S}}^*,\tilde{\mathfrak{S}}^*)$ for all $\varphi \in S$ and all $T \in S^*$.

Now let Γ be a Gaussian element corresponding to ω, and let φ and ψ be arbitrary elements of S. Then

$$\begin{aligned} a(\varphi)a(\psi)\Gamma &= a(\varphi)a^*(\omega\psi)\Gamma \\ &= a^*(\omega\psi)a(\varphi)\Gamma + <\varphi^*,\omega\psi>\Gamma \\ &= a^*(\omega\psi)a^*(\omega\varphi)\Gamma + <\varphi^*,\omega\psi>\Gamma\ , \end{aligned}$$

and since

$$[a(\varphi),a(\psi)] = [a^*(\omega\varphi),a^*(\omega\psi)] = 0\ ,$$

it follows that if $\Gamma \neq 0$, then

$$<\varphi^*,\omega\psi> = <\psi^*,\omega\varphi>$$

or

$$<\varphi^*\psi^*,\overline{\omega}> = <\psi^*\varphi^*,\overline{\omega}>\ ,$$

and the result follows.

(6.5) THEOREM. *Let* $\omega \in L(S,S^*)$, *and assume that the kernel* $\overline{\omega}$ *of* ω *is symmetric. Then every Gaussian element* Γ *corresponding to* ω *is of the form* $\Gamma = c\Gamma(\omega), c \in \mathbf{C}$, *where*

$$\Gamma(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} ((2n)!)^{-1/2} a^{*2n\otimes} \left(2^{-n}\binom{2n}{n}^{\frac{1}{2}} \overline{\omega}^n\right)\Psi_0\ , \tag{6.6}$$

and conversely, $\Gamma(\omega)$ *is a Gaussian element corresponding to* ω.

Proof. Assume that

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1/2} a^{*k\otimes}(\Gamma_k)\Psi_0 \in \tilde{\mathfrak{S}}^*$$

is a Gaussian element corresponding to ω, and let $\varphi \in \mathcal{S}$. Then, applying (6.2) with φ replaced by φ^*, we get

$$(k+1)^{1/2} < \varphi, \Gamma_{k+1} >_{(1)} = k^{1/2} \operatorname{sym}(\omega\varphi^* \cdot \Gamma_{k-1})$$

for $k \geqslant 1$, and

$$< \varphi, \Gamma_1 > = 0 .$$

The last relation gives $\Gamma_1 = 0$, and if we apply the first one to the element $\varphi^k \in \mathcal{S}^k$, we get

$$\begin{aligned} (k+1)^{1/2} < \Gamma_{k+1}, \varphi^{k+1} > &= k^{1/2} < \omega\varphi^*, \varphi > < \Gamma_{k-1}, \varphi^{k-1} > \\ &= k^{1/2} < \overline{\omega}, \varphi^2 > < \Gamma_{k-1}, \varphi^{k-1} > \\ &= k^{1/2} < \overline{\omega}\Gamma_{k-1}, \varphi^{k+1} > . \end{aligned}$$

Since this holds for all $\varphi \in \mathcal{S}$, it follows from Corollary (3.24) that

$$\Gamma_k = (k-1)^{1/2} k^{-1/2} \operatorname{sym}(\overline{\omega}\Gamma_{k-2}) \quad \text{for } k \geqslant 2 ,$$

and consequently,

$$\Gamma_{2n-1} = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots,$$

while

$$\Gamma_{2n} = c 2^{-n} \binom{2n}{n}^{1/2} \operatorname{sym}(\overline{\omega}^n) \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots,$$

with $c = \Gamma_0$, so that, in fact, $\Gamma = c\Gamma(\omega)$.

Conversely, direct computation shows that $\Gamma(\omega)$ is a Gaussian element corresponding to ω, and the theorem follows.

DELTA-FUNCTIONALS.

Gaussian elements of particular interest are those corresponding to $\omega=1$ and $\omega=-1$ — they play a rôle corresponding to that of δ and 1 in the finite-dimensional theory. We call $\Gamma(1)$ and $\Gamma(-1)$ the *delta-functionals*, and we denote them $\delta(Q)$ and $\delta(P)$ respectively. If we put

$$Q=i2^{-1/2}(a-a^*)\ , \qquad P=2^{-1/2}(a+a^*)\ ,$$

then

$$Q(\varphi)\delta(Q)=P(\varphi)\delta(P)=0$$

for all $\varphi\in\mathcal{S}$.

Let us mention that $\delta(Q)$ and $\delta(P)$ do not belong to $\mathfrak{S}^*$ since

$$\|\operatorname{sym}\,\overline{1}^n\|_{-r}=\infty \quad \text{for } n\geqslant r\ ,$$

so that

$$|||\,\delta(Q)\,|||_{-r}=|||\,\delta(P)\,|||_{-r}=\infty \quad \text{for every } r\,.$$

7. Displacement operators.

DISPLACEMENT OPERATORS IN $\mathcal{S}^n$.

If we use the function representation of $\mathcal{S}^n$, then the displacement operator $\tau(h)$ defined by

$$\big(\tau(h)\varphi\big)(x)=\varphi(x-h)\ ,$$

where $h\in\mathbf{R}^n$ is characterized (except for a numerical factor) by the following system of equations

$$\tau(h)p_j=p_j\tau(h)\ ,$$

$$\tau(h)q_j=(q_j-h_j)\tau(h)\ ,$$

or, equivalently,

$$\tau(h)b_j = (b_j + i2^{-\frac{1}{2}} h_j)\tau(h) \ ;$$

$$\tau(h)b_j^* = (b_j^* - i2^{-\frac{1}{2}} h_j)\tau(h) \ ,$$

$j=1,\ldots,n$.

Now, let f be an arbitrary vector in $\mathbf{C}^n$. We shall then call a linear operator D in S^n for a *displacement operator associated with* f iff

$$Db_j = (b_j - f_j)D \ ,$$

$$Db_j^* = (b_j^* - \bar{f}_j)D \ .$$

It can easily be shown that if D is a displacement operator associated with f, then D is of the form

$$\varphi(x) \rightarrow c \ \exp(i\Sigma k_j x_j)\varphi(x-h) \ .$$

where the real vectors h and k are

$$h = i2^{-\frac{1}{2}}(f - \bar{f}) \ .$$

$$k = 2^{-\frac{1}{2}}(f + \bar{f}) \ .$$

Displacement operators in $\tilde{\mathfrak{S}}$.

By analogy from the preceding paragraph we introduce the following definition:

If $f \in S^*$, then an operator $D \in L(\tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}}^*)$ is called a *displacement operator associated with* f iff

$$(7.1) \qquad Da(\varphi^*) = \big(a(\varphi^*) - <\varphi, f>\big)D \ ,$$

$$(7.2) \qquad Da^*(\varphi) = \big(a^*(\varphi) - <f, \varphi>\big)D$$

for all $\varphi \in S$.

Before we investigate the existence and structure of displacement operators, we introduce some further notation.

We define the operators a_f and a_f^* by

$$(7.3)\qquad \begin{aligned} a_f(\varphi^*) &= a(\varphi^*) - \langle\varphi, f\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}, \\ a_f^*(\varphi) &= a^*(\varphi) - \langle f, \varphi\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

We shall also need the «tensor powers»

$$a_f^{n\otimes}(\omega^*) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{(n-k)\otimes}(\langle\omega, f^k\rangle_{(k)}), \qquad \omega \in \mathcal{S}^n,$$

$$a_f^{*n\otimes}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{*(n-k)}(\langle f^k, \omega\rangle_{(k)}), \qquad \omega \in \mathcal{S}^n,$$

of these operators.

It is clear that $a_f^{n\otimes}$ and $a_f^{*n\otimes}$ are continuous from $\mathcal{S}^n$ into each of the spaces $L(\tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}})$, $L(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$, $L(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S}^*)$, and $L(\tilde{\mathfrak{S}}^*, \tilde{\mathfrak{S}}^*)$, and also that $a_f^{n\otimes}(\omega^*)$ and $a_f^{*n\otimes}(\omega)$ are dual, when considered in any pair of spaces for which this makes sense.

(7.4) THEOREM. *Let $f \in \mathcal{S}^*$. Then every displacement operator D associated with f is characterized by*

$$(7.5)\qquad D\Psi_0 = c \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\frac{1}{2}} a^{*n\otimes}((n!)^{-\frac{1}{2}} f^n)\Psi_0 \equiv \Psi_0[f],$$

$$(7.6)\qquad D\Psi = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (n!)^{-\frac{1}{2}} a_f^{*n\otimes}(\psi_n)\Psi_0[f]$$

for $\Psi = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (n!)^{-\frac{1}{2}} a^{*n\otimes}(\psi_n)\Psi_0 \in \tilde{\mathfrak{S}}$, *and conversely, the operator D defined by* (7.5) *and* (7.6) *is a displacement operator associated with f.*

Proof. We first note that if D is a displacement operator associated with f, then it follows from (7.1) that $D\Psi_0$ is a solution to the equation

$$a(\varphi^*)\mathbf{T} = \langle\varphi,f\rangle\mathbf{T} \qquad \text{for all } \varphi\in S .$$

We shall prove below (Lemma (7.7)) that the complete solution to this equation is the set of all elements $\Psi_0[f]\in\tilde{\mathfrak{S}}^*$, where $\Psi_0[f]$ is given by (7.5). Now it follows from (7.2) that

$$Da^{*n\otimes}(\varphi^n) = a_f^{*n\otimes}(\varphi^n)D \qquad \text{for all } \varphi\in S ,$$

and hence, D must be of the asserted form.

The verification that the operator D defined by (7.5) and (7.6) is in fact a displacement operator associated with f can easily be carried out directly. However, in Lemma (7.9) below we shall give a simple formula for D, from which this follows immediately.

(7.7) LEMMA. *The complete solution in* $\tilde{\mathfrak{S}}^*$ *to the equations*

$$a(\varphi^*)\mathbf{T} = \langle\varphi,f\rangle\mathbf{T} \qquad \textit{for all } \varphi\in S \tag{7.8}$$

is the one-dimensional manifold defined by (7.5).

Proof. For $\mathbf{T} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-\frac{1}{2}}\, a^{*n\otimes}(T_n)\Psi_0\in\tilde{\mathfrak{S}}^*$ and $\varphi\in S$ we have

$$a(\varphi^*)\mathbf{T} = \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-\frac{1}{2}}\, a^{*n\otimes}\big((n+1)^{\frac{1}{2}}\langle\varphi, T_{n+1}\rangle_{(1)}\big)\Psi_0 ,$$

so that (7.8) is equivalent to

$$\begin{aligned}(n+1)^{\frac{1}{2}}\langle\varphi, T_{n+1}\rangle_{(1)} &= \langle\varphi,f\rangle\, T_n \\ &= \langle\varphi, T_n f\rangle_{(1)}\end{aligned}$$

for all $\varphi\in S$. It follows that

$$T_n = c(n!)^{-\frac{1}{2}} f^n \qquad \text{with } c = T_0 ,$$

and the lemma is proved.

(7.9) LEMMA. *Let* $f \in S^*$, *and define the operators* $D_+(f) \in L(\tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mathfrak{S}})$ *and* $D_-(f) \in L(\tilde{\mathfrak{S}}^*, \tilde{\mathfrak{S}}^*)$ *by*

$$D_+(f) = \exp(-a(f^*)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-a(f^*))^n/n!\,,$$

$$D_-(f) = \exp(a^*(f)) = \sum_{n=0}^{\infty} (a^*(f))^n/n!\,.$$

Then

$$[D_+(f), a(\varphi^*)] = [D_-(f), a^*(\varphi)] = 0\,,$$
$$[D_+(f), a^*(\varphi)] = -<f,\varphi> D_+(f)\,,$$
$$[D_-(f), a(\varphi^*)] = -<\varphi,f> D_-(f)\,,$$

and

$$D_-(f)D_+(f) = \sum_{m,n} a^{*m\otimes} \otimes a^{n\otimes}(f^m f^{*n}/m!n!)$$

is a displacement operator associated with f — *in fact, the one corresponding to* $c=1$ *in* (7.5).

Proof. The convergence of the series for $D_+(f)$ and $D_-(f)$ in $L(\tilde{\mathfrak{S}},\tilde{\mathfrak{S}})$ and $L(\tilde{\mathfrak{S}}^*,\tilde{\mathfrak{S}}^*)$ respectively is trivial, and so are the commutation relations satisfied by these operators. From these commutation relations it follows that $D_-(f)D_+(f)$ is a displacement operator associated with f, and hence, Theorem (7.4) shows that $D_-(f)D_+(f)$ is given by (7.5) and (7.6) for some complex number c, and computation of $D_-(f)D_+(f)\Psi_0$ shows that $c=1$. In particular, the existence part of Theorem (7.4) follows.

The convergence of the double series expansion of $D_-(f)D_+(f)$ follows from Lemma (5.14).

Displacement operators in $\mathfrak{H}$.

By $\mathfrak{H}$ we denote the Hilbert space obtained by completing $\tilde{\mathfrak{S}}$ in the norm $|||\cdot|||$. It is clear that $\mathfrak{H}$ admits a Fock representation and that

$$\mathfrak{H} = \left\{\Psi = \{\psi_n\} \mid \psi_n \in \mathcal{H}^n,\ |||\Psi|||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|^2 < \infty\right\},$$

where $\mathcal{H}^n$ denotes the completion of S_+^n with respect to the norm $\|\cdot\|$.

(7.10) LEMMA. *The element* $\Psi_0[f]$ *of* (7.5) *belongs to* $\mathfrak{H}$ *iff* $f \in \mathcal{H} (= \mathcal{H}^1)$.

Proof. An immediate consequence of the form of $\Psi_0[f]$.

Let us note explicity that

$$||| \Psi_0[f] |||^2 = | c |^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \| f \|^{2n} = | c |^2 \exp(\| f \|^2) ,$$

so that $||| \Psi_0[f] ||| = 1$ if the factor c of (7.5) is chosen to be

$$c = \exp\left(- \frac{1}{2} \| f \|^2 \right) .$$

In the sequel we shall normalize $\Psi_0[f]$, and hence D, by this choice of c. The displacement operator associated with f will be denoted by $D(f)$, when normalized in this way.

(7.11) THEOREM. *For all* $f \in \mathcal{H}$, *the normalized displacement operator* $D(f)$ *has a unique continuous extension, which maps* $\mathfrak{H}$ *into* $\mathfrak{H}$. *This extension is a unitary operator in* $\mathfrak{H}$, *and*

$$D(f+g) = \exp(i \operatorname{Im} \langle f,g \rangle) D(f) D(g) . \tag{7.12}$$

Proof. The operators $a_f(\varphi^*)$ and $a_f^*(\varphi)$ are adjoint w. r. t. the scalar product in $\mathfrak{H}$, they satisfy the same commutation relations as do $a(\varphi^*)$ and $a^*(\varphi)$, and the element $\Psi_0[f]$ acts as a vacuum element for these operators. As in the proof of Theorem (4.10) it follows that

$$\langle\!\langle (m!)^{-\frac{1}{2}} a_f^{*m\otimes}(\omega) \Psi_0[f], (n!)^{-\frac{1}{2}} a_f^{*n\otimes}(\chi) \Psi_0[f] \rangle\!\rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad m \neq n , \\ \langle \omega, \chi \rangle & \text{for} \quad m = n , \end{cases}$$

for all elements $\omega \in S_+^m, \chi \in S_+^n$.

From this it follows that $D(f)$ is an isometry of $\mathfrak{S}$ into $\mathfrak{H}$, and hence that it can be prolonged to an isometry of $\mathfrak{H}$ into $\mathfrak{H}$. In order to prove that this isometry $D(f)$ is unitary, it is sufficient to prove (7.12), for then, in particular

$$D(f)D(-f)=D(0)=1 .$$

so that $D(f)$ is invertible.

Now, clearly

$$D(f)D(g)a^*(\varphi)=a^*_{f+g}(\varphi)D(f)D(g) ,$$

$$D(f)D(g)a(\varphi^*)=a_{f+g}(\varphi^*)D(f)D(g) ,$$

and hence $D(f)D(g)=kD(f+g)$ in view of Theorem (7.4). In order to evaluate k we calculate the vacuum expectation value

$$\langle\!\langle \Psi_0, D(f)D(g)\Psi_0\rangle\!\rangle = k\,\langle\!\langle \Psi_0, D(f+g)\Psi_0\rangle\!\rangle .$$

We find

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \Psi_0, D(f)D(g)\Psi_0\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle D(-f)\Psi_0, D(g)\Psi_0\rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \Psi_0[-f], \Psi_0[g]\rangle\!\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\|f\|^2-\frac{1}{2}\|g\|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} <-f,g>^n/n! \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\|f\|^2-\frac{1}{2}\|g\|^2-<f,g>\right)\end{aligned}$$

and

$$\langle\!\langle \Psi_0, D(f+g)\Psi_0\rangle\!\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\|f+g\|^2\right) ,$$

and the theorem follows.

8. Representation by functionals and a Fourier transform

FUNCTIONAL REPRESENTATION OF $\tilde{\mathfrak{S}}$.

With the aid of displacement operators and the δ-distribution, the representation of S^n as a space of functions can be realized as follows: For $\varphi \in S^n$ and $x \in \mathbf{R}^n$ we define

$$\tilde{\varphi}(x) = <\delta, \tau(-x)\varphi> .$$

Similarly, we are now in a position to interpret elements Φ of $\tilde{\mathfrak{S}}$ as functionals on the real part $\mathrm{Re}S$ of S simply by defining

$$\tilde{\Phi}(\varphi) = \langle\!\langle \delta(Q), D(i2^{-1/2}\varphi)\Phi \rangle\!\rangle \tag{8.1}$$

for $\varphi \in \mathrm{Re}S$.

Note, however that this functional representation has been normalized rather arbitrarily in accordance with the arbitrary normalization of $\delta(Q)$. On the other hand, the displacement operator has quite naturally been normalized so as to be unitary, and as we shall see below, any modification of $D(i2^{-1/2}\varphi)$ by a factor $c(\varphi)$ of norm 1 would be unnatural.

Apart from these questions concerning normalization of the functional representation, a more serious problem concerning the equation (8.1) is the fact that the expression on the right is not defined, since, as we have noted, $\delta(Q) \notin \mathfrak{S}^*$, and on the other hand, obviously, $\Psi_0[f] = D(f)\Psi_0 \notin \tilde{\mathfrak{S}}$ for any non-zero f.

The following theorem shows that the equation (8.1) makes good sense when suitably interpreted.

(8.2) THEOREM. *Let A denote the family of positive sequences $\alpha = \{\alpha_n\}$ satisfying $\alpha_n = o(\exp(-kn))$ for all real k. Let $\hat{\mathfrak{S}}$ denote the subspace of $\mathfrak{S}$ consisting of all sequences $\Psi = \{\psi_n\}$ satisfying*

$$|\!|\!| \Psi |\!|\!|_{r,\alpha}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n n! <\psi_n, (h_1 \ldots h_n)^r \psi_n> < \infty$$

for all $r = 0,1,\ldots$ and all $\alpha \in A$ with the topology determined by the family of all norms $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_{r,\alpha}$.

Then $\hat{\mathfrak{S}}$ is a complete space of type $\mathfrak{S}$ with all operators defined by restriction from $\mathfrak{S}$; $\hat{\mathfrak{S}}$ is invariant under all displacement operators $D(f)$ associated with elements $f \in S$, and $\delta(Q)$ belongs to $\hat{\mathfrak{S}}^*$.

We shall not prove this theorem here, but only note that it justifies the following computations.

(8.3) LEMMA. *For $\varphi \in \mathrm{Re}\, S$ we have*

$$\tilde{\Psi}_0(\varphi) = \exp(-\|\varphi\|^2/2) .$$

Proof. We have

$$D(i2^{-1/2}\varphi)\Psi_0 = \Psi_0[i2^{-1/2}\varphi]$$

$$= \exp(-\|\varphi\|^2/4) \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1/2} a^{*n\otimes}\big((n!)^{-1/2}(i2^{-1/2}\varphi)^n\big)\Psi_0$$

and

$$\delta(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} ((2k)!)^{-1/2} a^{*2k\otimes}\left(2^{-k} \binom{2k}{k}^{1/2} \mathrm{T}^k\right)\Psi_0 ,$$

whence the result follows directly since

$$<\mathrm{T}, (i2^{-1/2}\varphi)^2> = -1/2 \|\varphi\|^2 \quad \text{for } \varphi \text{ real.}$$

(8.4) THEOREM. *The functional $\tilde{\Psi}$, which represents an element $\Psi \in \tilde{\mathfrak{S}}$ is of the form*

$$\tilde{\Psi}(\varphi) = Pol(\varphi) \exp(-\|\varphi\|^2/2) ,$$

where the «polynomial» $Pol(\varphi)$ is a finite linear combination of terms of the form $<\omega_k, \varphi^k>$, $\omega_k \in S^k$.

Proof. It is sufficient to consider elements Ψ of the form $\Psi = a^*(\psi)a^{*n\otimes}(\omega)\Psi_0$, with $\psi \in S$, $\omega \in S^n_+$. Putting $\Phi = a^{*n\otimes}(\omega)\Psi_0$, $\delta = \delta(Q)$, and $\tilde{\varphi} = i2^{-1/2}\varphi$, and noticing that

$$\langle\!\langle \delta, a^*(\psi)\Omega \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \delta, a(\psi)\Omega \rangle\!\rangle$$

for all $\Omega \in \hat{\mathfrak{S}}$, we get

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\varphi) &= \langle\!\langle \delta(Q), D(i2^{-1/2}\varphi)\Psi \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \delta, D(\tilde{\varphi})a^*(\psi)\Phi \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \delta, (a^*(\psi) - <\tilde{\varphi},\psi>)D(\tilde{\varphi})\Phi \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \delta, (a(\psi) - <\tilde{\varphi},\psi>)D(\tilde{\varphi})\Phi \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \delta, D(\tilde{\varphi})(a(\psi) + <\psi^*,\tilde{\varphi}> - <\tilde{\varphi},\psi>)\Phi \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \delta, D(\tilde{\varphi})(a(\psi) + i2^{1/2}<\psi^*,\varphi>)\Phi \rangle\!\rangle \\ &= i2^{1/2}<\psi^*,\varphi>\tilde{\Phi}(\varphi) + (a(\psi)\Phi)\tilde{}(\varphi)\ ,\end{aligned}$$

and the result follows by induction.

Let us say that a (non-linear) mapping F from a locally convex space S_1 into a locally convex space S_2 is (*real—*) *differentiable* at the point $x \in S_1$ iff there exists a continuous (real—) linear mapping F_x (called the *differential* of F at x) of S_1 into S_2, such that

$$F(x+h) = F(x) + F_x(h) + R_x(h)\ ,$$

where the remainder $R_x(h)$ satisfies: For every continuous semi-norm $\|\cdot\|_2$ on S_2 there exists a continuous semi-norm $\|\cdot\|_1$ on S_1 such that

$$\| R_x(h) \|_2 = o(\| h \|_1) \quad \text{near } 0\ .$$

We mention without proof the following results.

(8.5) THEOREM. *For every element* $\Psi \in \tilde{\mathfrak{S}}$, *the complex function* $\tilde{\Psi}$ *on* $\mathrm{Re}\,S$ *is differentiable. The value of the differential of* $\tilde{\Psi}$ *at* φ *on the vector* $\psi \in \mathrm{Re}\,S$ *will be denoted* $\frac{\delta\tilde{\Psi}}{\delta\psi}(\varphi)$—note that this symbol is linear in ψ.

In the functional representation of $\tilde{\mathfrak{S}}$ *the operators* $P = 2^{-1/2}(a+a^*)$ *and* $Q = i2^{-1/2}(a - a^*)$ *are related to differentiation and multiplication in the following way:*

$$(P(\psi)\Psi)\tilde{}(\varphi) = -i\frac{\delta\tilde{\Psi}}{\delta\psi}(\varphi)\ ,$$

and

$$(Q(\psi)\Psi)\tilde{}(\varphi) = <\psi,\varphi>\tilde{\Psi}(\varphi)$$

for all $\psi,\varphi \in \mathrm{Re}\,S$.

(8.6) THEOREM. *For every element* $\Psi \in \tilde{\mathfrak{S}}$, *define the function* $G(\Psi)$ *on* $\mathrm{Re}\,\mathcal{S}$ *by* $G(\Psi)(\varphi)=\exp(\|\varphi\|^2/2)\tilde{\Psi}(\varphi)$. *Then the function* $G(\Psi)$ *has a unique continuous extension to* $\mathrm{Re}\,\mathcal{S}^*$, *and the mapping* G *of* $\tilde{\mathfrak{S}}$ *into the space of polynomials over* $\mathrm{Re}\,\mathcal{S}^*$ *is an isometry into the space* $\mathcal{L}^2(\mathrm{Re}\,\mathcal{S}^*)$ *of functions on* $\mathrm{Re}\,\mathcal{S}^*$ *which are square-integrable with respect to Gaussian measure (Gaussian cylindrical measure in the sense of* GEL'FAND *and* VILENKIN [7], *weak normal distribution with parameter* $c=\dfrac{1}{2}$ *in the sense of* SEGAL [19]).

It follows from this theorem that it may be suggestive to think of the mapping $\Psi \to \tilde{\Psi}$ as a mapping, which, apart from a divergent «renormalization factor» $\pi^{-\infty/4}$, is an isometry of $\tilde{\mathfrak{S}}$ into the space $\mathcal{L}^2(\mathrm{Re}\,\mathcal{S}^*)$ of functions, which are square-integrable with respect to a non-existing «Lebesgue measure» on $\mathrm{Re}\,\mathcal{S}^*$.

THE FOURIER TRANSFORM IN $\mathcal{S}^n$.

Let $\mathcal{S}^n$ be a maximal space of type $\mathcal{S}^n$, and let J be the mapping described above of $\mathcal{S}^n$ into the space $(\mathcal{S}^n)$ of rapidly decreasing infinitely differentiable functions. The Fourier transform in $(\mathcal{S}^n)$ can now be constructed as follows: Let F be the identical mapping of $\mathcal{S}^n$ onto itself, and define operators $\hat{p}_j, \hat{q}_j$, $j=1,\dots,n$ in the image space by

$$\hat{p}_j F\varphi = F q_j \varphi\ , \qquad \hat{q}_j F\varphi = -F p_j \varphi\ .$$

It is trivial that the image space $F\mathcal{S}^n$ is again a maximal space of type $\mathcal{S}^n$ with the operators $\hat{b}_j = 2^{-1/2}(\hat{p}_j - i\hat{q}_j), \hat{b}_j^* = 2^{-1/2}(\hat{p}_j + i\hat{q}_j)$ (note that $\hat{b}_j F = iF b_j$ and $\hat{b}_j^* F = -iF b_j^*$), and hence there exists a canonical mapping J_1 of $F\mathcal{S}^n$ onto the function space $(\mathcal{S}^n)$. Clearly, the composed mapping $\mathcal{F} = J_1 F J^{-1}$ is the usual Fourier transform in $(\mathcal{S}^n)$.

A FUNCTIONAL FOURIER TRANSFORM.

It is now clear how a Fourier transform can be defined in a very natural way on those functionals $\tilde{\Psi}$ on $\mathrm{Re}\,\mathcal{S}^*$, which represent elements $\Psi \in \tilde{\mathfrak{S}}$ (or, more generally, $\hat{\mathfrak{S}}$).

This functional Fourier transform carries multiplication by $<\psi, \cdot>$ into $-i$ times derivation in the direction ψ and derivation in the direction ψ into multiplication by $i<\psi, \cdot>$, and it is an isometry with respect to «Lebesgue measure» on $\mathrm{Re}\,\mathcal{S}^*$.

REFERENCES

[1] Cook, J. M. — *The mathematics of second quantization.* Trans. Amer. Math. Soc. *74:* 222-245. 1953.

[2] Dixmier, J. — *Sur la relation* $i(PQ-QP)=1$. Comp. Math. *13:* 263-269. 1958.

[3] Fock, V. — *Konfigurationsraum und zweite Quantelung.* Z. Physik *75:* 622-647. 1932.

[4] Foias, C.; Gehér, L.; Nagy, B. Sz. — *On the permutability condition of quantum mechanics.* Acta Sci. Math. (Szeged) *21:* 78-89. 1960.

[5] Foias, C.; Gehér, L. — *Über die Weylsche Vertauschungsrelation.* Acta Sci. Math. (Szeged) *24:* 97-102. 1963.

[6] Friedrichs, K. O. — *Mathematical aspects of the quantum theory of fields.* New York. 1953.

[7] Gel'fand, I. M.; Vilenkin, N. Ya. — *Obobščennye funkcii 4.* Moskva. 1961.

[8] Grothendieck, A. — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. *16.* 1955.

[9] Gårding, L.; Wightman, A. — *Representations of the commutation relations.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. *40:* 622-626. 1954.

[10] Haag, R. — *On quantum field theories.* Dan. Mat. Fys. Medd. *29* (12). 1955.

[11] Hove, L. van — *Les difficultés de divergences pour un modèle particulier de champ quantifié.* Physica *18:* 145-159. 1952.

[12] Kilpi, Y. — *Zur Theorie der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., (315). 1962.

[13] Kristensen, P.; Mejlbo, L. and Poulsen, E. Thue — *Tempered distributions in infinitely many dimensions. I. Canonical field operators.* Commun. Math. Phys. *1:* 175--214. 1965.

[14] Kristensen, P.; Mejlbo, L. and Poulsen, E. Thue — *Tempered distributions in infinitely many dimensions. II. Displacement operators.* Math. Scand. *14:* 129-150. 1964.

[15] Mejlbo, L. — *On the solution of the commutation relation* $PQ-QP=-iI$. Math. Scand. *13:* 129-139. 1963.

[16] Neumann, J. von — *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren.* Math. Ann. *104:* 570-578. 1931.

[17] Rellich, F. — *Der Eindeutigkeitsatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen.* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt. 107-115. 1946.

[18] Schwartz, L. — *Théorie des distributions. II.* Paris. 1959.

[19] Segal, I. — *Tensor algebras over Hilbert spaces.* I. Trans. Amer. Math. Soc. *81:* 106--134. 1956.

[20] Sobolev, S. L. — *Applications of functional analysis in mathematical physics.* Translations of Mathematical Monographs 7, Amer. Math. Soc.. Providence. 1963.

[21] Tillmann, H. G. — *Zur Eindeutigkeit der Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen.* Acta Sci. Math. (Szeged). *24:* 258-270. 1963.

[22] Tillmann, H. G. — *Zur Eindeutigkeit der Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen.* II. Arch Math. *15:* 332-334. 1964.

[23] Wick, G. C. — *The Evaluation of the Collision Matrix.* Phys. Rev. (2) *80:* 268-272. 1950.

[24] Wielandt, H. — *Uber die Unbeschränktheit der Schrödingerschen Operatoren der Quantemechanik.* Math. Ann. *121:* 21. 1949.

[25] Wightman, A. S. and Schweber, S. S. — *Configuration space methods in relativistic quantum field theory. I.* Phys. Rev. (2) *98:* 812-837. 1955.

SUMMARY

The talks were a report on investigations carried out jointly by Povl Kristensen, Institute of Physics, Lars Mejlbo, Institute of Mathematics, Aarhus University, and myself.

To a large extent these investigations have their origin in quantum field theory, and partly by way of introduction, partly in order to establish certain auxiliary results, we first study the corresponding problem of ordinary quantum mechanics.

1. Spaces of type $\mathcal{S}$.

A well-known problem of quantum mechanics is the study of a pair of operators p,q satisfying $[p,q]\equiv pq-qp=-i$. In addition, these operators are required to be self-adjoint, and thus, in particular, they are assumed to be defined in a Hilbert space. Particular attention has been directed towards the problem of formulating additional assumptions on irreducible representations which assure the existence of a solution to the equation $(p-iq)\psi=0$ (the «canonical» situation).

In contrast, we have studied the following problem:

Let $\mathcal{S}^?$ be a *locally convex* space in which there is defined a continuous scalar product $<\cdot,\cdot>$ and two *continuous* operators p, q, which are symmetric w. r. t. $<\cdot,\cdot>$ (i. e. $<p\varphi,\psi>=<\varphi,p\psi>$) and satisfy $[p,q]=-i$. Assume further that $\mathcal{S}^?$ contains an element ψ_0 satisfying: $(p-iq)\psi_0=0$, and $R\psi_0$ is dense in $\mathcal{S}^?$, where R denotes the algebra of all operators which are polynomials in p and q.

What can be said about the structure of the space $\mathcal{S}^?$ — called a space of type $\mathcal{S}$.

The main result is that there exists a continuous mapping of $\mathcal{S}^?$ onto a dense subspace of Schwartz' space $\mathcal{S}$ of testing functions for temperate distributions such that p and q correspond to $-i\dfrac{d}{dt}$ and multiplication by t.

2. Spaces of type $\mathfrak{S}$.

For the case of a finite number of operators p_i, q_i, $i=1,2,\ldots,n$ we have a result analogous to that above. For the case of an infinite number of such operators we formulate the requirements somewhat differently:

A locally convex space $\mathfrak{S}^?$ is called a space of type $\mathfrak{S}$ iff:

$\mathfrak{S}^?$ is provided with a continuous scalar product.

There exist continuous linear operators P and Q from S into the space $L(\mathfrak{S}^?,\mathfrak{S}^?)$ of continuous linear mappings in $\mathfrak{S}^?$ ($L(\mathfrak{S}^?,\mathfrak{S}^?)$ is provided with the topology of uniform convergence on bounded sets), such that

$$[P(\varphi),P(\psi)] = [Q(\varphi),Q(\psi)] = 0 \ ,$$

$$[P(\varphi^*),Q(\psi)] = -i<\varphi,\psi> \ ,$$

where φ^* denotes the complex conjugate of φ.

There exists an element Ψ_0 satisfying $(P(\varphi)-iQ(\varphi))\Psi_0=0$ such that $\mathbb{R}\Psi_0$ is dense in $\mathfrak{S}^?$, where $\mathbb{R}$ denotes the algebra of polynomials in all $P(\varphi)$ and $Q(\psi)$.

To every symmetric and real operator $k\in R$ there exists a symmetric operator $K\in L(\mathfrak{S}^?,\mathfrak{S}^?)$ such that $[K,P(\varphi)] = iQ(k\varphi),[K,Q(\varphi)] = -iP(k\varphi)$ for all real $\varphi\in S$.

This final requirement is motivated in the quantum theory of free fields (we call K the bi-quantization of k).

It is proved that there exist a minimal space $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}'$, a minimal complete space $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}$, and a maximal space $\mathfrak{S}$ of type $\mathfrak{S}$, and explicit representations of these spaces are constructed. The structure of $\mathfrak{S}$ is similar to that of S — in particular, $\mathfrak{S}$ is complete and metrizable, and bounded closed sets are compact.

Representations of the dual spaces $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*$ and $\mathfrak{S}^*$ are also constructed, it is shown that the operators P and Q are continuous from S into $L(\mathfrak{S}^*,\mathfrak{S}^*)$, and that the operator $a^*=(P+iQ)/\sqrt{2}$ has a continuous extension $S^*\to L(\mathfrak{S}^*,\mathfrak{S}^*)$, while $a=(P-iQ)/\sqrt{2}$ has a continuous extension $S^*\to L(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$. Other similar extensions are studied.

3. Displacements

It is easily seen how the displacement operator $\tau_h:\varphi(t)\to\varphi(t-h)$ in S can be characterized algebraically. In analogy we call an operator $D(f)\in L(\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}},\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*)$ a displacement operator associated with $f\in S^*$ iff

$$D(f)a^*(\varphi) = (a^*(\varphi) - <f,\varphi>)D(f) \ ,$$

$$D(f)a(\varphi^*) = (a(\varphi^*) - <\varphi,f>)D(f) \ .$$

It is proved that for $f\in S^*$ there exists a displacement operator $D(f)\in L(\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}},\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*)$, and $D(f)$ is determined uniquely up to a scalar factor. Furthermore, $D(f)\in L(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$ iff $f\in S$, and in this case $D(f)$ can be normalized so that it becomes a norm-preserving isomorphism of $\mathfrak{S}$ onto $\mathfrak{S}$.

The existence of a δ-element in $\tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}^*$ and possible applications to a Fourier-transform for functionals on the real part of S will be touched upon briefly.

DISTRIBUTIONS ET VALEURS AU BORD DES FONCTIONS HOLOMORPHES

PAR

A. MARTINEAU

This page intentionally left blank

DISTRIBUTIONS ET VALEURS AU BORD DES FONCTIONS HOLOMORPHES

par

A. MARTINEAU

Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier (FRANCE)

CHAPITRE I — LE CAS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Nous nous proposons de présenter la question de façon à rendre plus naturelle la méthode suivie dans le cas de n variables.

1. Rappel sur les espaces de distributions

Nous désignons par $\mathbb{R}^n$ l'espace numérique des suites $(x_1,\ldots,x_n)$ de nombres. Selon Schwartz, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact muni de la topologie

$$\varinjlim_{K \subset \mathbb{R}^n} \mathcal{D}(K)$$

où $\mathcal{D}(K)$ désigne l'espace de Fréchet des fonctions indéfiniment dérivables à support dans K, K parcourant la famille des compacts de $\mathbb{R}^n$, cf. [G] page 67, et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ désigne son dual topologique, l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$. Une fonction localement sommable $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ par rapport à $dx=dx_1\ldots dx_n$ définit une distribution de la façon suivante:

$$f \to (\varphi \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx) \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) .$$

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on définit aussi les distributions sur U comme éléments du dual de $\underset{K\subset U}{\underrightarrow{Lim}}\ \mathcal{D}(K)=\mathcal{D}(U)$ et il s'ensuit une notion de restriction d'une distribution à un ouvert puisque $\mathcal{D}(U)\subset\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On sait que toute distribution définie sur un ouvert est indéfiniment dérivable et qu'on a le théorème de structure suivant

THÉORÈME I ([G] page 83). *Soit $T\in\mathcal{D}'(U)$, pour tout ouvert V relativement compact dans U, il existe une fonction continue f et un opérateur de dérivation*

$$D=\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\qquad \textit{tels que } T=Df \textit{ sur } V\ .$$

C'est à dire que, pour toute φ à support dans V

$$T(\varphi)=\pm\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,.\,D\varphi(x)\,.\,dx\ .$$

L'espace $\mathcal{D}'(U)$ admet une topologie naturelle (topologie forte) qui en fait un espace complet, et en fait pour les filtres «bornés» cette topologie est équivalente à la topologie de la convergence simple (des $T_\alpha\to T_0$ si pour toute $\varphi,\varphi\in\mathcal{D}(U)$, $T_\alpha(\varphi)\to T_0(\varphi)$), [$G$] pages 72 à 77. On a les deux propriétés suivantes exprimées dans le

THÉORÈME II. 1) *Des $T_\alpha\to T_0$ fortement, si et seulement si, pour tout ouvert U_i d'un recouvrement de U la restriction de T_α à U_i tend vers celle de T_0 à U_i dans $\mathcal{D}'(U_i)$.*

2) *Si T_α est un filtre borné convergent vers T_0, pour tout V relativement compact dans U, on peut trouver un opérateur de dérivation D, des fonctions f_α continues telles que: $f_\alpha\to f_0$ uniformément sur V, et telles que $T_\alpha=Df_\alpha, T_0=Df_0$,* cf [$G$] page 87.

Enfin il en est de même pour les filtres à base dénombrable.

Ce sont les propriétés décrites dans ces théorèmes que nous allons utiliser constamment.

Je rappelle maintenant ce qu'on entend par distributions tempérées. Schwartz introduit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ comme dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées $\left((1+r^2)^k\ \varphi\right.$ est borné pour tout $k>0, r^2=x_1^2+\dots+x_n^2)$. Il existe une injection continue et d'image dense de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui permet d'identifier $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On obtient alors la caractérisation suivante d'une distribution tempérée.

THÉORÈME III ([G] Tome II, p. 95). *Une distribution T est tempérée si et seulement s'il existe un opérateur de dérivation D et une fonction continue g à croissance lente* (i. e. la fonction $\frac{g}{(1+r^2)^k}$ est bornée pour un $k>0$) *tels que $T=Dg$.*
Dans $\mathcal{S}'$ on a une notion de convergence forte (cf. Ibidem, p. 94) qui concrètement s'exprime pour les filtres bornés ou à base dénombrable de la façon suivante:

THÉORÈME IV. *Si des $T_\alpha \in \mathcal{S}'$ convergent vers T_0 en restant dans une partie bornée de $\mathcal{S}'$, c'est qu'il existe des fonctions continues g_α, g_0, un indice k_0, un opérateur de dérivation D tels que:*

1) *les* $\dfrac{g_\alpha}{(1+r^2)^{k_0}}$ *sont uniformément bornées sur* $\mathbb{R}^n$

2) $\dfrac{g_\alpha}{(1+r^2)^{k_0}} \to \dfrac{g_0}{(1+r^2)^{k_0}}$ *uniformément sur* $\mathbb{R}^n$

3) $Dg_\alpha = T_\alpha \;,\; Dg_0 = T_0$.

Rappelons aussi qu'on peut caractériser l'espace $\mathcal{S}'$ de la façon suivante. On introduit l'espace projectif $P(\mathbb{R}^n)$ (ensemble des classes de systèmes de nombres $(y_1,\ldots,y_{n+1})$ non simultanément nuls pour la relation d'équivalence

$$(y_1,\ldots,y_{n+1}) \equiv (\lambda y_1,\ldots,\lambda y_{n+1}) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \neq 0)$$

avec sa structure de variété indéfiniment différentiable. C'est à dire qu'une fonction φ définie sur $P(\mathbb{R}^n)$ est dite indéfiniment dérivable si la fonction homogène de degré $0, \varphi(y_1,\ldots,y_{n+1})$, associée est telle que chaque fonction $\varphi(z_1,\ldots,z_h,1,z_{h+2},\ldots,z_{n+1})$ soit indéfiniment dérivable des variables $z_1,\ldots,z_h,z_{h+2},\ldots,z_{n+1}$. D'où la notion de distribution sur $P(\mathbb{R}^n)$. On identifie $\mathbb{R}^n$ au sous espace de $P(\mathbb{R}^n)$ défini par $y_{n+1} \neq 0$ par $(x_1,\ldots,x_n) \to (x_1 y_{n+1},\ldots,x_n y_{n+1}, y_{n+1})$. Dans ces conditions $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $P(\mathbb{R}^n)$ nulles ainsi que toutes leurs dérivées sur l'hyperplan à l'infini ($y_{n+1}=0$), et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ à la restriction de $\mathcal{D}'(P(\mathbb{R}^n))$ à $\mathbb{R}^n$. Le noyau de cette opération de restriction est formé des distributions concentrées sur l'hyperplan de l'infini.

Nous allons généraliser ces propriétés.

DÉFINITION 1: *Un ouvert Ω de $P(\mathbb{R}^n)$ est dit à frontière $\partial\Omega$ très régulière si, en chaque point frontière M de $\partial\Omega$, il existe un voisinage ω de ce point et un homéomorphisme indéfiniment différentiable de ω sur un voisinage π de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Omega \cap \omega$ soit transformé soit en l'ensemble des points $x_n>0$, soit en l'ensemble des points $x_n \neq 0$ de π.*

Si, par exemple, Ω est défini par $f > 0$ où f est une fonction indéfiniment dérivable et si $df \neq 0$ en tout point où $f=0$, Ω est un ouvert à frontière très régulière.

DÉFINITION 2: *Une distribution T définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ sera dite à croissance lente* (nous noterons $T \in \mathcal{S}'(\Omega)$) *s'il existe g continue sur $\overline{\Omega}$ et à croissance lente au sens usuel lorsque Ω n'est pas compact, un opérateur de dérivation D tels que $T = Dg$ dans Ω.*

Il vient alors le

THÉORÈME V. a) *Soit Ω un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ soit prolongeable en une distribution sur $\mathbb{R}^n$ est que T soit à croissance lente dans Ω.*

b) *Si Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{S}'(\Omega)$ est la restriction de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ à Ω.*

DÉMONSTRATION: Si T est prolongeable au voisinage d'un point frontière, d'après le théorème I on pourra écrire dans ce voisinage $T = Dg$ où g est continue au voisinage du point. Par un argument de compacité on montrera que T satisfait à la définition 2. Réciproquement si T satisfait à la condition 2 il est immédiat qu'elle se prolonge par Dg. Ce qui prouve *a)*. Quant à *b)* il résulte immédiatement de ce que nous venons de dire et du théorème III.

Il reste à caractériser $\mathcal{S}'(\Omega)$ d'une façon fonctionnelle.

THÉORÈME VI. *Si Ω est un ouvert, intersection finie d'ouverts à frontières trés régulières en position générale, ou si Ω est convexe.*

a) *si Ω est relativement compact, désignant par $\mathcal{S}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ à support dans $\overline{\Omega}$, $\mathcal{S}'(\Omega)$ s'identifie au dual de $\mathcal{S}(\Omega)$.*

b) *Si Ω n'est pas relativement compact $\mathcal{S}'(\Omega)$ est le dual de l'espace des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$.*

DÉMONSTRATION: en exercice.

Enfin, avant de parler de valeurs au bord je vais préciser ce qu'il faut entendre par «espace de distributions». Ce sera un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (de $\mathcal{D}'(U)$) muni d'une topologie localement convexe plus fine que la topologie de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $(\mathcal{D}'(U))$.

La plupart des espaces fonctionnels usuels munis de leurs topologies deviennent des espaces de distributions, en utilisant l'identification entre fonctions et distributions que nous avons rappelé.

2. Valeur au bord pour une fonction holomorphe

Nous noterons par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $i\mathbb{R}$ celui des nombres purement imaginaires et $\mathbb{C}$ sera identifié à $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ par $(z=x+iy) \rightarrow (x,iy)$. Ce que nous allons dire pourrait largement être généralisé. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ de la forme $\Omega_1 \times i\Omega_2$ où Ω_1 est un segment ouvert de $\mathbb{C}, \Omega_2$ un segment ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité zéro. Nous supposerons $\Omega \neq \emptyset$. Soit maintenant donnée une fonction $f(z)$ holomorphe dans Ω. Soit $\mathcal{E}$ un espace de distributions sur Ω_1.

Définition 3. *f admet une valeur au bord Ω_1 de Ω au sens de $\mathcal{E}$ si, pour $i\varepsilon$ suffisamment petit la distribution, en $x, f(x+i\varepsilon)$ est dans $\mathcal{E}$ et si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x+i\varepsilon)$ existe dans $\mathcal{E}$.*

Cette limite est dite la valeur au bord Ω_1 de f. (Ω_1 sera en général sous entendu). Cette définition est la définition utilisée classiquement (cf. Bibliographie chiffrée). L'espace $\mathcal{E}$ étant un espace localement convexe sa topologie peut être affaiblie. Si la limite $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x+i\varepsilon)$ existe seulement pour la topologie affaiblie, nous dirons que f a une valeur au bord faible dans $\mathcal{E}$.

Comme le filtre des $f(x+i\varepsilon)$ est borné ces deux notions coïncideront si les parties bornées de $\mathcal{E}$ sont relativement compactes.

Je rappelle qu'un espace est égal à son bidual (est dit semi-réflexif) si et seulement si ses parties bornées sont faiblement relativement compactes [A].

Il vient donc avec tout cela la

Proposition 1: *Pour que f définie sur $\Omega_1 \times i\Omega_2$ admette une valeur au bord faible dans $\mathcal{E}$ semi-reflexif il faut et il suffit que*

1) *pour $\mathcal{E}$ suffisamment petit les f_ε soient simplement bornées dans $\mathcal{E}$.*
2) *que f admette une valeur au bord dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$.*

Démonstration: La nécessite de 1) a déjà été relevée. Celle de 2) résulte du fait que la topologie de $\mathcal{E}$ est plus fine que celle induite par $\mathcal{D}'$. La suffisance vient de ce que la topologie faible de $\mathcal{D}'$ est plus faible — mais séparée — que la topologie affaiblie de $\mathcal{E}$; donc que $\mathcal{D}'$ faible induit sur toute partie faiblement compacte de $\mathcal{E}$ la topologie faible de $\mathcal{E}$ c'est à dire qu'une telle partie est compacte dans $\mathcal{D}'$; en conséquence la valeur au bord appartient à $\mathcal{E}$ et est atteinte faiblement dans $\mathcal{E}$. c. q. f. d.

Lorsque l'espace est un Montel la question est complètement résolue. Mais il peut être utile de savoir si la valeur au bord est atteinte fortement (exemple espaces L^p). Cette proposition n'apprend rien. Je renvoie pour cette question à [1] et aussi à la proposition 2 page 35 de [18].

Nous allons dans la suite nous concentrer exclusivement sur deux cas: celui de $\mathcal{D}'$ et celui de $\mathcal{S}'$.

La topologie de $\mathcal{D}'$ est de nature locale. Il nous suffira d'étudier la question de la valeur au bord au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}$.

THÉORÈME VII (fondamental): *Pour que f holomorphe dans $\Omega=\Omega_1\times i\Omega_2$ non vide admette une valeur au bord dans $D'(\Omega_1)$ il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable en une distribution de $\Omega_1\times i\Omega_3$ où Ω_3 est un intervalle ouvert contenant $\{0\}\cup\Omega_2$.*

Nous dirons de façon imagée «prolongeable à travers Ω_1» pour exprimer cette propriété.

En particulier, *pour que f définie pour $y>0$ admette une valeur au bord dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable à travers $\mathbb{R}$ en une distribution sur $\mathbb{C}$.*

DÉMONSTRATION: Nous allons utiliser en lemme la proposition suivante.

PROPOSITION 2: *Pour que f, holomorphe dans $\Omega=\Omega_1\times i\Omega_2$ se prolonge en une distribution à travers Ω_1 il faut et il suffit que, pour tout compact K inclus dans Ω_1, il existe un nombre entier k_0 tel que*

$$\sup_y\left[\sup_{x\in K}\left|y^{k_0}\,.\,f(x+iy)\right|\right]<+\infty$$

lorsque y reste suffisamment petit (en d'autres termes que f soit à croissance lente au sens fonction au voisinage de chaque point du bord).

DÉMONSTRATION: (de la proposition 2). Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante de prolongement au voisinage de $x_0\in\Omega_1$ est que, au voisinage de ce point f soit à croissance lente *au sens distribution*, c'est à dire qu'il existe g continue dans ω voisinage de x_0 telle que $f=Dg$ dans $\omega\cap\Omega$. La fonction f étant holomorphe g est elle même holomorphe dans cet ouvert modulo une solution distribution de l'équation $DX=0$. C'est à dire que, si $D=\dfrac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\,.\,\partial y^{\beta}}$ on a:

$$g(x,y)=\gamma(z)+\sum_{h<\alpha}x^h\,.\,T_h(y)+\sum_{k<\beta}y^k\theta_k(x)$$

où les T_h et les θ_k sont des distributions. Il vient alors le

LEMME: *Soit* $\gamma(z)$ *une fonction holomorphe définie pour* $|x|<a, o<y<b$ *et de la forme*

$$g(x,y)-\sum_{h<\alpha} x^h \,.\, T_h(y)-\sum_{k<\beta} y^k \,.\, \theta_k(x)$$ *les* T_h *étant des distributions sur l'intervalle* $]0,b[$ *(ouvert), les* θ_k *étant des distributions sur l'intervalle* $]-a,+a[$ *et* $g(x,y)$ *se prolongeant par continuité à l'axe réel. Alors les* T_h, *les* θ_k *sont des fonctions continues, les* T_h *se prolongent jusqu'en* $y=0$ *et* γ *se prolonge par continuité à l'axe réel.*

Montrons par exemple la continuité des θ_k.

La distribution

$$-\gamma(z)+g(x,y)+\sum_{h<\alpha} x^h \,.\, T_h(y)$$

est une distribution des deux variables fonction continue de x à valeurs distributions en y c'est à dire un élément de $C_x \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$. Or c'est un élément du produit tensoriel de $\mathcal{D}'_x \otimes P_y^{(\beta)}$ où $P_y^{(\beta)}$ désigne les polynômes en y de degré inférieur à β donc (¹) c'est un élément de $C_x \otimes P_y^{(\beta)}$. On raisonne de même en y.

Ensuite, on remplace

$$g(x,y) \text{ par } g(x,y)-\sum_{k<\beta} y^k \,.\, \theta_k(x)=l(x,y)$$

et on a:

$$\gamma(z)+\sum_{h<\alpha} x^h \,.\, T_h(y)=l(x,y)\,.$$

On considère maintenant un circuit d'intégration $\Gamma(y)$ décrit par la figure 1 et on calcule

$$(1)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(y)} \frac{l(\xi,\eta)}{\xi+i\eta-z}\,.\,(d\xi+id\eta)$$

lorsque y tend vers zéro cette expression a une limite ce, quelque soit z, quelque soit ξ_0, quel que soit y_0. L'intégrale (1) est égale à:

$$\gamma(z)+\sum_{h<\alpha}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(y)}\frac{\xi^h \,.\, T_h(\eta)}{\zeta-z}\,.\,d\zeta \quad \text{si } z\epsilon\Gamma(y)$$

ou à

$$\sum_{h<\alpha}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(y)}\frac{\xi^h \,.\, T_h(\eta)}{\zeta-z}\,d\zeta \qquad (\zeta=\xi+i\eta)\,.$$

(¹) Le «donc» est laissé en exercice.

Considérons les intégrales $\displaystyle\int_{\Gamma(y)} \frac{\xi^h \, . \, T_h(\eta)}{\zeta - z} \, . \, d\zeta$

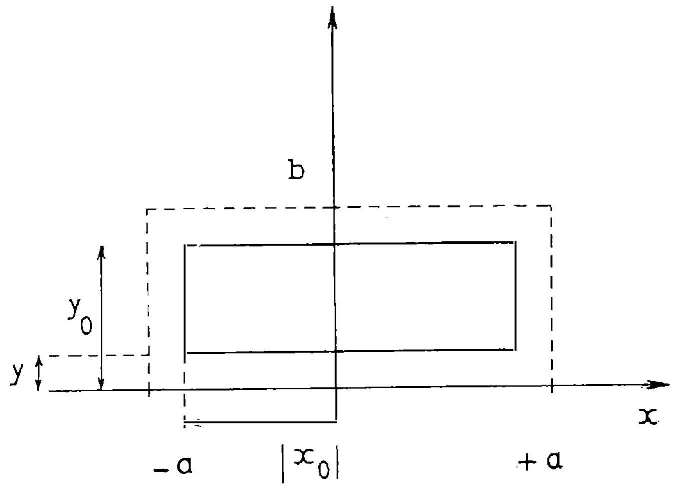

FIGURE 1

elles sont de la forme

$$k_h + \xi_0^h \int_{y_0}^{y} \frac{T_h(\eta)}{\zeta_1 - z} \, . \, d\eta + \xi_0^h \int_{y_0}^{y} \frac{T_h(\eta)}{\zeta_2 - z} \, . \, d\eta + T_h(y) \, . \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \frac{\xi^h}{\xi - z} \, . \, d\xi$$

ξ_0 désignant l'abscisse du côté vertical, ζ_1, ζ_2 parcourant les deux segments verticaux.

On peut rendre les termes où T_h est sous l'intégrale relativement petits par rapport au dernier terme en choisissant y_0 suffisamment petit.

Vu l'existence de la limite, y_0, z, ξ_0 variant, on en déduira que $T_h(y)$ a une limite lorsque y tend vers zéro d'où le prolongement de $\gamma(z)$ lorsque y tend vers zéro. Ceci démontre le lemme.

La proposition 2 en résulte dans sa partie nécessaire car on en déduit immédiatement, puisque

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(y)} \frac{\gamma(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+\beta+1}} \, . \, d\zeta$$

que f est à croissance lente au sens usuel.

Pour la partie suffisante on voit par la formule des accroissements finis que si f est à croissance lente au voisinage d'un point x_0 frontière, soit:

$$\sup_y \left(\sup_{x\in k} |y^{k_0} f(x+iy)|\right) < +\infty \qquad \text{où } K \text{ est un voisinage de } x_0,$$

y suffisamment petit, la primitive complexe d'ordre k_0+1 de f se prolonge par continuité jusqu'à K. c. q. f. d.

Achevons la démonstration du théorème 6 en montrant que f admet une valeur au bord si et seulement si elle est à croissance lente au sens usuel au voisinage de chaque point frontière.

Pour la suffisance: Soit x_0 un point frontière et $\gamma(z)$ une primitive complexe continue jusqu'au bord, de f, au voisinage de x_0; alors les $\gamma(x+iy)$ ont une limite $\gamma(x,0)$ atteinte uniformément dans un voisinage de x_0; donc puisque

$$f = \frac{d^{k_0}}{dz_0^{k_0}}\,\gamma \qquad f(x+iy) = \frac{d^{k_0}}{dx_0^{k_0}}\left(\gamma(x+iy)\right) \quad \text{tend vers } \frac{d^{k_0}}{dx^{k_0}}\left(\gamma(x,0)\right)$$

Ceci montre que, localement, les $f(x+iy)$ ont une limite à la frontière, donc ont une limite dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$.

Pour la nécessité: d'après le théorème II si $f(x+iy) \to T(x)$, pour tout $x_0 \in \Omega_1$ c'est qu'il existe une famille $g_y(x)$ de fonctions continues définies dans un voisinage ω convenable du point x_0, convergent uniformément dans ce voisinage vers $g(x)$, et un k, tels que $f(x+iy) = \dfrac{d^k}{dx^k}\, g_y(x)$ $\dfrac{d^k}{dx^k}\, g = T(x)$. Il en résulte évidemment que f admet une primitive complexe $\gamma(z)$ qui se prolonge à la frontière de façon continue, donc est à croissance lente au sens distribution. c. q. f. d.

On vérifiera que, dans le cas de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la proposition 2 peut se transformer de la façon suivante.

PROPOSITION 3: *Pour que f holomorphe dans la région $y > 0$ admette une valeur au bord dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ il faut et il suffit qu'il existe un entier n tel que* $\left|\dfrac{y}{x}\right|^n \cdot f(x+iy)$ *reste uniformément borné.*

3. Prolongement canonique d'une fonction holomorphe

Soit, comme précédemment f holomorphe dans un ouvert $\Omega = \Omega_1 \times i\Omega_2$ et soit Ω_3 un intervalle $]-c,b[$ où $]0,b[$ est l'intervalle Ω_2.

Nous savons qu'on peut prolonger f en $\bar{f}$ distribution dans $\Omega_1 \times i\Omega_3$ si et seulement si elle admet une valeur au bord que nous noterons $\partial(f)(x)$.

PROPOSITION 4: *Il existe un prolongement et un seul $\bar{f}$ de f en une distribution définie dans $\Omega_1 \times i\Omega_3$ de support $\Omega_1 \times \overline{i\Omega_2}$ tel que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{f}$ soit égal à*

$$\frac{i}{2} \partial(f)(x) \otimes \delta(y) .$$

DÉMONSTRATION: Je rappelle que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ désigne l'opérateur du premier ordre $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right]$, et que si f est une fonction holomorphe donc fonction indéfiniment dérivable des variables réelles x et y $\big(f(z)=f(x+iy)=f(x,y)\big)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f=0$ en vertu des identités de Cauchy. Soit $\gamma(z)$ une primitive complexe continue jusqu'en $y=0$ de f dans un voisinage d'un point x_0.

Nous prolongeons γ par 0 pour $y<0$. Cette fonction définit une distribution que nous désignons $\bar{\gamma}$, dans le voisinage ω de x_0. Si $f= \frac{d^k}{dz^k} \gamma$ pour $y>0$, nous poserons:

$\bar{f}= \frac{\partial^k}{\partial x^k} \bar{\gamma}$. Soit $\varphi(x,y)$ indéfiniment dérivable et à support compact dans ω. On a:

$$\begin{aligned} <\varphi , \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{f} > &= - < \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi , \bar{f} > \\ &=(-1)^{k+1} < \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \varphi , \bar{\gamma} > \end{aligned}$$

Nous considérons un contour Γ comme indiqué par la figure 2, et la dernière parenthèse va s'écrire:

$$(-1)^{k+1} \iint_{(\Gamma)} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \varphi(x,y) \right] \gamma(x,y) dx dy$$

où (Γ) désigne l'intérieur de la région délimitée par Γ.

On a:

$$dx \wedge dy = \frac{1}{2i} d\bar{z} \wedge dz .$$

Cette intégrale s'écrit donc:

$$I=\frac{(-1)^{k+1}}{2i}\iint_{(\Gamma)}\left[\frac{\partial}{\partial\bar z}\,\frac{\partial^k}{\partial x^k}\,\varphi(x,y)\right].\ \gamma(x,y)d\bar z\wedge dz\ .$$

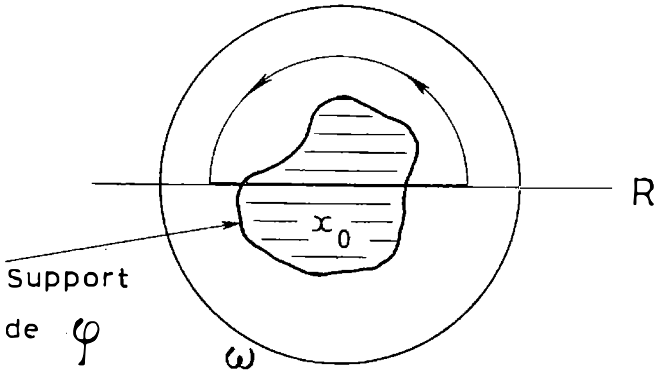

FIGURE 2

Intégrant par rapport à $d\bar z\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right.$ est l'opérateur de dérivation associé à $\left.d\bar z\right)$ il vient:

$$I=\frac{(-1)^{k+1}}{2i}\int_{\Gamma}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\varphi(x,y)\right].\ \gamma(x,y)\ .\ dz$$

d'où:

$$I=\frac{(-1)^{k+1}}{2i}\int_A^B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\varphi\ .\ \gamma(x,0)\ .\ dx=\frac{1}{2i}<\varphi\ ,\frac{d^k}{dx^k}\gamma(x,0)\otimes\delta(y)>$$

et comme $\dfrac{d^k}{dx^k}\,\gamma(x,0)=\lim\limits_{y\to0}\,\dfrac{d^k}{dx^k}\,\gamma(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\,f(x+iy)$

sur $\omega\cap\mathbb{R}$, le prolongement défini au voisinage de x_0 satisfait à l'égalité annoncée.

Considérons deux prolongements de f dans un même voisinage de x_0, $\bar{f}$ et $\bar{\bar{f}}$ concentrés dans la partie supérieure du plan et tels que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{f} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{\bar{f}}$.

Alors on a:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{f} - \bar{\bar{f}}) \equiv 0$$

Mais, toute solution X au sens distribution de l'équation $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} X = 0$ est une fonction holomorphe ([H] th. XII Chap. V) donc $\bar{f} - \bar{\bar{f}}$ est holomorphe dans ω à support limité inférieurement d'où $\bar{f} - \bar{\bar{f}} \equiv 0$. En conséquence, au voisinage de tout point de Ω_1 on peut définir un prolongement et sur l'intersection de deux voisinages les prolongements coïncident; donc par recollement ([G] th. IV page 26) il existe bien un prolongement canonique unique comme nous l'avions annoncé.

Maintenant, soit f holomorphe dans $\Omega_1 \times \{ i\Omega_2 \cup -i\Omega_2 \}$ et admettant une valeur au bord. Si Ω_3 désigne l'intervalle $]-b,+b[$ et si T est un prolongement de f à $\Omega_1 \times i\Omega_3$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T$ n'est pas nécessairement égal à la valeur au bord ∂f de f.

Si T_1 et T_2 sont deux prolongements $T_1 - T_2$ est une distribution des deux variables x et y et concentrée sur l'axe réel, donc $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_1$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_2$ diffèrent par une distribution de la forme $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T$ où T est concentrée sur l'axe réel.

Proposition 5. *L'espace h^1 quotient de l'espace vectoriel des distributions de $\Omega_1 \times i\Omega_3$ concentrées sur Ω_1 par le sous-espace des distributions de la forme $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T$ où T a son support dans Ω_1, est naturellement isomorphe à $\mathcal{D}'(\Omega_1)$.*

Démonstration:

Au voisinage d'un point x_0 de Ω_1 $T(x,y)$ s'écrira

$$(1) \qquad T(x,y) = \sum_h \theta_h(x) \,.\, \delta^{(h)}(y) \qquad \text{(Cf. [G] page 101 et page 113)}.$$

Soit $U(x) \,.\, \delta^{(k-1)}(y)$ une distribution concentrée sur Ω_1, on a:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(U(x) \,.\, \delta^{(k-1)}(y) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \,.\, \delta^{(k-1)}(y) + \frac{i}{2} U(x) \,.\, \delta^{(k)}(y)$$

c'est à dire que $U(x) \,.\, \delta^{(k)}(y)$ est congru à $i \frac{\partial U}{\partial x} \,.\, \delta^{(k-1)}(y)$ si $k \geqslant 1$.

En conséquence $T(x,y)$ est congrue à $\left(\sum_h (i)^h \theta_h^{(h)}(x)\right) . \delta(y)$ du moins au voisinage de x_0.

On a le

LEMME: *Si $T(x) \otimes \delta(y)$ est de la forme $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} U$ alors $T \equiv 0$.*

DÉMONSTRATION: En effet, il suffit de vérifier ce fait au voisinage de tout point x_0 de Ω_1. Mais alors on peut mettre U sur la forme $\sum_h U_h(x) . \delta^{(h)}(y)$ et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} U = \sum_h \frac{\partial U_h(x)}{\partial x} . \delta^{(h)}(y) + i \sum_h U_h(x) . \delta^{(h+1)}(y)$$

d'où les équations $U_h = 0$, $\frac{\partial U_h}{\partial x} + i U_{h-1} = 0, \ldots.., \frac{\partial U_1}{\partial x} + i U_0 = 0$,

$T(x) = \frac{\partial U_0}{\partial x}$ donc tenant compte de la première équation, $T(x)=0$. C. q. f. d.

Donc par recollement on voit qu'il existe une $\theta(x)$ unique telle que

$$T(x,y) \equiv \theta(x) . \delta(y) .$$

L'application $T \to \Theta$ définit par passage au quotient l'isomorphisme entre h^1 et $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ cherché.

Pour terminer notons le fait suivant:

La relation d'équivalence de la proposition 5 est de nature locale.

En effet, recouvrons Ω_1 par une suite d'intervalles Ω_i relativement compacts et supposons que nous ayons trouvé des θ_j distributions concentrées sur Ω_j telles que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \theta_j = \theta$ sur $\Omega_j \times i\Omega_3$, θ étant une distribution donnée sur $\Omega_1 \times i\Omega_3$ concentrée sur Ω_1.

Alors il vient $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\theta_j - \theta_k) = 0$ sur $(\Omega_j \cap \Omega_k) \times i\Omega_3$ donc $\theta_j - \theta_k$ est une fonction holomorphe à support dans $\mathbb{R}$ c'est à dire que $\theta_j - \theta_k = 0$. Les θ_j se recollent et il existe U concentrée sur Ω_1 telles que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} U = \theta . \quad \text{C. q. f. d.}$$

4. Le problème des représentations

Nous appelons problème de représentation le problème suivant:

Problème $\mathcal{E}$. 1) *Étant donné un espace $\mathcal{E}$ de distributions sur $\mathbb{R}$ existe-t-il un espace Φ (le plus petit possible) de distributions sur $\mathbb{R}^2$ tel que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Phi \supset \mathcal{E} \otimes \delta(y)$.*

Si T est une distribution sur $\mathbb{R}$ et si θ est une distribution sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \theta$ soit congru à $\frac{i}{2} T \otimes \delta(y)$ au sens de la proposition 5, la distribution θ est une fonction holomorphe hors de $\mathbb{R}$ et admet deux valeurs au bord $\partial^+\theta$ et $\partial^-\theta$ au sens de $\mathcal{D}'$ et on vérifie, grâce au prolongement canonique, que $\frac{i}{2}(\partial^+\theta - \partial^-\theta) \otimes \delta(y)$ est congru à $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \theta$, donc est égal à $T \otimes \delta(y)$, d'où $T = \partial^+\theta - \partial^-\theta$.

En conséquence notre problème résoud bien le problème «classique» de représentation dans $\mathbb{R}'$.

Il faut le compléter par:

2) *Vérifier que la valeur au bord a lieu dans $\mathcal{E}$.*

Ceci ne peut avoir lieu de façon générale, mais on aura une réponse positive pour $\mathcal{E} = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\Phi = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ et aussi pour $\mathcal{E} = \mathcal{D}'_{L^p}(\mathbb{R})$ et Φ convenablement associé. Pour la description de ce dernier cas je renvoie à [1,16,17].

Le problème de représentation apparaît comme un cas particulier du problème suivant sur l'équation $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Problème (équation avec second membre).

Etant donné $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ [resp $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$] trouver $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ [resp $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$] telle que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} S = T$.

Quoique la réponse soit bien connue, [D], je vais détailler deux méthodes pour $\mathcal{D}'$.

a) *Cas de $\mathcal{D}'$*

On a le

Lemme: *Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et T une distribution définie sur $\mathbb{R}^2$. On peut trouver θ et un voisinage ω de K tels que $\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} = T$ dans ω.*

DÉMONSTRATION: La distribution définie par la fonction sommable $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{z}$ est la solution élémentaire de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, ou $\frac{1}{\pi z} * \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \delta$. Soit $\alpha(x,y)$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact et égale à 1 dans un voisinage de K. Nous poserons

$$\theta = \frac{1}{\pi z} * (\alpha T) .$$

Maintenant, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \theta = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \cdot \left(\frac{1}{\pi z} * \alpha T \right) = \delta * \alpha T = \alpha T$ c. q. f. d.

Il reste à résoudre le problème globalement.
Je vais indiquer deux procédés.

1[er] PROCÉDÉ. Soit K_n une suite fondamentale de compacts de $\mathbb{R}^2$, par exemple des carrés et θ_n telle que $\frac{\partial \theta_n}{\partial \bar{z}}$ coincide avec T dans un voisinage ω_n de K_n. On a donc:

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\theta_{n+1} - \theta_n) = 0$ sur ω_n. C'est à dire que $\theta_{n+1} - \theta_n$ est une fonction holomorphe dans cet ouvert. Supposons que nous ayons trouvé des polynômes $p_1, \ldots, p_n(z)$ tels que

$$\sup_{z \in K_i} \left| [(\theta_{i+1} + p_{i+1}) - (\theta_i + p_i)](z) \right| < \frac{1}{2^i} \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

alors $\theta_{n+1} - \theta_n - p_n$ est une fonction holomorphe au voisinage de K_n donc on peut trouver, grâce au théorème de Runge, un polynôme p_{n+1} tel que:

$$\sup_{z \in K_n} \left| [(p_{n+1} + \theta_{n+1} - (p_n + \theta_n)](z) \right| < \frac{1}{2^n} .$$

Considérons la suite des distributions $S_k = \theta_k + p_k$, p_k déterminées par récurrence comme précédemment. Je dis que $\lim_{k \to \infty} S_k = S$ existe et est une distribution S telle que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} S = T$. En effet, pour voir la convergence, il suffit de la voir localement. Mais,

$$(S_{n+1} - S_n) + (S_n - S_{n-1}) + \ldots + (S_1 - S_0) + S_0 = S_{n+1}$$

et encore,

$$S_{n+1} = S_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

où la série de terme général u_n est une série de fonctions convergent uniformément sur tout compact, donc au sens des distributions, ce qui montre l'existence de S. D'autre part,

$$S_k=(S_k-S_{k-1})+\ldots+(S_{n+1}-S_n)+S_n$$

si $k>n$ d'où $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(S_k)=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}S_n$ au voisinage de K_n, d'où $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}S=T$ dans $\mathbb{R}$. C'est le procédé dit de «Mittag-Leffler» qui s'applique plus généralement aux équations elliptiques, cf. [D].

Voici une autre façon de procéder. Recouvrons $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ par une famille de compacts simples, par exemple des carrés, formant un recouvrement localement fini. Si K_n est l'un de ces compacts, d'après ce qu'on a vu on peut trouver θ_n telle que $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\theta_n=T$ au voisinage de K_n. Alors il vient au voisinage de $K_p\cap K_q$ $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\theta_p-\theta_q)=0$, donc $\theta_p-\theta_q=f_{p,q}$ est une fonction holomorphe définie au voisinage de $K_p\cap K_q$ et alternée en p et q.

Si p, q, r sont trois indices différents, il vient:

$$f_{p,q}+f_{q,r}+f_{r,p}=0 \text{ au voisinage de } K_p\cap K_q\cap K_r.$$

Supposons qu'on puisse trouver S tel que $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}S=T$. Alors $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\theta_n-S)=0$ et $\theta_n-S=f_n$ est une fonction holomorphe au voisinage de K_n. Il vient:

$$\theta_p-\theta_q=(\theta_p-S)-(\theta_q-S)=f_p-f_q$$

d'où $f_{p,q}=f_p-f_q$.

Réciproquement si, étant donné un système de fonctions holomorphes $f_{p,q}$ définies au voisinage de chaque $K_p\cap K_q$, dépendant de façon alternée de l'indice (p,q) et telles que $f_{p,q}+f_{q,r}+f_{r,p}=0$ au voisinage de $K_p\cap K_q\cap K_r$ on peut trouver des f_n holomorphes au voisinage de K_n telles que $f_{p,q}=f_p-f_q$, posons

$$S_n=\theta_n+f_n.$$

Alors $S_p-S_q=\theta_p-\theta_q-(f_p-f_q)=0$ au voisinage de $K_p\cap K_q$. Les S_n se recollent et définissent une distribution S solution du problème.

Un théorème dû à H. Cartan assure qu'une telle décomposition est possible ([E]).

b) *Cas de $\mathcal{S}'$*

Nous allons atteindre le résultat global de façon directe. L'espace $\mathcal{S}$ étant un Fréchet pour montrer que $\frac{\partial}{\partial z}$ est surjectif de $\mathcal{S}'$ sur $\mathcal{S}'$ il faut montrer que l'application transposée est injective et d'image fermée [A, D].

L'injectivité résulte de ceci:

Si $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi = 0$ c'est que φ est holomorphe. Mais, d'après le théorème de Liouville on a $\varphi \equiv 0$. Il reste à montrer que le sous-espace des φ de la forme $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi$ est fermé dans $\mathcal{S}$. Si on effectue une transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^2$ on est amené à voir que si une fonction indéfiniment dérivable u de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ est formellement dérivable à l'origine par z alors $\frac{u}{z}$, qui est indéfiniment dérivable, est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ce qui est clair.

Donc, en particulier si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on peut trouver une distribution $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} S = T \otimes \delta(y)$. Les restrictions S_+ et S_- de S aux demi-plans supérieurs et inférieurs sont des fonctions holomorphes à croissance lente dans ces ouverts. Je dis que la valeur au bord de S_+ est atteinte dans $\mathcal{S}'$. Pour cela il suffit d'appliquer la proposition 2 au voisinage de l'hyperplan de l'infini après changement de variable, et on obtient qu'une fonction holomorphe est à croissance lente dans le demi-plan positif si et seulement si elle est dérivée d'une fonction holomorphe F telle qu'il existe n, tel que $\frac{F(z)}{(z+i)^n}$ soit bornée dans ce demi-plan. D'où le résultat annoncé.

Ceci permet d'énoncer le

THÉORÈME VIII. a) *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ [resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$] il existe $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ [resp $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$] telle que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} S = T$*

b) *toute distribution T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est valeur au bord, au sens de $\mathcal{D}'$ d'une fonction holomorphe dans $\complement\, \mathbb{R}$*

c) *toute distribution S de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est valeur au bord, au sens de $\mathcal{S}'$ d'une fonction holomorphe à croissance lente dans $\complement\, \mathbb{R}$.*

Indiquons enfin l'ordre d'indétermination de la solution. Si $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} S_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} S_2$ c'est que $S_1 - S_2$ est holomorphe dans tout le plan, donc on peut ajouter à la solution dont l'existence est établie dans *b)* n'importe quelle fonction entière, et dans le cas *c)* n'importe quelle fonction entière à croissance lente, c'est à dire un *polynôme*.

En particulier si f définie dans $\complement \mathbb{R}$ a une valeur au bord nulle c'est qu'elle est la restriction d'une fonction entière du plan à $\complement \mathbb{R}$.

Enfin notons aussi:

Soit f une fonction holomorphe dans $\complement \mathbb{R}$ admettant une valeur au bord dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Il existe g entière telle que $f-g$ soit à croissance lente dans $\complement \mathbb{R}$.

En particulier si une distribution T dans $\mathcal{S}'$ est valeur au bord au sens de $\mathcal{D}'$ d'une fonction f définie dans le demi-plan supérieur elle est de la forme $g+\theta$ où θ est valeur au bord d'une fonction à croissance lente dans le demi-plan positif et où g est une fonction analytique réelle à croissance lente au sens distribution, prolongeable en une fonction entière. Le théorème VIII admet sous les formes *a)* et *b)* une *variante locale:*

THÉORÈME VIII'. a') *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ il existe $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que* $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} S = T$.

b') *Soit Ω de la forme $\Omega_1 \times i\Omega_2$ où Ω_1 est un ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω_2 un ouvert de $\mathbb{R}$ voisinage de 0. Pour toute $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ il existe f holomorphe dans $\complement \mathbb{R} \cap (\Omega_1 \times i\Omega_2)$ dont la valeur au bord soit T*

— Deux solutions diffèrent d'une fonction holomorphe dans $\Omega_1 \times i\Omega_2$

— Si f définie dans $\complement \mathbb{R} \cap (\Omega_1 \times i\Omega_2)$ a pour valeur au bord 0 elle se prolonge analytiquement à $\Omega_1 \times i\Omega_2$.

Notons qu'on peut dans *b')* prendre en fait un ouvert arbitraire en définissant de façon convenable la valeur au bord de f, par exemple à l'aide des propositions 4 et 5.

CHAPITRE II — NOTIONS SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES ET SUR LE CALCUL DIFFERENTIEL COMPLEXE

Nous présentons dans ce chapitre les connaissances dont nous avons essentiellement besoin.

1. Compléments sur les notions de distributions, les questions de variance

a) *Distributions et courants.* Soit V une variété indéfiniment différentiable (de type C^∞) dénombrable à l'infini. On sait définir sur V les formes différentielles de degré k à coefficients C^∞ : si V_i est une carte, $x_1,\dots,x_n$ les coordonnées de cette carte, la restriction d'une forme différentielle de degré k à V_i s'écrit:

$$\sum_{i_1<\dots<i_k} \varphi_{i_1\dots i_k}(x_1\dots,x_n)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

et si l'on change de coordonnées, la *même forme* est représentée par

$$\sum_{i_1<\dots<i_k} \varphi_{i_1\dots i_k}[x_1(y_1,\dots,y_n),\dots,x_n(y_1,\dots,y_n)]dx_{i_1}(y) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(y)$$

[Pour un exposé très rapide cf. [C] pages 215-219
Pour un exposé détaillé cf. [F]]

On désignera par $\Phi_*(V)$ l'espace des formes différentielles sur V à support compact et à coefficients C^∞ qui peut être muni d'une structure d'espace $\mathfrak{L}-\mathfrak{F}$ strict de façon toute analogue au cas de $\mathcal{D}(V)$. L'espace $\Phi_*(V)$ est somme directe des espaces $\Phi_*^k(V)$ où $\Phi_*^k(V)$ désigne le sous-espace des formes de degré homogène k; donc $\mathcal{D}(V)=\Phi_*^0(V)$.

Nous désignerons par *courant sur* V tout élément du dual topologique de $\Phi_*(V)$. Un courant de degré k est un élément du dual de $\Phi_*^{n-k}(V)$, identifié à un sous-espace de $\Phi'_*(V)$ par le prolongement 0 sur les autres composantes homogènes de $\Phi_*(V)$.

b) *Identifications entre courants et distributions.* La variété V est supposée orientable. On désignera par *mesure de Lebesgue* sur V une n-forme dv, qui sur la carte V_i s'écrira $\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ avec $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ en tout point de V_i. Si V est orientable il existe une telle forme et réciproquement.

Une mesure de Lebesgue étant choisie il va être possible d'identifier certaines fonctions à des courants. Si $\varphi \in \mathcal{C}(V)$ où $\mathcal{C}(V)$ désigne l'espace des fonctions continues sur V, on lui associe le courant

$$f \to \int_V f(v)\varphi(v)dv \qquad \text{où } f \in \mathcal{D}(V)$$

qui a un sens d'après la théorie des intégrales multiples ([C] page 217) et qui est en correspondance biunivoque naturelle avec la n-forme $\varphi . dv$. De façon plus générale si ω est une forme homogène de degré $n-k$ à coefficients continus sur V on peut lui associer un courant comme suit:

$$\text{pour } \pi \in \Phi_*^k(V) \qquad \text{on calcule } \int_V \pi \wedge \omega \qquad \text{et la forme linéaire } \pi \to \int_V \pi \wedge \omega$$

prolongée par zéro sur les $\Phi_*^l(V)$ quand $l \neq k$ définit un courant, la correspondance étant biunivoque.

Définition 1: *On désigne par distribution sur V* (ou fonction généralisée) *tout élément de $\mathcal{D}'(V)$ le dual de l'espace des courants $\mathcal{D}(V) . dv$* (cet espace étant muni de la structure d'espace $\mathfrak{L}-\mathfrak{F}$ strict obtenue par transport de structure à partir de $\mathcal{D}(V)$).

L'espace $\mathcal{D}'(V)$ ne dépend pas du choix de dv et est égal au complété de $\mathcal{D}(V)$ pour la topologie des distributions.

Alors il vient la

Proposition 1. *L'espace des courants d'ordre $(n-k)$ est isomorphe à l'espace des formes différentielles à coefficients distributions d'ordre $n-k$.*

Si T est une distribution le courant Tdv associé est le courant, qui sur toute $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ prend la valeur $< T, \varphi dv >$ que nous noterons $\int T(v)\varphi(v)dv$. Cette notation étant introduite, si

$$\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_{n-k}} T_{j_1 \cdots j_{n-k}}(x) . dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-k}}$$

est une forme à coefficients distributions sa valeur sur

$$\pi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \varphi_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \text{ (*)}$$

sera égale à

$$\int \pi \wedge \omega = \int \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-1)^{\sigma(i,j)} . T_{j_1 \dots j_{n-k}} (\varphi_{i_1 \dots i_k} dv)$$

où $\sigma(i,j)$ désigne le symbole de la permutation

$$\begin{pmatrix} j_1 \dots j_{n-k} i_1 \dots i_k \\ 1 \dots\dots\dots\dots n \end{pmatrix}$$

ou encore:

$$<\omega,\pi> = \int_V \sum_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1 \dots i_k}(x) T_{j_1 \dots j_{n-k}}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}} .$$

L'isomorphisme de la proposition 1 que nous ne démontrerons pas est donc

$$\omega \to \left(\pi \to <\omega,\pi> = \int \omega \wedge \pi \right) .$$

Avec ces définitions le problème du changement de variables est résolu.

Passons à l'opération de différentiation extérieure. Si ω est une forme, qui sur une carte V_i s'écrit

$$\sum_{i_0 < \cdots < i_k} \omega_{i_0 \dots i_k} dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

(*) Nous supposons que le support de π est contenu dans la carte. Le cas général s'en déduit.

$d\omega$ est la forme qui s'écrit dans la même carte

$$\sum_n \sum_{i_0<\cdots<i_n} \frac{\partial\omega_{i_0\ldots i_k}}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_{i_0} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

ou encore,

$$\sum_{j_0<j_1<\cdots<j_{k+1}} \left(\sum_{h=0}^{k+1} (-1)^h \frac{\partial\omega_{j_0\ldots\hat{j}_h\ldots j_{k+1}}}{\partial x_{j_h}}\right) dx_{j_0} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k+1}}$$

où le symbole $\wedge$ sur une lettre signifie que cette lettre doit être omise, donc on devra lire

$$\omega_{j_0\ldots j_{h-1}j_{h+1}\ldots j_{k+1}} \qquad \text{pour} \quad \omega_{j_0\ldots\hat{j}_h\ldots j_{k+1}}$$

L'opération d a une signification intrinsèque c'est à dire que $d\omega$ ne dépend pas du choix de la carte; en outre d va continuement de $\Phi_*^k(V)$ dans $\Phi_*^{k+1}(V)$. En conséquence il existe une opération transposée δ qui va de $\Phi_*'^{k+1}(V)$ dans $\Phi_*'^k(V)$. Cette opération transposée n'est rien d'autre, au signe près, que l'opération d étendue aux formes distributions, car en effet, si ω est de degré k, π de degré $n-k$ et si $\omega=d\psi$

$$d(\psi \wedge \pi)=d\psi \wedge \pi+(-1)^{n-k} . \psi \wedge d\pi=\omega \wedge \pi+(-1)^{n-k}\psi \wedge d\pi .$$

Mais, $\int_V d(\psi \wedge \pi)=0$ car $\psi \wedge \pi$ est à support compact.

D'où, $\int \omega \wedge \pi=(-1)^{n-k+1} \int (\psi \wedge d\pi)=(-1)^{n-k+1} \int \delta\psi \wedge \pi$

c'est à dire $d\psi= \pm\, \delta\psi$.

c. EXEMPLES. Si W est une sous-variété fermée de V, de dimension k, de classe C^∞ et orientable, on peut choisir sur W une mesure de Lebesgue dW. Alors à $\varphi, \varphi\in\mathcal{D}(V)$, on peut associer:

$\int_W (\operatorname{rest}_W \varphi) . dW$ où $\operatorname{rest}_W \varphi$ désigne la restriction de la fonction φ à W.

L'application $\varphi \to \int_W (\mathrm{rest}_W\ \varphi) \,.\, dW$ définit donc un courant $\sigma(W) \,.\, dv$ de degré n, concentré sur W.

$\sigma(W)$ est dite fonction de densité généralisée de (W,dW)

On peut toujours supposer que W est définie par $(n-k)$ équations régulières $\lambda_1(v)=\lambda_2(v)=\ldots=\lambda_{n-k}(v)=0$ en position générale.

Alors au voisinage d'un point on prendra des coordonnées $x_{k+1}=\lambda_1,\ldots,x_n=$ $=\lambda_{n-k}$ $x_1,\ldots,x_k$ étant pris sur la surface. On fait le changement de variables defini par les $\lambda_i,x_1,\ldots,x_k$ et il vient alors:

$$dv=\varphi(x_1,\ldots,x_k)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k \wedge d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_{n-k}$$

au voisinage de l'origine des coordonées. On prendra $dW=\varphi(x_1,\ldots,x_k)dx_1 \wedge\ldots\wedge dx_k$ et la fonction de densité associée sera $\delta W(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k})$ dans la terminologie de [C] page 222; Mais notons encore que, d'une façon intrinsèque, on peut à W orientée (*) associer une forme, car si $\varphi\in\Phi^k_*(V)$ on sait définir $\int_{\pm W} \varphi$.

L'application $\varphi \to \int_{\pm W} \varphi$ définit donc un courant que nous noterons $\delta(\pm W)$. Ce courant est concentré sur W et de la forme

$$\sum_{j_1<\ldots<j_{n-k}} T_{j_1\cdots j_{n-k}} \,.\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-k}}$$

où les $T\ldots.$ s'expriment très simplement à l'aide de σ.

Passons à l'intersection de deux variétés W_1 et W_2 supposées en position générale.

Si W_1 est définie par $x_r=x_{r+1}=\ldots=x_n=0$

et si W_2 l'est par $x_k=x_{k+1}=\ldots=x_{r-1}=0$

avec $dv=dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

$$\delta(W_1 \wedge W_2)=1(x_1,\ldots,x_{k-1}) \,.\, \delta_{x_k,\ldots,x_n}(0) \,.\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

(*) Je noterai $\pm$ W pour rappeler la nécessité du choix d'une orientation.

l'orientation choisie étant celle définie par $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$; on a

$$\delta(W_1) = 1(x_1, \ldots, x_{r-1}) \cdot \delta_{x_r, \ldots, x_n}; (0) dx_r \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$\delta(W_2) = 1(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_r \ldots x_n) \cdot \delta_{x_k, \ldots, x_{r-1}}(0) dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_{r-1}$$

On peut donc écrire

$$\delta(W_1 \wedge W_2) = (-1)^{\dim W_1} \delta W_1 \wedge \delta(W_2)$$

le produit extérieur de $\delta(W_1)$ par $\delta(W_2)$ ayant manifestement un sens prolongeant le cas régulier.

Si Ω est un ouvert à frontière très régulière de V $\delta(\Omega)$ est la fonction 1_Ω caractéristique de Ω, et si $\partial\Omega$ désigne le bord orienté de Ω orientée comme V $\delta(\partial\Omega) = -d(1_\Omega)$.

Donc si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts à frontières très régulières en position générale on pourra prendre

$$\delta(\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2) = d1_{\Omega_1} \wedge d1_{\Omega_2} \text{.. (etc....}$$

2. Fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes

Pour une définition détaillée de la notion de variété analytique complexe je renvoie à [B], [E]. Une variété analytique complexe est la donnée d'un espace topologique, et pour tout ouvert de cet espace des fonctions holomorphes dans cet ouvert (une fonction étant holomorphe dans un ouvert de V si et seulement si elle est holomorphe au voisinage de chaque point de cet ouvert), en sorte que, pour tout point de la variété il existe un voisinage de ce point, une boule ouverte dans $\mathbb{C}^n$, un homéomorphisme de ce voisinage sur la boule transportant les fonctions holomorphes dans les ouverts de ce voisinage en les fonctions holomorphes dans les ouverts correspondants de la boule de $\mathbb{C}^n$. Un tel isomorphisme définit une carte locale de la variété.

Une fonction est holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ si, au voisinage de chacun de ses points $z_0, z_0 = (z_{0,1}, \ldots, z_{0,n})$, elle est somme d'une série absolument uniformément convergente dans un voisinage de z_0, de puissances

$$\sum a_{i_1 \ldots i_n} (z_1 - z_{0,1})^{i_1} \ldots (z_n - z_{0,n})^{i_n}$$

Un isomorphisme entre deux variétés analytiques complexes est un isomophisme topologique conservant la notion de fonction holomorphe. On voit qu'un isomorphisme analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est une application dont chaque composante est analytique, et dont le déterminant jacobien est différent de zéro en tout point. Cf. [E] page 20.

a) *Quelques propriétés classiques.*

Proposition 2: 1) *si $f(z_1,\ldots,z_n)$ est holomorphe pour $|z_i|<R_i$ et pour $|z_i|<\rho_i$ $i=1,2\ldots,n$ elle se prolonge analytiquement à l'ouvert:*

$$\bigcup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\left\{z \,\middle|\, |z_i|<R_i^{\alpha}\,.\,\rho_i^{1-\alpha}\right\} \quad ; \quad \text{[E] page 14}.$$

Si $f(z_1,\ldots,z_n)$ est holomorphe pour $z_1\neq 0,\ldots,z_n\neq 0$ et $n>1$, elle se prolonge analytiquement à l'origine; [E] page 12.

2) *Si T est une distribution dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}=\mathbb{R}^{2n}$ satisfaisant au voisinage d'un point x au système d'équations $\dfrac{\partial T}{\partial \bar{z}_i}=0$, $i=1,2\ldots,n$, alors T est holomorphe au voisinage de ce point.*

Démonstration (du point 2). Je rappelle qu'on désigne par $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$ l'opérateur $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}-i\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$ et par $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ l'opérateur $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}+i\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$. Les conditions imposées sur T sont donc les conditions de Cauchy. Lorque T est suffisamment différentiable il est classique que ces conditions entrainent son holomorphie. Par régularisation on va montrer que T est limite au sens distribution de solutions usuelles, c'est à dire de fonctions holomorphes; puis on verifiera que les fonctions holomorphes forment un sous-espace fermé de l'espace des distributions.

On peut toujours par commodité supposer que le point x est l'origine des coordonnées et que T satisfait aux conditions de Cauchy dans un ouvert Ω $|z_1|<\sigma,\ldots,|z_n|<\sigma$, boule pour la norme $\sup |z_i|$.

Soit alors α_n une suite de fonctions C^{∞} à supports compacts K_n telles que ρ_n le rayon de la plus petite boule centré en 0 et contenant K_n tende vers zéro, et telles que $\alpha_n\to\delta$.

Alors, pour n assez grand, $T*\alpha_n$ est définie dans $\dfrac{1}{2}\Omega$ et dans cette boule $T*\alpha_n\to T$ au sens des distributions.

D'autre part, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(T*\alpha_n)=\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\;T*\alpha_n=0$

donc les $T*\alpha_n$ sont des fonctions holomorphes.

Considérons donc une suite de fonctions holomorphes T_n convergent au sens des distributions dans $\frac{1}{2}\Omega$. On a:

$$T_n(z) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\gamma_1(\rho)\times\ldots\times\gamma_n(\rho)} \!\!\!\!\!\!\!\cdots\int \frac{T_n(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)} d\zeta_1\ldots d\zeta_n$$

où les γ_j sont des cercles centrés en 0, de rayon $\rho < \frac{1}{2}\sigma$. Si $\alpha(\Omega)$ est une fonction C^∞, telle que $\int \alpha(r)dr = 1$ à support compact dans un intervalle (ρ_1, ρ_2) $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ et $\rho_2 < \frac{1}{2}\rho$ il vient:

$$T_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \underbrace{\int\cdots\int}_{\substack{n\ fois\\ \rho_1<r_j<\rho_2}} \alpha(r_1)\ldots\alpha(r_n)dr_1..dr_n \int_{0<\theta_j<2\pi}\!\!\!\!\!\!\cdots\int \frac{T_n(r_1.e^{i\theta_1},..,r_ne^{i\theta_n})..}{(r_1e^{i\theta_1}-z_1)..(r_ne^{i\theta_n}-z_n)} \cdots$$

$$\ldots r_1e^{i\theta_1}\,.\,d\theta_1\ldots r_ne^{i\theta_n}\,.\,d\theta_n$$

Soit,

$$T_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \underbrace{\int\cdots\int}_{2n} \frac{\alpha(r_1,\ldots,r_n)\,T_n(r_1e^{i\theta_1},..,r_ne^{i\theta_n})}{(r_1e^{i\theta_1}-z_1)\ldots(r_ne^{i\theta_n}-z_n)} r_1dr_1d\theta_1\ldots..r_ndr_nd\theta_n$$

Donc il en résulte que $T_n(z)$ est le produit scalaire de la distribution $\alpha(r)\,.\,T_n(re^{i\theta})$ par la fonction $\frac{1}{re^{i\theta}-z}$ (*)

Lorsque z parcourt une partie compacte de l'ouvert π défini par les n inégalités $|z_j| < \rho_1$ la fonction de (r,θ), $\frac{1}{r-z}$, parcourt une partie bornée de l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur le compact

$$\bigcup_{\substack{r_1\leqslant\sigma_j\leqslant r_2\\ i=1,2\ldots,n}} (\gamma(\sigma_1)\times\ldots\times\gamma(\sigma_n)) = K$$

(*) $\frac{1}{re^{i\theta}-z} = \frac{1}{r_1e^{i\theta_1}-z_1}\cdots\frac{1}{r_ne^{i\theta_n}-z_n}$!

Or les distributions $\alpha(r)T_n$ convergent dans $\mathcal{D}'\left(\frac{1}{2}\Omega\right)$ donc dans $\mathcal{D}'(K)$ donc les suites de nombres $<\alpha(\Omega).\quad T_n(re^{i\theta}),\ \frac{1}{r-z}>=T_n(z)$ convergent uniformément sur tout compact de π. La limite en est donc une fonction holomorphe $T(z)$ dans π. La distribution T est bien holomorphe c. q. f. d.

b) — *L'opérateur d''*. On peut introduire maintenant un opérateur de différentiation extérieure «adapté» aux fonctions holomorphes. Soit ω une forme différentielle, non homogène, qui par rapport à un système de coordonnées complexes

$$(z_1,\ldots,z_n)=(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n) \quad \text{s'écrit}$$

$$\omega=\sum_{i,j} a_{\substack{i_0\ldots i_k\\ j_0\ldots j_l}}(x,y)\, dx_{i_0}\ldots\wedge\ldots dy_{i_l}$$

On prend comme base du module des différentielles $dz_j=dx_j+dy_j$, $d\bar{z}_j=dx_j-idy_j$. On va alors graduer (bigraduer) l'espace des formes différentielles par le degré en dz_j et le degré en $d\bar{z}_k$.

Nous disons que ω est de type (p,q) si elle s'écrit:

$$\omega=\sum_{\substack{i_0<\ldots<i_{p-1}\\ j_0<\ldots<j_{q-1}}} a_{i_0\ldots i_{p-1},j_0\ldots j_{q-1}}(x,y)dz_{i_0}\wedge\ldots\wedge dz_{i_{p-1}}\wedge d\bar{z}_{j_0}\wedge\ldots\wedge d\bar{z}_{j_{q-1}}$$

L'opérateur d, écrit en dz_j et $d\bar{z}_j$ applique l'espace des formes de type (p,q) sur la somme de celui des formes de type $(p+1,q)$ et de celui des formes de type $(p,q+1)$. Désignons par d'' la partie de cet opérateur de degré (0,1). On peut donc le représenter par:

$$d''=\Big(\sum_j \frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}\cdot d\bar{z}_j\Big)\wedge$$

c'est à dire que

$$d''\Big(\sum_{\substack{i_0<\dots<i_{p-1}\\ j_0<\dots<j_{q-1}}} T_{i_0\dots i_{p-1},j_0\dots j_{q-1}} dz_{i_0}\wedge\dots\wedge dz_{i_{p-1}}\wedge d\bar z_{j_0}\wedge\dots\wedge d\bar z_{j_{q-1}}\Big)$$

$$=\sum_{\substack{i_0<\dots<i_{p-1}\\ k_0<\dots<k_q}}\Big(\sum_{h=0}^{q}(-1)^h\frac{\partial}{\partial\bar z_{k_h}}T_{i_0\dots i_{p-1},k_0,\dots,\hat k_h,\dots,k_q}(x,y)\Big)dz_{i_0}\wedge\dots\wedge dz_{i_{p-1}}\wedge d\bar z_{k_0}\wedge\dots\wedge d\bar z_{k_q}$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

(1) d'' est intrinsèquement défini (c'est à dire est invariant par les isomorphismes analytiques);

(2) $d''(\overset{p,q}{\omega}\wedge\overset{r,s}{\omega})=(d''\overset{p,q}{\omega})\wedge\overset{r,s}{\omega}+(-1)^{p+q}\overset{p,q}{\omega}\wedge d''\overset{r,s}{\omega}$

(3) $d''d''=0$ et si on introduit $d'=d-d''$ d' jouit de propriétés analogues; en outre on vérifie $d'd''+d''d'=0$;

(4) $d''T=0$ entraîne que T est holomorphe (proposition 2.2).

Exemple: *formes de degré* $(n,n-1)$ *et* d'' *fermées dans un ouvert de* $\mathbb{C}^n$.

Une telle forme s'écrira

$$\overset{n,n-1}{\omega}=\sum_{j=1}^{n}A_j dz_1\wedge\dots\wedge dz_n\wedge\overline{dz}_1\wedge\dots\wedge\widehat{\overline{dz}_j}\wedge\dots\wedge\overline{dz}_n$$

La condition $d''\overset{n,n-1}{\omega}=0$ s'écrira donc:

$$\Big(\sum_h(-1)^h\frac{\partial A_h}{\partial\bar z_h}\Big)=0$$

Fantappié appelait un tel système de fonctions, fonctions «para-analitiche».

Pour une forme ω de degré n,q et à coefficients holomorphes on a le «*théorème de Cauchy-Poincaré*»*: Soit* ω *une forme différentielle de type* (n,q) *à coeffi-*

cients holomorphes définie au voisinage d'une sous-variété régulière $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}^n$, relativement compacte de dimensions $n+q+1$, et à frontière régulière Γ. Alors on a:

$$\int_\Gamma \omega = 0$$

DÉMONSTRATION: On sait par la formule de Stockes, [C] p. 218 et [F], que $\int_\Gamma \omega = \int_{\mathbb{R}} d\omega$, mais $d\omega = d''\omega = 0$ puisque la forme est de degré n en les dz_j puis à coefficients holomorphes c. q. f. d.

c) — *Le théorème de Dolbeault-Grothendieck et variantes.* Etant donné un ouvert Ω d'une variété analytique complexe (de $\mathbb{C}^n$ en fait ici) pour que, étant donné une forme $\overset{p,q}{\omega}$ où $q \geqslant 1$, on puisse trouver $\overset{p,q-1}{\omega}$ telle que $d'' \overset{p,q-1}{\omega} = \overset{p,q}{\omega}$, une condition nécessaire est bien entendu que $d'' \overset{p,q}{\omega} = 0$. Mais pour la suffisance apparaissent des conditions (pseudo-convexité de Ω) cf. [B] et [D]. On a le théorème suivant.

THÉORÈME I. a) *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ et $\overset{p,q}{\omega}$ une forme différentielle à coefficients C^∞ ou à coefficients distributions définis dans Ω. On suppose $q \geqslant 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\overset{p,q-1}{\omega}$ telle que $d'' \overset{p,q-1}{\omega} = \overset{p,q}{\omega}$ est que $d'' \overset{p,q}{\omega} = 0$.*

b) *mêmes hypothèses sur Ω et les degrés mais les coefficients de $\overset{p,q}{\omega}$ sont supposés être des distributions à croissance lente dans Ω, alors il existe $\overset{p,q-1}{\omega}$ avec $d'' \overset{p,q-1}{\omega} = \overset{p,q}{\omega}$ et dont les coefficients sont à croissance lente dans Ω.*

c) *mêmes hypothèses sur Ω mais les coefficients de $\overset{p,q}{\omega}$ ainsi que ceux de la solution $\overset{p,q-1}{\omega}$ sont localement à croissance lente.*

DÉMONSTRATION: *a)* dans le cas où les coefficients sont indéfiniment dérivables et (b) seront démontrés dans l'appendice *A* par une méthode uniforme. Je vais ici montrer comment on déduit (a) cas distribution et (c) de (b) pour $q \geqslant 2$. On recouvre l'ouvert Ω par une suite croissante d'ouverts convexes Ω_i tels que les $\overline{\Omega}_i$ forment une famille fondamentale de compacts de Ω dans le cas (a). Dans le cas (c) on prendra $\Omega_i = \Omega \cap \pi_i$ où les $\overline{\pi}_i$ forment une suite fondamentale de compacts convexes de $\mathbb{C}^n$.

Soit alors $\overset{p,q}{\omega}$ la forme à intégrer. D'après (b) il existe $\overset{p,q-1}{\omega_i}$ défînie dans Ω_i, à coefficients à croissance lente dans Ω_i, telle que $d''\overset{p,q-1}{\omega_i} = \overset{p,q}{\omega}$ sur Ω_i. Dans cet ouvert il vient:

$d''\overset{p,q-1}{\omega}_{i+1} - d''\overset{p,q-1}{\omega_i} = 0$, donc $\overset{p,q-1}{\omega}_{i+1} - \overset{p,q-1}{\omega_i}$ est fermée à coefficients à croissance lente sur Ω_i. En conséquence il existe $\overset{p,q-2}{\theta}_{i+1}$ à croissance lente dans Ω_i telle que $d''\overset{p,q-2}{\theta_i} = \overset{p,q-1}{\omega}_{i+1} - \overset{p,q}{\omega_i}$ sur Ω_i. On prolonge $\overset{p,q-2}{\theta}_{i+1}$ en une forme $\overset{p,q-2}{\bar{\theta}}_{i+1}$ défînie dans Ω et la forme $\overset{p,q-1}{\omega}_{i+1} - d''\overset{p,q-2}{\bar{\theta}}_{i+1}$ prolonge la solution trouvée dans Ω_i à l'ouvert Ω_{i+1}. Par récurrence on obtiendra le résultat cherché c. q. f. d. Pour $q=1$ cf. appendice A.

Notons qu'alors on peut déduire (a) dans sa première forme de (a) dans la forme que nous venons de démontrer. Le théorème I forme (b) ou (c) est l'outil fondamental que nous allons employer.

d) *formes différentielles associées à une sous-variété*

Le choix des formes différentielles sur une sous-variété régulière (pour la structure C^∞) adapté aux variables complexes sera obtenu comme suit.

Soit Ω un ouvert à frontière très régulière. On munira sa frontière de la forme $d''(1_\Omega)$. Si une sous-variété est de la forme $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts, on la munit de la forme $d''1_{\Omega_1} \wedge d''1_{\Omega_2}$ etc.... Une telle forme va dépendre de façon alternée de la suite des ouverts considérés.

3. Quelques notions de cohomologie

a — *Suite exacte de cohomologie.* On considère de façon générale un groupe abélien K et un opérateur d de K dans K (donc un homomorphisme) tel que $d^2=0$. Un tel opérateur d est dit opérateur de dérivation dans K et la donnée de K et de d est dite groupe differentiel. Nous désignerons alors par cocycles les éléments z de K tels que $dz=0$ et par $Z(K)$ leur ensemble qui est le noyau de d. Les cobords sont les u de la forme dv où $v \in K$ et $B(K)=dK$ notera le sous-groupe des cobords.

Nous désignerons alors par cohomologie de (K,d) le groupe

$$Z(K)/dK = Z(K)/B(K) = H(K) \quad (*)$$

(*) Nous mettons partout co-bords, co-cycles, co-homologie pour être co-hérent avec notre référence [K]; mais on peut sans inconvénient supprimer co-et même homologie dans tout ce qui suit.

Le groupe K est dit gradué s'il est somme directe d'une suite K^n de groupes. L'opérateur d sera dit de degré $+1$ s'il applique chaque K^p dans K^{p+1}. Alors $H(K)$ est lui aussi somme directe de groupes, les $H^p(K)=Z^p(K)/B^p(K)$ où $Z^p(K)$ est le noyau de d: $K^p \to K^{p+1}$ et $B^p(K)=dK^{p-1}$. On dit qu'une suite de groupes abéliens et d'homomorphismes

$\cdots \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_{i+2} \xrightarrow{\alpha_{i+2}} A_{i+3} \longrightarrow \cdots$ est *exacte* si le noyau de α_i est égal à l'image de α_{i-1} c'est à dire si $\alpha_{i-1}(A_{i-1})=\alpha_i^{-1}(0)$.

Par exemple $B \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$ exacte signifie que l'application β est surjective, et $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\gamma} B$ exacte signifie que l'application γ est injective, ou encore $0 \longrightarrow B^p(K) \longrightarrow Z^p(K) \longrightarrow H^p(K) \longrightarrow 0$ est une suite exacte où les flèches sont l'injection de $B^p(K)$ dans $Z^p(K)$, le passage au quotient de $Z^p(K)$ sur $H^p(K) = Z^p(K)_{/B^p(K)}$.

On a la propriété remarquable suivante [K] page 20.

Soit $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\gamma} B \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$ *une suite exacte de trois groupes abéliens avec dérivations* d_A, d_B, d_C *commutant avec les homomorphismes* β *et* γ. *Alors on a une suite exacte,*

$$\begin{tikzcd} H(B) \arrow[rr, "\bar\beta"] & & H(A) \arrow[dl, "\partial"] \\ & H(C) \arrow[ul, "\bar\gamma"] & \end{tikzcd}$$

entre les cohomologies de A,B,C, *où les opérateurs* $\bar\beta, \bar\gamma, \partial$ *sont définis comme suit:*

Opérateur $\bar\beta$: Soit $\bar z \in H(B)$ et $z \in Z(B)$ un représentant de $\bar z$; $\beta(z)$ appartient à $Z(C)$ car $d_C(\beta(z)) = \beta(d_B(z)) = \beta(o) = 0$

Nous poserons $\bar\beta(\bar z) =$ classe de $\beta(z)$.

Opérateur $\bar\gamma$: On opère de façon analogue.

Si $\bar u \in H(C)$ et u est un représentant de $\bar u$ dans $Z(C)$ on prendra $\bar\gamma(\bar u)=$classe de $\gamma(u)$.

Opérateur ∂: Soit $\bar\zeta \in H(A)$ et ζ un représentant de $\bar\zeta$ dans $Z(A)$. L'application β étant surjective, on peut trouver un $b \in B$ tel que $\beta(b)=\zeta$.

On considère ensuite $d_B b$.

Il vient: $\beta(d_B b) = d_C(\beta b) = d_C \zeta = 0$.

Donc $d_B b$ est dans le noyau de β, et la suite étant exacte, il existe $c \in C$ tel que $\gamma(c) = d_B b$.

L'application γ étant injective c est uniquement défini à partir de $d_B b$; on en tire qu'il est un cocycle de C sa classe $\bar{c}$ dans $H(C)$ sera par définition $\partial\bar{\zeta}$.

Il faut bien entendu vérifier que $\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \partial$ sont *effectivement* définis et que la suite

$$H(A) \xrightarrow{\partial} H(C) \xrightarrow{\bar{\gamma}} H(B) \xrightarrow{\bar{\beta}} H(A) \xrightarrow{\partial} H(C) \longrightarrow$$

est exacte.

Si les groupes A, B, C sont gradués et que les dérivations sont de degré $+1$ il vient la

SUITE EXACTE DE COHOMOLOGIE

$$\boxed{\ldots \xrightarrow{\partial} H^p(C) \xrightarrow{\bar{\gamma}} H^p(B) \xrightarrow{\bar{\beta}} H^p(A) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(C) \longrightarrow \ldots\ldots}$$

b — *exemples de groupes de cohomologie.* Les groupes de cohomologie que nous allons introduire ne méritent pas tous, en fait, ce nom car ils ne satisfont pas aux axiomes classiquement exigés [cf. [B] page 28 pour les axiomes de la cohomologie].

<u>$b\alpha$ — d″ *cohomologie d'un ouvert ou d'un compact de* $\mathbb{C}^n$</u>

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On prend pour K l'ensemble noté $K(U)$ des formes différentielles à coefficients C^∞ (à coefficients distributions) de degré fixé p en dz. Le groupe K est gradué

$$K = \bigcup_{q=0}^{n} \overset{p,q}{K}$$

et d'' est un opérateur de degré $+1$ dans K. Alors on désigne par

$$H^k(U; \Omega^p)_{C^\infty} \quad (\text{resp.} \quad H^k(U; \Omega^p)_{\mathcal{D}'})$$

le k-ième groupe de cohomologie associé c'est à dire le quotient de l'espace des formes $\overset{p,k}{\omega}$ et d''-fermées par son sous-espace des formes du type $d'' \overset{p,k-1}{\omega}$. On démontre en fait que $H^k(U; \Omega^p)_{C^\infty}$ et $H^k(U; \Omega^p)_{\mathcal{D}'}$ sont isomorphes cf. [B] page 29 et seq. ou [E] pages 103 et seq. et bien entendu [K].

Nous esquisserons une démonstration au chapitre IV. On peut aussi prendre pour K que nous allons noter $K_*(U)$ l'ensemble des formes différentielles à coefficients C^∞ à support compact (à coefficients distributions à support compact), et d''. On note par

$$H^k_*(U;\Omega^p)_{C^\infty} \qquad (\text{resp } H^k_*(U,\Omega^p)_{\mathcal{D}'}$$

les groupes associés (qui sont d'ailleurs isomorphes [même référence]). Si X est un compact de U on peut prendre pour K noté $K(X)$ l'ensemble des formes différentielles à coefficients C^∞ (distributions) définies au voisinage de X avec la relation d'équivalence ($\omega_1 \equiv \omega_2$ si $\omega_1 - \omega_2 \equiv 0$ dans un voisinage de X) qui permet de définir une structure d'espace vectoriel et l'opérateur d'' comme précédemment. D'où des groupes $H^k(X;\Omega^p)_{C^\infty}$ (resp $H^k(X;\Omega^p)_{\mathcal{D}'}$)

[Pour bien préciser, $\overset{p,k}{\omega} = 0$ dans $H^k(X;\Omega^p)$ signifie qu'on peut trouver dans un voisinage de X (plus petit éventuellement que le voisinage de X dans lequel $\overset{p,k}{\omega}$ est définie et fermée) une forme $\overset{p,k-1}{\bar{\omega}}$ telle que dans ce voisinage $\overset{p,k}{\omega} = d'' \overset{p,k-1}{\bar{\omega}}$.]

On a la suite exacte:

$$0 \to K_*(U-X) \to K_*(U) \to K(X) \to 0$$

d'où la

Proposition 3. *Si X est compact dans U, on a la suite exacte de cohomologie*

$$\ldots \to H^k_*(U-X;\Omega^p) \to H^k_*(U;\Omega^p) \to H^k(X;\Omega^p) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}_*(U-X;\Omega^p) \to \ldots$$

(pour une formulation générale cf[K] th. 4.10.1)

bβ *cohomologie de Čech d'un recouvrement*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{U}$ un recouvrement de U par des ouverts (ou des fermés). Les ouverts de $\mathcal{U}$ sont supposés indexés par des indices α d'un ensemble d'indices A. Une k-cochaîne (alternée)* du recouvrement $\mathcal{U}''$ à valeurs dans Ω^p est la donnée, pour tout système d'indices $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ tels que $U_{\alpha_0 \cdots \alpha_k} = U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap .. \cap U_{\alpha_k} \neq \emptyset$ d'une forme $\overset{p,0}{\omega}_{\alpha_0 \cdots \alpha_k}$ d''-fermée, donc à coeffi-

(*) Alternée sera toujours sous-entendue dans la suite.

cients holomorphes d'après § 2a prop 2—2 défini sur $U_{\alpha_0\cdots\alpha_k}$ dépendant de façon alternée de $(\alpha_0,\dots,\alpha_k)$. On note par $C(\mathcal{U};\Omega^p)$ l'ensemble de ces cochaînes. On définit sur l'ensemble des cochaînes un opérateur de dérivation noté δ par la formule:

$$(\delta \overset{p,0}{\omega})_{\beta_0\cdots\beta_{k+1}} = \sum_{h=0}^{k+1} (-1)^h \overset{p,0}{\omega}_{\beta_0\cdots\hat{\beta}_h\cdots\beta_{k+1}}$$

somme qui a un sens sur

$$U_{\beta_0\cdots\beta_{k+1}} = \bigcap_{h=0}^{k+1} (U_{\beta_0} \cap U_{\beta_1} \cap \dots \cap \hat{U}_{\beta_h} \cap \dots \cap U_{\beta_{k+1}})$$

le résultat dépendant manifestement de façon alternée de l'ensemble des indices.

On vérifie aisément que $\delta^2=0$.

D'où une notion de groupes de cohomologie.

Nous noterons par $H^k(\mathcal{U};\Omega^p)$ les groupes gradués ainsi obtenus qui, sous certaines hypothèses sur $\mathcal{U}$, sont isomorphes aux groupes précédemment introduits. On peut aussi définir des groupes avec des formes de type (p,q) à coefficients distributions d''-fermées (ou sans cette hypothèse). Pour les définitions générales cf [E] page 97 ou [K].

Soit X une partie fermée de U; on suppose que $\mathcal{U}$ est tel qu'il existe un sousrecouvrement $\mathcal{U}'$ de $U \cap \complement X$ indexé par $A' \subset A$. Alors on peut considérer les cochaînes nulles sur $\mathcal{U}'$, c'est à dire telles que

$$U'_{\alpha'_0\cdots\alpha'_k} = 0 \qquad \text{si} \quad (\alpha'_0,\dots,\alpha'_k) \in A'^{(k+1)}$$

On note $C(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}';\Omega^p)$ l'ensemble de ces cochaînes. L'opérateur δ transforme une cochaîne nulle sur $\mathcal{U}'$ en une cochaîne nulle sur $\mathcal{U}'$ d'où de nouveaux groupes de cohomologie, les $H^k(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}';\Omega^p)$.

Alors on a la suite exacte:

$$0 \to C(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}';\Omega^p) \xrightarrow{(1)} C(\mathcal{U};\Omega^p) \xrightarrow{(2)} C(\mathcal{U}';\Omega^p) \to 0$$

où la flèche (2) s'obtient par restriction d'une cochaîne aux indices de A' et où la flèche (1) est l'injection naturelle.

D'où la

Proposition 4. *On a la suite exacte de cohomologie*

$$\dots \to H^k(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}';\Omega^p) \to H^k(\mathcal{U};\Omega^p) \to H^k(\mathcal{U}';\Omega^p) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(\mathcal{U} \bmod \mathcal{V}';\Omega^p) \to \dots$$

cf [13] page 404 V.

Le sous-espace X n'est pas intervenu explicitement, mais nous l'avons introduit parce que, sous certaines hypothèses sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ les groupes $H^k(\mathcal{U};\Omega^p)$ et $H^k(\mathcal{U}';\Omega^p)$ s'identifient naturellement aux groupes de U et de $U-X$ définis en $b\alpha$.

$b\gamma$ d'' cohomologie à croissance lente, et à supports fermés

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ on peut considérer l'ensemble des formes différentielles de degré fixe p en dz_j, et à coefficients distributions à croissance lente dans U (localement à croissance lente dans U).

Nous notons cet ensemble par

$$K^p_\gamma(U) \qquad \left(\text{resp } K^p_{\gamma\, loc}(U)\right)$$

et on le munit de l'opérateur de dérivation d''.

Alors on note les groupes associés

$$H^k_\gamma(U;\Omega^p) \qquad \left(\text{resp } H^k_{\gamma\, loc}(U;\Omega^p)\right)$$

Maintenant, si X est une partie fermée de V ouvert de $\mathbb{C}^n$ on peut considérer les formes distributions (resp. distributions à croissance lente) de degré fixe p en les dz_j et à support dans X.

On note cet ensemble

$$K^p_{\mathcal{D}',X}(U) \qquad \left(\text{resp. } K^p_{\mathcal{S}',X}(U)\right)$$

Avec d'' comme opérateur il vient donc les groupes

$$H^k_{\mathcal{D}',X}(U;\Omega^p) \qquad \left(\text{resp. } H^k_{\mathcal{S}',X}(U;\Omega^p)\right)$$

On a les deux suites exactes

$$0 \to K^p_{\mathcal{D}',X}(U) \to K^p(U) \to K^p_{\gamma\, loc}(U-X) \to 0$$

$$0 \to K^p_{\mathcal{S}',X}(U) \to K^p_\gamma(U) \to K^p_\gamma(U-X) \to 0$$

d'où la

PROPOSITION 5. On a les suites exactes

$$\ldots \to H^k_{\mathcal{D}',X}(U;\Omega^p) \to H^k(U;\Omega^p) \to H^k_{\gamma\, loc}(U-K;\Omega^p) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}_{\mathcal{D}',X}(U;\Omega^p) \to \ldots$$

$$\ldots \to H^k_{\mathcal{S}',X}(U;\Omega^p) \to H^k_{\mathcal{S}'}(U;\Omega^p) \to H^k_{\gamma}(U-X;\Omega^p) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}_{\mathcal{S}';X}(U;\Omega^p) \to \ldots$$

Tout ceci est à rapprocher de [10] page 214-07 cf aussi [B] pages 77-78.

$b\delta$ *Cohomologie de Čech avec conditions de croissance*

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement de U par des ouverts U_α nous considérons les cochaînes de recouvrement comme en $b\beta$ telles que les coefficients de chaque $\overset{p,0}{\omega}_{\alpha_0\cdots\alpha_k}$ soient prolongeables à U en *tant que distributions.*

On note cet ensemble par $C_{\gamma\, loc}(\mathcal{U};\Omega^p)$. L'opérateur δ opère à nouveau sur ces cochaînes et on obtient donc des groupes $H^k_{\gamma\, loc}(\mathcal{U};\Omega^p)$.

Dans le cas de $\mathcal{S}'$ on supposera *en outre* que le recouvrement à l'infini de U est *fini* et on considèrera les cochaînes telles que les coefficients de chaque $\overset{p,0}{\omega}_{\alpha_0\cdots\alpha_k}$ appartiennent à $\mathcal{S}'(U_{\alpha_0\cdots\alpha_k})$.

On notera les groupes obtenus par

$$H_\gamma(\mathcal{U};\Omega^p)$$

on peut aussi considérer des cochaînes fabriquées à l'aide de formes de type (p,q) d'' fermées ou pas, à coefficients prolongeables.

Chapitre III — LA NOTION DE VALEUR AU BORD POUR UN SYSTÈME DE FONCTIONS HOLOMORPHES

1. La valeur au bord d'une fonction holomorphe

a — Etant donnée une fonction holomorphe f définie dans un ouvert régulier, sous certaines hypothèses on pourra définir sa valeur au bord, sa «trace». Plus généralement il conviendrait d'étendre le problème de la valeur au bord de f définie dans $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_k$ au voisinage de points de $\partial\Omega_1 \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$ pour tout k(*).

Nous allons nous contenter pour l'instant du cas utile relativement à la représentation des distributions par des fonctions holomorphes, nous contentant d'indications au chapitre IV sur les autres cas.

Dans toute la suite E désignera un espace vectoriel réel dont, s'il y a lieu, la dimension finie n sera précisée en indice (soit E^n). Son complexifié $E \underset{R}{\otimes} \mathbb{C}$ sera noté $E_{\mathbb{C}}$ et nous l'identifierons à $E \times iE$, E et iE étant considérés comme sous-espaces de $E_{\mathbb{C}}$. De la même façon nous écrirons $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$.

Soit Θ un ouvert de E^n que nous supposons convexe à frontière régulière et soient $\Theta_0,\ldots,\Theta_{n-1}$, n ouverts convexes de E et à frontière régulière tels que:

1) $\Theta_0 \cap \ldots \cap \Theta_{n-1} \neq \emptyset$

2) $0 \in \partial\Theta_j$ pour tout j

3) les frontières sont en position générale.

Les conditions imposées entraînent qu'il existe un voisinage ω de zéro tel que

$$\omega \cap \partial\Theta_0 \cap \partial\Theta_1 \cap \ldots \cap \partial\Theta_{n-1} = \{0\}.$$

Posons maintenant $\Omega_j = \Theta \times i\Theta_j$ dans $E_{\mathbb{C}}$ et donnons nous une fonction holomorphe f dans l'ouvert $\Omega_{0,\ldots,(n-1)} = \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1} = \Theta \times i(\Theta_0 \cap \ldots \cap \Theta_{n-1})$.

(*) Le symbole $\partial\Omega_h$ désigne la frontière, orientée si Ω_h est orienté, de Ω_h.

Nous choisissons P_j dans l'intérieur des Θ_j et nous notons par $\lambda_j\Theta_j$ l'ouvert obtenu à partir de Θ_j par homothétie de rapport λ_j à partir de P_j. En fait, une notation plus correcte devrait faire intervenir les points P_j mais on verra plus loin qu'une telle précaution est inutile.

Si $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1}$ sont n-nombres positifs inférieurs à 1 la fonction f est définie sur $\Theta\times i(\partial[(1-\varepsilon_0)\Theta_0]\cap\dots\cap\partial[(1-\varepsilon_{n-1})\Theta_{n-1}])$. Soit ω un voisinage suffisamment petit de zéro dans E. Si $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1}$ sont suffisamment voisins de zéro

$$\omega\cap\partial[(1-\varepsilon_0)\Theta_0]\cap\dots\cap\partial[(1-\varepsilon_{n-1})\Theta_{n-1}]$$

est constitué d'un seul point $M(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1})$. Nous noterons par $\varepsilon_j\Omega_j$ l'ouvert $\Theta\times i[(1-\varepsilon_j)\Theta_j]$ et la restriction de f à $\Theta\times M(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1})$ sera notée $f(x;\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1})$.

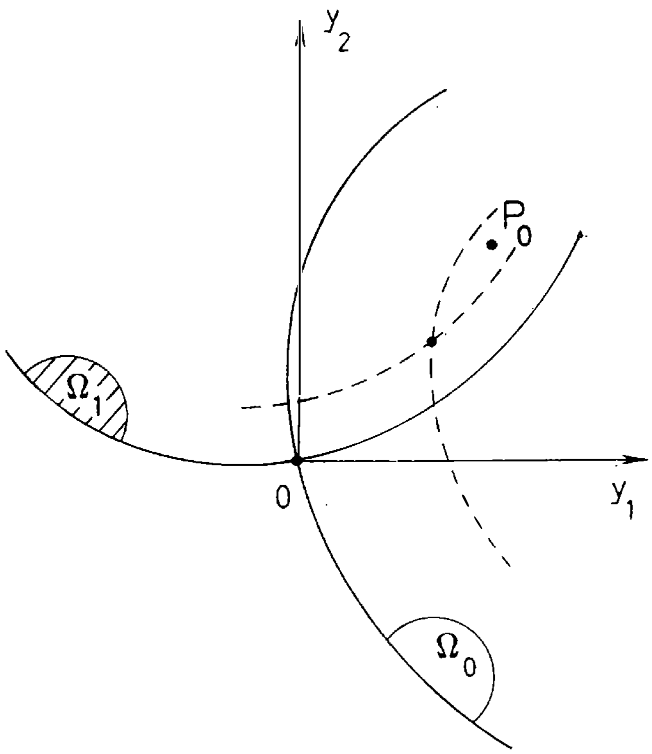

FIGURE 1

DÉFINITION 1: *Par définition on dira que f admet une valeur au bord* Θ *de* $\Omega_0\cap\dots\cap\Omega_{n-1}$ *dans* $\mathcal{D}'(\Theta)$ *(resp. dans* $\mathcal{S}'(\Theta)$*) si* $\lim\limits_{(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1})\to 0} f(x;\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1})$ *existe au sens de* $\mathcal{D}'(\Theta)$ *(resp de* $\mathcal{S}'(\Theta)$*), et cette limite est la valeur au bord de f.*

Munissons $\Theta\times M(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1})$ de la forme différentielle

(1) $$d''1_{\varepsilon_0\Omega_0}\wedge d''1_{\varepsilon_1\Omega_1}\wedge\dots\wedge d''1_{\varepsilon_{n-1}\Omega_{n-1}}=d''(\Theta;\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1})=d''(\Theta;\varepsilon)$$

alors $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(z) d''(\Theta;\varepsilon)$ va exister dans l'espace $K^n(\Theta \times iE)$ des formes de degré $(0,n)$ à coefficients distributions sur $\Theta \times iE$ et sera une forme distribution définie dans $\Theta \times iE$ à support concentré sur Θ. Cette distribution est de la forme $T(x) \,.\, \delta(y) \,.\, dx \,.\, dy$.

THÉORÈME I: *$H^p_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^q)$ est nul pour $p<n$* et *$H^n_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^q)$ est naturellement isomorphe à l'espace des formes différentielles de degré q définies sur Θ à coefficients dans $\mathcal{D}'(\Theta)$* (l'isomorphisme est décrit plus loin).

DÉMONSTRATION: En fait nous démontrerons un théorème plus général mieux adapté aux récurrences.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Nous pouvons considérer sur $\Theta \times iE^n \times U$ les formes différentielles de type (q,p) en les $\overline{dz_j}, dz_j$ et à coefficients distributions sur $\Theta \times iE^n \times U$; nous noterons par

$$H^p_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^q(\mathcal{D}'(U)))$$

le quotient de l'espace de telles formes de type (q,p) et d'' fermées par le sous-espace image par d'' de l'ensemble des formes de type $(q,p-1)$.

THÉORÈME I': $H^p_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^q(\mathcal{D}'(U))) = 0 \quad$ pour $\quad p<n$

$H^n_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^q(\mathcal{D}'(U)))$ est naturellement isomorphe à l'espace des formes différentielles de degré q sur Θ à coefficients dans $\mathcal{D}'(\Theta \times U)$.

DÉMONSTRATION: Le cas de Ω^0 nous suffit. Soit donc ω une forme d''-fermée de type $(0,q)$ (*). Au voisinage d'un point x_0 de ω, E^n étant identifié à l'espace $\mathbb{R}^n$ par le choix d'un système de coordonnées, chaque coefficient $T_{i_0 \cdots i_{q-1}}$ est de la forme

$$\sum_{h=(h_1,\cdots,h_n)} \theta^h_{i_0 \cdots i_{q-1}}(x;u) \,.\, \delta^{(h)}(y)$$

où h est un multi-entier, $\delta^{(h)}(y) = \dfrac{\partial^{h_1+\cdots+h_n}}{\partial y_1^{h_1} \ldots \partial y_n^{h_n}} (\delta(y_1,\ldots,y_n))$

et où $\theta^h_{i_0 \cdots i_{q-1}}(x;u)$ est une distribution sur $\Theta \times U$.

(*) Nous supposons $q \geqslant 1$.

Or on a: $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k} + i\dfrac{\partial}{\partial y_k}\right)$ d'où

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\left[\theta^h_{i_0\ldots i_{q-1}}(x;u)\,.\,\delta^{(h_1,\ldots,(h_k-1),\ldots,h_n)}(y)\right]$$

$$= \frac{i}{2}\,\theta^h_{i_0\ldots i_{q-1}}(x;u)\,.\,\delta^{(h)}(y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta^h_{i_0\ldots i_{q-1}}(x)\right).\,\delta^{(h_1,\ldots,(h_k-1),\ldots,h_n)}$$

Donc de cette façon on voit que, au voisinage de x_0, la forme ω est cohomologue à une forme dont les coefficients $(i_0,\ldots,i_{q-2},n)$ sont du type:

$$\sum_{h=(h_1,\ldots,h_{n-1})} \theta^h_{i_0\ldots i_{q-2},n}(x;u)\,.\,\delta^{(h_1,\ldots,h_{n-1})}(y_1,\ldots,y_{n-1})\,.\,\delta(y_n) = T_{i_0\ldots i_{q-2},n}\,.\,\delta(y_n)$$

Mais la forme en question est d''-fermée, donc si on considère le coefficient de $d\bar{z}_{i_0} \wedge \ldots. \wedge d\bar{z}_{i_{q-1}} \wedge d\bar{z}_n$ on voit que:

$$\left(\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{i_l}}\, T_{i_0,\ldots \hat{i}_l \ldots,n}\right).\,\delta(y_n) + (-1)^n T_{i_0,\ldots,i_{q-1}}\,.\,\frac{i}{2}\,\delta'(y_n) = 0$$

D'où

$$T_{i_0\ldots i_{q-1}} = 0 \qquad \text{pourvu que } i_0 < i_1 < .. < i_{q-1} < n\,.$$

La forme est donc congrue à une forme

$$\sum_{j_0<\ldots<j_{q-2}} T_{j_0\ldots j_{q-2},n}\, d\bar{z}_{j_0} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_{q-2}} \wedge d\bar{z}_n$$

au voisinage du point x_0.

Si $q \geqslant 2$ nous allons recommencer avec la variable z_{n-1}. Chaque terme a ses coefficients de la forme

$$\sum_{h=(h_1,\ldots,h_{n-1})} \theta^h_{i_0,\ldots,n}(x;u)\,.\,\delta^{(h_1,\ldots,h_{(n-1)})}(y_1,\ldots,y_{n-1})\,.\,\delta(y_n)$$

la variable $d\bar{z}_n$ étant partout présente.

Nous obtiendrons une forme congrue à ω dont chaque terme $T_{j_0,\dots,j_{q-2},n}$ est de la forme

$$\tau_{j_0,\dots,j_{q-2},n}(x;u;y_1,\dots,y_{n-2}) \cdot \delta(y_{n-1}) \cdot \delta(y_n)$$

La condition de fermeture relativement au coefficient de

$$d\bar{z}_{j_0} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q-2}} \wedge d\bar{z}_{n-1} \wedge d\bar{z}_n$$

s'écrira:

$$\left(\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{\partial \tau_{j_0,\dots,\hat{j}_l,\dots,(n-1),n}}{\partial \bar{z}_{j_l}}\right) \cdot \delta(y_{n-1}) \cdot \delta(y_n) + (-1)^{n-1} \tau_{j_0\dots j_{n-2}\widehat{(n-1)}n} \cdot$$

$$\cdot \frac{i}{2} \delta'(y_{n-1}) \cdot \delta(y_n) = 0$$

$$\begin{cases} j_{n-1} = (n-1) \\ j_n = n \end{cases}$$

d'où $\tau_{j_0\dots j_{n-2}n} = 0$ si $j_{n-2} < n-1$; ω est donc congrue à une forme

$$\sum_{j_0<\dots<j_{q-3}} T_{j_0\dots j_{q-3}(n-1),n} \cdot d\bar{z}_{j_0} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q-3}} \wedge d\bar{z}_{n-1} \wedge d\bar{z}_n$$

la distribution $T_{j_0\dots j_{q-3},(n-1),n}$ étant de la forme

$$\sum_{h=(h_1,\dots,h_{n-2})} \theta^h_{i_0,\dots,i_{q-3},(n-1),n}(x;u) \cdot \delta^{(h_1,\dots,h_{n-2})}(y_1,\dots,y_{n-2}) \cdot \delta(y_{n-1}) \cdot \delta(y_n)$$

et ainsi de suite. Nous voyons en définitive que ω est congrue à une forme

$$T_{n-q+1,\dots,n} d\bar{z}_{n-q+1} \wedge d\bar{z}_{n-q+2} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n = T \cdot d\bar{z}_{n-q+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$$

T s'écrivant:

$$T = \sum_{h=(h_1,\dots,h_{n-q})} \theta^h(x;u) \cdot \delta^{(h_1,\dots,h_{n-q})}(y_1,\dots,y_{n-q}) \cdot \delta(y_{n-q+1}) \dots \delta(y_n)$$

La condition de fermeture donne:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}_j} = 0 \qquad \text{pour tout} \quad j < (n-q+1)$$

Le lemme 1 qui suit montre que ceci entraîne $T=0$ si $q \leqslant (n-1)$ c'est à dire que ω admet une primitive au voisinage de x_0. Pour $q=n$, ω est donc congrue au voisinage de x_0 à une forme $\theta(x,u).\delta(y) d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n$. Montrons maintenant que $\omega \equiv 0$ équivaut à $\theta(x)=0$, ce qui nous permettra de définir l'isomorphisme de $H^n_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^0(\mathcal{D}'(U)))$ avec $\mathcal{D}'(\Theta \times U)$

par $\omega \to \theta\ (x;u)$, dont la flèche inverse est

$T(x;u) \to$ (classe de $T(x;u)\,.\,\delta(y)\,.\,d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n$)

Nous utiliserons le même processus de réduction.

Si $\omega = d''\pi$ on peut remplacer π par une forme π' dont les coefficients s'écrivent

$$\pi' = \sum_{j<n} T_j(x;u;y_1,\ldots,y_{n-1})\,.\,\delta(y_n)\,.\,d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar{z}_j} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n + \\ + T_n(x;u;y) d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n$$

où $T_n(x;u;y) = \sum_{\alpha} T_n^{\alpha}(x;u;y_1,\ldots,y_{n-1}) \delta^{(\alpha)}(y_n)$

Donc il vient

$$\left.\begin{array}{l} \left(\displaystyle\sum_{j<n} (-1)^j \frac{\partial T_j}{\partial \bar{z}_j}(x;u;y_1,\ldots,y_{n-1})\right)\,.\,\delta(y_n) \\ + \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{\alpha\geqslant 0}^{N_0} \frac{\partial T_n^{\alpha}}{\partial x_n}(x;u;y_1,\ldots,y_{n-1})\,.\,\delta^{(\alpha)}(y_n) \\ + \displaystyle\frac{i}{2}\sum_{\alpha\geqslant 0}^{N_0} T_n^{\alpha}(x;u;y_1,\ldots,y_{n-1})\,.\,\delta^{(\alpha+1)}(y_n) \end{array}\right\} = T(x;u)\,.\,\delta(y)$$

Donc $T_n^{N_0} = 0$, d'où $T_n^{N_0-1} = \dots = T_n^0 = 0$

donc $T_n = 0$.

Nous remplaçons $\theta(x;u)\delta(y)d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$ par

$$\theta(x;u) \,.\, \delta(y_1,\dots,y_{n-1}) \,.\, d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{n-1},$$

la forme π' par π''

$$\sum_{j<n} T_j(x;u;y_1,\dots,y_{n-1}) \,.\, d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{z}_j} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{n-1}$$

$$E^n = \mathbb{R}^n \text{ par } \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } U \text{ par } U \times \mathbb{R}^2.$$

Si on fait l'hypothèse de récurrence que la propriété cherchée est vraie pour $n-1$ il s'ensuit que $\pi''=0$, donc la propriété devient vraie de n or elle est vraie pour $n=1$ (chapitre I) donc elle est vraie pour tout n.

Le résultat n'est acquis pour l'instant qu'au voisinage de tout point, le lemme 2 permettra de le globaliser.

Lemme 1: *Soit T une distribution définie dans un ouvert $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ de $\mathbb{C}^n$. Si dans cet ouvert $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}_n} = 0$, T est une distribution holomorphe de la variable z_n, c'est à dire peut être identifiée à une fonction ψ définie de Ω_n à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{n-1})$, scalairement holomorphe, par*

$$<T,\varphi> = \int_{\Omega_n} <\psi(z_1,\dots,z_{n-1};z_n),\varphi(z_1,\dots,z_{n-1},z_n)> dx_n \,.\, dy_n \,.$$

En particulier si T a un support dont l'adhérence de la projection sur Ω_n supposé connexe est différente de Ω_n alors $T \equiv 0$.

Démonstration. Nous notons $\psi(z_n) = \psi(z_1,\dots,z_{n-1};z_n)$ et de cette fonction nous disons qu'elle est scalairement holomorphe dans Ω_n si pour toute

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{n-1}),$$

$z_n \to <\psi(z_n),\varphi>$ est holomorphe dans Ω_n. Supposons que T puisse se mettre sous la forme du lemme, alors,

$$< \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \psi(z_1,\dots,z_{n-1};z_n) \ , \ \varphi(z_1,\dots,z_{n-1},z_n) >$$

$$= - \int < \psi(z_1,\dots,z_{n-1};z_n) \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_n} > dx_n dy_n$$

et cette intégrale peut aussi s'écrire si $\varphi=\varphi_1(z_1,\ldots,z_{n-1})\cdot\varphi_2(z_n)$

$$-\int<\psi(z_1,\ldots,z_{n-1};z_n)\ ,\ \varphi_1\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_n}>dx_n dy_n$$

Soit:
$$-\int<\psi(z_1,\ldots,z_{n-1};z_n)\ ,\ \varphi_1(z_1,\ldots,z_{n-1})>\frac{\partial\varphi_2}{\partial\bar z_n}\,dx_n dy_n$$

$$=\int\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_n}<\psi(z_1,\ldots,z_{n-1};z_n)\ ,\ \varphi_1(z_1,\ldots,z_{n-1})>\right)\cdot\varphi_2 dx_n dy_n=0$$

Mais d'après un théorème de L. Schwartz [G] ch. III page 107 il s'ensuit que $\frac{\partial T}{\partial\bar z_n}=0$. Pour la réciproque, si $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{n-1})$ on peut définir $<T,\varphi>(z_n)$ distribution sur Ω_n par:

$$\text{si}\ \ \varphi_1\in\mathcal{D}(\Omega_n)\ ,\ <<T,\varphi>,\varphi_1>\ =\ <T,\varphi\cdot\varphi_1>$$

Ensuite, on a·

$$<\frac{\partial}{\partial\bar z_n}<T,\varphi>,\varphi_1>=-<<T,\varphi>,\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar z_n}>\quad\text{par définition}$$

et
$$-<<T,\varphi>,\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar z_n}>=-<T,\varphi\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar z_n}>=-<T,\frac{\partial}{\partial\bar z_n}(\varphi\cdot\varphi_1)>$$

$$=<\frac{\partial T}{\partial\bar z_n},\varphi\cdot\varphi_1>=0$$

c'est à dire que $<T,\varphi>(z_n)$ est une fonction holomorphe de la variable z_n.

Maintenant sous l'hypothèse de support $<T,\varphi>(z_n)$ est identiquement nulle puisqu'elle l'est au voisinage d'un point de Ω_n. Ce qui entraîne que T est identiquement nulle comme nous l'avons remarqué. C. q. f. d.

On en déduit que

$$H^0_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta\times iE^n;\Omega^q(\mathcal{D}'(U)))=0$$

puis que les $H^q_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta\times iE^n;\Omega^q(\mathcal{D}'(U))$ sont au moins localement nuls si $q<n$.

Lemme 2: *Soit X un fermé dans* 0 *ouvert de* $\mathbb{C}^n$ *si pour tout ouvert* $0'$ *de* $\mathbb{C}^n$ *on a* $H^r_{\mathcal{D}',X\cap 0'}(0';\Omega^q(\mathcal{D}'(U)))=0$ *alors la relation d'équivalence sur les formes de type* $(q,r+1)$ *et* d''*-fermées,* $\overset{-q,r+1}{\omega}\equiv\overset{q,r+1}{\omega'}$ *si* $\omega=\omega'+d''\tilde\omega$, $(\omega,\omega',\tilde\omega$ *à support dans* X), *est de type local.*

DÉMONSTRATION: Il revient au même de dire que si $\overset{q,r+1}{\omega}$ admet localement une primitive à support dans X elle en admet une globalement. Pour tout point x de X on peut trouver un voisinage $\mathcal{U}(x)$ ouvert de ce point tel qu'il existe $\overset{q,r}{\tilde{\omega}}_x$ à support dans $\mathcal{U}(x) \cap X$ et telle que $d'' \overset{q,r}{\tilde{\omega}}_x = \overset{q,r+1}{\omega}$. Du recouvrement de X par les $\mathcal{U}(x)$ on peut extraire une suite $\mathcal{U}(x_n)$ telle que les $\mathcal{U}(x_n) \cap X$ recouvrent X, et trouver des $\mathcal{V}(x_n)$ ouverts tels que $\bar{v}(x_n)$ soit compact dans $\mathcal{U}(x_n)$ et tels que les $\mathcal{V}(x_n) \cap X$ recouvrent X (para-compacité d'un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$, [K] page 149).

Supposons construite une primitive $\overset{q,r}{\tilde{\omega}}(N_0)$ de $\overset{q,r+1}{\omega}$ sur $\bigcup_{n=1}^{N_0} \mathcal{V}(x_n) = \mathcal{V}(N_0)$.
Par l'hypothèse faite sur $\mathcal{V}(N_0) \cap \mathcal{U}(x_{N_0+1})$ il existe $\overset{q,r-1}{\tilde{\omega}}$ telle que

$$\overset{q,r}{\tilde{\omega}}(N_0) - \overset{q,r}{\tilde{\omega}}_{x_{N_0+1}} = d'' \overset{q,r-1}{\tilde{\omega}}.$$ La restriction de $\overset{q,r-1}{\tilde{\omega}}$ à $\mathcal{V}(x_{N_0+1})$

est prolongeable à $\mathbb{C}^n$ en une forme distribution à support dans X, donc il existe une forme définie dans tout l'espace, soit $\overset{q,r-1}{\theta}_{N_0+1}$, telle que $\overset{q,r}{\tilde{\omega}}_{x_{N_0+1}} + d'' \overset{q,r-1}{\theta}_{N_0+1}$ réalise un prolongement à $\mathcal{V}(N_0+1)$ de la primitive $\overset{q,r}{\tilde{\omega}}(N_0)$ de $\overset{q,r+1}{\omega}$ C. q. f. d.

Puisque $H^0_{\dots,\Theta}(\dots) = 0$ par récurrence les $H^q_{\dots,\Theta}(\dots)$ étant localement nuls pour $q < n$ sont nuls.

Examinons le cas de $H^n_{\dots,\Theta}(\dots)$. Toute forme de degré $(0,n)$ est localement cohomologue au voisinage $\mathcal{U}_{x_0}$ d'un point x_0 à une forme

$$\theta_{x_0}(x;u)\delta(y) d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n .$$

Et sur $\mathcal{U}_{x_0} \cap \mathcal{U}_{y_0}$ on a $\big(\theta_{x_0}(x;u) - \theta_{y_0}(x;u)\big) . \delta(y) . d\bar{z} \equiv 0$. Ce qui entraîne $\theta_{x_0}(x;u) = \theta_{y_0}(x;u)$ comme nous l'avons vu. On peut donc recoller les solutions partielles et on obtient $T(x;u)$ définie sur $\Theta \times U$ telle que, au voisinage de chaque point de Θ, ω soit congrue à $T(x;u)\delta(y)d\bar{z}$. Du lemme 2 résulte donc que ω est congrue sur Θ à cette forme. Ceci achève la démonstration du théorème I' donc du théorème I.

Notons que, des calculs locaux, résulte sans globalisation avec les notations évidentes:

THÉORÈME 1'':

$$H^p_{\mathcal{S}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^q(\mathcal{S}'(U))) = 0 \quad \text{pour } p < n$$

$H^n_{\mathcal{S}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^q(\mathcal{S}'(U))$ est naturellement isomorphe à l'espace des formes différentielles de degré q sur Θ à coefficients dans $\mathcal{S}'(\Theta \times U)$.

L'isomorphisme étant:

$$\Big(\sum_{i_0<\dots<i_{q-1}} T_{i_0\dots i_{q-1}}(x;u)dz_{i_0}\wedge\dots\wedge dz_{i_{q-1}}\Big)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\Big(\text{Classe de}\sum_{i_0<\dots<i_{q-1}} T_{i_0\dots i_{q-1}}(x;u)\delta(y)\,.\,dz_{i_0}\wedge\dots\wedge dz_{i_{q-1}}\wedge d\bar{z}_1\wedge\dots\wedge d\bar{z}_n\Big)$$

Avec les notations introduites au début de ce chapitre nous énoncerons le

THÉORÈME 2: (fondamental). *Une fonction f définie dans $\Omega_0\cap\dots\cap\Omega_{n-1}$, holomorphe, a une valeur au bord si et seulement si elle est prolongeable en une distribution au voisinage de ce bord.*

DÉMONSTRATION: Nous procédons comme dans le cas d'une variable. Vu les théorèmes de structure des filtres à base dénombrable de distributions dans $\mathcal{D}'$ on voit que si f a une valeur limite au bord elle est localement à croissance lente au sens distribution. Mais il est immédiat de vérifier que si elle est localement à croissance lente au sens fonction, c'est à dire s'il existe un n_0 tel que $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)^{n_0}f(x_1+i\varepsilon_1,\dots,x_n+i\varepsilon_n)$ reste borné dans un voisinage du réel pour $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ suffisamment petit et $x\in K$ compact arbitraire de Θ, alors elle admet une valeur au bord.

En lemme apparait alors la

PROPOSITION 2: *Une fonction f holomorphe dans une intersection finie $\Omega=\Omega_{0..(n-1)}$ d'ouverts réguliers à frontières en position générale est localement à croissance lente dans Ω au sens distribution si et seulement si elle l'est au sens fonction (même conclusion si Ω est convexe).*

DÉMONSTRATION: Il est possible d'opérer comme dans le cas d'une variable (Chap. I) mais je propose une autre méthode. D'après le théorème VI chapitre I on voit que f est localement à croissance lente au sens distribution au voisinage d'un point x_0 de $\partial\Omega$ si et seulement si, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\omega\cap\Omega)$ où ω est un voisinage convenable du point, il existe un multi-entier p et une constante M_p tels que:

$$(1)\qquad \left|\int_{\omega\cap\Omega}\dots\int f(z)\,.\,\varphi(x,y)dxdy\right|\leqslant M_p\,.\sup_{(x,y)\in\Omega\cap\omega}|\varphi^{(p)}(x,y)|$$

$$(x=x_1,\dots,x_n)\ ,\ y=(y_1,\dots,y_n)\ ,\ z=(x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n)\,.$$

Nous supposons ω convexe ce qui suffit à des infiniment petits d'ordre supérieur à 1 près. Choisissons *une fois pour toutes* une fonction $\alpha(r)$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ à support dans un intervalle $[p_1,p_2]$, $(p_1>0)$, telle que $\int \alpha(r)dr=1$ et telle que pour un z_0 élément de $\frac{1}{2}(\Omega \cap \omega)$ (*) le polydisque P_{z_0} $P_{z_0}=\{z \mid |z_n-z_{n,0}|<p_2\}$ soit dans $\omega \cap \Omega$. Nous désignerons par ∇z la distance d'un point z à $\omega \cap \partial\Omega$, par rapport à une norme de $\mathbb{C}^n$.

On a, grâce à l'intégrale de Cauchy régularisée par α, la formule

$$(2) \qquad f(z)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \underbrace{\int \dots\dots \int}_{2\,n\;fois} f(z_1+r_1e^{i\theta_1},\dots)\beta_z(u)\;.\;\underbrace{r_1dr_1d\theta_1\dots r_ndr_nd\theta_n}_{=dx_1dy_1\dots\dots dx_ndy_1}$$

si nous désignons par $\beta_z(u)$ la fonction

$$\frac{\alpha\left(\frac{\nabla z_0}{\nabla z}\,r_1\right)\dots\dots\alpha\left(\frac{\nabla z_0}{\nabla z}\,.\,r_n\right)}{\left(\frac{\nabla z_0}{\nabla z}\right)^n\,.\,r_1\dots r_n} \qquad \text{où} \quad u=z+re^{i\theta}$$

$$\text{soit} \quad u_1=z_1+r_1e^{i\theta_1},\dots,u_n=z_n+r_ne^{i\theta_n}$$

et il vient:

$$(3) \qquad \sup_{u\in\Omega\cap\omega}\left|\beta_z^{(p)}(u)\right| \leqslant \sup_{u\in\Omega\cap\omega}\left|\beta_{z_0}^{(p)}(u)\right|\,.\left(\frac{\nabla z_0}{\nabla z}\right)^{|p|}$$

où $|p|=p_1+\dots+p_n$ si $p=(p_1,\dots,p_n)$.

Cette information sur β_z grâce à la formule 2 donne par (1):

$$(4) \qquad \left|f(z)\right| \leqslant M_p\,.\,\sup_{u\in\Omega\cap\omega}\left|\beta_{z_0}^{(p)}(u)\right|\,.\left(\frac{\nabla z_0}{\nabla z}\right)^{|p|} \leqslant \frac{N}{(\nabla z)^{|p|}}$$

car β_z a son support dans $\Omega \cap \omega$ C. q. f. d.

Le théorème 2 en résulte puisqu'il revient au même de dire que f est localement à croissance lente «au sens» distributions ou qu'elle est prolongeable.

(*) Les homothéties sont faites avec x_0 comme pôle.

Corollaire: *Soit $f \in S'(\Omega_0 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1})$ et holomorphe. Sa valeur au bord appartient à $S'(\Theta)$ et est atteinte au sens de $S'(\Theta)$.*

Démonstration: Le théorème 2 assure que la valeur au bord existe. Si on compactifie l'espace par son plongement dans l'espace projectif complexe on voit que la valeur au bord est prolongeable donc appartient à $S'(\Theta)$. C. q. f. d.

Notons en passant que ces raisonnements montrent en particulier que pour tout $M \in \Theta_0 \cap \ldots \cap \Theta_{n-1}$ la restriction de f à $\Theta \times iM$ appartient à $S'(\Theta)$ (*).

b — *prolongement canonique.* Soit $\Omega_0 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ une intersection de n ouverts du type considéré jusqu'ici. Considérons une fonction f holomorphe continue jusque sur la frontière au voisinage de Θ. Nous nous plaçons dans le voisinage ω que nous supposerons convexe après restriction de Θ s'il y a lieu. Considérons le prolongement distribution $\bar{f}$ de f à $\omega \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ défini par f dans $\Omega_0 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ et par 0 hors de cet ensemble. Puis nous calculons $d''\bar{f}$ qui est $d''1_{\Omega_0}.f$ restreint à $\omega \cap \Omega_1 \ldots \cap \Omega_{n-1}$. Mais $d''1_{\Omega_0}.f$ se prolonge de la même façon dans $\omega \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ par 0 hors de $\omega \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ car c'est le produit de la 1-forme $d''1_{\Omega_0}$ par f continue jusqu'à la frontière. On peut calculer le d'' de cette forme et on obtiendra $d''1_{\Omega_0} \wedge d''1_{\Omega_1}.f$ sur la partie de $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$ dans ω. On prolonge par zéro dans $\omega \cap \Omega_3 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ et on calcule le d'', etc...

On obtiendra finalement $(d''1_{\Omega_0} \wedge d''1_{\Omega_1} \cap \ldots \cap d''1_{\Omega_{n-2}}).f$ forme distribution définie dans Ω_{n-1} et concentrée sur $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1 \cap \ldots \cap \partial\Omega_{n-2} \cap \Omega_{n-1} \cap \omega$. Cette forme est prolongeable à ω par zéro sur la frontière $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1 \cap \ldots \cap \partial\Omega_{n-2}$. Prenant le d'' de ce prolongement nous obtiendrons exactement

$$d''1_{\Omega_0} \wedge d''1_{\Omega_1} \wedge \ldots \wedge d''1_{\Omega_{n-1}}.f(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{i}{2}\right)^n f(x_1,\ldots,x_n).\delta(y_1\ldots y_n) d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n$$

à savoir la valeur au bord de la fonction f, si la frontière $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1 \cap \ldots \cap \partial\Omega_{n-1}$ est orientée dans le sens choisi.

Maintenant opérons ainsi. Nous prolongeons f en une distribution $\bar{f}'$ dans $\omega \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ à support dans l'adhérence de $\omega \cap \Omega_0 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ dans cet ouvert. Alors $\bar{f} - \bar{f}'$ est une distribution concentrée sur la frontière de Ω_0 dans $\omega \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega$. Il vient: $d''\bar{f} = d''\bar{f}' + d''(\bar{f}' - \bar{f})$ c'est à dire que les deux distributions $1_\Omega.f$ et $d''\bar{f}'$ différent par le d'' d'une distribution à support dans la frontière. Si nous effectuons un prolongement φ de $d''\bar{f}'$ à support dans $\partial\Omega_0$

(*) On a plus; utilisant par exemple un principe de démonstration analogue à celui de la proposition 2 on vérifie que la restriction de f à $\Theta \times iM$ est même à croissance lente au sens fonction. Bien entendu il existe des fonctions analytiques réelles dans $S'(\Theta)$ qui ne sont pas à croissance lente au sens fonction.

nous obtenons une nouvelle distribution et deux prolongements diffèrent d'une forme distribution à support dans $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$. Si φ_1 et φ_2 sont des prolongements $d''\varphi_1 - d''\varphi_2 = d''T$ où T a son support dans $\partial\Omega_0 \wedge \partial\Omega_2$ mais $d''(\bar{f}' - \bar{f})$ a disparu dans cette opération donc $d''\varphi$ diffère de $d''1_{\Omega_0} \wedge d''1_{\Omega_1} . f$ par le d'' d'une forme distribution concentrée sur $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$, etc. Finalement, effectuant des prolongements arbitraires (en admettant qu'il soient tous possibles) nous obtiendrons une $(0,n)$ forme distribution σ concentrée sur Θ et qui diffère de $d''1_{\Omega_0} \wedge d''1_{\Omega_1} \wedge \ldots \wedge d''1_{\Omega_{n-1}} . f$ par le d'' d'une $(0,n-1)$ forme distribution, concentrée sur Θ. Le procédé aboutit donc à la classe de cohomologie de $d''1_{\Omega_0} \wedge \ldots \wedge d''1_{\Omega_{n-1}} . f$ dans $H^n_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^0)$.

Je dis que ce fait est général pour une fonction f localement à croissance lente dans $\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$. D'abord la méthode de prolongement a manifestement un sens; ensuite le résultat obtenu est dans une classe de cohomologie de $H^n_{\mathcal{D}';\Theta}(\Theta \times iE^n; \Omega^0)$. Enfin il reste à vérifier si $T(x_1,\ldots,x_n)$ est la valeur au bord de f que cette classe de cohomologie est celle de $\left(\frac{i}{2}\right)^n T(x) . \delta(y) d\bar{z}$. Mais, restreignant ω et Θ on peut supposer que f admet dans $\omega \cap \Omega_0 \cap \ldots \cap \Omega_{n-1}$ une primitive F continue jusqu'au bord, c'est à dire

$$f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha^1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}} F .$$

Si alors on considère la suite des prolongements canoniques

$$F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}, F_n = d''1_{\Omega_0} \wedge \ldots \wedge d''1_{\Omega_{n-1}} . F(x_1,\ldots,x_n)$$

et si on note par D l'opérateur $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots dx_n^{\alpha_n}}$

$$DF_0, DF_1, \ldots, DF_{n-1}, DF_n = d''1_{\Omega_0} \wedge \ldots \wedge d''1_{\Omega_{n-1}} . DF(x_1 \ldots x_n) = \left(\frac{i}{2}\right)^n T(x_1 \ldots x_n) \delta(y) d\bar{z} \, (*).$$

sont des intermédiaires pour f ce qui montre que localement la classe de cohomologie obtenue est bien celle de la valeur au bord, donc aussi sur tout Θ.

Nous donnerons plus loin la formulation générale de ce procédé.

(*) Sous la même hypothèse d'orientation que précédemment.

2. Indications sur la théorie de Sato

C'est Mikio Sato qui a vu la nécessité d'introduire les concepts de la cohomologie dans la théorie des valeurs au bord en définissant ce qu'il a nommé les hyperfonctions [13]. Les méthodes développées dans ce cours s'inspirent plus directement de l'interprétation que j'ai donné en [10] de cette théorie. Elles montrent il me semble trés nettement (c. f. th. 1) la nécessité qu'il y a à ne pas identifier les fonctionnelles analytiques avec l'élément du groupe de cohomologie (l'hyperfonction de Sato) qui leur est associé et que j'avais appelé indicatrice de Sato de la fonctionnelle, [10] page 214-11.

Pour une étude plus détaillée des hyperfonctions je renvoie à l'article de Sato ne présentant ici que les éléments préparatoires à mon propos.

Le point de départ est le fait suivant. Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ rencontrant $\mathbb{R}$ suivant Θ, nous désignerons par Ω^+ la partie de Ω formée des points tels que $y>0$ et par Ω^- celle où $y<0$. Si deux fonctions f^+ et f^- sont définies dans les régions Ω^+ et Ω^- et si ces fonctions ont même valeur au bord dans $\mathcal{D}'(\Theta)$ alors elles sont prolongement analytique l'une de l'autre (chap. I), c'est à dire qu'il existe g définie dans Ω telle que $f^+=g$ dans Ω_+ et $f^-=g$ dans Ω_-. Désignant par δf^+ et par δf^- les valeurs au bord, par $\delta(f^+, f^-)$ la distribution $\delta f^+-\delta f^-$, nous voyons donc que $\delta(f^+, f^-)=0$ équivaut à: il existe g telle que $(f^++g, f^-+g)=0$. Alors on introduit les valeurs au bord *formelles* définies sur Θ. On considère la limite inductive $\mathcal{U}$ des $\mathcal{O}(\Omega_\alpha-\Theta)$, espaces de fonctions holomorphes dans les ouverts $\Omega_\alpha-\Theta$ tels que $\Omega_\alpha \cap \mathbb{R}=\Theta$, puis $\mathcal{O}(\Theta)$ la limite inductive des espaces de fonctions holomorphes dans les ouverts Ω_α et l'espace vectoriel des valeurs au bord est défini comme le quotient $\mathcal{U}/\mathcal{O}(\Theta)$. C'est à dire que, étant donné un couple (f_α^+, f_α^-) défini dans $\Omega_\alpha-\Theta$, il est équivalent à zéro s'il existe g holomorphe dans $\Omega_\gamma \subset \Omega_\alpha$ telle que:

$f_\alpha^+=g$ dans Ω_γ^+ et $f_\alpha^-=g$ dans Ω_α^-, c'est à dire que f^+ et f^- sont prolongement analytique l'une de l'autre.

On a le fait fondamental suivant [cf. [13] page 395 note]: *Soit* (f^+, f^-) *un couple défini dans* $\Omega_\alpha \subset \Omega_0$ *fixe. Il existe* g *holomorphe dans* $\Omega_\gamma \subset \Omega_\alpha$ *telle que* f^++g *soit holomorphe dans* Ω_0^+ *et* f^-+g *soit holomorphe dans* Ω_0^- *(*g *se prolonge donc à* Ω_α*).*

En d'autres termes l'application naturelle de $\mathcal{O}(\Omega_0-\Theta)/\mathcal{O}(\Omega_0)$ dans $\mathcal{U}/\mathcal{O}(\Theta)$ est une bijection. Ce qui fait qu'on peut prendre comme modèle des valeurs au bord le groupe $\mathcal{O}(\Omega_0-\Theta)/\mathcal{O}(\Omega_0)$. L'interprétation cohomologique vient comme suit. Recouvrons Ω_0 par les ouverts $\Omega_0, \Omega_0^+, \Omega_0^-$. Nous désignons par $\mathcal{V}$ le recouvrement ainsi obtenu, et par $\mathcal{V}'$ le recouvrement de $\complement\,\Theta$ constitué de Ω_0^+ et Ω_0^-. D'après le chapitre II § 3 $b\beta$ on a la suite exacte:

$$0 \to H^0(\mathcal{V} \bmod \mathcal{V}'; \mathcal{O}) \to H^0(\mathcal{V}; \mathcal{O}) \to H^0(\mathcal{V}'; \mathcal{O}) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{V} \bmod \mathcal{V}', \mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{V}; \mathcal{O})$$

Mais un 0-cocycle de $\mathfrak{V}$ mod $\mathfrak{V}'$ s'identifie à une fonction holomorphe nulle sur $\complement\,\Theta$, d'où $H^0(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}'; \mathcal{O})=0$, ensuite j'ai déjà dit qu'un théorème de H. Cartan (chapitre I) assure que $H^1(\mathfrak{V};\mathcal{O})=0$. Les groupes $H^0(\mathfrak{V};\mathcal{O})$ et $H^0(\mathfrak{V}';\mathcal{O})$ sont respectivement les groupes $\mathcal{O}(\Omega_0)$ et $\mathcal{O}(\Omega_0-\Theta)$, d'où la suite exacte:

$$0 \to \mathcal{O}(\Omega_0) \to \mathcal{O}(\Omega_0-\Theta) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}'; \mathcal{O}) \to 0$$

Le groupe $H^1(\mathfrak{V} \bmod \mathfrak{V}'; \mathcal{O})$ est donc isomorphe au quotient de $\mathcal{O}(\Omega_0-\Theta)$ par $\mathcal{O}(\Omega_0)$ et ce groupe est naturellement isomorphe à ce que Sato appelle $H^1(\Omega_0 \bmod (\Omega_0-\Theta); \mathcal{O})$ premier groupe de cohomologie relative de Ω_0 modulo le complémentaire de Θ qu'il vaut mieux noter, comme je l'ai fait en [10], par la notation de Grothendieck $H^1_\Theta(\Omega;\mathcal{O})$, premier groupe de cohomologie de Ω_0 à valeurs dans $\mathcal{O}$ *à support dans* Θ. L'opération de valeur au bord est donc l'homomorphisme ∂ de $\mathcal{O}(\Omega_0-\Theta)=H^0(\mathfrak{V}';\mathcal{O})$ sur $H^1_\Theta(\Omega_0;\mathcal{O})$. Ainsi traduites les définitions de valeur au bord s'étendent aisément au cas de n-variables. Une hyperfonction définie sur Θ est un élément de $H^n(\Omega \bmod (\Omega-\Theta); \mathcal{O})$ ou encore un élément de $H^n_\Theta(\Omega;\mathcal{O})$ groupe qui ne dépend pas du voisinage complexe Ω de Θ dans $E_{\mathbb{C}}$ et qui peut être explicitement calculé comme suit. Supposons pour simplifier Θ, Ω convexes et soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de Ω par des convexes, dont une partie, soit $\mathfrak{U}'$, recouvre $\Omega-\Theta$, alors $H^n_\Theta(\Omega;\mathcal{O})$ est isomorphe à $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}';\mathcal{O})$. C'est ce dernier groupe que nous avons défini au chapitre II § 3 $b\beta$ que nous prendrons comme *modèle* des hyperfonctions de Sato.

Nous savons alors qu'il existe une suite exacte

$$\ldots \to H^{n-1}(\mathfrak{U};\mathcal{O}) \to H^{n-1}(\mathfrak{U}';\mathcal{O}) \xrightarrow{\partial} H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}';\mathcal{O}) \to H^n(\mathfrak{U};\mathcal{O}) \to \ldots$$

et pour $n \geqslant 1$ on a (conséquence du théorème I a) chapitre II comme nous le verrons) $H^{n-1}(\mathfrak{U};\mathcal{O})=H^n(\mathfrak{U};\mathcal{O})=0$, d'où la suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to H^{n-1}(\mathfrak{U}';\mathcal{O}) \xrightarrow{\partial} H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}';\mathcal{O}) \to 0$$

Dans le cas de la dimension $n>1$ l'opérateur du cobord ∂ est donc un isomorphisme. La notion de valeur au bord, généralisation naturelle de la notion formelle de valeur au bord qu'introduit Sato, est donc celle-ci. Soit $\varphi_{i'_0 \ldots i'_{n-1}}$ un $(n-1)$ cocycle à valeurs dans $\mathcal{O}$ du recouvrement $\mathfrak{U}'$ de $\Omega-\Theta$. Sa «valeur au bord» est l'élément du groupe $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}';\mathcal{O})$ image de la classe de ce cocycle par ∂ (plus précisément du «groupe» défini par le système d'axiomes de la cohomologie à support dont $H^n(\mathfrak{U} \bmod \mathfrak{U}';\mathcal{O})$ n'est qu'un modèle). Par exemple, prenons pour $\mathfrak{U}'$ un recouvrement de $(\Omega-\Theta)$ par des convexes Ω_α et ajoutons pour obtenir $\mathfrak{U}$

l'ouvert $\Omega_0=\Omega$. Le cocycle $\varphi_{\alpha_0\ldots\alpha_{n-1}}$ peut être remonté, de façon arbitraire, en une $(n-1)$ cochaîne du recouvrement $\mathcal{U}$. On se donne donc les $\varphi_{0,\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}$ fonctions holomorphes sur $\Omega_{\alpha_1}\cap\ldots\cap\Omega_{\alpha_{n-1}}$ arbitrairement. Puis on forme le cobord de Čech. Pour tout système $(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ (les α_i supposés ordonnés et $0<\alpha_j$ pour tout j) où $\alpha_0\neq 0$, on a $(\delta\varphi)_{\alpha_0\ldots\alpha_n}=0$ puisque φ est un cocycle et il vient:

$$(\delta\varphi)_{(0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \sum_{h=0}^{n}(-1)^h\varphi_{0,\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_n,\ldots,\alpha_n}+\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

La classe de cohomologie de ce n-cocycle relatif est la valeur au bord du cocycle de départ, donc $(\delta\varphi)_{(0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}=0$ signifie qu'il existe des

$\theta_{(0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}$ fonctions holomorphes dans les $\Omega_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}}=\Omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}}$

telles que:

$$\sum_{h=0}^{n}(-1)^h\theta_{0,\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_h,\ldots,\alpha_n}=\sum_{h=0}^{n}(-1)^h\varphi_{0,\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_h,\ldots,\alpha_n}+\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

d'où

$$\sum_{h=0}^{n}(-1)^h(\theta_{0,\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_h\ldots\alpha_n}-\varphi_{0,\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_h,\ldots\alpha_n})=\varphi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

C'est à dire que le cocycle de départ est un *cobord* de $\mathcal{U}'$. Nous l'avions déjà vu dans la formule (1) mais qui disait plus: ce fait ne dépend pas du recouvrement $\mathcal{U}$. Dorénavant *nous dirons que la valeur au bord formelle de $\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ est nulle si ce cocycle est un cobord relativement à $\mathcal{U}'$* (pour $n\geqslant 1$).

3. Définition de la valeur au bord d'un cocycle localement à croissance lente

a) Nous considérons un voisinage complexe convexe Ω de Θ convexe de E, de la forme $\Theta\times i\Theta'$ et un recouvrement convexe, pour l'instant fini $\Omega_0,\ldots,\Omega_r$ du complémentaire de Θ dans Ω, formé d'ouverts $\Theta\times i\Theta_h$. Nous désignons par $\mathcal{U}$ ce recouvrement. La donnée d'un $(n-1)$-cocycle à valeurs dans $\mathcal{O}$ de $\mathcal{U}$ est la donnée pour chaque système d'indices $(i_0,\ldots,i_{n-1})$ tel que $\Omega_{i_0} \cap \Omega_{i_1} \cap \ldots \cap \Omega_{i_{n-1}} = \Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}} \neq \emptyset$ d'une fonction holomorphe $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ définie dans $\Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}}$, donnée dépendant de façon alternée de l'ensemble des indices. Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que *chaque* $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ *est localement à croissance lente.* Alors d'après le § 1 on sait qu'on peut définir une valeur au bord $T_{i_0 \ldots i_{n-1}}(x)$ au sens usuel par passage à la limite.

Nous allons montrer l'existence de nombres entiers $\alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ qui ne dépendent que du recouvrement et pas du cocycle, tel que, posant

$$\delta\varphi = \sum_{i_0 \ldots i_{n-1}} \alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}} \cdot T_{i_0 \ldots i_{n-1}}(x)$$

l'application $\varphi \rightarrow \delta\varphi$ où $\delta\varphi \in \mathcal{D}'(\Theta)$ définisse dans les cas usuels la valeur au bord et que les théorèmes suivants soient satisfaits.

THÉORÈME 3: *«Edge on the Wedge» Soit* $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ *un cocycle localement à croissance lente (à croissance lente) relativement au recouvrement. Une condition nécessaire (et suffisante) pour que* $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ *soit un cobord localement à croissance lente (à croissance lente) du recouvrement est que* $\delta\varphi = 0$ *si* $n \geqslant 1$.

THÉORÈME 4: *Existence des représentations. Pour tout recouvrement convexe du complémentaire de* Θ *dans* Ω, *l'application* $\varphi \rightarrow \delta\varphi$ *est surjective de l'espace des* $(n-1)$*-cocycles du recouvrement et localement à croissance lente (resp. à croissance lente) sur* $\mathcal{D}'(\Theta)$ *(resp. sur* $\mathcal{S}'(\Theta)$*)*.

On peut énoncer autrement ces théorèmes. Le théorème 3 signifie que le noyau de δ est formé des $(n-1)$-cobord donc que l'application passe au quotient et donne une application de $H^{n-1}_{\gamma\, loc}(\mathcal{U};\mathcal{O})$ dans $\mathcal{D}'$ qui est injective. Le théorème 4 assure qu'elle est surjective. Noter que les coefficients $\alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ ne sont pas univoquement définis par les théorèmes en question, mais qu'on peut ajouter des conditions faisant que l'application δ le soit.

b) *choix des coefficients.* Ce paragraphe peut être omis et le lecteur peut se contenter des considérations de *c* et de celles du chapitre IV.

bα—le cocycle générique: Soit U un ouvert de $\Omega - \Theta$. Considérons le Z-module (*) libre engendré par tous les systèmes d'indices $[i_0,\ldots,i_{n-1}]$. Nous prenons son

(*) Z désigne l'anneau des entiers.

quotient par le sous module engendré par les relations

$$U \cap \Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \Omega_{i_{n-1}} = \emptyset \implies [i_0,\ldots,i_{n-1}] = 0$$

$[i_0,\ldots,i_{n-1}] = (-1)^{\chi(\sigma)}[\sigma i_0,\ldots,\sigma i_{n-1}]$ où $\chi(\sigma)$ désigne la trace de la permutation σ

$$U \cap \Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \Omega_{i_n} = \emptyset \implies \sum_{h=0}^{n} (-1)^h [i_0,\ldots,\hat{i}_h,\ldots,i_n] = 0$$

Nous désignons par $\zeta(U)$ le module ainsi obtenu, et si $U_1 \subset U_2$ il existe un homomorphisme naturel, dit de restriction, de $\zeta(U_2)$ sur $\zeta(U_1)$ car toute relation sur U_2 entraîne la même relation sur U_1 entre les générateurs $[i_0,\ldots,i_{n-1}]$. On vérifie aisément que si des α_i sont dans $\zeta(V_i)$, les V_i formant un recouvrement ouvert de $V \subset \Omega - \Theta$, et si $\alpha_i - \alpha_j = 0$ dans $\zeta(V_i \cap V_j)$ alors il existe α dans $\zeta(V)$ dont la restriction à chaque V_i soit α_i, et cet α est unique. On dit que la donnée des $\big(U \to \zeta(U)\big)$ et des homomorphismes de restriction $\big(U_1 \subset U_2, \zeta(U_2) \to \zeta(U_1)\big)$ définit un faisceau sur Ω, [B] page 10, que nous noterons ζ.

Nous désignons par *cocycle générique* du recouvrement le cocycle à valeurs dans ζ défini par $\Omega_{i_0\ldots i_{n-1}} \to [i_0,\ldots,i_{n-1}]$ où $[i_0\ldots i_{n-1}]$ est considéré dans $\zeta(\Omega_{i_0\ldots i_{n-1}})$.

bβ — la résolution générique: Si U est un ouvert de Ω nous considérons le Z-module $\sum^p(U)$ engendré par les générateurs $\partial\Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{i_p} \cap \Omega_{j_0\ldots j_q}$

avec les relations:

$$U \cap \partial\Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{i_p} \cap \Omega_{j_0\ldots j_q} = \partial\Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{i_p} \cap \Omega_{j'_0\ldots j'_r} \cap U$$

si les deux ensembles sont égaux

$$U \cap \partial\Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{i_p} \cap \Omega_{j_0\ldots j_q} = (-1)^{\chi(\sigma)} \partial\Omega_{\sigma i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{\sigma i_p} \cap \Omega_{j_0\ldots j_q}$$

enfin $\emptyset$ donne 0.

A partir d'ici il faut supposer que les Ω_i sont en position générale dans $\Omega - \Theta$, que $0 \in \partial\Theta_j (\Omega_j = \Theta \times i\Theta_j)$ et que, $\partial\Theta_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Theta_{i_{n-1}}$ est réduit à 0 dans un voisinage de l'origine, pour tout système d'indices distincts $i_0,\ldots,i_{n-1}$. Nous noterons par $\zeta^p(U)$ le module $\sum^p(U) \underset{Z}{\otimes} \zeta(U)$ (*).

(*) A savoir le module engendré par les générateurs indiqués et leurs relations à coefficients dans $\zeta(U)$.

Si $U_1 \subset U_2$ il existe un homomorphisme de restriction de $\zeta^p(U_2)$ à $\zeta^p(U_1)$. L'ensemble de ces données définit un préfaisceau noté ζ^p. Il existe un homomorphisme ∇ de ζ^p dans ζ^{p+1}, c'èst à dire pour tout U une application $\nabla(U)$ de $\zeta^p(U)$ dans $\zeta^{p+1}(U)$ commutant avec les restrictions et définie comme suit.

$$\nabla(\partial\Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{i_p} \cap \Omega_{j_0 \ldots j_q})$$

$$= \partial\Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{i_p} \cap \partial(\Omega_{j_0 \ldots j_p})$$

où $\partial\Omega_{j_0 \ldots j_q} = \sum_h \partial\Omega_{j_h} \cap \Omega_{j_0 \ldots \hat{j}_h \ldots j_q}$; puis prolongement $\zeta(U)$—linéaire. On a $\nabla^2 = 0$ et le noyau, dans chaque U de l'homomorphisme

$$\nabla : \zeta^0(U) \to \zeta^1(U) \quad \text{s'identifie à } \zeta(U).$$

$b\gamma$: *réduction du cocycle générique.*

Le prolongement canonique.

Considérons un générateur de $\zeta^p(U)$ dans un ouvert U, soit:

$$\partial\Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{i_p} \cap \Omega_{j_0 \ldots j_n} \cap U$$

Si U est un ouvert intersection des Ω_i soit $\Omega_{k_0 \ldots k_r}$ on peut définir le prolongement de ce générateur à tout l'espace par

$$\partial\Omega_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Omega_{i_p} \cap \Omega_{j_0 \ldots j_n} \cap \Omega_{k_0 \ldots k_r}$$

Ce prolongement sera dit *canonique.*

Si un élément de $\zeta^p(U)$ est donné soit $\sum \alpha_i \cdot g_i$ où $\alpha_i \in \zeta(U)$, g_i générateur, nous conviendrons de le prolonger par $\sum \alpha_i \cdot \bar{g}_i$ où $\bar{g}_i$ désigne le prolongement canonique de g_i hors de U.

Le support du prolongement canonique est dans U.

On a le

LEMME. *Pour tout $p \geqslant 0$, soit $\xi_{i_0 \ldots i_q}$ un q-cocycle $q \geqslant 1$ du recouvrement des Ω_i à valeurs dans ζ^p, c'est à dire la donnée pour tout système $\Omega_{i_0 \ldots i_q} \neq \emptyset$*

d'un élément $\xi_{i_0\cdots i_q}$ *de* $\zeta^p(\Omega_{i_0\cdots i_q})$ *en sorte que les* $\xi_{i_0\cdots i_q}$ *dépendent de façon alternée de l'ensemble des indices et que* $\sum_h(-1)^h\xi_{i_0\ldots\hat{i}_h\cdots i_{q+1}}=0$ *dans* $\zeta^p(\Omega_{i_0\ldots i_{q+1}})$, *alors il existe des* $\eta_{j_0\cdots j_{q-1}}$ *dans* $\zeta^p(\Omega_{j_0\cdots j_{q-1}})$ *tels que* $\xi_{i_0\cdots i_q}=\sum_k(-1)^k\eta_{i_0\cdots\hat{i}_k\cdots i_q}$. *En outre les* η *sont combinaisons à coefficients entiers de prolongements canoniques des* ξ.

Démonstration. C'est une adaptation du théorème page 118 de [D].

a) Soit d'abord $q=1$ et $\xi_{i,j}$ un cocycle du recouvrement Ω_i. Supposons que J est un sous-ensemble de l'ensemble des indices I sur lequel on a trouvé une solution, c'est à dire qu'on a trouvé des η_i pour tout $i\in J$ en sorte que si $(i,j)\in J\times J$ $\eta_i-\eta_j=\xi_{i,j}$. Soit $\alpha\in I$, $\alpha\notin J$. On définit η', une 0-cochaîne, par $\eta'_i=\eta_i$ si $i\neq\alpha$ $i\in J$, $\eta'_\alpha=\eta_i+\xi_{\alpha_i}$ sur $\Omega_\alpha\cap\Omega_i$, $i\in J$.

Alors sur $\Omega_\alpha\cap\Omega_i\cap\Omega_j$ il vient $\eta_i+\xi_{\alpha_i}=\eta_j+\xi_{\alpha_j}$.

Donc on obtient un élément η bien défini sur

$$\bigcup_{i\in J}\Omega_\alpha\cap\Omega_i=\omega_\alpha$$

Je dis qu'on peut prolonger η à Ω_α.

En effet on peut écrire, dans $\zeta^p(\omega_\alpha)$

$$\eta=\sum_i\eta\cap\Omega_i-\sum_{i\neq j}\eta\cap\Omega_{i,j}+\sum_{i\neq j\neq k}\eta\cap\Omega_{i,j,k}-\cdots\cdots\cdots$$

et chacun des termes de cette somme *finie* se prolonge canoniquement à Ω_α. Donc on obtient ainsi η_α. Le résultat s'ensuit par récurrence.

b) $q>1$. On suppose le théorème vrai si q est remplacé par $q-1$ et $\Omega-\Theta$ remplacé par toute réunion finie d'intersections des Ω_j, le recouvrement étant un recouvrement par des intersections finies des Ω_j (il est clair que a) est vrai dans ces hypothèses). Soit alors $\xi_{i_0\cdots i_q}$ un q-cocycle et J un sous-ensemble de I tel qu'il existe une $(q-1)$-cochaîne $\eta_{j_0\cdots j_{q-1}}$ avec $(\delta\eta)_{i_0\cdots i_q}=\xi_{i_0\cdots i_q}$ pour $(i_0,\ldots,i_q)\in J^{q+1}$.

Soit $\alpha \in I$, et $\alpha \notin J$. Pour tout système d'indices $(i_0, \ldots, i_{q-2}) \in J^{q-1}$ on détermine $\eta'_{i_0 \ldots i_{q-2}\alpha}$ élément de $\zeta^p(\Omega_{i_0 \ldots i_{q-2}\alpha})$ tel que

$$\xi_{i_0 \ldots i_{q-1}\alpha} = \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \eta'_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{q-1}\alpha} + (-1)^q \eta_{i_0 \ldots i_{q-1}} \quad \text{sur } \Omega_{i_0 \ldots i_{q-1}\alpha}$$

C'est possible car

$$\xi'_{i_0 \ldots i_{q-1}} = \xi_{i_0 \ldots i_{q-1}\alpha} + (-1)^{q-1} \eta_{i_0 \ldots i_{q-1}}$$

est un cocycle du recouvrement $(\Omega_\alpha \cap \Omega_i)$ sur l'espace $\bigcup_{i \in J} (\Omega_\alpha \cap \Omega_i)$. On applique l'hypothèse inductive.

On définit le prolongement de $\eta_{i_0 \ldots i_{q-1}}$ à $J \cup \{\alpha\}$

en posant $\eta_{i_0 \ldots i_{q-2}\alpha} = \eta'_{i_0 \ldots i_{q-2}\alpha}$ pour $i_0 < \ldots < i_{q-2} < \alpha$ et en ajoutant la condition qu'elle est alternée.

On peut commencer, car si $i_0 \ldots i_q$ sont $(q+1)$ indices, tels que $\xi_{i_0 \ldots i_q} \neq 0$ on posera

$$\eta_{i_0 \ldots i_{q-1}} = \xi_{i_0 \ldots i_q} \cap \Omega_{i_0 \ldots i_q} \quad \text{dans } \zeta^p(\Omega_{i_0 \ldots i_{q-1}}),$$

puis $\eta_{i_0 \ldots \hat{i}_h \ldots i_q} = 0$. Donc le résultat s'ensuit par récurrence.

Réduction du cocycle. On identifie $[i_0 \ldots i_{n-1}]$ à $\Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}} [i_0 \ldots i_{n-1}]$

dans $\zeta^0(\Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}})$. Il existe alors des $\eta_{j_0 \ldots j_{n-2}} \in \zeta^0(\Omega_{j_0 \ldots j_{p-2}})$ tels que $(\partial \eta)_{i_0 \ldots i_{n-1}} = \Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}} \cdot [i_0 \ldots i_{n-1}]$ dans $\zeta^0(\Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}})$.

On forme $(\nabla \eta)_{j_0 \ldots j_{n-2}} = \xi_{j_0 \ldots j_{n-2}}$. Ce qui donne vu que $\partial(\Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}}) = 0$ dans $\zeta^0(\Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}})$, un $(n-2)$ cocycle du recouvrement de $\Omega - \Theta$ par les Ω_i à valeurs dans ζ^1. Il existe alors des

$$\eta_{j_0 \ldots j_{n-3}} \in \zeta^1(\Omega_{j_0 \ldots j_{n-3}}) \quad \text{tels que } (\partial \eta)_{j_0 \ldots j_{n-2}} = \xi_{j_0 \ldots j_{n-2}}$$

on forme $\nabla \eta_{j_0 \ldots j_{n-3}} = \xi_{j_0 \ldots j_{n-3}}$, et $\xi_{j_0 \ldots j_{n-3}} \in \zeta^2(\Omega_{j_0 \ldots j_{n-3}})$ est un $(n-3)$ — cocycle du recouvrement de $\Omega - \Theta$ par les Ω_i à valeurs dans ζ^2, etc.. Finalement on obtient un 0-cocycle ξ_i à valeurs dans $\zeta^{n-1}(U_i)$ d'où un élément de $\zeta^{n-1}(\Omega-\Theta)$ qui sera de la forme:

$$\xi^1 = \sum_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}} \beta_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}} [i_0 \dots i_{n-1}] \, \partial\Omega_{i_0} \cap \dots \cap \widehat{\partial\Omega_{i_h}} \cap \dots \cap \partial\Omega_{i_{n-1}}$$

on effectue le prolongement canonique $\bar{\xi}^1$ de cet élément à Ω et on forme

$$\nabla\bar{\xi}^1 = \sum \alpha'_{i_0 \dots i_{n-1}} [i_0 \dots i_{n-1}] \, \partial\Omega_{i_0} \cap \dots \cap \partial\Omega_{i_{n-1}} \, .$$

Ayant choisi une orientation de Θ, cet élément dans $\zeta^n(\Omega)$ est concentré dans Θ, et on prend le signe $+$ si $\partial\Omega_{i_0} \cap \dots \cap \partial\Omega_{i_{n-1}}$ est égal à Θ le signe — dans l'autre cas d'où finalement $\nabla\bar{\xi}^1 = \sum \alpha_{i_0 \dots i_{n-1}} [i_0 \dots i_{n-1}] \, . \, \Theta$.

La valeur au bord du cocycle

$$\varphi_{i_0 \dots i_{n-1}} \qquad \text{sera} \quad \sum \alpha_{i_0 \dots i_{n-1}} \, . \, T_{i_0 \dots i_{n-1}}(x)$$

Exemples: Pour pouvoir faire une figure je vais me placer dans l'espace $\mathbb{C}^2$ dans les cas 1) et 2):

1) recouvrons le complémentaire de 0 par trois demi espaces P_0, P_1, P_2 le cocycle canonique est

$$P_0 \cap P_1 \longrightarrow [0\ 1]$$

$$P_1 \cap P_2 \longrightarrow [1,2]$$

$$P_2 \cap P_3 \longrightarrow [2\ 0]$$

sans relations entre $[0\ 1]$, $[1,2]$, et $[2\ 0]$.

On pose

$$\varphi_0 = (P_0 \cap P_1)[0,1] \, , \, \varphi_1 = 0$$

Pour calculer φ^2 sur $P_0 \cap P_1$ on applique le procédé général

$$\varphi_{2,(0)} \text{ sur } P_0 \cap P_2 \text{ est donné par}$$

$$\varphi_{2(0)} = (P_0 \cap P_1) \, . \, [0,1] - (P_0 \cap P_2)[0,2]$$

$$\varphi_{2(1)} = -(P_1 \cap P_2)[1,2] \quad \text{sur} \quad P_2 \cap P_1$$

d'où

$$\nabla\varphi_0 = P_0 \cap \partial P_1 \, . \, [0,1] \qquad \nabla\varphi_1 = 0$$

$$\nabla\varphi_2 = -\partial P_0 \cap P_2[0,2] - \partial P_1 \cap P_2[1,2]$$

Par recollement, et regroupement on trouve

$$\alpha_{0,1} \quad , \quad \text{coefficient de } \partial P_0 \cap \partial P_1[0,1] = 1$$

$$\alpha_{1,2} \quad , \quad \text{coefficient de } \partial P_1 \cap \partial P_2[1,2] = 1$$

$$\alpha_{2,0} \quad , \quad \text{coefficient de } \partial P_2 \cap \partial P_0[2,0] = 1$$

d'où $\delta\varphi = T_{0,1} + T_{1,2} + T_{2,0}$.

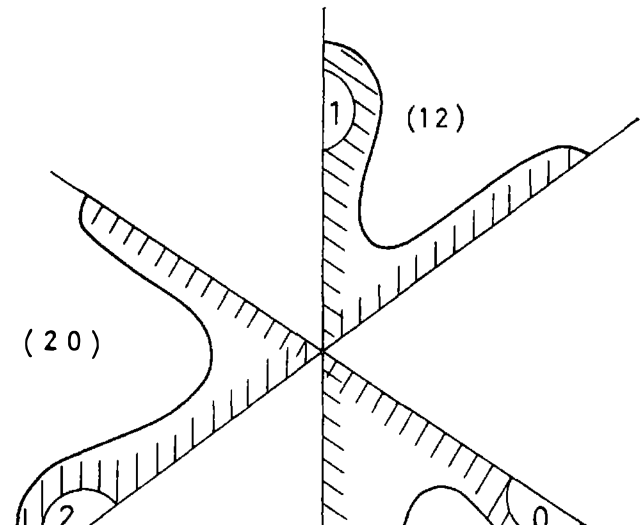

FIGURE 2

2) On considère le cas décrit par la figure 3 en négligeant ce qui se passe hors de l'ouvert 0, ce qui est possible. Les générateurs sont

$$[0\ 1]\ ,\ [1\ 2]\ ,\ [2\ 0] \qquad \text{avec la relation} \quad [0\ 1]+[1\ 2]+[2\ 0]=0$$

on a

$$\varphi_0=(P_0 \cap P_1)[0,1]\ ,\ \varphi_1=0$$

$$\varphi_{2(0)}=\varphi_0-\varphi_{0,2}=(P_0 \cap P_1)[0,1]-(P_0 \cap P_2)\,.\,[0,2] \quad \text{dans} \quad \zeta^0(P_0 \cap P_2)$$

$$\varphi_{2(1)}=\varphi_1-\varphi_{1,2}=-(P_1 \cap P_2)[1,2] \quad \text{dans} \quad \zeta_0(P_1 \cap P_2)\,.$$

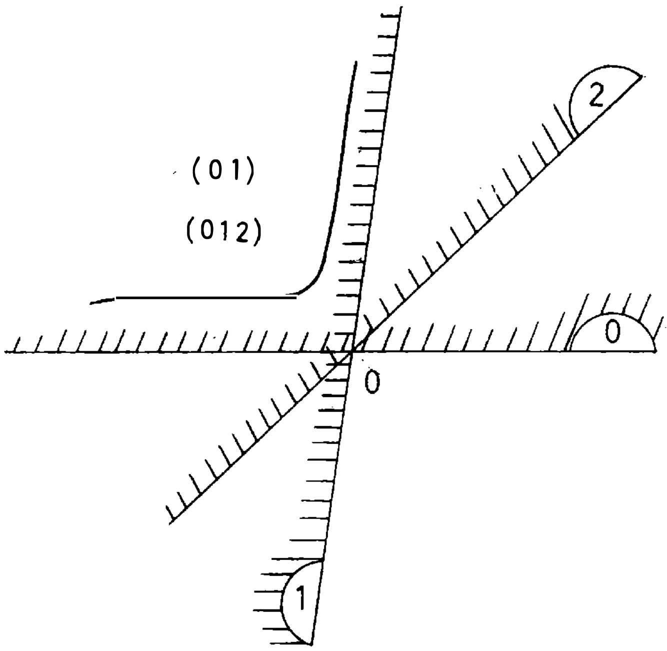

FIGURE 3

Sur $P_0 \cap P_1 \cap P_2$ on a $\varphi_{2,(0)}=+(P_0 \cap P_1 \cap P_2)[0,1]-(P_0 \cap P_1 \cap P_2)[0,2]$

$$\varphi_{2,(1)}=-(P_0 \cap P_1 \cap P_2)[1,2]$$

d'où grâce à la relation, $\varphi_{2(0)}=\varphi_{2(1)}$. On peut recoller.

On obtient:

$$\nabla\varphi_0=P_0 \cap \partial P_1\,.\,[0,1] \quad , \quad \nabla\varphi_2=P_0 \cap \partial P_1[0\ 1]$$

donc, par recollement, il vient:

$\alpha_{0,1} =$ coefficient de $\partial P_0 \cap \partial P_1[0,1] = 1$ soit:

$$\delta\varphi = T_{0,1}(x)$$

3) On vérifie aisément que si on recouvre $\Omega - \Theta$ par les ouverts $y_j \gtrless P_{\pm j}$, posant $\varepsilon_j = \pm 1$, et si $\varphi_{\varepsilon_1 \,.\, 1, \varepsilon_2 . 2, \ldots, \varepsilon_n n}$ est un $(n-1)$ cocycle donné sur les intersections n à n de ces demi-espaces, la valeur au bord est

$$\sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)} \varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n T_{\varepsilon_1 . 1, \ldots, \varepsilon_n \,.\, n}(x) \;;$$

on a dans ce cas 2^n composantes.

4) Il est toujours possible de recouvrir le complémentaire de Θ dans Ω par les traces de $(n+1)$ demi-espaces (comme en 1) mais pas mieux. Alors, si $P_0, \ldots, P_n$ sont ces $(n+1)$ — demi espaces et si $\varphi_{0 \ldots \hat{h} \ldots n}$ est un système de $(n+1)$ fonctions holomorphes dépendant de façon alternée de l'ensemble des indices on trouve, supposant que $(0, \ldots, n-1)$, $(1,2, \ldots, n)$, $(2\ 3, \ldots, n, 0)$, ... sont orientés dans le sens choisi que

$$\delta\varphi = \sum_{h=0}^{n+1} (-1)^h T_{0 \ldots \hat{h} \ldots n}(x) \;;$$

on a dans ce cas $(n+1)$ composantes.

c) *indications sur les démonstrations des théorèmes 3 et 4.*

Nous indiquons dans ce qui suit la marche dans le cas de $\mathcal{D}'$, le cas de $\mathcal{S}'$ en résulte.

α — Désignons par π l'opération de passage au quotient de

$$Z_{\gamma\, loc}(\mathcal{U}; \mathcal{O}) \quad \text{sur} \quad H^{n-1}_{\gamma\, loc}\mathcal{U}(; \mathcal{O}) \ (*)$$

Nous montrerons qu'il existe un isomorphisme (de Leray) λ entre

$$H^{n-1}_{\gamma\, loc}(\mathcal{U}; \mathcal{O}) \quad \text{et} \quad H^{n-1}_{\gamma\, loc}(\Omega - \Theta; \mathcal{O})$$

(*) Pour les notations je renvoie à Chap. II, § 3.

β — d'après chap. II § 3 $b\gamma$ il existe une suite exacte

$$\longrightarrow H^{n-1}(\Omega;\mathcal{O}) \longrightarrow H^{n-1}_{\gamma\, loc}(\Omega-\Theta;\mathcal{O}) \xrightarrow{\partial} H^{n}_{\mathcal{D}';\Theta}(\Omega;\mathcal{O}) \longrightarrow H^{n}(\Omega;\mathcal{O})$$

Mais les deux termes extrêmes sont nuls lorsque $n>1$. Il s'en suit que ∂ est un isomorphisme de $H^{n-1}_{\gamma\, loc}(\Omega-\Theta;\mathcal{O})$ sur $H^{n}_{\mathcal{D}';\Theta}(\Omega;\mathcal{O})$. Enfin il existe un isomorphisme ρ (Théorème 1 de ce chapitre) de $H^{n}_{\mathcal{D}';\Theta}(\Omega;\mathcal{O})$ sur $\mathcal{D}'$.

γ — On a la formule $\boxed{\left(\frac{i}{2}\right)^n \delta = \rho\circ\partial\circ\lambda\circ\pi}$

Cette formule demande quelques explications. Dans le cas où le recouvrement est suffisamment simple, nous savons définir δ et alors on a l'identité établie ici, ce qui permet de résoudre les problèmes classiques de représentation d'une distribution comme bord d'un système de fonctions holomorphes. Dans le cas général seul le membre de droite a un sens clair et c'est lui qu'il conviendrait de prendre comme définition de δ.

d — *justification de la dénomination du théorème 3.*

On se donne un cône ouvert (épointé) Γ dans E de sommet 0. Soit Ω un voisinage convexe de Θ dans $E\times iE$ et $f^+(z)$ une fonction holomorphe dans $(\Theta\times i\Gamma)\cap\Omega$. Si elle est localement à croissance lente au voisinage de Θ elle admet une valeur au bord dans $\mathcal{D}'$ définie par $\lim\limits_{\substack{M\to 0\\ M\in\Gamma}} f(x+iM)$.

L'énoncé classique du théorème du «Edge on the Wedge» [4], [6] est le suivant:

Théorème: *Γ étant convexe f^+ définie dans $(\Theta\times i\Gamma)\cap\Omega$, f^- dans $(\Theta\times -i\Gamma)\cap\Omega$ admettant une valeur au bord, si les valeurs au bord de f^+ et de f^- sont égales ces deux fonctions se prolongent analytiquement au voisinage de Θ et f^- est un prolongement analytique de f^+.*

On peut toujours, par un changement de coordonnées supposer que Γ contient le cône, $y_1>0,\ldots,y_n>0$. On recouvre le complémentaire de Θ dans Ω par les traces des demi-espaces $P_{\pm j}$, $P_k=\{z\,|\,y_k>0\}$, $P_{-k}=\{z\,|\,y_k<0\}$.

Alors f^+ est définie dans $P_{1,2,\ldots,n} \cap \Omega$ et f^- dans $P_{-1,-2,\ldots,-n} \cap \Omega$. Le théorème 3 dit que si f^+ et f^- ont même valeur au bord le cocycle

$$P_{1,\ldots,n} \to f^+ \ , \ P_{-1,-2,\ldots,-n} \to (-1)^{n+1} f^- \ , \ P_{i_0 \cdots i_{n-1}} \to 0$$

(dans les autres cas), est un cobord, cobord localement à croissance lente d'ailleurs. La valeur au bord formelle (i. e. au sens de Sato) est nulle si précisément le cocycle est un cobord.

Nous allons montrer: si un cocycle $P_{1,\ldots,n} \cap \Omega \to f^+$ $P_{-1,\ldots,-n} \to f^-$ est un cobord alors f^+ et f^- se prolongent analytiquement au voisinage de l'origine et $(-1)^{n+1} f^-$ est un prolongement analytique de f^+.

Pour les commodités des récurrences nous démontrerons le résultat suivant:

Proposition 3: *Soit Ω un voisinage convexe de 0 dans $\mathbb{C}^l$, de trace Θ sur $\mathbb{R}^l$, et U un voisinage ouvert de $\mathbb{C}^m$. On considère le recouvrement de* $(\Omega - \Theta) \times U$ *défini par les ouverts $P_{\pm j} \times U$ où $P_j = \{ z \mid y_j > 0 \}$, $P_{-j} = \{ z \mid y_j < 0 \}$. On considère un $(l-1)$—cocycle à valeurs holomorphes de ce recouvrement, de la forme suivante: $\varphi_{\pm 1, \pm 2, \ldots \pm l} = 0$ sauf éventuellement $\varphi_{1,2,\ldots,l}$ et $\varphi_{-1,-2,\ldots,-l}$. Alors les deux fonctions $\varphi_{1,\ldots,l}$ et $\varphi_{-1,\ldots,-l}$ se prolongent analytiquement au voisinage de Θ dans $\Omega \times U$ et $(-1)^{l+1} \varphi_{-1,\ldots,-l}$ est un prolongement analytique de $\varphi_{1,\ldots,l}$.*

Démonstration:

a) *Cas de deux variables* $l=2$ mais m quelconque.

$$f_{1,2} = g_1 - g_2$$
$$f_{2,-1} = 0 = g_2 - g_{-1}$$
$$f_{1,-2} = 0 = g_1 - g_{-2}$$
$$f_{-1,-2} = g_{-1} - g_{-2}$$

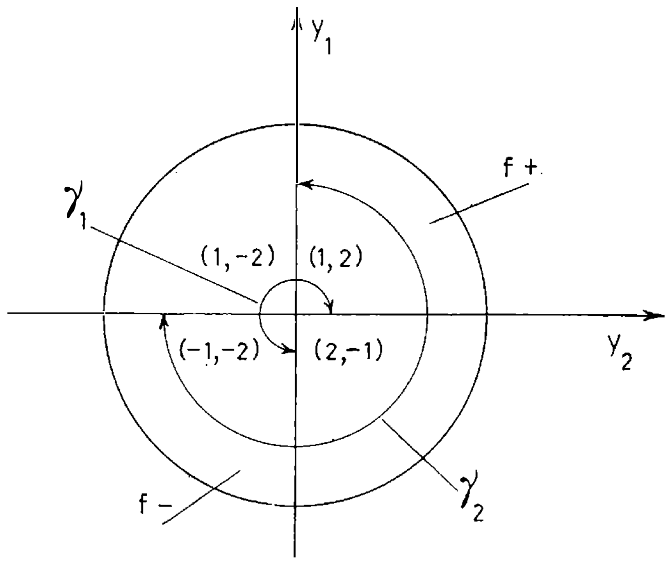

Figure 4

La fonction g_2 est prolongement analytique de la fonction g_{-1}.

Si nous désignons par γ_2 la fonction ainsi définie sur $[(P_{-1} \cup P_2) \times U] \cap \Omega$, lui appliquant le théorème des polydisques (Chapitre II § 2 a), on voit que la fonction γ_2 se prolonge analytiquement au voisinage de Θ; de même g_1 et g_{-2} définissent une fonction γ_1 sur $P_1 \cup P_{-2}$ qui se prolonge analytiquement au voisinage de Θ donc $f_{1,2} = \gamma_1 - \gamma_2$ se prolonge analytiquement au voisinage de l'origine par cette formule, et $f_{-1,-2}=\gamma_2-\gamma_1$ aussi, ce qui montre que $f_{1,2}$ et $f_{-1,-2}$ sont prolongement analytique l'une de l'autre C. q. f. d.

Le théorème d'Epstein [6] se démontrerait de façon toute analogue,

b) *Cas général.* Nous avons besoin en lemme de la propriété suivante qui sera démontrée au chapitre IV.

LEMME: *Soit Ω un cube $|x_j|<A_j$, $|y_j|<B_j$ dans $\mathbb{C}^l$, U un ouvert de $\mathbb{C}^m$. On considère l'ouvert $\bigcup_{j=1}^{n}(P_{-j}\cap\Omega)\times U$ qu'on recouvre par le recouvrement $\mathcal{U}$ formé des ouverts $(P_{-j}\cap\Omega)\times U$. Alors il existe A'_j, B'_j ne dépendant que des A_j, B_j tels que, si φ est un k-cocycle du recouvrement $\mathcal{U}$, avec $k\neq 0, (l-1)$, la restriction de φ à $\mathcal{U}\cap(\Omega'\times U)$ est un cobord. (Si φ est un k-cocycle (localement) à croissance lente sa restriction à $\mathcal{U}\cap(\Omega'\times U)$ est un cobord (localement) à croissance lente). Si $A_j, B_j=+\infty$, $A'_j, B'_j=+\infty$.*

Pour démontrer la proposition 3 il suffit de la démontrer au voisinage de chaque point du réel donc il suffit de supposer que Ω est un cube.

Nous faisons maintenant l'hypothèse de récurrence suivante:

la proposition 3 est vraie jusqu'à $(l-1)$ (et pour tout m, U).

Cette hypothèse est vraie pour $l=2$. Soit donc $\varphi_{j_0\cdots j_{n-2}}$ une cochaîne de cobord $\varphi_{1,\ldots,l}$ et $\varphi_{-1,\ldots,-l}$. Nos hypothèses signifient:

$$\varphi_{1,\ldots,l}=\sum_{h=1}^{l}(-1)^{h+1}\varphi_{1,\ldots,\hat{h},\ldots l}\ ,\ \varphi_{-1,\ldots,-l}=\sum_{k=1}^{l}(-1)^{k+1}\varphi_{-1,\ldots,-\hat{k},\ldots,-l}$$

$$0=\sum_{g=0}^{l-1}(-1)^{g}\varphi_{j_0\cdots\hat{j}_g\cdots j_{l-1}}\qquad \text{si } (j_0\cdots j_g\cdots j_{l-1}) \text{ diffère de } (\varepsilon 1,\ldots,\varepsilon l)\ \ \varepsilon=\pm 1\,.$$

Admettons pour l'instant qu'il soit possible après restriction Ω' du cube de modifier la cochaîne $\varphi_{j_0\cdots j_{l-2}}$ en sorte que toutes les composantes telles que $|j_{l-2}|\neq l$ soient nulles. Après une telle modification il vient, en particulier

$$\sum_{h=0}^{n-2}(-1)^{h}\varphi_{j_0\cdots\hat{j}_h\cdots j_{l-3},l}=0$$

Alors considérons l'espace:

$$\left[[\mathbb{C}^{l-1} \times \{z_l | y_l > 0\}] \cap \Omega'\right] \times U = \Omega^+$$

les deux fonctions $\psi^+_{1,\ldots,l-1} = \varphi_{1,\ldots,l} + (-1)^l \varphi_{1,\ldots,(l-1),\hat{l}}$

$$\psi^+_{-1,\ldots,-(l-1)} = (-1)^l \varphi_{-1,\ldots,-(l-1),\hat{l}}$$

donnent dans cet espace un $(l-2)$ — cocycle du recouvrement par les $P_{\pm j} \cap \Omega'^+, j < n$, cobord des $\psi_{j_0 \ldots \hat{j}_h \ldots j_{l-3}} = \varphi_{j_0 \ldots \hat{j}_h \ldots j_{l-3}, l}$.

Donc, par l'hypothèse de récurrence $\psi^+_{1,\ldots,l-1}$ et $(-1)^l \psi^+_{-1,\ldots,-(l-1)}$ sont prolongement analytique l'un de l'autre au voisinage de $\Theta \cap \mathbb{C}^{l-1}$ dans Ω'^+ il en est de même dans Ω^-.

Examinons le cas de $\varphi_{1,\ldots,\hat{l}}$. Cette fonction se prolonge dans P_{-l} au voisinage de l'origine, mais alors, comme elle est holomorphe dans $P_1 \cap \ldots \cap P_{l-1}$, ou voit immédiatement par utilisation itérée du théorème des polydisques qu'elle se prolonge au voisinage de l'origine dans $(\mathbb{C}^l \cap \Omega') \times U$. Donc, comme $\varphi_{1,\ldots,l} + (-1)^l \varphi_{1,\ldots,\hat{l}}$ se prolonge au dessus de l'hyperplan réel $y_n = 0$, $\varphi_{1,\ldots,l}$ elle même se prolonge au dessus de cet hyperplan. Ceci ayant lieu par tout l, la fonction $\varphi_{1,\ldots,l}$ se prolonge au voisinage de l'origine dans le complémentaire de $P_{-1,\ldots,-n}$, donc finalement au voisinage de l'origine en utilisant à nouveau le théorème des polydisques.

Enfin on a les égalités:

$$\varphi_{1,\ldots,l} + (-1)^l \varphi_{1,\ldots,\hat{l}} = \varphi_{-1,\ldots,-\hat{l}}$$

$$\varphi_{-1,\ldots,-l} + (-1)^l \varphi_{-1,\ldots,-\hat{l}} = \varphi_{1,\ldots,\hat{l}}$$

d'où $\varphi_{1,\ldots,l} = \varphi_{-1,\ldots,-\hat{l}} + (-1)^{l+1} \varphi_{1,\ldots,\hat{l}} = (-1)^{l+1} [\varphi_{1,\ldots,\hat{l}} + (-1)^{l+1} \varphi_{-1,\ldots,-\hat{l}}]$

soit: $\varphi_{1,\ldots,l} = (-1)^{l+1} \varphi_{-1,\ldots,-l}$, ce qui achève la récurrence sous réserve d'avoir montré la possibilité de la modification.

Soit $\sigma = (i_0, \ldots, n)$ un multi indice différent de $(1,2,\ldots,n)$.

On a: $\sum \pm \varphi_{i_0,\ldots,\hat{i}_h,\ldots,n} = 0$ (*)

(*) Nous noterons le cobord de cette façon ambigue, dans ce qui suit.

Considérons l'ouvert:

$$\left[\left(\bigcup_{j\in\sigma} P_j\right)\cap\Omega\right]\times U=\Omega_\sigma$$

les $\varphi_{j_0\ldots j_{l-2}}$ forment un $(l-2)$—cocycle du recouvrement de Ω_σ par les $(P_j\cap\Omega)\times U$ et on peut appliquer le lemme, donc on peut trouver une $(l-3)$ cochaîne $\varphi^\sigma_{\ldots\hat{i}_h\ldots\hat{i}_k\ldots}$ telle que

$$\sum_k \pm\varphi^\sigma_{,\ldots,\hat{i}_h,\ldots,\hat{i}_k}=\varphi_{i_0,\ldots,\hat{i}_h,\ldots,n}$$

après restriction de Ω à Ω^σ. Si on retranche à la $(l-2)$ cochaîne des $\varphi_{j_0,\ldots,j_{l-2}}$ le cobord de cette cochaîne prolongée par 0, on aura une nouvelle $(l-2)$—cochaîne telle que tous les $\varphi_{i_0\ldots\hat{i}_h\ldots n}$ soient nuls. En fait nous exigeons seulement $\varphi_{i_0\ldots\hat{n}}=0$. On suppose que, pour une partie P de l'ensemble des indices, on a pu trouver une restriction Ω^P de Ω, des $\varphi_{i_0\ldots\hat{i}_h\ldots\hat{n}}$ tels que,

$$\rho\in P \quad\text{entraîne}\quad \sum_h \pm\varphi_{\ldots\hat{i}_h\ldots\hat{n}}=0 \qquad \rho=(i_0\ldots i_h\ldots n)$$

et tels que, pour tout $\sigma\in P$, on puisse trouver des φ^σ tels que

$$\varphi_{\ldots\hat{i}_h\ldots n}=\sum_h \pm\varphi^\sigma_{\ldots\hat{i}_h\ldots\hat{i}_k\ldots} \qquad \text{où}\quad \varphi^\sigma_{\ldots\hat{i}_h\ldots\hat{n}}=\varphi_{\ldots\hat{i}_h\ldots\hat{n}}$$

sur $\Omega^P\cap\mathcal{U}$.

Soit σ un indice n'appartenant pas à P; il nous faut montrer qu'il est possible de prolonger ces données à σ. Désignant par $(j_0,\ldots,j_{n-2},n)$ cet indice, nous admettons que pour tout $h=1,2,\ldots,k$ $(j_0,\ldots,\hat{j}_h,\ldots,n)=(j_0,\ldots,-\hat{j}_h,\ldots,n)$ avec $(j_0,\ldots,-j_h,\ldots,n)\in P$.

Nous noterons par σ_h l'indice de P ainsi associé.

D'après notre hypothèse on a:

$$\varphi_{j_0\ldots\hat{j}_1\ldots n}=\sum_k \pm\varphi^{\sigma_1}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_k\ldots}=\sum_k \pm\varphi^\sigma_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_k\ldots}$$

C'est à dire que, il existe grâce au lemme une restriction du cube et $\varphi^{\sigma,\sigma_1}$ tel que

(1) $$\varphi^{\sigma}-\varphi^{\sigma_1}=\delta\varphi^{\sigma,\sigma_1} \quad \text{où} \quad \varphi^{\sigma,\sigma_1}=\varphi_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_k\ldots\hat{j}_l\ldots}$$

pourvu que $\varphi^{\sigma}-\varphi^{\sigma_1}$ soit un 1-cocycle au moins et un $(\lambda-2)$—cocycle relativement à la dimension $\mathbb{C}^{\lambda}$.

Sur cette restriction du cube on peut donc modifier φ^{σ} en sorte que

$$(\delta\varphi^{\sigma,\sigma_1})_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{n}}=0\,, \quad \text{c'est à dire que } \varphi^{\sigma}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{n}}=\varphi^{\sigma_1}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{n}}=\varphi_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{n}}$$

Alors, appliquant encore le lemme, il viendra:

(2) $$\varphi^{\sigma,\sigma_1}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{h}\ldots\hat{n}}=\delta\varphi^{(\sigma,\sigma_1,1)}$$ au prix d'une nouvelle restriction.

De même on peut modifier φ^{σ} en sorte que $(\delta\varphi^{\sigma,\sigma_2})_{\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{n}}=0$, soit alors sur la restriction associée

(2′) $$\varphi^{\sigma,\sigma_2}_{\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{h}\ldots\hat{n}}=\delta\varphi^{(\sigma,\sigma_2,2)}$$

Ces deux cochaînes *interfèrent* par leurs composantes $\varphi^{\sigma,\sigma_1}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{n}}$ et $\varphi^{\sigma,\sigma_2}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{n}}$ pour les modifications en cours. Donc, ajoutant à $\varphi^{\sigma,\sigma_2}$ le cobord

$$\delta(\varphi^{\sigma,\sigma_2,2}-\varphi^{\sigma,\sigma_1,1})=\delta\varphi^{(\sigma,\sigma_1,\sigma_2)}$$

on trouvera que $\varphi^{\sigma,\sigma_1}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{n}}=\varphi^{\sigma,\sigma_2}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{n}}$ ce qui permettra de faire les deux modifications simultanément, et:

(3) $$\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{h}\ldots\hat{n}}=\delta\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2,1}$$

grâce au lemme, au prix d'une nouvelle restriction, puisque $\delta\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{n}}=0$. On recommence avec l'indice j_3 et de la même façon on peut trouver

$$\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2}\quad,\quad\varphi^{\sigma,\sigma_2,\sigma_3}$$

permettant le prolongement.

Mais il viendra $$\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_3\ldots\hat{h}\ldots\ldots\hat{n}}=\delta\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_3,1}$$

$$\varphi^{\sigma,\sigma_2,\sigma_3}_{\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{j}_3\ldots\hat{h}\ldots\hat{n}}=\delta\varphi^{\sigma,\sigma_2,\sigma_3,2}$$

au prix d'une nouvelle restriction. Et en ajoutant à $\varphi^{\sigma,\sigma_2,\sigma_3}$ le cobord de $\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_3,1} - \varphi^{\sigma,\sigma_2,\sigma_3,2} = \varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}$ on pourra faire en sorte que

$$\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_3}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{j}_3\ldots\hat{n}} = \varphi^{\sigma,\sigma_2\sigma_3}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{j}_3\ldots\hat{n}}$$

et la cochaîne correctrice satisfera à

$$\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}_{\ldots\hat{j}_1\ldots\hat{j}_2\ldots\hat{j}_3\ldots\hat{n}} = \delta\varphi^{\sigma,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,1} \tag{4}$$

après une nouvelle restriction d'après le lemme, etc., de proche en proche.

Il faut voir que ce processus est possible, donc qu'en (1), (2), (3), (4),... on peut appliquer le lemme.

D'une part, la dimension λ diminue d'un cran à chaque opération, donc la condition vers le haut va rester satisfaite. D'autre part $\varphi^{\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}$ doit être au moins un 1-cocycle. Il faut donc $k+1<l$ d'où $k<l-1$ ce qui est vrai car nous ne modifions que les φ relatifs aux indices différents de $(1,2,\ldots,\pm l)$ et de $(-1,-2,\ldots,\pm l)$. En conséquence il est possible de prolonger les données à σ, donc la correction est possible. C. q. f. d.

En remarque finale soulignons que l'apparition du signe $(-1)^{l+1}$ est liée au fait que l'application $(y_1,\ldots,y_l)\to(-y_1,\ldots,-y_l)$ change l'orientation de Θ si l est impair, et ne la change pas si l est pair.

Si $f_{1,\ldots,n}$ est défini dans $E\times i\Gamma$ et $f_{-1\ldots-n}$ dans $E\times(-i\Gamma)$ elles sont les restrictions d'une fonction entière.

Soit Ω un convexe, voisinage complexe de Θ, de la forme $\Theta\times i\Omega_0$, et recouvrons le complémentaire de zéro dans E par une famille finie (provisoirement) de demi-espaces P_j, et soit Γ un cône fermé strictement convexe dans E.

Nous disons qu'un cocycle a son support dans $\Theta\times i\overline{\Gamma}$ si $\varphi_{i_0\ldots i_{n-1}}\neq 0$ seulement lorsque $P_{i_0}\cap\ldots\cap P_{i_{n-1}}\cap\Omega_0\subset\overline{\Gamma}$.

Nous désignerons sa valeur au bord par $\delta\varphi$. Je dis que $\delta\varphi=0$ entraîne $\varphi=0$. En effet, ajoutons à notre recouvrement par les P_j, les $P_{-j}=-P_j$ et posons $\varphi_{\ldots-i_h\ldots}=0$. On obtient évidemment encore un cocycle et qui a même valeur au bord que le précédent. D'après le théorème général du Edge on the Wedge il existe des $\psi_{i_0\ldots i_{n-2}}$ tels que

$$\varphi_{i_0\ldots i_{n-1}} = \sum\pm\psi_{i_0\ldots\hat{i}_h\ldots i_{n-1}}$$

Si on se restreint au sous-ensemble des indices $i_0,\ldots,i_{n-1},-i_0,\ldots,-i_{n-1}$, on en déduit d'après la proposition précédente que $\varphi_{i_0\ldots i_{n-1}}=0$.

D'où la

Proposition 4: *Sous les hypothèses géométriques précédentes, l'application* $\varphi\to\delta\varphi$ *est injective.*

Ce chapitre est consacré à la démonstration des théorèmes fondamentaux trois et quatre du chapitre précédent, et à celle des lemmes de ce chapitre que nous n'avions pas encore faite.

Tirant les conséquences analytiques de la méthode suivie nous démontrerons en fait des théorèmes de représentation plus généraux, montrant qu'on peut introduire dans les données et les solutions des «paramètres».

Par exemple le théorème de représentation à une variable est celui-ci (chapitre I): Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si T est une distribution définie sur $\Omega \cap R$, il existe une fonction holomorphe dans $\complement\, R \cap \Omega$, prolongeable à Ω en distribution, dont la valeur au bord est T. Mais la méthode de démonstration utilisée conduit à: si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^p$ et si T est une distribution définie dans $\Omega \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$ il existe une distribution φ définie dans $\complement\, R$ (l'ensemble des points de $\Omega(x_1,y_1,x_2,\ldots,x_p)$ avec $y_1 \neq 0$) prolongeable à Ω, holomorphe en (x_1,y_1) dont la valeur au bord soit T.

Nous énoncerons de façon précise toutes les généralisations de ce type mais nous n'indiquerons pas les modifications à faire aux démonstrations de résultats antérieurs que nous aurons à utiliser laissant ce soin aux lecteurs intéressés et sceptiques

1. L'isomorphisme λ

a — Nous considérons un recouvrement $\mathcal{U}$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n \times U$ où U est un ouvert de R^p par des ouverts Ω_α de la forme $\Theta_\alpha \times U$ et nous faisons l'hypothèse simplificatrice suivante

cas de $\mathcal{D}'$: Pour tout compact K l'ensemble des α tels que $\emptyset \neq K \cap \Omega_\alpha$ est fini.

cas de $\mathcal{S}'$: le recouvrement est fini.

On désignera par F dans la suite, la donnée pour chaque ouvert 0 de $\mathbb{C}^n \times U$ des formes de type (p,q) en $dz_1,\ldots,dz_m,d\bar{z}_1,\ldots,d\bar{z}_m$ avec $m \leqslant n$, à coefficients distributions définis sur 0. C'est un faisceau qu'on appellera de façon générale faisceau de formes distributions. On a alors le lemme suivant dont la version *a)* est bien connue.

LEMME: *Si F est un faisceau de formes différentielles à coefficients distribution sur $\mathbb{C}^n \times U$:*

a) *la cohomologie de Čech de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F est triviale.*

b) *la cohomologie de Čech à croissance localement lente* (*) *de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F est triviale.*

c) *la cohomologie de Čech à croissance lente de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans F est triviale.*

DÉMONSTRATION: Je rappelle tout d'abord la signification de cet énoncé condensé.

On suppose donnée dans toute intersection $\Omega_{i_0 \dots i_k}$ non vide d'ouverts du recouvrement, une forme $\omega_{i_0 \dots i_k}$ du type choisi à coefficients distributions sur $\Omega_{i_0 \dots i_k}$ avec la condition:

$$\sum_h (-1)^h \omega_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{k+1}} = 0$$

dans chaque $\Omega_{i_0 \dots i_{k+1}}$ non vide $\omega_{i_0 \dots i_k}$ dépendant de façon alternée des indices. Alors, pour tout $k \geqslant 1$, on peut trouver des formes distributions $\tilde{\omega}_{j_0 \dots j_{k-1}}$ de même type, à coefficients distributions définis dans les $\Omega_{j_0 \dots j_{k-1}}$ telles que

$$\sum_l (-1)^l \tilde{\omega}_{j_0 \dots \hat{j}_l \dots j_k} = \omega_{j_0 \dots j_k}$$

Dans les cas *b)* et *c)* on ajoute aux données et aux solutions la condition que les ω et les $\tilde{\omega}$ ont leurs coefficients localement à croissance lente (resp: à croissance lente) le procédé de démonstration est classique, [E] page 60, mais doit être reproduit.

α) Il existe des fonctions φ_α indéfiniment dérivables sur $\mathbb{C}^n \times U$ de la forme $\psi_\alpha(z) . 1(u)$, ψ_α ayant son support dans $\Omega_\alpha, \varphi_\alpha \geqslant 0$ telles que: $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$.

(*) Relativement à l'ouvert Ω.

β) Posons $\tilde{\omega}_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}} = (-1)^k \sum_{\alpha} \omega_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}\alpha} \cdot \varphi_\alpha$

Cette somme a un sens dans $\Omega_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}}$.

En effet, si Ω est un ouvert relativement compact, dans Ω le nombre des α tels que $\Omega_\alpha \cap \Omega \neq \emptyset$ est fini, dans $\Omega \cap \Omega_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}}$ le terme $\omega_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}\alpha} \cdot \varphi_\alpha$ a un sens en tant que distribution définie dans $\Omega_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}}$, *et si* $\omega_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}\alpha}$ *est la restriction d'une distribution définie dans tout l'espace, il en est de même pour* $\omega_{\alpha_0\dots\alpha_{k-1}\alpha} \cdot \varphi_\alpha$; dans le cas de $\mathcal{S}'$ c'est analogue

γ) Calculons $\sum_{h=0}^{k} (-1)^h \tilde{\omega}_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_h\dots\alpha_k}$ dans $\Omega_{\alpha_0\dots\alpha_k}$

C'est
$$(-1)^k \sum_{h=0}^{k} \left((-1)^h \sum_{\alpha} \omega_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_h\dots\alpha_k\alpha} \cdot \varphi_\alpha\right)$$
$$= \sum_{\alpha} \left(\sum_{h=0}^{k} (-1)^h \omega_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_h\dots\alpha_k\alpha} \cdot \varphi_\alpha\right)$$

vu la condition du cocycle, et comme les termes $\omega_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_h\dots\alpha_k\alpha} \cdot \varphi_\alpha$ sont définis sur $\Omega_{\alpha_0\dots\alpha_k}$ et qu'on a:

$$\sum_{h=0}^{k} (-1)^h \omega_{\alpha_0\dots\hat{\alpha}_h\dots\alpha_k\alpha} + (-1)^{k+1} \omega_{\alpha_0\dots\alpha_k} = 0$$

il vient:
$$(-1)^k \left(\sum_{\alpha} (-1)^k \varphi_\alpha\right) \omega_{\alpha_0\dots\alpha_k} = \omega_{\alpha_0\dots\alpha_k}$$

Ceci démontre le lemme.

b) *Des cocycles de Čech aux formes.*

Soit $\varphi_{i_0\dots i_k}$ un k-cocycle du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeurs dans le faisceau $\mathcal{O}_l^p$ $(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n-l} \times U))$ (localement à croissance lente, resp. à croissance lente) c'est à dire la donnée pour chaque ouvert $\Omega_{i_0 \ldots i_k}$ d'une forme de degré p en les $dz_1, \ldots, dz_l$, à coefficient dans le sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega_{i_0 \ldots i_k})$ formé des solutions du système d'équations $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} T = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} T = \ldots = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} T = 0$ (et localement à croissance lente, resp. à croissance lente). Alors on peut trouver des $T_{j_0 \ldots j_{k-1}}$ formes distributions telles que $(\delta T)_{i_0 \ldots i_k} = \varphi_{i_0 \ldots i_k}$. On forme $d_l'' T_{j_0 \ldots j_{k-1}} = \varphi_{j_0 \ldots j_{k-1}}$. Alors il vient

$$\sum_h (-1)^h \varphi_{j_0 \ldots \hat{j}_h \ldots j_k} = d_l'' \varphi_{j_0 \ldots j_k} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{j_0 \ldots j_k}$$

et on obtient une forme de type $(p,1)$ suivant les l premières variables. D'autre part, les dérivées partielles de distributions prolongeables (à croissance lente) sont prolongeables (à croissance lente). Le lemme et cette remarque montrent que $\varphi_{j_0 \ldots j_{k-1}}$ va satisfaire aux hypothèses de départ (hypothèses que nous noterons $H_\alpha (\alpha = 1,2,3)$). On peut alors décomposer les $\varphi_{j_0 \ldots j_{k-1}}$ en des $T_{i_0 \ldots i_{k-2}}$ $(\delta T)_{j_0 \ldots j_{k-1}} = \varphi_{j_0 \ldots j_{k-1}}$ en conservant les hypothèses H_α. On forme

$$\varphi_{i_0 \ldots i_{k-2}} = d_l'' T_{i_0 \ldots i_{k-2}},$$

d'où

$$\delta \varphi_{j_0 \ldots j_{k-1}} = d_l'' \varphi_{j_0 \ldots j_{k-1}} = d_l'' d_l'' T_{j_0 \ldots j_{k-1}} = 0$$

Donc les $\varphi_{j_0 \ldots j_{k-2}}$ sont telles que $d_l'' \varphi_{j_0 \ldots j_{k-2}} = 0$, sont des formes de type $(p,2)$, et forment un $(k-2)$ cocycle du recouvrement satisfaisant à l'hypothèse H_α de départ, et ainsi de suite; on obtiendra finalement au bout de ce processus dans chaque Ω_α une forme φ_α de type (p,k) d_l'' fermée satisfaisant à l'hypothèse H_α de départ, avec, si $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha - \varphi_\beta = 0$.

Donc, par recollement, on obtiendra une forme φ d_l'' fermée de type (p,k), définie sur Ω et satisfaisant à l'hypothèse H_α de départ.

Modifions $\varphi_{i_0 \ldots i_k}$ satisfaisant à H_α par $\psi_{i_0 \ldots i_k} = (\delta\theta)_{i_0 \ldots i_k}$ un k-cobord du recouvrement tel que chaque $\theta_{j_0 \ldots j_{k-1}}$ satisfasse à H_α. On peut décomposer $\varphi + \delta\theta$ par $T_{j_0 \ldots j_{k-1}} + \theta_{j_0 \ldots j_{k-1}}$ et alors,

$$d_l''(T_{j_0 \ldots j_{k-1}} + \theta_{j_0 \ldots j_{k-1}}) = d_l'' T_{j_0 \ldots j_{k-1}}$$

D'autre part, si on considère deux décompositions

$$T^1_{j_0\ldots j_{k-1}} \quad \text{et} \quad T^2_{j_0\ldots j_{k-1}} \qquad \text{on a: } d''_l(T^1_{j_0\ldots j_{k-1}} - T^2_{j_0\ldots j_{k-1}}) = 0$$

donc si $k=1$ $T^1_{j_0} = T^2_{j_0}$. Pour $k>1$ on a $T^1_{j_0\ldots j_{k-1}} = T^2_{j_0\ldots j_{k-1}} + \delta\Theta$ d'où $d''T^1_{j_0\ldots j_{k-1}} = d''T^2_{j_0\ldots j_{k-1}} + \delta(d''\Theta)$. Ceci montre que l'application de la classe de cohomologie (avec l'hypothèse H_α) de $\varphi_{i_0\ldots i_k}$ dans celle de $\varphi_{i_0\ldots i_{k-1}}$ est bien définie. Finalement, φ será définie modulo une forme $d''\Theta$ où Θ est de type $(p,k-1)$ et satisfait à l'hypothèse (H_α).

Nous avons ainsi défini une application λ de

$$H^k(\mathfrak{U};O^p_l(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\times U))) \qquad \text{dans} \quad H^k(\Omega;O^p_l(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\times U)))$$

$$\text{de} \quad H^k_{\gamma\, loc}(\mathfrak{U}\,;\longrightarrow) \qquad \text{dans} \quad H^k_{\gamma\, loc}(\Omega\,;\longrightarrow)$$

$$\text{de} \quad H^k_{\gamma}\;(\mathfrak{U}\,;\longrightarrow) \qquad \text{dans} \quad H^k_{\gamma}\;(\Omega\,;\longrightarrow)$$

Cette application est classique (du moins dans le premier cas) [K] page 213. Montrons maintenant que l'application λ est inversible sous certaines hypothèses sur $\mathfrak{U}$. Nous aurons alors montré un *isomorphisme de Leray* entre ces groupes.

Nous appelerons *processus de Weil* (*) le procédé récurrent de construction que nous venons d'utiliser et le procédé inverse qui va suivre.

Soit φ une forme de type (p,k) et satisfaisant à une hypothèse H_α. On désignera par φ_i la restriction de φ à Ω_i. Si dans Ω_i il est possible d'intégrer les formes d''_l fermées de type (p,k) et satisfaisant à H_α en conservant cette propriété on désignera par T_i une primitive. Formons dans $\Omega_{i_0 i_1} = \Omega_{i_0} \cap \Omega_{i_1}$ la différence des primitives $\varphi_{i_0,i_1} = T_{i_0} - T_{i_1} = (\delta T)_{i_0,i_1}$. On a $d''_l\varphi_{i_0,i_1} = 0$ et $(\delta\varphi)_{i_0,i_1,i_2} = 0$. S'il est possible, dans chaque Ω_{i_0,i_1} d'intégrer les formes d''_l fermées de type $(p,k-1)$ satisfaisant à H_α en conservant la condition nous désignerons par T_{i_0,i_1} une primitive de φ_{i_0,i_1} dans Ω_{i_0,i_1} et nous formerons $\varphi_{i_0,i_1,i_2} = \delta T = T_{i_0,i_1} - T_{i_0,i_2} + T_{i_1,i_2}$ $\varphi_{i_0,i_1,i}$ est une forme de type $p,k-2$, d''_l

(*) A. Weil — *Sur les théorèmes de De Rham.* Commentarii Math. Helv. 26. 1952. pp. 119-145.

fermée car $d_l''\varphi_{i_0 i_1 i_2} = \sum_{h=0}^{h=2} (-1)^h d_l'' T_{i_0 \hat{i}_h i_2} = \sum_{h=0}^{h=2} (-1)^h \varphi_{i_0 \hat{i}_h i_2} = 0$, est un 2-cocycle du recouvrement, c'est à dire $\sum (-1)^h \varphi_{i_0 \ldots \hat{i}_h \ldots i_3} = 0$ dans $\Omega_{i_0 \ldots i_3}$, et satisfaisant à H_α, etc.... On aboutira en fin de compte à un k-cocycle du recouvrement à valeurs dans $\mathcal{O}_l^p(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n \times U))$ satisfaisant à H_α. Ceci à condition que dans chaque $\Omega_{i_0 \ldots i_h}$ l'intégration des formes de degré $(p, k-h) d_l''$ fermées et satisfaisant à la condition H_α soit possible en respectant cette condition. Et il est clair que le processus décrit est l'inverse du précédent. Si les Ω_α sont *convexes*, les intersections finies de ces convexes le sont aussi, donc d'après le théorème I chapitre II (Appendice A) les hypothèses sont satisfaites.

THÉORÈME I: *Si le recouvrement $\mathcal{U}$ de Ω est un recouvrement convexe alors l'application λ établit un isomorphisme entre*

a) $H^k(\mathcal{U}; \mathcal{O}_l^p(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n \times U)))$ et $H^k(\Omega; \mathcal{O}_l^p(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n \times U)))$

b) *entre* $H^k_{\gamma\, loc, \mathcal{D}'}(\mathcal{U}; \mathcal{O}_l^p(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n \times U)))$ et $H^k_{\gamma\, loc, \mathcal{D}'}(\Omega; \mathcal{O}_l^p(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n \times U)))$

c) *entre* $H^n_\gamma(\mathcal{U}; \mathcal{O}_l^p(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n \times U)))$ et $H^n_\gamma(\Omega; \mathcal{O}_l^p(\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n \times U)))$

Pour $l=n$, $\mathbb{R}^p = \{0\}$ le théorème I chapitre II suffit et l'isomorphisme λ nous conduit en *b)* et *c)* aux solutions des théorèmes classiques. Le renforcement de ce théorème démontré dans l'appendice A est nécessaire pour le cas général ici considéré.

2. Les théorèmes de représentation

a — *Forme abstraite (et incomplète) des théorèmes de représentation*

Nous considérons un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$ rencontrant $\mathbb{R}^n$ suivant un ouvert Θ. Nous recouvrons $\Omega \cap (\complement\, \Theta \times \mathbb{R}^p) = \Omega'$ par une famille d'ouverts Ω_i formant dans le cas $\mathcal{D}'$ un recouvrement localement fini, dans le cas $\mathcal{S}'$ un recouvrement fini. Soit $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ un $(n-1)$ —cocycle du recouvrement de Ω' par les Ω_i à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathcal{D}'(\Omega))$ et prolongeable.

Le processus λ associe à $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ une forme ω de type $(0, n-1)$ en $dz_1, \ldots, dz_n, d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n$ à coefficients distributions sur Ω' et prolongeables à Ω.

Nous prolongeons ω en une forme $\bar{\omega}$ définie dans Ω et nous calculons $d''\bar{\omega}$. La forme $d''\bar{\omega}$ est de type $(0,n)$ d''-fermée et à support dans $\Omega_R = \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$.

Il existe un isomorphisme ρ du groupe $H^n_{\mathcal{D}',\Omega_R}(\Omega; O_n(\mathcal{D}'(\Omega)))$ sur $\mathcal{D}'(\Omega_R)$ à savoir que dans la classe de $\bar{\omega}$ il existe une forme $T(x,u)\delta(y)d\bar{z}$ et une seule, $\rho(\bar{\omega}) = T(x,u)$. Nous désignerons par valeur au bord de $(\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}), \delta_1 \varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$, la distribution $\left(\frac{i}{2}\right)^n T(x,u)$.

On a donc la

Proposition 1: *Si le recouvrement Ω_α est convexe pour toute distribution $T(x,u) \in \mathcal{D}'(\Omega_R)$ il existe un cocycle $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ de valeur au bord $\partial\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}} = T$.*

b) *Démonstration de la formule* $\boxed{\left(\frac{i}{2}\right)^n \delta = \rho \circ \partial \circ \lambda \circ \pi}$

Nous nous plaçons donc dans la situation suivante: Ω est un ouvert de $E \times iE$ où E est un espace vectoriel réel, de la forme $\Theta \times i\Theta_0$ et le complémentaire de Θ dans Ω est recouvert par des convexes réguliers $\Theta \times i\Theta_j$ où les Θ_j sont en position générale, et en nombre fini. Enfin, restreignant éventuellement Θ_0, nous supposons que $\partial\Theta_{i_0} \cap \ldots \cap \partial\Theta_{i_{n-1}} = \pm\Theta$ (après choix d'une orientation). Alors, si $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ est un cocycle et si $T_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ est sa valeur au bord, prise au sens habituel, au chapitre III nous avons appris à déterminer des nombres entiers $\alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ et nous avons désigné par $\delta\varphi$ la somme $\sum \alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}} T_{i_0 \ldots i_{n-1}}$.

D'autre part dans *a)* nous avons défini $\delta_1\varphi$. Il nous faut montrer l'égalité $\delta = \delta_1$. Pour cela commençons par remarquer qu'il suffit de vérifier l'égalité au voisinage de chaque point de Θ. Mais φ étant prolongeable, au voisinage de chacun des points de Θ, et le recouvrement étant fini, il existe une opération de dérivation complexe $D_{\mathbb{C}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}}$, et un cocycle $F(z)$ continu jusqu'au bord tel que, dans chaque ouvert $\Omega_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ on ait $\varphi_{i_0 \ldots i_{n-1}} = D_{\mathbb{C}} F_{i_0 \ldots i_{n-1}}$. Nous désignons par $D_{\mathbb{R}}$ l'opérateur $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. On a: $\partial\varphi = D_{\mathbb{R}}(\partial F)$.

En effet, considérons le processus de Weil.

Si $F_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ est le cobord de $\Theta_{j_0 \ldots j_{n-2}}$ $D_{\mathbb{R}} F_{i_0 \ldots i_{n-1}}$ sera le cobord de $D_{\mathbb{R}} \theta_{j_0 \ldots j_{n-2}} = T_{j_0 \ldots j_{n-2}}$ et si $F_{i_0 \ldots i_{n-2}} = d''\theta_{j_0 \ldots j_{n-2}}$ on aura: $D_{\mathbb{R}} F_{i_0 \ldots i_{n-2}} = d''T_{j_0 \ldots j_{n-2}}$, et ainsi de suite donc si Φ est une forme de degré $0,n-1)$ associée à F $D_{\mathbb{R}}\Phi$ sera associé à φ et si $\bar{\Phi}$ est un prolongement de

Φ $D_{\mathbb{R}}\overline{\Phi}$ sera un prolongement de $D_{\mathbb{R}}\Phi$. On a: $d''D_{\mathbb{R}}\overline{\Phi}=D_{\mathbb{R}}d''\overline{\Phi}$ donc $D_{\mathbb{R}}d''\overline{\Phi}$ sera dans la classe de $\partial\varphi$. Remarquons maintenant que $D_{\mathbb{R}}$ opère dans $H^n_{\mathcal{D}',\Theta}(\Omega;\mathcal{O})$. En effet, si $\overset{0,n}{\omega}$ est une forme à support dans Θ, $D_{\mathbb{R}}\overset{0,n}{\omega}$ est à support dans Θ et $d''\overset{0,n}{\omega}=0$ entraîne $D_{\mathbb{R}}d''\overset{0,n}{\omega}=d''D_{\mathbb{R}}\overset{0,n}{\omega}=0$. En outre si $\overset{0,n}{\omega}=d''\overset{0,n-1}{\tilde{\omega}}$ alors $D_{\mathbb{R}}\overset{0,n}{\omega}=d''D_{\mathbb{R}}\overset{0,n-1}{\tilde{\omega}}$ et $D_{\mathbb{R}}$ étant une application linéaire il s'en suit que $\overset{0,n}{\omega}\equiv\overset{0,n}{\omega'}$ entraine $D_{\mathbb{R}}\overset{0,n}{\omega}=D_{\mathbb{R}}\overset{0,n}{\omega'}$, ce qui montre que $D_{\mathbb{R}}$ opère dans les classes d'équivalence. Alors pour connaître le comportement de $D_{\mathbb{R}}$ il suffit d'opérer sur les formes $T(x)\delta(y)d\bar{z}$ et $D_{\mathbb{R}}(T(x)\delta(y)d\bar{z})=D_{\mathbb{R}}T(x).\delta(y)d\bar{z}$ donc, $D_{\mathbb{R}}$ ainsi défini dans $H^n_{\mathcal{D}';\Theta}(\Omega;\mathcal{O})$ est transporté par l'isomorphisme $\overline{T(x)\delta(y)d\bar{z}}\to T(x)$ en l'opérateur $D_{\mathbb{R}}$ usuel.

Nous allons vérifier la formule pour F. Si U est un ouvert, nous associons à $[i_0,\dots,i_{n-1}]\in\zeta^0(U)$ le prolongement canonique $\overline{F}$ de F à U c'est à dire la distribution définie par

$$F_{i_0\dots i_{n-1}}\cdot 1_{\Omega_{i_0\dots i_{n-1}}}$$

où $1_{\Omega_{i_0}}\cdot 1_{\Omega_{i_1}}\dots 1_{\Omega_{i_{n-1}}}=1_{\Omega_{i_0\dots i_{n-1}}}$, 1_{Ω_i} désignant la fonction caractéristique de l'ouvert Ω_i. On obtient alors un homomorphisme par prolongement Z — linéaire, de $\zeta^0(U)$ dans le groupe abélien $\mathcal{D}'^{0,0}(U)$.

À $\partial\Omega_{i_0}\cap\dots\cap\partial\Omega_{i_h}[i_0\dots i_{n-1}]\cap\Omega_{j_1}\cap\dots\cap\Omega_{j_k}$ dans U nous associons $(d''1_{\Omega_{i_0}}\wedge\dots\wedge d''1_{\Omega_{i_n}})F_{i_0\dots i_{n-1}}\cdot 1_{\Omega_{j_1\dots j_k}}$ qui est clairement défini, $F_{i_0\dots i_{n-1}}$ se prolongeant par continuité. D'où un homomorphisme de $\zeta^k(U)$ dans $\mathcal{D}'^{0,k}(U)$ que nous noterons γ_k.

Au prolongement canonique de $\partial\Omega_{i_0}\cap\dots\cap\partial\Omega_{i_n}[i_0\dots i_{n-1}]\cap\Omega_{j_0}\cap\dots\cap\Omega_{j_h}$ dans Ω nous associons le prolongement canonique de

$$d''1_{\Omega_{i_0}}\wedge\dots\wedge d''1_{\Omega_{i_n}}\,.F\,.\,1_{\Omega_{j_0\dots j_n}}$$

à Ω. Cette opération commute avec γ_k. Enfin on a $\gamma_{k+1}\circ\nabla=d''o\gamma_k$. Alors, si $[i_0\dots i_{n-1}]$ est le cocycle canonique et si α^0 est tel que $(\delta\alpha^0)_{i_0\dots i_{n-1}}=$ $=[i_0\dots i_{n-1}],\nabla\alpha^0=\beta^1,\alpha^1$ tel que $\delta\alpha^1=\beta^1,\nabla\alpha^1=\beta^2,\dots$ on pose: $\omega_0=\gamma_0\alpha_0$, $\tilde{\omega}_1=$ $=\gamma_1\beta^1$, $\omega_1=\gamma_1\alpha^1$ $\tilde{\omega}_2=\gamma_2\beta^2,\dots$, et on a:

$$\partial\omega_0=\delta\gamma_0\alpha_0=\gamma_0\delta\alpha_0=\gamma_0[i_0\dots i_{n-1}]=F_{i_0\dots i_{n-1}}$$

$$d''\omega_0=d''\gamma_0\alpha_0=\gamma_1\nabla\alpha_0=\gamma_1\beta^1=\tilde{\omega}_1\ ,\ \text{etc.}\dots$$

Donc $\omega_0, \tilde{\omega}_1, \ldots$ sont les termes d'un processus de Weil. Et en dernière analyse on trouve:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n \sum \alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}} \cdot F_{i_0 \ldots i_{n-1}}(x) \delta(y) d\bar{z}$$

D'où: $$\delta_1 F = \sum \alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}} F_{i_0 \ldots i_{n-1}} = \delta F$$

La formule étant vraie pour F l'est de φ en vertu de la commutation de $D_{/\mathbb{R}}$ avec ρ et le processus de Weil. Donc, localement $\delta_1 = \delta$, en conséquence cette égalité est vraie globalement. D'où la

Proposition 2: *Lorsque δ est défini (c'est à dire quand les hypothèses géométriques énoncées plus haut sont satisfaites et qu'on a en conséquence choisi des coefficients $\alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}}$) on a la formule* $\boxed{\left(\frac{i}{2}\right)^n \delta = \rho \circ \partial \circ \lambda \circ \pi}$

Notons du moins en première conséquence

$\delta\varphi$ *ne dépend pas du choix des entiers* $\alpha_{i_0 \ldots i_{n-1}}$

les théorèmes 3 et 4 du chapitre précédent sont aussi démontrés.

Ils ont en corollaire la proposition suivante

Proposition 3: *Soit Θ un convexe de E, Ω un voisinage convexe de Θ dans $E \times iE$ de la forme $\Theta \times i\Theta_0$. Recouvrons le complémentaire de l'origine dans E par $(n+1)$ — demi espaces ouverts $P_0, \ldots, P_n$. Alors désignant par Ω_j l'ouvert $\Theta \times i(P_j \cap \Theta_0)$:*

a) *pour toute distribution T de $\mathcal{D}'(\Theta)$ il existe $(n+1)$ fonctions holomorphes $f_{0 \ldots \hat{h} \ldots n}$ définies dans $\Omega_{0 \ldots \hat{h} \ldots n}$ localement à croissance lente dans chaque $\Omega_{0 \ldots \hat{h} \ldots n}$, de valeurs au bord $T_{0 \ldots \hat{h} \ldots n}$ telles que:*

$$T = \sum_{h=0}^{n} T_{0 \ldots \hat{h} \ldots n}$$

Deux solutions différentes f et f' diffèrent d'un cobord localement à croissance lente, c'est à dire que

$$f'_{i_0 \ldots i_{n-1}} - f_{i_0 \ldots i_{n-1}} = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \varphi_{i_0 \ldots \hat{i}_h \ldots i_{n-1}}$$

où $\varphi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$ *est holomorphe dans* $\Omega_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$ *et localement à croissance lente dans cet ouvert.*

b) *si* $T \in S'(\Theta)$, *on peut prendre les* $f_{0 \dots \hat{h} \dots n}$ *dans* $S'(\Omega_{0 \dots \hat{h} \dots n})$. *Deux solutions diffèrent d'un cobord à croissance lente, c'est à dire que* $\varphi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$ *holomorphe dans* $\Omega_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$ *appartient à* $S'(\Omega_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}})$.

Cette proposition est une particularisation des théorèmes 3 et 4 du chapitre III.

Remarque: $(i_0 \dots i_{n-1})$ étant donnés il est possible d'effectuer un changement de coordonnées en sorte que P_{i_0} devienne $Q_1 = \{z \mid y_1 > 0\}$ $P_{i_{n-1}}$ devienne $Q_n = \{z \mid y_n > 0\}$. Alors $\Omega_{i_0 \dots i_h \dots \hat{i}_{n-1}}$ devient

$$\left[\mathbb{R}^{n-1} \times i\left((Q_1 \times \dots \times Q_{n-1})\right) \times \mathbb{C}\right] = H$$

si $\Theta = \Theta_0 = \mathbb{R}^n$. Une fonction holomorphe dans H et appartenant à $S'(H)$ est, on le voit aisément, un polynôme en z_n $P(z_n; S'(\mathbb{R}^{n-1} \times i(Q_1 \times \dots \times Q_{n-1}))$ à coefficients fonctions holomorphes à croissance lente dans $\mathbb{R}^{n-1} \times i(Q_1 \times \dots \times Q_{n-1})$. On a aussi les propriétés suivantes:

a′) *Si* $\Theta_0 \subset \Theta'_0$ *et si* $\varphi_{i_0 \dots i_{n-1}}$ *est un système de fonctions représentant* T, *définies dans les* $\Omega_{i_0 \dots i_{n-1}} = \Theta \times i(\Theta_0 \cap P_{i_0 \dots i_{n-1}})$, *si* $\varphi'_{i_0 \dots i_{n-1}}$ *est un autre système de fonctions représentant* T, *définies dans les* $\Omega'_{i_0 \dots i_{n-1}} = \Theta \times i(\Theta'_0 \cap P_{i_0 \dots i_{n-1}})$ *alors il existe des* $\psi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$ *localement à croissance lente définies dans les* $\Omega_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$ *telles que*

$$\varphi'_{i_0 \dots i_{n-1}} = \varphi_{i_0 \dots i_{n-1}} + \sum_{h=0}^{n-1} \psi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$$

b′) *Si* T *est dans* $S'(\Theta)$ *on peut trouver des* $\psi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$ *telles que* $\varphi_{i_0 \dots i_{n-1}} + \sum_{h=0}^{n-1} \psi_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}}$ *se prolonge analytiquement dans* $\Omega_{i_0 \dots i_{n-1}}$ *en une fonction de* $S'(\Omega'_{i_0 \dots i_{n-1}})$.

Nous avons donné ces propriétés à titre de commentaire. Soit T une distribution définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$ et holomorphe des n-premières variables. Nous avons vu que localement c'est une fonction holomorphe des n premières variables à valeurs distributions des p dernières (*).

Donc on peut fixer $(y_1,\ldots,y_n)$ et on obtient une distribution des variables réelles $(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_n)$ définie sur $\Omega \cap W(y_1,\ldots,y_n)$, où $W(y_1,\ldots,y_n)$ désigne la sous-variété linéaire de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$ définie par im $z_1 = iy_1,\ldots,$ im $z_n = iy_n$, qu'on peut noter $T_{y_1\cdots y_n}(x,u)$. On pourra définir la valeur au bord «élémentaire» si Ω est de la forme $W \times i\Gamma$ où $\Gamma = \{z = (z_1,\ldots,z_n) \mid y_1 > 0,\ldots,y_n > 0\}$, W un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, par $\theta(x,u) = \lim\limits_{y_1,\ldots,y_n \to 0} T_{y_1\cdots y_n}(x,u)$. La question étant locale on peut même supposer que W est de la forme $W_1 \times W_2$. Si $g \in \mathcal{D}(W_2) \int \varphi(z;u) \,.\, g(u)du$ est une fonction $f(z)$ holomorphe de la variable z pour $z \in W_1 \times i\Gamma$ et si la limite indiquée plus haut existe, alors

$$\lim_{y_1,\ldots,y_n \to 0} f(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)$$

existe et c'est:

$$\int \theta(x,u)\varphi(u)du \,.$$

On peut se contenter de cette valeur au bord élémentaire. Montrons que si $T(z;u)$ est *prolongéable* en une distribution des deux variables z et u alors la valeur au bord élémentaire existe. En effet ceci veut dire qu'elle est dérivée $D_z^{\alpha_1} D_u^{\alpha_2}$ au voisinage $\omega_1 \times \omega_2$ de tout point frontière d'une fonction continue, donc la distribution $\int \varphi(z;u)g(u)du = f(z)$ apparaît au voisinage de ce point, pour toute $g \in \mathcal{D}(\omega_2)$, comme à croissance lente au sens distributions, donc au sens fonction ce qui assure l'existence de la limite, uniformément en g lorsque g parcourt une partie bornée de $\mathcal{D}(\omega_2)$, ce qui fait que:

$$\varphi \longrightarrow \lim_{y_1,\ldots,y_n \to 0} f(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)$$

est continue à valeurs dans $\mathcal{D}'(\omega_1)$ donc que

$$\lim_{y_1\cdots y_n \to 0} \int \varphi(z;u)g(u)du = \int T(x,u)\varphi(u)du \quad \text{où} \quad T(x,u) \in \mathcal{D}'(\omega_1 \times \omega_2)$$

(*) Est laissée au lecteur la vérification de la réciproque.

En fait on vérifie aisément que la limite est atteinte fortement. Ceci permet d'énoncer le

THÉORÈME II: *Soit $\Theta \times U$ un ouvert convexe de $E^n \times F \times G$ ou E^n est un espace vectoriel réel de dimension n, F un espace vectoriel réel de dimension finie, G un espace vectoriel complexe de dimension finie, Θ convexe de E^n, U convexe de $F \times G$.*

Considérons un voisinage convexe de $\Theta \times U$ dans $E^n \times iE^n \times F \times G$ de la forme $\Theta \times i\Theta_0 \times U$ et recouvrons le complémentaire de l'origine de E^n par $(n+1)$ demi-espaces P_j. Désignons un point de $\Theta \times U$ sous la forme (z,u,v) z étant sa projection sur $E^n \times iE^u$, u sa projection sur F, v sa projection sur G.

Alors a) *pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Theta \times U)$ holomorphe en $v \left(\text{i. e. } \dfrac{\partial T}{\partial \bar{v}_j} = 0\right)$ on peut trouver des $\varphi_{0\ldots\hat{h}\ldots n}(z;u;v)$ distributions définies sur $\Theta \times \left(i(P_{0..\hat{h}..\hat{n}} \cap \Theta_0)\right) \times U$ holomorphes en $(z;v)$, prolongeables en distributions sur $\Theta \times i\Theta_0 \times U$ telles que, désignant par $T_{0\ldots\hat{h}\ldots n}(x;u;v)$ la valeur au bord de $\varphi_{0\ldots\hat{h}\ldots n}(z;u;v)$ $\left(\lim\limits_{y\to 0} \varphi_{0\ldots\hat{h}\ldots n}(x+iy;u;v) = T_{0\ldots\hat{h}\ldots n}(x;u;v)\right)$ on ait*

$$T = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h T_{0\ldots\hat{h}\ldots n}$$

Deux solutions diffèrent d'un $(n-1)$—cobord (prolongeable).

b) *si $T \in \mathcal{S}'(\Theta \times U)$ on peut prendre les $\varphi_{0\ldots\hat{h}\ldots n}(z;u;v)$ dans*

$$\mathcal{S}'\left(\Theta \times i(P_{0\ldots\hat{h}\ldots n} \cap \Theta_0) \times U\right).$$

Deux solutions diffèrent d'un $(n-1)$—cobord dont chaque composante $\varphi_{0\ldots\hat{h}\ldots\hat{k}\ldots}$ appartient à $\mathcal{S}'(\Theta \times i(P_{0\ldots\hat{h}\ldots\hat{k}\ldots n} \cap \Theta_0) \times U)$.

On peut aussi généraliser, bien entendu, les énoncés des théorèmes trois et quatre du chapitre III.

3. Calcul de la cohomologie à support dans un produit de demi-espaces fermés

Considérons un cube Ω défini par les inégalités $|x_j| < A_j$; $|y_j| < A_j$ dans $\mathbb{C}^n$ et désignons par P_j le demi espace $y_j \geqslant 0$, puis par P le produit $P = P_1 \times .. \times P_n$. Soit $\Gamma = \Omega \cap P$. Nous nous proposons d'étudier la d''—cohomologie de Ω à *support dans Γ relativement à certaines formes distributions.*

Soit U un convexe de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^m$. Nous considérons le complexe K^p_Γ des formes de type (p,β) en $dz_1, d\bar{z}_1, \ldots, dz_n, d\bar{z}_n$ à coefficients distributions dans $\Omega \times U$, holomorphes des m dernières variables complexes, muni de l'opérateur d'' des n premières variables complexes (mais aussi de l'ensemble des $n+m$ variables complexes qui interviennent), ces coefficients distributions appartenant éventuellement à $\mathcal{S}'(\Omega \times U)$.

Dans le premier cas nous noterons les groupes associés par

$$H^q_{\mathcal{D}';\Gamma}(\Omega; O^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_v(U)))$$

dans le second cas par

$$H^q_{\mathcal{S}';\Gamma}(\Omega; O^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_v(U)))$$

Soit $\overset{p,q}{\omega}$ une telle forme et d'' fermée. Sa restriction $\overset{p,q}{\omega}$ à l'intérieur de $\Gamma \times U$ est une forme distribution localement à croissance lente (à croissance lente) et d''-fermée. D'après l'appendice A on peut trouver $\overset{p,q-1}{\tilde{\omega}}$ du même type, définie dans l'intérieur de $\Gamma \times U$ et telle que $d'' \overset{p,q-1}{\tilde{\omega}'} = \overset{p,q}{\omega}$. Si $\overset{p,q-1}{\tilde{\omega}}$ est un prolongement de cette forme à $\Omega \times U$ et à support dans $\Gamma \times U, d'' \overset{p,q-1}{\tilde{\omega}} - \overset{p,q}{\omega}$ est congrue à $\overset{p,q}{\omega}$ mais est concentrée sur la frontière.

Nous désignerons par π_n le bord de $\mathbb{C}^{n-1} \times P_n$. Si T est une distribution, qui au voisinage d'un point M de $\pi_n \times U$ a son support dans $\pi_n \times U$, on peut la mettre dans un voisinage de ce point sous la forme $\sum T_h(z_1,\dots,z_{n-1}; x_n; u).\delta^{(h)}(y_n)$, décomposition d'ailleurs unique.

Alors, de $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n} + i\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right)$ il vient:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} T_h \cdot \delta^{(k)}(y_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_h}{\partial x_n}\right) \cdot \delta^{(k)}(y_n) + \frac{i}{2} T_h \cdot \delta^{(k+1)}(y_n)$$

Une forme de type (p,q) d''-fermée, à support dans $\pi_n \times U$, au voisinage de M dans π_n est donc cohomologue à une forme ω' obtenue en remplaçant le terme

$$\sum_h T_h(z_1,\dots,z_{n-1}; x_n; u) \cdot \delta^{(h)}(y_n) \cdot dz_{i_0} \wedge \dots \wedge dz_{i_{p-1}} \wedge d\bar{z}_{j_0} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{p-2}} \wedge d\bar{z}_n$$

par:

$$\sum_h (i)^h \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^h T_h(z_1,\ldots,z_{n-1}; x_n; u) \, . \, \delta(y_n) dz_{i_0} \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge . \, d\bar{z}_n$$

C'est à dire que ω' s'écrira sous la forme:

$$\sum_{\substack{j_0<\ldots<j_{q-1}<n \\ i_0<\ldots<i_{p-1}}} T_{i_0\ldots i_{p-1}, j_0\ldots j_{q-1}} \, . \, dz_{i_0} \wedge \ldots \wedge dz_{i_{p-1}} \wedge d\bar{z}_{j_0} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_{q-1}}$$

$$+ \sum_{\substack{k_0<\ldots<k_{p-1} \\ l_0<\ldots<l_{q-2}<n}} T_{k_0\ldots k_{p-1}, l_0\ldots l_{q-2}}(z_1,\ldots,z_{n-1}; x_n; u) \, . \, \delta(y_n) dz_{k_0} \wedge \ldots \wedge dz_{k_{p-2}} \wedge d\bar{z}_{l_0} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n$$

les T étant holomorphes en les dernières variables complexes.

Écrivons que ω' est fermée $\left(\text{hors de } \bigcup_{j\neq n} (P_n \cap P_j)\right)$.

Il vient, $k_0,\ldots,k_{n-1}$ étant fixés, donc oubliés dans la notation, pour un terme $j_0\ldots j_{q-1}{}^n$

$$\sum (-1)^h \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_h}} T_{j_0\ldots\hat{j}_h\ldots j_{q-1}n} + (-1)^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} T_{j_0\ldots j_{q-1}} = 0$$

Mais la première somme est une distribution $U(z_1,\ldots,z_{n-1}; x_n; u)\delta(y_n)$ et $T_{j_0\ldots j_{q-1}}$ est de la forme $\sum_{l=0}^{N_0} T^l(z_1,\ldots,z_{n-1}; x_n; u)\delta^{(l)}(y_n)$ d'où, pour $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} T_{j_0\ldots j_{q-1}}$ l'expression:

$$\sum_{l=0}^{N_0+1} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial T^l}{\partial x_n} + i T^{(l-1)}\right] . \, \delta^{(l)}(y_n) \quad (*)$$

(*) On pose $T^{-1} = 0$.

Donc il vient:

$$T^{N_0}=0\,,\ \text{puis}\ \frac{\partial T^l}{\partial x_n}=-iT^{(l-1)}\ \ \text{si}\ l>0\,,\ \ \text{d'où}\ \ T^l=0$$

pour tout l, c'est à dire $T_{j_0\ldots j_{q-1}}=0$.

En conséquence ω' s'écrit *au voisinage de M:*

$$\sum_{\substack{i_0<\ldots<i_{p-1}\\ j_0<\ldots<j_{q-2}<n}} T_{i_0\ldots i_{p-1};j_0\ldots j_{q-2}}(z_1,\ldots,z_{n-1};x_n;u)dz_{i_0}\wedge\ldots\wedge dz_{i_{p-1}}\wedge\ldots\ldots$$

$$\ldots.\wedge d\bar z_{j_0}\wedge\ldots\wedge d\bar z_{j_{q-2}}\wedge\delta(y_n)\,.\,d\bar z_n=\pi\wedge\delta(y_n)\,.\,d\bar z_n$$

donc il vient: $d''_{n-1}\pi=0$

où π est une forme à coefficients distributions prolongeables holomorphe des m dernières variables complexes. Le raisonnement que nous venons de faire vaut sur tout compact de Ω, ou sur Ω tout entier dans le cas de $\mathcal{S}'$; dans le cas de $\mathcal{D}'$ il convient de passer à la face tout entière. Nous utilisons pour cela un argument de Runge dont voici une description succinte.

Si K_h est une suite fondamentale de compacts de Ω, dans $(K_h\cap\varphi_n)\times U$ où φ_n désigne l'intérieur de la face de P incluse dans π_n, on peut trouver ω'_h de la forme $\pi^h\wedge\delta(y_n)d\bar z_n$ est congrue à ω. Donc $\omega'_{h+1}-\omega'_h$ sur $K_n\times U$ est congrue à zéro et on peut trouver π'^h telle que $d''_{n-1}\pi'^h\wedge\delta(y_n)d\bar z_n+\omega'_{h+1}=\omega'_h$ sur $K_h\times U$; on procèdera ainsi de proche en proche par recollement pour $q\geqslant 2$ mais il convient de remarquer que le raisonnement du théorème I chapitre III s'appuyant sur la proposition 1 ne peut pas être utilisé. Pour $q=1$ cf. appendice A et l'introduction des espaces $\mathcal{D}'_{\gamma,p}$ page 308 pour lesquels le procédé de Runge s'applique.

Maintenant, si $(q-1)>1$ d'après l'appendice A on peut trouver une forme distribution $\overset{p,q-2}{\tilde\omega}$ à coefficients distributions de $(z_1,\ldots,z_{n-1},x_n,u)$ dans $Q_n\times U$ holomorphe des dernières variables et à croissance localement lente (à croissance lente) telle que $d''_{n-1}\overset{p,q-2}{\omega}=\pi$. On prolonge $\overset{p,q-2}{\tilde\omega}$ en une distribution à support dans la face et on voit alors que:

$$\omega'-d''\big(\overset{p,q-2}{\tilde\omega}\wedge\delta(y_n)d\bar z_n\big)$$

est une forme distribution d''-fermée et concentrée sur $\Big(\bigcup_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(\pi_i\cap\pi_j)\cap P\Big)\times U$.

Cette distribution est somme de distributions $\omega'_{i,j}$ chacune concentrée sur

$\pi_i \cap \pi_j \cap P$ et on a $d''\omega'_{i,j} = 0$ hors de

$$\Big(\bigcup_{k \neq (i,j)} \pi_i \cap \pi_j \cap \pi_k \cap P\Big) \times U$$

En dernière analyse la forme $\overset{p,q}{\omega}$ est congrue à une forme $\alpha(\overset{p,q}{\omega})$ du type suivant: On se donne pour tout $(i_0,\dots,i_{p-1})(i_0<i_1<\dots<i_{p-1})$ sur l'intérieur (au sens convexe) de chaque intersection $\big(\pi_{j_0} \wedge \pi_{j_1} \wedge \dots \wedge \pi_{j_{q-1}} \cap P\big) \times U$ une distribution T holomorphe des variables $z_{j_0},\dots,z_{j_{q-1}}$, et des dernières variables complexes, dont on fait le prolongement canonique à la face. Nous noterons ce prolongement canonique par

$$T_{i_0\dots i_{p-1};j_0\dots j_{q-1}}(x_1,\dots,z_{j_0},\dots,z_{j_{q-1}},\dots,x_n;u)$$

la valeur au bord $\big(\pi_{j_0} \cap \pi_{j_1} \cap \dots \cap \pi_{j_{q-1}} \cap \pi_{j_q} \cap P\big) \times U$ est notée

$$\theta_{i_0\dots i_{p-1},j_0\dots j_{q-1}}(j_q)$$

On suppose qu'on a les relations

$$\sum (-1)^h \theta_{i_0\dots i_{p-1};j_0\dots(j_h)\dots j_q} = 0 \quad \text{pour tout } (i_0\dots i_{p-1}),(j_0\dots j_q) \tag{1}$$

et il vient:

$$\alpha(\omega) = \sum_{i_0\dots i_{p-1}} dz_{i_0} \wedge \dots \wedge dz_{i_{p-1}} \Big(\sum_{j_0\dots j_{q-1}} T_{i_0\dots i_{p-1};j_0\dots j_{q-1}} \dots$$
$$\dots (x_1,\dots,z_{j_0},\dots,z_{j_{q-1}};\dots x_n;u) d\bar z_{j_0} \wedge \dots \wedge d\bar z_{j_{q-1}} \Big) \tag{2}$$

Définition: *On désigne par forme canonique de type* (p,q) *une forme du type* (2). On a clairement

Proposition 4: *Une forme canonique* (2) *est fermée, si et seulement si les identités* (1) *sont satisfaites.*

Proposition 5: *Si* $\overset{p,q}{\omega}$ *est une forme canonique et s'il existe* $\overset{p,q-1}{\bar\omega}$ *à support dans* $\Gamma \times U$ *telle que* $d''\overset{p,q-1}{\bar\omega} = \overset{p,q}{\omega}$ *on peut remplacer* $\bar\omega$ *par une forme canonique.*

DÉMONSTRATION: On raisonne comme précédemment car la restriction de $\overset{p,q-1}{\overline{\omega}}$ au complémentaire du support de $\overset{p,q}{\omega}$ est d''-fermée. Il vient alors le

THÉORÈME III a) *Soit* ω *une forme canonique de type* (p,q) *d''-fermée avec* $q<n$, *définie sur* $(P\cap\Omega)\times U$. *Il existe* ω', *canonique, de type* $(p,q-1)$ *définie sur* $(P\cap\Omega')\times U$ *ou* Ω' *est un cube plus petit, qui ne dépend pas de* ω, *telle que* $d''\omega'=\omega$ (*).

Si on désigne par $T'_{\dots}$ les coefficients de ω' et $\theta'_{\dots}$ les valeurs au bord de ces coefficients ceci veut dire que

$$\sum(-1)^h\theta'_{i_0\dots i_{p-1};j_0\dots(j_h)\dots j_{q-1}}=T_{i_0\dots i_{p-1};j_0\dots j_{q-1}}$$

pour tout $i_0\dots i_{p-1},j_0\dots j_{q-1}$

b) *Dans le cas* $\mathbb{C}^n,\Omega=\mathbb{C}^n=\Omega'$ *ou encore,*

$$H^q_{\mathcal{D}',P}(\mathbb{C}^n;\mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_v(U)))=0 \qquad si \quad q\neq n$$

$$H^q_{\mathcal{S}',P}(\mathbb{C}^n;\mathcal{O}^p(\mathcal{S}'_u\mathcal{H}_{\Upsilon,v}(U)))=0 \qquad si \quad q\neq n$$

DÉMONSTRATION:

Si $K^p(\Omega)$ désigne le complexe des formes de type (p,β) à coefficients distribution dans $\Omega\times U$ holomorphes des m dernières variables complexes, muni de l'opérateur d'' des n premières, le noyau de l'homomorphisme de restriction de $K^p(\Omega)$ à $K^p_{\Upsilon\,loc}(\complement_\Omega\Gamma)$ où $\complement_\Omega\Gamma=\complement P\cap\Omega$ est K^p_Γ, c'est à dire que la suite $0\to K^p_\Gamma\to K^p(\Omega)\to K^p(\complement_\Omega\Gamma)\to 0$ est exacte. Les groupes de notre étude s'insèrent donc dans la suite exacte

$$\cdots\to H^{q-1}(\Omega;\mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_v(U)))\to H^{q-1}_{\Upsilon\,loc}(\complement_\Omega\Gamma;\mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_v(U)))\xrightarrow{\partial}$$

$$\to H^q_{\mathcal{D}',\Gamma}(\Omega;\mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_v(U)))\to H^q(\Omega;\mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_v(U)))\dots\to$$

(*) On peut exprimer *a)* par la nullité d'un groupe de cohomologie locale. Pour tout $M\in(\pi_1\cap\dots\cap\pi_n\cap P)\times U$ on introduit le groupe $\mathcal{H}^q_{\mathcal{D}';P,M}(\mathbb{C}^n;\mathcal{O}^p(\mathcal{D}_u\mathcal{H}_v(U)))$ limite inductive des groupes $H^q_{\mathcal{D}';P\cap\Omega}(\mathbb{C}^n;\mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_v(U)))$ lorsque Ω parcourt la famille des voisinages ouverts de U, et notre résultat implique $\mathcal{H}^q=0$ pour $q\neq n$.

Dans le cas de $\mathcal{S}'$ on a:

$$\ldots \to H^{q-1}(\Omega; \mathcal{O}^p(\mathcal{S}'_u \mathcal{H}_{\Upsilon,\nu}(U))) \to H^{q-1}_{\Upsilon}(\complement_\Omega \Gamma; \mathcal{O}^p(\mathcal{S}'_u \mathcal{H}_{\Upsilon,\nu}(U))) \xrightarrow{\partial}$$

$$\to H^q_{\mathcal{S}',\Gamma}(\Omega; \mathcal{O}^p(\mathcal{S}'_u \mathcal{H}_{\Upsilon,\nu}(U))) \to H^q(\Omega; \mathcal{O}^p(\mathcal{S}'_u \mathcal{H}_{\nu,\nu}(U))) \longrightarrow \ldots$$

les termes extrêmes sont nuls pour $q \geqslant 2$.

On a donc un isomorphisme

$$\left.\begin{array}{l} 0 \to H^q_{\Upsilon\, loc}(\complement\,\Gamma; \ldots) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}_{\mathcal{D}',\Gamma}(\Omega; \ldots) \to 0 \\ 0 \to H^q_{\Upsilon}\quad (\complement\,\Gamma; \ldots) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}_{\mathcal{S}',\Gamma}(\Omega; \ldots) \to 0 \end{array}\right\} \text{pour} \quad q \geqslant 1$$

Notons que $H^0_{\mathcal{D}',\Gamma}(\Omega; \ldots) = 0 = H^0_{\mathcal{S}',\Gamma}(\Omega; \ldots)$.

Il vient en conséquence:

$$0 \to H^0(\Omega; \ldots) \xrightarrow{1} H^0_{\Upsilon\, loc}(\complement_\Omega \Gamma; \ldots) \xrightarrow{\partial} H^1_{\mathcal{D}',\Gamma}(\Omega; \ldots) \to 0$$

$$0 \to H^0(\Omega; \ldots) \xrightarrow{1} H^0_{\Upsilon}\quad (\complement_\Omega \Gamma; \ldots) \xrightarrow{\partial} H^1_{\mathcal{S}',\Gamma}(\Omega; \ldots) \to 0$$

la nullité du groupe $H^1_{\mathcal{D}',\Gamma}(\Omega; \ldots)$ (resp. $H^1_{\mathcal{S}',\Gamma}(\Omega; \ldots)$) revient donc à la surjectivité de (1), qui est fausse en général, mais qui est vraie grâce au théorème des polydisques pour $\Omega = \mathbb{C}^n$, ou lorsqu'on remplace les groupes H par les groupes $\mathcal{H}$ (*). Dans le cas d'un ouvert Ω relativement compact nous n'allons, en fait, pas utiliser les homomorphismes 1 et ∂ mais seulement leur forme concrète, c'est à dire que, vu la proposition 5, et les remarques précédentes il suffit de montrer le

LEMME 1: a) *Il existe $\Omega' \subset \Omega$ tel que toute fonction de $H^0(\complement_\Omega \Gamma; \ldots)$ soit holomorphe dans Ω' et appartienne même au $H^0_{\ldots}(\Omega'; \ldots)$ correspondant.*

b) *Soit $\overset{p,q}{\omega}$ une forme de degré (p,q) à coefficients distributions dans $\complement_\Omega \Gamma \times U$, holomorphe des m-dernières variables complexes (distributions prolongeables, à croissance lente dans $(\complement_\Omega \Gamma) \times U$) et d'' fermée; il existe $\Omega' \subset \Omega$, ne*

(*) Nous admettons ici la validité de ce théorème pour les fonctions à valeurs vectorielles et le fait que $H(\Omega; \mathcal{D}'_u \mathcal{H}_\nu(U))$ s'identifie à l'espace des fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathcal{D}'_u \mathcal{H}_\nu(U)$. Cf. [18] pour ces questions.

dépendant que de Ω *tel qu'on puisse trouver* $\overset{p,q-1}{\tilde{\omega}}$ *défini dans* $(\complement_\Omega \Gamma) \times U$ *à coefficients du même type que ceux de* ω *telle que* $d'' \overset{p,q-1}{\tilde{\omega}} = \overset{p,q}{\omega}$ *pour* $q \neq 0, (n-1)$. En fait il suffit de démontrer, pour chaque n, ce lemme avec $q = (n-2)$. Car soit

$$\Delta = P_1 \times \ldots \times P_{n-1} \times \mathbb{C}\ ,\ \Delta^- = P_1 \times \ldots \times P_{n-1} \times \complement P_n\ ,\ P = P_1 \times \ldots \times P_n$$

Opérant comme toujours nous aurons une suite exacte

$$\begin{array}{l} \to H^q_{\mathcal{D}';P}(\mathbb{C}^n; \mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u \mathcal{H}_v(U))) \to H^q_{\mathcal{D}';\Delta}(\mathbb{C}^n; \ldots) \to H^q_{\mathcal{D}';\gamma\, loc;\Delta^-}(\mathbb{C}^n; \ldots) \\ \hfill \downarrow \partial \\ \hfill H^{q+1}_{\mathcal{D}';P}(\mathbb{C}^n; \ldots) \end{array}$$

et de même avec S'

Sachant que toute forme est équivalente à une forme canonique, on en déduit que $H^q_{\mathcal{D}';\Delta}(\mathbb{C}^n; \mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u \mathcal{H}_v(U)))$ est naturellement isomorphe (i. e. compatibilité de l'isomorphisme avec les flèches précédentes)

à $H^q_{\mathcal{D}';Q}(\mathbb{C}^{n-1}; \mathcal{O}^p(\mathcal{D}'_u \mathcal{H}_v(U \times \mathbb{C})))$

où $Q = P_1 \times \ldots \times P_{n-1}$

et on a quelque chose d'analogue avec $H^q_{\mathcal{D}'\gamma\, loc;\Delta^-}(\mathbb{C}^n, \ldots.)$. Si on a fait l'hypothèse que ces groupes sont nuls pour $q \leqslant n-1$ et $q > (n-1)$ il vient bien

$$0 \to H^{n-1}_{\mathcal{D}';P}(\mathbb{C}^n, \ldots) \to 0 \qquad \text{(idem avec } S'\text{)}$$

Dans le cas de Ω borné on raisonne directement et on obtient l'analogue de ce résultat. Maintenant considérons le recouvrement de $\Omega - \Gamma$ formé des

$$P_{-j} \cap \Omega = \{z \mid y_j < 0\} \cap \Omega$$

utilisant alors la procédure de Weil on voit que ce lemme est équivalent au lemme de la proposition 3 § 3 b du chapitre précédent (on y avait fait l'hypothèse $s=0$ dans les notations du début de ce paragraphe).

Admettant toujours qu'on peut se ramener au cas scalaire il faudra en dernière analyse démontrer le cas suivant.

LEMME 2: *Soit dans* $\mathbb{C}^n$ $n \geqslant 3$ *la famille des polydisques* Q_j

$Q_j = \{ |z_1| < \rho, \ldots, \widehat{|z_j| < \rho}, \ldots, |z_n| < \rho ; |z_j| < R \}$ où $R > \rho$, et *soit* f_j *une fonction holomorphe définie dans* $Q_j \times U$ *où* U *est un ouvert de* $\mathbb{C}^p$. *On suppose qu'on a la relation*

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j f_j = 0 \qquad sur \ (Q_1 \times \ldots\ldots \times Q_n) \times U \ ,$$

alors il existe $R' > \rho$ *ne dépendant que de* R *et de* ρ, *et des fonctions* $f_{j_0 \ldots j_{n-3}}$ *holomorphes définies sur les* $Q'_{j_0 \ldots j_{n-3}} \times U$ *où* $Q'_{j_0 \ldots j_{n-3}} = Q'(1, \ldots, \hat{i}, \ldots \hat{\hat{j}}, \ldots n) =$

$= \{ |z_1| < \rho, \ldots, \widehat{z_i < \rho}, \ldots, \widehat{z_j < \rho}, \ldots, |z_n| < \rho ; |z_i| < R', |z_j| < R' \}$ $(Si \ R = \infty \ , R' = \infty)$

telles que $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h f_{i_0 \ldots \hat{i}_n \ldots i_{n-2}} = f_i$ *où* $(i_0 \ldots i_{n-2}) = (1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n)$.

Si les f_i *sont à croissance lente on peut prendre les* $f_{j_0 \ldots j_{n-3}}$ *à croissance lente du même ordre* (*).

Dans le cas de $\mathbb{C}^n$ et P on prendra une suite de cercles γ_N de rayons y_N et de centre $-y_N$, et $\Gamma_N = \mathbb{C}$, puis on appliquera le lemme à

$$\bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{k-1} \times \gamma_N \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$$

enfin on utilisera un procédé de Runge (**) en faisant tendre y_N vers l'infini; $H^{n-1}_{\mathcal{D}', \gamma\, loc, \Delta^-}(\mathbb{C}^n, \ldots)$ relève du même procédé.

Pour le cas local on peut utiliser le

LEMME 3: *On pose* $\Gamma_j(A) = \{ z \mid |x_j| < A, |y_j| < A \}$. *Soient* ρ *et* R *deux nombres positifs donnés avec* $R > 2^{\varphi(n)} . \rho$ *où* $\varphi(n)$ *est une fonction convenable de* n. *On suppose qu'on s'est donné des fonctions* $f_j(z_1, \ldots, z_n) = f_{0 \ldots \hat{j} \ldots n}$, *holomorphes dans* $\Gamma_1(\rho) \times \ldots \times \Gamma_{j-1}(\rho) \times \Gamma_j(R) \times \Gamma_{j+1}(\rho) \times \ldots \times \Gamma_n(\rho)$ *continues ainsi que suffi-*

(*) On dira que f, définie et holomorphe dans le polydisque $|z_1| < 1, \ldots |z_n| < 1$ de série de Taylor $\sum a_{j_1 \ldots j_n} z_1^{j_1} \ldots z_n^{j_n}$ est d'ordre k si la série $\sum |a_{j_1 \ldots j_n}| j_1^{-k} \ldots {}_n$ est convergente.

(**) Du type de l'appendice A page 308.

samment de leurs dérivées partielles sur l'adhérence de ces ensembles, et satisfaisant à la condition $\sum_j (-1)^j f_j = 0$ *sur* $\prod_{h=1}^{n} \Gamma_h(\rho)$. *Alors on peut trouver, si* $n \geqslant 3$, *des fonctions* $f_{j_0 \dots j_{n-3}}$ *dépendant de façon alternée des indices* (*où* $(j_0, \dots, j_{n-3}) = (1, \dots, \hat{h}, \dots, \hat{k}, \dots, n)$) *holomorphes dans* $\Gamma_1(\rho) \times \dots \times \Gamma_h(a) \times \dots \times \Gamma_k(a) \times \dots \times \Gamma_n(\rho)$ *où* $a > \rho$ *ne dépend que de* R/ρ, *et continues à la frontière, telles que*

$$f_{1 \dots \hat{j} \dots n} = f_{i_0 \dots i_{n-1}} = \sum_h (-1)^h f_{i_0 \dots \hat{i}_h \dots i_{n-1}} \quad \text{dans} \quad \overline{\Gamma_1(\rho) \times \dots \times \Gamma_j(a) \times \dots \times \Gamma_n(\rho)}\,.$$

Démonstration: Les deux lemmes se démontrent par la même idée. Commençons par le second. On a l'identité:

$$\frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_n)} = \frac{1}{(1-x_1)} \cdot \frac{1}{(1-x_2 \dots x_n)} \cdot \frac{1}{1-x_3} \cdots \frac{1}{1-x_n}$$
$$+ \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{x_2}{1-x_2} \cdot \frac{1}{1-x_2 \dots x_n} \cdot \frac{1}{1-x_4} \cdots\cdots \frac{1}{1-x_n}$$
$$+ \dots\dots + \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{x_2}{1-x_2} \cdot \frac{x_3}{1-x_3} \cdots \frac{x_{n-1}}{1-x_{n-1}} \cdot \frac{1}{1-x_2 \dots x_n}$$

Nous désignons par $\gamma_j(A)$ la frontière orientée du carré $|x_j| < A, |y_j| < A$.

On a: $f_h(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int \dots \int_{\gamma_1(\rho) \times \dots \times \gamma_h(R) \times \dots \times \gamma_n(\rho)} \frac{f_h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$

On pose:

$$\varphi_h^k(z) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int \dots \int_{\gamma_1(\rho) \times \dots \times \gamma_h(R) \times \dots \times \gamma_n(\rho)}$$
$$\dots \frac{f_h(\zeta) \cdot \zeta_{k+1} \dots \zeta_n \cdot d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_2 \cdot \zeta_3 \dots \zeta_n - z_2 z_3 \dots z_n)(\zeta_{k+1} - z_{k+1})(\zeta_n - z_n)}$$

C'est une fonction holomorphe de z tant que: $z_j \notin \gamma_j$ pour tout $j \neq k$ et tant que

$(z_2 \dots z_n) \notin \gamma_2(\rho) \cdot \dots \cdot \gamma_k(R) \cdots\cdots \gamma_n(\rho)$. On a $|\zeta_2 \dots \zeta_n| \geqslant \rho^{n-2} \cdot R$.

Si $z_1 \in \Gamma_1(\rho),\ldots,z_n \in \Gamma_k(R'),\ldots,z_n \in \Gamma_n(\rho)$ on a $|z_2\ldots z_n| \leqslant 2^{n-1}\,.\,\rho^{n-2}\,.\,R'$ et si on désire $R' > \rho$ on doit avoir $2^{n-1}\,.\,R' \leqslant R$ donc $R \geqslant 2^{n-1}\,.\,\rho$. Nous prenons donc $\varphi(n) \geqslant 2^n$.

Dans cette hypothèse φ_h^k est holomorphe dans $\Gamma_1(\rho)\times\ldots\times\Gamma_k(R')\times\ldots\times\Gamma_n(\rho)$ où R' est défini par $R' = \dfrac{R}{2^{n-1}}$

Pour $(z_1,\ldots,z_n)$ suffisamment petits on peut remplacer les contours par

$$\gamma_1(\rho)\times\ldots\times\gamma_h(\rho)\times\ldots\times\gamma_n(\rho)$$

et de $\sum_h (-1)^h f_h = 0$ on déduit les $(n-1)$ identités

$$\sum_h (-1)^h \varphi_h^k = 0 \qquad k = 2,\ldots,n$$

Donc les ${\varphi^k}_h$ forment, pour k fixé, un $(n-1)$—cocycle d'un rétrécissement de la configuration précédente. Pour démontrer le lemme il suffit donc de le vérifier pour chacun des φ^k. Montrons le pour φ^2.

$$\text{On a:}\quad \varphi_1^2 = \sum_{h>1} \pm\varphi_h^2$$

où $$\varphi_h^2 = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \underbrace{\int\cdots\int}_{\sigma_h} \frac{f_h(\zeta)\zeta_2\ldots\zeta_n d\zeta_1\ldots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2\ldots\zeta_n-z_2\ldots z_n)\ldots(\zeta_n-z_n)}$$

$$(\zeta_2,\ldots,\zeta_n)\in\sigma_h \quad \text{si} \quad \zeta_p\in\gamma_p(\rho) \quad \text{pour} \quad p\neq h \quad \zeta_h\in\gamma_h(R)$$

et il s'ensuit que φ_h^2 est holomorphe pourvu que

$$z_1\notin\gamma_1(\rho), z_3\notin\gamma_3(\rho),\ldots,z_h\notin\gamma_h(R) \quad \text{et} \quad z_2\ldots z_n\notin\gamma_2(\rho)\cdot\gamma_3(\rho)\cdot\,\ldots\,\cdot\gamma_h(R)\ldots\gamma_n(\rho).$$

Si $z_1\in\gamma_1(\rho), z_2\in\gamma_2(R'), z_3\in\gamma_3(\rho),\ldots,z_n\in\gamma_n(\rho)$ on a

$$|z_1\ldots\ldots z_n| \leqslant \rho^{n-1}\,.\,R \leqslant \inf_{(\zeta_2,\ldots,\zeta_n)\in\sigma_h} |\zeta_2\ldots\zeta_n|$$

Donc l'intégrale est holomorphe dans cette région.

φ_1^2 est en conséquence holomorphe pour $(z_1,\ldots,z_n)\in\Gamma_1(R')\times\Gamma_2(\rho)\times\ldots$

et pour $(z_1,\ldots,z_n)\in\Gamma_1(\rho)\times\Gamma_2(R')\times\Gamma_3(\rho)\times\ldots$

Donc il existe R'' tel que φ_1^2 soit holomorphe dans

$$\Gamma_1(R'')\times\Gamma_2(R'')\times\Gamma_3(\rho)\times\ldots$$

$\rho < R'' < R'$ si $R' > 2\rho$, on peut prendre $R'' = \sqrt{\dfrac{R'\rho}{2}}$

On vérifie en outre que si φ a suffisamment de dérivées continues jusqu'au bord, il en est de même pour φ_1^2 (par majoration de dérivées). Retranchant φ_1^2 considérée comme une $(n-2)$—cochaîne de la configuration restreinte à R'' on obtient

$$\sum_{h\geqslant 2}(-1)^h\varphi_1'^2 = 0$$

si φ'^2 désigne le nouveau cocycle, qui forme donc un $(n-3)$—cocycle de la configuration $\Gamma_1(\rho)\times\bigcup_{j=2}^{n}[\Gamma_2(\rho)\times\ldots\times\Gamma_j(R'')\times\ldots.]$ recouverte par les ouverts $\Omega_j, j\geqslant 2$

$$\Omega_j = \Gamma_1(\rho)\times\Gamma_2(\rho)\times\ldots\times\Gamma_j(R'')\times\ldots\times\Gamma_n(\rho)\,.$$

Si on fait l'hypothèse de récurrence que le lemme a été démontré pour toute configuration

$$U\times[\bigcup_{p>k}\Gamma_k(\rho)\times\ldots\times\Gamma_p(R''')\times\ldots\times\Gamma_n(\rho)]$$

où $R''' > \varphi(n-k)\,.\,\rho$, si $R''\geqslant\varphi(n-1)\,.\,\rho$ on en déduit que φ'^2 est un cobord, donc φ^2. On voit que

$$\varphi(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

suffit pour les récurrences.

Il reste à vérifier le début de la récurrence. Donc, dans le cas de $j=n-3$ c'est à dire après changement de notation pour un 1 cocycle $\varphi_1^2,\varphi_2^2\varphi_3^2$.

On commence par tuer φ_1^2 par restriction. Il vient $\varphi_2^2-\varphi_3^2=0$. Le théorème des polydisques montre que φ_2^2 et φ_3^2 sont simultanément prolongeables dans un polydisque $U\times\Gamma(R'')\times\Gamma(R'')$ donc il s'en suit que $\varphi_1^2,\varphi_2^2,\varphi_3^2$ est un cobord, cobord prolongeable au bord ainsi que suffisamment de ses dérivées partielles. On déduira le lemme de la proposition 3 § 3b de celui-ci par un argument de Runge (parce qu'on ne peut intégrer sur les arêtes) que je laisse au lecteur.

Le lemme précédent se démontre de façon analogue mais au lieu de l'intégrale de Cauchy on peut employer la série de Taylor et si

$$f_n=\sum a^h_{j_1\dots j_n}\, z_1^{j_1}\dots z_n^{j_n}$$

On posera donc

$$\varphi_h^k=\sum_{\substack{j_2\ <j_k\\ \vdots\\ j_{k-1}<j_k\\ j_{k+1}\geqslant j_k\\ j_n\ \geqslant j_k}} a^h_{j_1\dots j_n}\, z_1^{j_1}\dots z_n^{j_n}$$

et on utilisera les inégalités de Cauchy sur les coefficients. La partie *a)* du lemme 1 est conséquence immédiate du théorème des polydisques.

Explicitons le théorème III dans le cas de $\mathbb{C}^n$.

On suppose données n distributions

$$f_j(x_1,y_1,\dots,x_{j-1},y_{j-1},x_j,x_{j+1},y_{j+1},\dots) \text{ définies pour}$$

$$y_1>0,\dots,y_n>0 \quad \text{et} \quad x\in\mathbb{R}^n$$

holomorphes des variables $(x_1,y_1),\dots,(x_{j-1},y_{j-1}),(x_{j+1},y_{j+1})\dots,(x_n,y_n)$ et localement à croissance lente. On suppose en outre que les f_j sont localement à croissance lente, et on note la valeur au bord de f_j sur la frontière incluse dans

$$y_j=0 \quad \text{par} \quad f_j(z_1,\dots,x_i,0,\dots,x_j,z_{j+1},\dots)$$

Si on suppose $f_j(\dots,x_i,0,\dots,x_j,\dots)=f_i(\dots,x_i,\dots,x_j;0,\dots)$ alors il existe f définie pour $y_1>0,\dots,y_n>0$ holomorphe en $(z_1,\dots,z_n)$, localement à croissance lente, telle que sa valeur au bord sur la frontière $y_i=0$ soit f_j. Si les f_j sont tempérées, on peut prendre f tempérée. C'est un théorème démontré par B. Malgrange (*) en réponse à une question de Wightman, qui est donc inclus dans l'énoncé:

$$H^1_{\mathcal{D}',P}(\mathbb{C}^n; O^p(\mathcal{D}'_u\mathcal{H}_\nu(U))) = 0$$

L'interprétation de la nullité des H^q pour $q<n$ fournit de nouveaux résultats. Par exemple à trois dimensions si nous désignons par y_i^+ le demi axe positif de la variable y_i.

Si $T_1(z_1,x_2,x_3)$ est une distribution définie pour $y_1^+\times\mathbb{R}^3$ localement à croissance lente, T_2,T_3 de même et si on a la relation, pour les valeurs au bord:

$$T_1(x_1,x_2,x_3) + T_2(x_1,x_2,x_3) + T_3(x_1,x_2,x_3) = 0$$

on peut trouver $\theta_1(x_1,z_2,z_3)$, $\theta_2(z_1,x_2,z_3)$, $\theta_3(z_1,z_2,x_3)$ localement à croissance lente dans $y_2^+\times y_3^+\times\mathbb{R}^3$, etc... (cf figure) telles que

$$T_1 = \theta_2(z_1,x_2,x_3) - \theta_3(z_1,x_1,x_3)$$

$$T_2 = \theta_3(x_1,z_2,x_3) - \theta_1(x_1,z_2,z_3)$$

$$T_3 = \theta_1(x_1,x_2,z_3) - \theta_2(x_1,x_2,z_3)$$

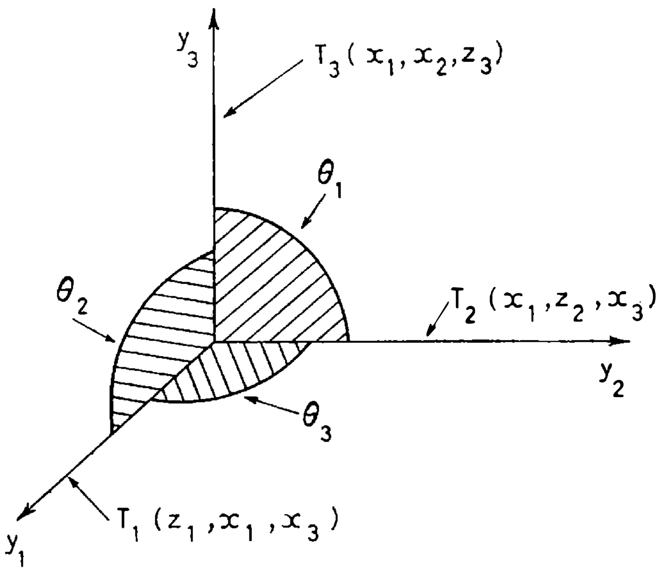

FIGURE 1

(*) Pour une autre démonstration cf. un exposé de Martin Zerner au Séminaire de Physique Théorique de la Faculté des Sciences de Marseille 1963-1964 (disponible au Secrétariat de Mathématiques de cette Faculté).

1. La transformation de Fourier-Carleman. Définition

Considérons une distribution $T(x_1,\ldots,x_n)$ définie sur $\mathbb{R}^n$ et appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors nous savons que T est de la forme Df où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ à croissance lente. Il existe donc un entier positif k tel que l'intégrale

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|\,dx}{(1+r^2)^k} \qquad \text{converge.}$$

Désignons par $\Gamma(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ le cône engendré par n-vecteurs $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ issus de l'origine et linéairement indépendants. Il est strictement convexe, d'intérieur non vide, et orienté par l'ordre de $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. Nous désignerons par P_φ le demi--espace défini par: $P_\varphi = \{u \mid < u,\varphi >> 0\}$.

Soit $(z_1,\ldots,z_n)$ un point de $\mathbb{C}^n$ tel que $(y_1,\ldots,y_n) \in P_{\varphi_1\ldots\varphi_n} = P_{\varphi_1} \cap P_{\varphi_2} \cap \ldots \cap P_{\varphi_n}$

L'intégrale, $$\int \cdots \int_{\Gamma(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} f(x) e^{-i(x_1z_1+\cdots+x_nz_n)} \,.\, dx = \varphi_{\varphi_1\ldots\varphi_n}(z_1,\ldots,z_n)$$

converge absolument uniformément pour tout $(z_1,\ldots,z_n) \in K$ où K est un compact de $\mathbb{R}^n \times iP_{\varphi_1\ldots\varphi_n}$.

Maintenant, si nous considérons $g(x) = \dfrac{f(x)}{(1+r^2)^k}$

et $$\psi_{\varphi_1\ldots\varphi_n}(z_1,\ldots,z_n) = \int \cdots \int_{\Gamma(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} g(x) e^{-i(x_1z_1+\cdots+x_nz_n)} \,.\, dx$$

l'intégrale converge absolument uniformément sur $\mathbb{R}^n \times i\overline{P_{\varphi_1\ldots\varphi_n}}$. Mais, de

$f(x)=(1+r^2)^n g$ on déduit que $\varphi_{v_1\ldots v_n}(z_1,\ldots z_n)=(1-\Delta)^k \,.\, \psi$ où Δ désigne le laplacien usuel.

Donc la fonction φ appartient à $S'(\mathbb{R}^n \times iP_{v_1\ldots v_n})$ et la restriction à $\mathbb{R}^n$ de $\psi_{v_1\ldots v_n}(z_1,\ldots z_n)$ est exactement la transformée de Fourier, de la restriction de g à $\Gamma(v_1,\ldots,v_n)$.

Lemme: *Lorsque* $(v_0,\ldots,v_{n-1})$ *parcourent* $\mathbb{R}^n$ *les* $\varphi_{v_0\ldots v_{n-1}}(z_1,\ldots,z_n)$ *définissent un* $(n-1)$*-cocycle du recouvrement du complémentaire de* $\mathbb{R}^n$ *par les demi-espaces* $\mathbb{R}^n \times iP_v$.

Démonstration: Soient $(v_0,\ldots,v_n)$ $(n+1)$-vecteurs tels que $\Gamma(v_0,\ldots v_n)$ soit strictement convexe, c'est à dire tels que $P_{v_0\ldots v_n} \neq \emptyset$.

Si $z \in \mathbb{R}^n \times iP_{v_0\ldots v_n}$ chacune des intégrales

$$\int_{\Gamma(v_0\ldots\hat{v}_h\ldots v_n)} \cdots \int f(x) e^{-i(x_1z_1+\cdots+x_nz_n)} \,.\, dx$$

converge et on a:

$$\sum_h (-1)^h \varphi_{v_0\ldots\hat{v}_n\ldots v_n}(z_1,\ldots,z_n) = \sum_h (-1)^h \int_{\Gamma(v_0\ldots,\hat{v}_n,\ldots v_n)} \cdots \int f(x) e^{-i(x_1z_1+\cdots+x_nz_n)} \,.\, dx = 0$$

puisque $\sum_h (-1)^h f_{\Gamma(v_0,\ldots,\hat{v}_h,\ldots,v_n)} = 0$ presque partout si $f_{\Gamma(v_0,\ldots,\hat{v}_h,\ldots,v_n)}$ désigne la fonction $f \,.\, 1_{\Gamma(v_0,\ldots,\hat{v}_h,\ldots,v_n)}$.

Soit T une distribution $T=Df$. Nous désignerons par $T_{\Gamma(v_0,\ldots,v_{n-1})}$ la distribution $Df_{\Gamma(v_0,\ldots,v_{n-1})}$. Il est immédiat de vérifier alors que si $z \in \mathbb{R}^n \times iP_{v_0\ldots v_{n-1}}$ le produit scalaire $< T_{\Gamma(v_0\ldots v_{n-1})}(x) \,,\, e^{-i(x_1z_1+\cdots+x_nz_n)} >$ a un sens.

On le notera

$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int T_{\Gamma(v_0,\ldots,v_{n-1})}(x) \,.\, e^{-i(x_1z_1+\cdots+x_nz_n)} \,.\, dx = \int T_{\Gamma(v_0,\ldots,v_{n-1})}(x) \,.\, e^{-i<x,z>} \,.\, dx$$

On aura:

$$\varphi_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-1}}(T)(z) = \mathcal{F}D(z)\,.\,\varphi_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-1}}(f)(z) = \int T_{\Gamma(\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1})}(x)\,.\,e^{-i<x,z>}\,.\,dx$$

Donc les $\varphi_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-1}}(T)$ forment un $(n-1)$-cocycle alterné du recouvrement du complémentaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ par les demi-espaces $\mathbb{R}^n \times iP_\varphi$.

Nous désignerons par décomposition de T la famille des distributions $T_{\Gamma(\varphi_0\ldots\varphi_{n-1})}$. Une décomposition de T dépend du choix d'une primitive continue. Étudions l'effet d'un changement de décomposition. Soit $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-2})$ un système de vecteurs et $\dfrac{\partial}{\partial \vec{u}}$ un opérateur à coefficients constants homogène du premier ordre. Si les $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-2})$ ne sont pas linéairement indépendants nous posons $\theta_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-2}}=0$. Si $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-2})$ est un système de vecteurs indépendants, soit φ un vecteur tel que $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-2},\varphi)$ soit une base de l'espace orientée dans le sens positif. Soit $1_{(\varphi_0\ldots\varphi_{n-2})}$ la fonction caractéristique du demi-espace contenant φ dans son intérieur et délimité par le plan engendré par $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-2})$. Dans ce plan on définit la fonction $1_{\Gamma(\varphi_0\ldots\varphi_{n-2})}$, fonction caractéristique du cône engendré par $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-2})$.

Nous posons $\theta_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-2}} = 1_{\Gamma(\varphi_0\ldots\varphi_{n-2})}\,.\,\dfrac{\partial}{\partial \vec{u}}\,1_{(\varphi_0\ldots\varphi_{n-2})}$.

La distribution $\theta_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-2}}$ est fonction alternée de l'ensemble des indices.

Soient f et g deux fonctions continues à croissance lente telles que $f = \dfrac{\partial}{\partial \vec{u}}\,g$. Alors on a:

$$f_{\Gamma(\varphi_0\ldots\varphi_{n-1})} = \frac{\partial}{\partial \vec{u}}\left(g_{\Gamma(\varphi_0\ldots\varphi_{n-1})}\right) - \sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h g\,.\,\theta_{\varphi_0\ldots\hat{\varphi}_h\ldots\varphi_{n-1}}$$

On vérifie immédiatement que:

$$\underbrace{\int\ldots\int}_{\mathbb{R}^n} g\,.\,\theta_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-2}}(u)\,.\,e^{-i<z,u>}\,.\,du = \psi_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-2}}(g)(z)$$

a un sens pour tout $z \in \mathbb{R}^n \times iP_{\varphi_0\ldots\varphi_{n-2}}$

et est une fonction holomorphe et tempérée de z dans cet ouvert.

Donc, $\varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(f) = \mathfrak{F}\left(\dfrac{d}{d\vec{u}}\right) \cdot (\varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(g)) + \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \psi_{\nu_0 \ldots \hat{\nu}_h \ldots \nu_{n-1}}(g)$

On en déduit par récurrence que si f est continue et $f = Dg$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\Gamma(\nu_0 \ldots \nu_{n-1})}(x) \cdot e^{-i<x,z>} \cdot dx - \int_{\mathbb{R}^n} Dg_{\Gamma(\nu_0 \ldots \nu_{n-1})}(x) \cdot e^{-i<x,z>} \cdot dx$$

est un cobord tempéré du recouvrement.

Ceci reste vrai pour toute distribution T de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En effet, si $T = Df = D'f'$, on peut trouver g, g', D_1, D'_1 tels que $f = D_1 g$, $D'_1 g' = f'$, $D\, D_1 = D' D'_1$.

Alors $D\, D_1(g' - g) = 0$ donc, $\mathfrak{F}(D\, D_1)[\varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(g) - \varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(g')]$ est un cobord. Ensuite, $\mathfrak{F}D_1 \cdot \varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(g) - \varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(f)$ est un cobord ainsi que $\mathfrak{F}D'_1 \cdot \varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(g') - \varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(f')$ donc

$$\mathfrak{F}D' \cdot \varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(f') - \mathfrak{F}D \cdot \varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(f) \quad \text{est un cobord.}$$

Remarquons enfin que les cobords et les cocycles qui interviennent sont *uniformément à croissance lente* c'est à dire que lorsque $(\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$ parcourent $(\mathbb{R}^n)^n$, la décomposition de T étant choisie grâce à une primitive fixe de T, les $\varphi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}(T)(z)$ proviennent par restriction d'une fonction bornée $(\nu_0 \ldots \nu_{n-1}) \to A_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}$ à valeur dans $\mathcal{S}'(\mathbb{C}^n)$, et lorsqu'on change de décomposition les $\psi_{\nu_0 \ldots \nu_{n-2}}$ proviennent aussi d'une fonction bornée $(\nu_0 \ldots \nu_{n-2}) \to B_{\nu_0 \ldots \nu_{n-2}}$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{C}^n)$. Notons que dans ce cas précis, A et B sont même *continues.* Alors nous disons que le cocycle dépend continuement des indices quand cette condition est satisfaite, ou est continuement à croissance lente.

DÉFINITION 1: *On désigne par groupe de cohomologie de Fourier-Carleman le quotient de l'espace des cocycles holomorphes continuement à croissance lente par les cobords continuement à croissance lente relativement au recouvrement de* $\complement\, \mathbb{R}^n$ *par les demi-espaces* Ω_ν, $\Omega_\nu = \mathbb{R}^n \times iP_\nu$.

DÉFINITION 2: *On désigne par transformée de Fourier-Carleman soit* $\mathfrak{F}\gamma(T)$ *d'une distribution* T *la* $(n-1)$*-classe de cohomologie de Fourier-Carleman* *d'un cocycle*

$$\varphi_{\varphi_0 \cdots \varphi_{n-1}}(T)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} T_{\Gamma(\varphi_0 \cdots \varphi_{n-1})}(x) \,.\, e^{-<x,z>} \,.\, dx \,.$$

Il résulte de l'Appendice A la propriété suivante.

Soit $\overset{p,q}{\omega_i}$ une famille bornée de formes distributions dans un convexe à coefficients à croissance lente (localement à croissance lente) et d'' fermées. Alors on peut trouver des $\overset{p,q-1}{\tilde{\omega}_i}$ pour $q \geqslant 1$ telles que $d'' \overset{p,q-1}{\tilde{\omega}_i} = \overset{p,q}{\omega_i}$, formant une famille bornée.

Soit alors Ω un convexe de $\mathbb{C}^n$ de la forme $\Theta \times i\Theta_1$ on recouvre $\complement\, \Theta$ dans Ω par les $\Omega_\varphi = (\Theta \times iP_\varphi) \cap \Omega$.

Si T est une distribution dans Θ (à croissance lente) le processus de Weil lui associe un cocycle uniformément localement à croissance lente (à croissance lente). Il conviendrait de savoir si ce cocycle peut être pris continuement localement à croissance lente (à croissance lente) comme dans le cas de la transformation de Fourier-Carleman.

Dans l'autre sens, il existe une partition de l'unité subordonnée aux Ω_φ, et indéfiniment dérivable car des Ω_φ on peut toujours extraire un recouvrement fini. Donc la valeur au bord d'un cocycle quelconque localement à croissance lente a un sens. On voit immédiatement qu'on peut la calculer comme suit. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert extrait des Ω_φ et $\varphi^{\mathcal{U}}$ la restriction de φ à $\mathcal{U}$. Alors $\delta\varphi^{\mathcal{U}}$ est indépendant de $\mathcal{U}$. C'est la valeur au bord de φ. On peut étendre les théorèmes des § 1 et 2 du chapitre III.

Introduisons maintenant, quand φ est continuement localement à croissance lente (à croissance lente) une procédure de Weil continue.

Nous considérons la boule unité B de $\mathbb{R}^n$, un espace compact 0, une application $g \to b(g)$ de 0 sur B, une mesure dg sur 0.

Définition 3: *On désigne par partition intégrable de l'unité relativement au recouvrement de* $\complement\, \mathbb{R}^n$ *par les demi-espaces* Ω_b *une fonction* $\varphi(z_1,\ldots,z_n;g)$ *définie sur* $\complement\, \mathbb{R}^n \times 0$, *intégrable en g telle que*

a) *pour tout g fixé,* $\varphi(z_1,\ldots,z_n;g)$ *a son support dans* $\Omega_{b(g)}$ *(est indéfiniment dérivable si nécessaire).*

b) $\displaystyle\int_0 \varphi(z_1,\ldots,z_n;g)dg = 1$.

Si les $\Omega_{b(g_0)},\ldots,\Omega_{b(g_N)}$ forment un recouvrement de $\complement\, \mathbb{R}^n$ et si $\varphi_0,\ldots,\varphi_N$ est une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, posant

$$dg = \sum_{h=0}^{N} \delta_{g_N}$$

$$\varphi(z_1,\ldots,z_n\,;g_h)=\varphi_h(z_1,\ldots,z_n)$$

nous retombons sur la définition 3.

Nous allons considérer le cas suivant: $O(n)=0$ est le groupe des rotations de B muni d'une mesure de Haar. Si b_0 est un vecteur fixe $b(g)=g\,.\,b_0$. Alors soit $\theta(x_1,\ldots x_n\,;e)$ une fonction positive ou nulle indéfiniment dérivable à support dans $P_{b_0}=P_{b(e)}$

On pose: $\theta(x_1,\ldots,x_n\,;g)=\theta(g(x_1,\ldots,x_n)\,;e)$

On intègre: $\displaystyle\int_{O(n)} \theta(x_1,\ldots,x_n\,;g)dg=\mathsf{T}(x_1,\ldots,x_n)$

Il est clair que la fonction $\mathsf{T}(x_1,\ldots,x_n)$ diffère de zéro en tout point de $\complement\,\{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$ et est indéfiniment dérivable.

On pose: $\displaystyle\varphi(z_1,\ldots,z_n;g)=\frac{\theta(y_1,\ldots,y_n\,;g)}{\mathsf{T}(y_1,\ldots,y_n)}$ si $\begin{array}{c} z_h=x_h+iy_h \\ (h=1,2,\ldots,n)\end{array}$

Lorsqu'on n'a pas besoin de conditions de différentiabilité il est commode de prendre $\varphi(z_1,\ldots,z_n\,;g)=k\,.\,1_{\Omega_{b(g)}}$ où k vaut $\displaystyle\int_{b_0\in P_{b(g)}} dg$.

Nous noterons désormais $\Omega_g\,,P_g$ à la place de $\Omega_{b(g)}\,,P_{b(g)}$.

Considérons un $(n-1)$-cocycle continuement à croissance lente $\varphi_{g_0\cdots g_{n-1}}(z)$, et désignons par $\bar\varphi_{g_0\cdots g_{n-1}}(z)$ la fonction continue définie de $\big(O(n)\big)^n$ à valeurs dans $S'(\mathbb{C}^n)$ dont il provient.

Nous formons

$$\int_{O(n)} \bar\varphi_{g_0\cdots g_{n-2},g}(z_1,\ldots,z_n)\;.\;\varphi(z_1,\ldots,z_n\,;g)dg=\bar\psi_{g_0\cdots g_{n-2}}$$

qui a un sens et qui est fonction continue de $(0(n))^{n-1}$ à valeurs dans $S'(\mathbb{C}^n)$ et nous désignons par $\psi_{g_0\cdots g_{n-2}}$ la restriction de $\bar{\psi}_{g_0\cdots g_{n-2}}$ à $\Omega_{g_0\cdots g_{n-2}}$. Le cobord de la cochaîne $\psi_{g_0\cdots g_{n-2}}$ est $\varphi_{g_0\cdots g_{n-1}}$. En effet, on a:

$$\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\bar{\psi}_{g_0\cdots\hat{g}_h\cdots g_{n-1}} = \int_{0(n)}\Big(\sum(-1)^h\bar{f}_{g_0\cdots\hat{g}_h\cdots g_{n-1};g}\Big)\cdot\varphi(g)dg$$

Prenant l'image par restriction dans $S'(\Omega_{g_0\cdots g_{n-1}})$ il vient de

$$\Big(\sum(-1)^h\varphi_{g_0\cdots\hat{g}_h\cdots g_{n-1},g}\Big)\cdot\varphi(g) = \varphi_{g_0\cdots g_{n-1}}\cdot\varphi(g)\ ,$$

$$\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\psi_{g_0\cdots\hat{g}_h\cdots g_{n-1}} = \varphi_{g_0\cdots g_{n-1}}\cdot\int\varphi(g)dg = \varphi_{g_0\cdots g_{n-1}}$$

Nous formons alors, $d''\psi_{g_0\cdots g_{n-2}} = \varphi_{g_0\cdots g_{n-2}}$

$d''\psi_{g_0\cdots g_{n-2}}$ est la restriction à $\Omega_{g_0\cdots g_{n-2}}$ de $d''\bar{\psi}_{g_0\cdots g_{n-2}}$ donc les $\varphi_{g_0\cdots g_{n-2}}$ forment un cocycle continuement à croissance lente, etc.

Il existe donc un processus de Weil continuement à croissance lente permettant de passer de φ à sa valeur au bord si φ est continuement à croissance lente. C'est, bien entendu, la même chose dans le cas de $\mathcal{D}'$.

Admettons maintenant ceci: soit $f_{g_0\cdots g_{n-1}}$ un $(n-1)$-cocycle du recouvrement de $\complement\,\mathbb{R}^n$ par les Ω_g à valeurs fonctions holomorphes à croissance lente. On désigne par $F_{g_0\cdots g_{n-1}}$ le prolongement canonique de $f_{g_0\cdots g_{n-1}}$; *on suppose que* $(g_0\ldots h_{n-1})\to F_{g_0\cdots g_{n-1}}$ *fonction définie de* $(O(n))^n$ *à valeurs dans* $S'(\mathbb{C}^n)$ *est continue.*

Le lecteur vérifiera aisément que cette propriété est vraie pour un cocycle de Fourier-Carleman.

Nous supposons que $\int dg=1$ et nous considérons la partition $g\to k\,.\,X(g)$ où $X(g)$ est la fonction caractéristique de l'ouvert Ω_g. On a clairement $k=\frac{1}{2}$

Désignons par $T_{g_0\cdots g_{n-1}}$ la valeur au bord de $f_{g_0\cdots g_{n-1}}$. On vérifie aisément que $T_{g_0\cdots g_{n-1}}$, fonction symétrique de l'ensemble des indices, est continue à valeurs dans $S'(\mathbb{R}^n)$.

PROPOSITION 1: *Pour tout cocycle de Fourier-Carleman, et tout recouvrement fini* $\mathcal{U}$ *extrait des* Ω_v *on a:*

$$\delta\varphi = \delta(\varphi^{\mathcal{U}}) = 2^n \,.\, \int \cdots \int T_{g_0 \cdots g_{n-1}} dg_0 \ldots dg_{n-1}$$

DÉMONSTRATION: Formons $\overline{\Phi}_{g_0 \cdots g_{n-2}} = 2 \int F_{g_0 \cdots g_{n-1}} X(g_{n-1}) dg_{n-1}$

$\Phi_{g_0 \cdots g_{n-2}}$ désignera la restriction de $\overline{\Phi}_{g_0 \cdots g_{n-2}}$ à $\Omega_{g_0 \cdots g_{n-2}}$.

Posons, $F_{g_0 \cdots g_{n-2}} = 2 \int f_{g_0 \cdots g_{n-1}} d'' X(g_{n-1}) dg_{n-1}$ $f_{g_0 \cdots g_{n-2}}$ désignera la restriction de $F_{g_0 \cdots g_{n-2}}$ à $\Omega_{g_0 \cdots g_{n-2}}$ puis,

$$\Phi_{g_0 \cdots g_{n-3}} = 2^2 \underbrace{\int \int}_{2} F_{g_0 \cdots g_{n-2}} X(g_{n-2}) d'' x(g_{n-2}) dg_{n-2} dg_{n-1}, \ldots$$

les f, Φ forment un processus de Weil continuement à croissance lente grâce aux $\overline{\Phi}, F$.

Son aboutissement en est:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n . 2^n \underbrace{\int \cdots \int}_{n} F_{g_0 \cdots g_{n-1}}(x) \,.\, \delta(y) d\bar{z} dg_0 \ldots dg_{n-1}$$

$$= i^n \left(\underbrace{\int \cdots \int}_{n} T_{g_0 \cdots g_{n-1}}(x) dg_0 \ldots dg_{n-1} \right) . \delta(y) d\bar{z} \qquad \text{C. q. f. d.}$$

THÉORÈME 1: *La valeur au bord d'un cocycle de Fourier-Carleman de la distribution* T *de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *est égale à* $\mathcal{F}T$.

DÉMONSTRATION: Il suffit de vérifier ceci avec un recouvrement fini $\mathcal{U}$, par exemple en prenant $(n+1)$ vecteurs $(v_0, \ldots, v_n)$ tels que $(v_0, \ldots, v_{n-1})$, $(v_1, \ldots, v_n)$, $(v_2, \ldots, v_n, v_0), \ldots,$ soient orientés dans le bon sens, et tels que:

$$\bigcup_h \Gamma(v_0, \ldots, \hat{v}_h, \ldots, v_n) = \mathbb{R}^n$$

Alors on a $T = \sum (-1)^h T_{\Gamma(\wp_0 \ldots \hat{\wp}_h \ldots \wp_n)}$

$$\varphi_{\wp_0 \ldots \hat{\wp}_h \ldots \wp_n}(T)(z) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} T_{\Gamma(\wp_0 \ldots \hat{\wp}_h \ldots \wp_n)}(x) e^{-i<x,z>} \, . \, dx$$

et $\delta\varphi_{\wp_0 \ldots \hat{\wp}_h \ldots \wp_n}(T) = \mathfrak{F} T_{\Gamma(\wp_0 \ldots \hat{\wp}_h \ldots \wp_n)}$

d'où: $\sum_h (-1)^h \delta\varphi_{\wp_0 \ldots \hat{\wp}_h \ldots \wp_n}(T) = \sum (-1)^h \mathfrak{F} T_{\Gamma(\wp_0 \ldots \hat{\wp}_h \ldots \wp_n)} = \mathfrak{F} T$ C. q. f. d.

2. Valeur au bord d'une fonction holomorphe dans un «cône» convexe

Soit Ω un convexe de $\mathbb{C}^n$ de la forme $\Theta \times i\Theta_0$. Nous recouvrons $\complement_\Omega \Theta$ par les ouverts $\Omega_\wp$ où $\Omega_\wp = \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times iP_\wp)$. Soit Γ un cône strictement convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide et $\complement\,\Gamma$ son complémentaire.

Nous disons que φ a son support dans $\Theta \times i \complement\,\Gamma$, si pour tout système d'indices tel que $P_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}} \cap \Gamma \neq \emptyset$ on a $\varphi_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}} = 0$. Choisissons $\wp_0 \ldots \wp_{n-1}$ tels que $P_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}} \subset -\Gamma$. Nous considérons alors le recouvrement de $\complement\,\Theta$ défini par les ouverts $\Theta \times iP_{\pm\wp_j} j = 0, \ldots, (n-1)$ et nous considérons la restriction de φ à ce recouvrement. Notre hypothèse fait que $\varphi_{\pm\wp_0 \ldots \pm\wp_{n-1}} = 0$ sauf éventuellement $\varphi_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}}$ donc $\delta\varphi = T_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}}$ où $T_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}}$ est la valeur au bord de $\varphi_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}}$. Considérons un indice $\wp_n$ tel que $\Omega_{\wp_0 \ldots \hat{\wp}_{n-1} \wp_n} \subset \Theta \times (-i\Gamma)$ et tel que $P_{\wp_0 \ldots \wp_n} \neq \emptyset$. Alors pour tout $h \neq n, (n-1)$ on a

$$P_{\wp_0 \ldots \hat{\wp}_h \ldots \wp_n} \cap (-\Gamma) \neq \emptyset$$

donc la condition des cocycles s'écrit:

$$\varphi_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}} - \varphi_{\wp_0 \ldots \hat{\wp}_{n-1} \ldots \wp_n} = 0$$

C'est à dire que les deux fonctions sont prolongement analytique l'une de l'autre. Si $P_{\wp'_0 \ldots \wp'_{n-1}} \subset -\Gamma$ il sera, de proche en proche, possible de passer de $\varphi_{\wp_0 \ldots \wp_{n-1}}$

à $\varphi_{\nu'_0\dots\nu'_{n-1}}$. C'est à dire que $\varphi_{\nu_0\dots\nu_{n-1}}$ se prolonge analytiquement au cône $-\Gamma$ et est localement à croissance lente au voisinage du sommet vu l'hypothèse faite sur le cocycle φ.

Réciproquement, montrons que la donnée d'une fonction holomorphe φ dans $\Theta\times(-i\Gamma)$ (localement) à croissance lente détermine un cocycle à support dans $\Theta\times i(\complement\,\Gamma)$. Le cône Γ étant supposé strictement convexe admet une base compacte convexe et de dimension $(n-1)$. Si M est un point frontière de B nous considérons la génératrice $((M))=\{\lambda M\,|\,\lambda\geqslant 0\}$ puis $\Theta\times i((M))$. Un changement de base peut ramener au cas où $((M))=\{y_1=\dots=y_{n-1}=0\}$. Nous considérons la forme $\omega=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1},z_n)\delta(y_1\dots y_{n-1})d\bar z_1\wedge\dots\wedge d\bar z_{n-1}$. Sa valeur au bord est $\varphi(x)\,.\,\delta(y)d\bar z$. Soit P un demi-espace partageant $-\Gamma$, donc tel qu'on puisse trouver $P_{1\dots n-1}$ tel que $P\cap P_{1\dots n-1}\subset-\Gamma$.

Il est possible de choisir dans P une primitive de ω à support dans $-\Gamma$. En effet si la restriction de ω à P est 0 on prend 0, sinon on choisit un arc, ouvert du bord d'un convexe, σ^1_P, dans la frontière de B et de bord $(M,-N)$ où $N\in\partial P$. Nous considérons ensuite la «variété» de dimension $(n-2)$ $\Theta\times iS^1_P$ où S^1_P est le cône de base σ^1_P. Soit $\delta''(\Theta\times iS^1_P)$ la forme de type $(0,n-2)$ qui lui est naturellement associée (si la variété est linéaire et incluse dans $y_1=\dots=y_{n-2}=0$ c'est $\varphi(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1},y_{n+1},x_n,y_n)\delta(y_1,\dots,y_{n-2})d\bar z_1\wedge\dots\wedge d\bar z_{n-2})$. Poursuivons la construction du cocycle. Soient P_{g_i} et P_{g_j} deux demi-espaces tels que $\partial P_{g_i,g_j}$ rencontre l'intérieur de Γ et de $-\Gamma$; ce qui revient au même tel qu'il existe $P_{i_0\dots i_{n-3}}$ tel que $P_{g_i,g_j}\cap P_{i_0\dots i_{n-3}}\subset-\Gamma$.

Alors on peut trouver un ouvert $\sigma^2_{P_{g_i,g_j}}$ dans le bord d'un convexe tel que

$$\partial\sigma^2_{P_{g_i,g_j}}=\sigma^1_{P_{g_i}}-\sigma^1_{P_{g_j}}+\delta_{g_ig_j}\quad\text{où}$$

$$\delta_{g_ig_j}\subset(\partial P_{g_i}\cap\partial P_{g_j})\quad\text{et}\quad\sigma^2_{P_{g_ig_j}}\subset\overline{P}_{g_i,g_j}\cap\partial B.\quad\text{Formons}\quad S^2_{P_{g_i,g_j}}$$

Nous prendrons comme primitive pour la forme

$$\varphi\,.\left[\delta''(\Theta\times iS^1_{P_{g_i}})-\delta''(\Theta\times iS^1_{P_{g_j}})\right],\quad\text{la forme}$$

$\varphi\,.\,(\delta''(\Theta\times iS^2_{P_{g_i,g_j}}))$ qui a bien son support comme exigé. Si le processus de Weil a été poussé jusqu'à l'ordre k soient $P_{g_0},\dots,P_{g_k}(k+1)$ demi-espaces tels que $\partial P_{g_0\cdot g_k}\cap\mathring{\widehat{\Gamma}}\neq\emptyset$, $\partial P_{g_0\cdots g_k}\cap-\mathring{\widehat{\Gamma}}\neq\emptyset$. Il est possible de trouver

$P_{i_0 \ldots i_{n-k-2}}$ tel que $P_{g_0 \ldots g_k} \cap P_{i_0 \ldots i_{n-k-2}} \subset -\Gamma$. On en déduit que les $P_{g_0 \ldots \hat{g}_h \ldots g_k}$ satisfont à la propriété analogue et qu'on peut trouver un ouvert du bord d'un convexe $\sigma^{h+1}_{g_0 \ldots g_k}$ tel que $\partial \sigma^{k-1}_{g_0 \ldots g_k} = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h \sigma^k_{g_0 \ldots \hat{g}_h \ldots g_k} \cup \delta_{g_0 \ldots g_k}$ où $\delta_{g_0 \ldots g_k} \subset \bigcup_{j=0}^{k} \partial P_{g_i}$, et inclus dans $\partial B \cap \bar{P}_{g_0 \ldots g_k}$. On désignera par $S^{k+1}_{g_0 \ldots g_k}$ le cône de base $\sigma^{k+1}_{g_0 \ldots g_k}$ et on prendra comme primitive de la restriction dans $P_{g_0 \ldots g_k}$ de $\varphi \,.\, \sum (-1)^h \delta''(\Theta \times iS^k_{P_{g_0 \ldots \hat{g}_h \ldots g_n}})$ la forme $\varphi \,.\, \delta''(\Theta \times iS^{k+1}_{g_0 \ldots g_k})$. Si $P_{g_0 \ldots g_k}$ ne satisfait pas aux conditions précédentes et si $\omega_{g_0 \ldots g_k}$ est la forme d''—fermée qu'il s'agit d'intégrer on prendra une primitive $\tilde{\omega}$ compatible avec la condition bornologique (*) choissant en outre, si

$$\omega_{g_0 \ldots g_k} = 0 \ , \ \tilde{\omega}_{g_0 \ldots g_k} = 0 \,.$$

Enfin, si $P_{g_0 \ldots g_{n-1}} \subset -\Gamma$ $\varphi \,.\, \delta''(\Theta \times iP_{g_0 \ldots g_{n-1}}) = \varphi_{g_0 \ldots g_{n-1}} \,.\, d\bar{z}$ sera la primitive cherchée. Maintenant si $P_{g_0 \ldots g_{n-1}} \cap \Gamma \neq \emptyset$ montrons que $\varphi_{g_0 \ldots g_{n-1}} = 0$ grâce aux choix faits. De $P_{g_0 \ldots g_{n-1}} \cap \Gamma \neq \emptyset$ nous tirons que pour tout h, $0 \leqslant h \leqslant n-1$, on a $P_{g_0 \ldots \hat{g}_h \ldots g_{n-1}} \cap \Gamma \neq \emptyset$, donc $P_{g_0 \ldots \hat{g}_h \ldots \hat{g}_k \ldots g_{n-1}} \cap \Gamma \neq \emptyset$, etc...

Si donc P_{g_h} et P_{g_k} sont deux tels demi-espaces, quand leurs frontières rencontrent toutes les deux $-\hat{\mathring{\Gamma}}$, les primitves $\tilde{\omega}_{g_h}$ et $\tilde{\omega}_{g_k}$ sont choisies comme indiqué plus haut donc la restriction de $\tilde{\omega}_{g_h} - \tilde{\omega}_{g_k}$ à $P_{g_h g_k}$ a son support dans $-P \cap P_{g_h g_k}$ ainsi que la primitive (qui est soit 0 soit une primitive choisie comme indiqué). Si une seule des deux frontières rencontre $-\hat{\mathring{\Gamma}}$ c'est que le demi-espace associé à l'autre ne rencontre pas $-\Gamma$ puisqu'il contient des points de Γ donc $\tilde{\omega}_{g_h, g_k} = 0$.

De façon plus générale considérons $P_{h_0 \ldots h_r}$ tel que $\partial P_{h_0 \ldots h_r} \cap -\Gamma \neq \emptyset$ les h_s étant pris dans les $g_0 \ldots g_{n-1}$. Si l'un des $\partial P_{h_0 \ldots \hat{h}_j \ldots h_r}$ ne rencontre pas $-\hat{\mathring{\Gamma}}$ alors on a $P_{h_0 \ldots \hat{h}_j \ldots h_r} \cap -\hat{\mathring{\Gamma}} = \emptyset$ puisque $P_{h_0 \ldots \hat{h} \ldots h_r} \cap \hat{\mathring{\Gamma}} \neq \emptyset$. Donc $P_{h_0 \ldots h_r} \cap -\Gamma = \emptyset$. En conséquence $\partial P_{h_0 \ldots \hat{h}_j \ldots h_r} \cap -\Gamma \neq \emptyset$ pour tout j et les $\tilde{\omega}_{h_0 \ldots \hat{h}_j \ldots h_r}$ sont les primitives choisies comme indiqué plus haut, donc

(*) C'est à dire que l'ensemble des telles primitives doit, après prolongement, former un ensemble borné dans $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{S}'$).

$\tilde{\omega}_{h_0\cdots h_r}$ a son support dans $-\Gamma$. Si $\partial P_{h_0\cdots h_r} \cap -\hat{\mathring{\Gamma}}=\emptyset$ c'est que $P_{h_0\cdots h_r} \cap -\Gamma=\emptyset$. On fait l'hypothèse de récurrence que $\partial P_{h_0\cdots \hat{h}_j \cdots h_r} \cap -\hat{\mathring{\Gamma}}=\emptyset$ entraîne $\tilde{\omega}_{h_0\cdots \hat{h}_j\cdots h_r}=0$. Alors $\sum(-1)^j \tilde{\omega}_{h_0\cdots \hat{h}_j\cdots h_r}$ ne fait intervenir que des termes qui ont leur support dans Γ, donc dont la restriction à $P_{h_0\cdots h_r}$ est égale à zéro. En conséquence le résultat s'en suit. C. q. f. d.

Remarque: Nous n'avons pas insisté sur la démonstration du fait que le cocycle peut être choisi uniformément borné car cela résulte d'une analyse précise de la méthode employée dans l'appendice A. Nous ne savons pas par contre démontrer que le cocycle peut être pris continu par rapport aux indices. Notons que les cocycles bornés sont suffisants pour intégrer par rapport à une mesure dg atomique.

Enfin si $\delta\varphi=0$, $\delta\varphi_{i_0\cdots i_{n-1}}=0$ donc la fonction associée au cocycle est nulle. Donc on a

Proposition 2: *Soit $\Omega=\Theta\times i\Theta_0$ un convexe de $\mathbb{C}^n$ et Γ un cône convexe de $\mathbb{R}^n$.*

Tout $(n-1)$-cocycle ψ holomorphe uniformément (localement) à croissance lente du recouvrement de $\complement_\Omega\Theta$ par les ouverts $(\Theta\times iP_v)\cap\Omega$ à support dans $(\Theta\times i\complement\,\Gamma)\cap\Omega$ définit une fonction φ holomorphe dans $(\Theta\times(-i\Gamma))\cap\Omega$ (localement) à croissance lente dans cet ouvert. Toute telle fonction provient d'un tel cocycle et la correspondance $\varphi\to\delta\psi$ est biunivoque $\delta\psi$ étant égal à la valeur au bord de la fonction φ.

En corollaire: *les valeurs au bord des cocycles à support dans $\Theta\times i\complement\,\Gamma$ forment une algèbre obtenue par transport de structure de la structure multiplicative usuelle des fonctions φ holomorphes dans $\Theta\times(-i\Gamma)$, par l'application $\varphi\to\delta\varphi$.*

Démonstration: Nous voulons dire que nous définissons $\delta\varphi\,.\,\delta\psi$ par $\delta(\varphi\,.\,\psi)$. Le seul point à vérifier est que le produit de deux fonctions holomorphes dans $\Theta\times(-i\Gamma)$ (localement) à croissance lente est encore (localement) à croissance lente ce qui est clair. C. q. f. d.

Dans le cas de $\mathcal{S}'$ on a la

Proposition 3: *Soit Γ un cone strictement convexe d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ et Γ^* le cône dual. Les T de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ valeurs au bord des cocycles uniformément à croissance lente (relativement au recouvrement de $\complement\,\mathbb{R}^n$ par les demi-espaces $\mathbb{R}^n\times iP_v$) à support dans $\mathbb{R}^n\times i\complement\,(-\Gamma)$ sont les transformées de Fourier des distri-*

butions S de $S'(\mathbb{R})$ à support dans Γ^*, et l'isomorphisme de Fourier est un isomorphisme d'algèbre entre l'algèbre des valeurs au bord et l'algèbre des distributions de $S'(\mathbb{R}^n)$ à support dans Γ^* munie du produit défini par la convolution.

DÉMONSTRATION: Si $P_{v_0 \dots v_{n-1}} \subset -\Gamma$ c'est que $\Gamma_{(v_0 \dots v_{n-1})} \supset \Gamma^*$. Soit S^j une distribution ayant son support dans Γ^*.

Toute distribution tempérée à support dans Γ^* est dérivée d'une fonction continue (*) à support dans Γ^*. Donc on peut faire en sorte que $S^j_{\Gamma(v_0 \dots v_{n-1})} = S^j$ si $\Gamma(v_0 \dots v_{n-1}) \supset \Gamma^*$. Dans cette hypothèse il vient:

$$\int_{\Gamma(v_0 \dots v_{n-1})}^{\bullet} e^{-i(x_1 z_1 + \dots + x_n z_n)} \, . \, S^j(x_1 \dots x_n) dx_1, \dots, dx_n =$$

$$= \pm \int_{\mathbb{R}^n}^{\bullet} e^{-i(x_1 z_1 + \dots + x_n z_n)} \, . \, S^j(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \varphi^j_{v_0 \dots v_{n-1}}(z_1, \dots, z_n)$$

La fonction $\varphi^j_{v_0 \dots v_{n-1}}(z_1, \dots, z_n)$ est donc prolongeable analytiquement dans $(\mathbb{R}^n \times (-i\Gamma))$. Maintenant, la condition $P_{v_0 \dots v_{n-1}} \cap (-\Gamma) \neq \emptyset$ équivaut à $\Gamma_{(v_0 \dots v_{n-1})} \cap \Gamma^* = \emptyset$. Car en effet le polaire de $P_{v_0 \dots v_{n-1}} \cap (-\overline{\Gamma})$ est l'enveloppe convexe de la réunion de $-\Gamma^*$ et de $\Gamma_{(v_0 \dots v_{n-1})}$ qui est donc le polaire d'un cône d'intérieur non vide et est strictement convexe donc ne contient pas de points $+\Gamma^*$, et réciproquement. Alors sous cette hypothèse

$$\varphi_{v_0 \dots v_{n-1}} = \int_{\Gamma(v_0 \dots v_{n-1})}^{\bullet} 0 = 0$$

puisqu'on a pris la fonction continue engendrant la décomposition de S^j à support dans $\Gamma_{v_0 \dots v_{n-1}}$. Ceci montre que le cocycle φ est du type indiqué et que la fonction associée est la fonction φ^j.

En outre dans ce cas le cocycle construit est bien continu. En sens inverse l'assertion résultera du

LEMME: *Soit T valeur au bord d'une fonction $f(z)$, définie pour $y_1 > 0, \dots y_n > 0$, à croissance lente dans cet ouvert. Alors $\mathfrak{F} T$ a son support dans $x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0$.*

Nous admettons ce lemme qui résulte d'ailleurs immédiatement du cas de une variable [cf 18 pour un théorème de Plancherel plus général et l'appendice A].

(*) Car Γ^* a un point intérieur.

D'après ce lemme si le cocycle γ a son support dans $\Theta \times i(\complement(-\Gamma)),\delta\gamma$ est valeur au bord de chaque $\varphi_{(\nu_0 \ldots \nu_{n-1})}$ où $P_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}} \subset \Gamma$, donc $\mathfrak{J}\delta\gamma$ a son support dans $\Gamma_{(\nu_0 \ldots \nu_{n-1})}$. Ceci étant vrai pour tous les $\Gamma_{(\nu_0 \ldots \nu_{n-1})}$ qui contiennent Γ le résultat s'en suit.

Enfin, de $$\int\limits_{\Gamma(\nu_0 \ldots \nu_{n-1})} e^{-i(x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n)} S^1 * S^2(x) \,.\, dx = \varphi^1_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}} \,.\, \varphi^2_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}$$

pourvu que $\Gamma_{(\nu_0 \ldots \nu_{n-1})}$ contienne le support de S^1 et de S^2 résulte notre assertion sur la multiplication. C. q. f. d.

Pour terminer notons la

Proposition 4: *Le nombre minimum de fonctions holomorphes définies dans des convexes de $\complement\, \mathbb{R}^n$ pour représenter δ comme somme de leurs valeurs au bord dans un voisinage de l'origine est* $(n+1)$.

(Nous supposons les convexes de la forme $\Theta \times i\Theta_j$ où Θ est un voisinage de zéro).

Démonstration: Supposons données n-fonctions $f_1, \ldots, f_n$ dans des ouverts convexes Θ_j de la forme $\Theta \times i\Theta_j$.

Alors la réunion des Θ_j ne peut pas être $\complement\{0\}$ tout entier et il est aisé de fabriquer au pire, $(n+1)$ demi-espaces $P_0, \ldots P_n$ tels que $\Theta_j \supset P_{0 \ldots \hat{j} \ldots n} \cap \Omega$ et $P_{0 \ldots n-1}(\bigcup\limits_j \Theta) = \emptyset$ où Ω est un voisinage convexe de Θ dans $\mathbb{C}^n$.

Alors il existe des $\varphi_{0 \ldots \hat{j} \ldots n}$ dont la valeur au bord est T et $f_j - \varphi_{0 \ldots \hat{j} \ldots n}$ est un cobord du recouvrement. Donc $\varphi_{0 \ldots n}$ est un cobord dans $\left(\bigcup\limits_{j=0}^{n-1} P_j\right) \cap \Omega$. On sait que $\mathfrak{J}\delta = k\,.\,1$. Soit Γ le cône engendré par les vecteurs de base de $\mathbb{C}^n$. On a:

$$\int \cdots \int e^{-i(x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n)} \,.\, dx = \frac{1}{z_1} \cdots \frac{1}{z_n} \,.\, (i)^{-n}$$

En vertu de ce qui précède, après un changement de coordonnées tout revient à démontrer que pour la fonction $f(z_1, \ldots, z_n) = \dfrac{1}{z_1 - 1} \cdots \dfrac{1}{z_n - 1}$ holomorphe dans le polydisque $|z_1|<1,\ldots,|z_n|<1$, il n'existe aucun $R>1$ tel que f soit somme de fonctions f_j où f_j est holomorphe dans le polydisque

$$\left\{|z_1|<1,\ldots,\widehat{|z_j|}<1,\ldots,|z_n|<1\,;|z_j|<R\right\}$$

Reprenons les calculs des lemmes du § 3 chapitre IV.

Si on pose $\quad f_j(z_1,\ldots,z_n)=\sum a^j{}_{k_1\ldots k_n}\,.\,z_1{}^{k_1}\ldots z_n{}^{k_n}$

pour tout $\varepsilon>0$ on a:

$$|a^j{}_{k_1\ldots k_n}|\leqslant M(\varepsilon)(1+\varepsilon)\,.\,{}^{k_1+\ldots+k_{j-1}+k_{j+1}+\ldots+k_n}\,.\,R^{-k_j}\,.$$

Si on prend un terme $b_{k_1\ldots k_n}$ de la série de Taylor de $\sum_j f_j$ tel que $k_h\geqslant k_1$ pour tout $h\geqslant 1$.

Il vient:

(1) $$|b_{k_1\ldots k_n}|\leqslant M(\varepsilon)\,.\,\sum_j(1+\varepsilon)\,.\,{}^{k_1+\ldots+k_{j-1}+k_{j+1}+\ldots+k_n}\,.\,R^{-k_j}$$

et

(2) $$\frac{(1+\varepsilon)^{k_1+\ldots+k_{j-1}+k_{j+1}+\ldots k_n}}{(1+\varepsilon)^{k_2+\ldots+k_n}}\,.\,\frac{R^{-k_j}}{R^{-k_1}}=\Big[(1+\varepsilon)\,.\,R\Big]^{k_1-k_j}$$

nombre inférieur à 1 si ε est suffisamment petit.

Donc il vient:

(3) $$|b_{k_1\ldots k_n}|\leqslant N(\varepsilon)\,.\,R^{-k_1}\,.\,(1+\varepsilon)^{k_2+\ldots+k_n}$$

Mais $\quad \dfrac{1}{(z_1-1)\ldots(z_n-1)}=(-1)^n\sum z_n{}^{n_1}\ldots z_n{}^{k_n}$

et le nombre $1_{k_1\ldots k_n}=1$ ne satisfait pas aux inégalités (3) lorsque $k_1\to\infty$. C. q. f. d.

APPENDICE A: — TRIVIALITÉ DE LA D''-COHOMOLOGIE À CROISSANCE LENTE. CAS D'UN CONVEXE

Soit Γ un convexe, ouvert de $\mathbb{C}^n$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Nous considérons les formes distributions de type p,q, $p+q=r$ en dz_j, $d\bar{z}_j$ $j=1,2,\ldots,r$ à coefficients dans $\mathcal{S}'(\Gamma\times U)$. On veut montrer que si ω est une forme de type (p,q) à coefficients dans $\mathcal{S}'(\Gamma\times U)$ et de degré $\geqslant 1$ en q alors il existe π de type $(p,q-1)$ à coefficients dans $\mathcal{S}'(\Gamma\times U)$ telle que $d_r''\pi=\omega$; et résultat analogue avec les formes de $\mathcal{S}'(\Gamma\times U)$ qui sont à coefficients holomorphes des $(n-r_0)$ dernières variables, c'est à dire les distributions T telles que $\dfrac{\partial T}{\partial \bar{z}_k}=0$ pour $r_0<k<n$ où $r_0>r$. La théorie des produits tensoriels d'espaces nucléaires du type $\mathcal{DF}$ [cf. GROTHENDIECK, A. — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Providence. Amer. Math. Soc. 1955 (Mem. Amer. Math. Soc. 16)] (ou une investigation directe) montre que $\mathcal{S}'(\Gamma\times U)=\mathcal{S}'(\Gamma)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{S}'(U)$ et le problème se ramène au cas de $\mathcal{S}'(\Gamma)$.

Plus généralement signalons le théorème suivant.

THÉORÈME: *Si E et F sont deux duals de Fréchet Schwartz dont l'un est nucléaire, d' et d'' des opérateurs de dérivation dans E et F qui sont des homomorphismes topologiques $d=d'\otimes 1+\eta d''$ où η est un isomorphisme de E sur F avec $\eta d'+d'\eta=0$, désignant par $H(E\,\hat{\otimes}\,F)$ l'homologie de $E\,\hat{\otimes}\,F$ par rapport à d par $H(E)$ celle de E par rapport à d', $H(F)$ celle de F par rapport à d'' on a*:

$$H(E\,\hat{\otimes}\,F)=H(E)\,\hat{\otimes}\,H(F)$$

DÉMONSTRATION: Nous renvoyons le lecteur au Séminaire Schwartz, année 1953-1954, exposé N.° 24 (Paris, Secrétariat mathématiques) où le théorème est démontré dans des hypothèses différentes, mais on constate que la même démonstration marche aussi dans le cas que nous considérons.

Ce théorème montre que le cas d'un ensemble $\Omega=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$ résulte du cas à une variable traité au chapitre I.

Notons par contre qu'il ne permettrait pas de démontrer le théorème III b même dans le cas de $\mathcal{S}'$ car la topologie de $H^1_{\mathcal{S}',\Gamma}(\mathbb{C};\mathcal{O})$ n'est pas séparée.

Pour démontrer le tbéorème on raisonne par récurrence cf [E] pages 55-56-57 à partir du lemme suivant.

LEMME: *Soit* Γ *un ouvert convexe de* $\mathbb{C}^n$ *et* T *une distribution de* $\mathcal{S}'(\Gamma)$ *holomorphe des s-dernières variables, c'est à dire*

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}_{n-s+1}} = \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_{n-s+2}} = \ldots = \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_n} = 0$$

Alors il existe, pour $k < n-s$, U *dans* $\mathcal{S}'(\Gamma)$ *telle que* $\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}_k} = T$ U *étant holomorphe des s-dernières variables.*

DÉMONSTRATION: Le lemme se démontre par transformation de Fourier. Plus précisément il conviendrait de dire par transformation de Fourier-Fourier Borel. Soit Γ un convexe de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$, que nous plongeons dans $\mathbb{C}^{p+q} = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$.

Pour tout $u \in \mathbb{C}^{p+q}$ nous considérons $\Lambda(u) = \sup\limits_{z\in\Gamma} (Im < z,u >)$. Nous désignerons par $H_{q,\gamma}(\Gamma)$ le sous-espace de $\mathcal{S}'(\Gamma)$ formé des distributions holomorphes des q-dernières variables. Si $f \in \mathcal{S}(\Gamma)$, cette fonction définit une forme linéaire continue $\bar{f}$ sur $H_{q,\gamma}(\Gamma)$. Nous désignons par transformée de Fourier--Borel mixte de f la fonction

$$\mathcal{F}\bar{f} = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q} f(x,\zeta) e^{i<(x,\zeta),u>} \, dx d\xi d\eta$$

où (x,ζ) désigne un point de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$, $\zeta = \xi + i\eta$. Alors $\mathcal{F}\bar{f}$ apparaît comme une fonction définie sur l'ensemble $\Gamma^* = \{u \mid \Lambda(u) < +\infty\}$, indéfiniment dérivable sur cet ensemble et jouissant de la propriété

$$|\mathcal{F}f(u) \cdot e^{-\Lambda(u)}| \quad \text{est à décroissance rapide sur } \Gamma^*.$$

En plus $\mathcal{F}\bar{f}(u)$ est holomorphe en un sens que nous allons préciser. L'ensemble (convexe) Γ^* est un cône. Un point M de Γ^* est $\mathbb{C}$-intérieur s'il existe une variété linéaire complexe passant par M et un voisinage de M dans cette variété appartenant à Γ^*. Parmi celles qui satisfont cette propriété il y en a toujours une de dimension maximale et alors tous les autres voisinages sont contenus dans l'intersection de sa trace sur Γ^* au voisinage de M. Nous disons que f est holomorphe en tous les points $\mathbb{C}$-intérieurs de Γ^* si elle l'est en chacun de ces tels voisinages.

$\mathfrak{F}\bar{f}(u)$ *est holomorphe en tout point* $\mathbb{C}$*-intérieur de* Γ^*.

Nous faisons l'hypothèse que Γ^* *contient au moins* $p+q$ *vecteurs* $\mathbb{C}$*-linéairement indépendants.*

Alors dans cette hypothèse on a le

THÉORÈME *La transformation de Fourier-Borel établit un isomorphisme entre le dual de* $H_{\gamma,q}(\Gamma)$ *et l'espace des fonctions* $F(u)$ *indéfiniment dérivables sur* Γ^*, *holomorphes en tout point* $\mathbb{C}$*-intérieur de cet ensemble, et telles que* $F(u) . e^{-\Lambda(u)}$ *soit à décroissance rapide.*

Indications sur la démonstration du théorème (*)

a) *la question de l'isomorphisme.*

La transformée de Fourier transforme l'espace $\mathcal{S}(\Gamma)$ en un espace de fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q}$. On obtient un germe de transformée de Fourier-Borel en prenant la restriction de $\mathfrak{F}\,\mathcal{S}(\Gamma)$ à $\{\xi_j + i\eta_j = 0\}$ $j = 1,2,\dots,q$.

L'application $\bar{f} \to \mathfrak{F}\bar{f}$ est un isomorphisme quand la transformée de Fourier est connue par la transformée de Fourier-Borel, donc par sa restriction à l'intersection des variétés $\xi_j + i\eta_j = 0$, et pour cela elle le sera si ce germe de transformée de Fourier-Borel est bord de fonction holomorphe des variables (ξ_j, η_j). Il en est bien ainsi sous l'hypothèse géométrique indiquée. Dans ces hypothèses on en conclut que les fonctions exponentielles à croissance lente dans Γ sont denses dans $H_{\gamma,q}(\Gamma)$.

b) *Inversion de la transformation de Fourier-Borel.*

Montrons maintenant que les fonctions satisfaisant aux hypothèses indiquées définissent un élément du dual. Pour cela on effectue une transformation de Laplace. A tout système de n vecteurs $u_1,\dots,u_n \in \Gamma^* (n = p + q)$

on associe $$\int_{\Gamma(u_1,\dots,u_n)} F(u) e^{-i<z,u>} du . = \Phi_{u_1,\dots,u_n}(z)$$

(*) Ce résultat est en un certain sens une généralisation des théorèmes 4-1, etc., de notre article «Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel». Journal d'Analyse Math. de Jérusalem, 1963 — et utilise la méthode indiquée en C. R. Acad. Sciences Paris, t. 255, pages 1845-1847.

on obtient ainsi une fonction $\Phi_{u_1\cdots u_n}(z)$ holomorphe en z dans l'intersection $P_{u_1\ldots u_n}$ des demi-espaces.

$$P_{u_j} = \{ z \mid \quad Im < z, u_j >> \wedge (u_j) \}$$

et qui se prolonge à $\bar{P}_{u_1\ldots u_n}$, uniformément lorsque $u_1, \ldots, u_n$ varient, en une fonction C^∞. On obtient un $(n-1)$ cocycle du recouvrement de $\complement\, \Gamma$ par les demi-espaces P_{u_j}, se prolongeant uniformément en une fonction C^∞. Alors, utilisant une partition C^∞ et continue relativement à ce recouvrement, d'une façon analogue à Chapitre V § 1 on en déduit une forme $\overset{0,n-1}{\omega}$ d''-fermée C^∞ jusqu'à la frontière à décroissance rapide à l'infini. L'intégrale, sur le bord de T, où $T \in H_{\gamma,q}(\Gamma)$, définit la forme linéaire cherchée.

Passons maintenant à la démonstration du lemme. Pour cela il suffit de vérifier l'hypothèse de division suivante:

Soit $F(u)$ satisfaisant aux conditions du théorème. Si cette fonction est formellement divisible par $\xi_k + i\eta_k$ alors le quotient satisfait aux mêmes hypothèses, qu'on vérifie trés aisément.

Cas d'exception: Si la dimension linéaire complexe de Γ^* est inférieure à $n+p$ c'est que le convexe Γ est produit d'un convexe qui satisfait à la condition et d'un espace linéaire complexe.

On conclut dans ce cas grâce à la formula de Künnett. S'il en est ainsi il faut noter que les exponentielles $e^{<z,u>}$, où $u \in \Gamma^*$, ne sont pas denses dans $H_{\gamma,q}(\Gamma)$; il faut considérer les exponentielles polynômes.

Notons encore que nous avons indiqué l'existence d'une formule de Künnett généralisée mais qu'on peut démontrer aisément le résultat en vérifiant que si $T \in H_{\gamma,q}(\Gamma)$ et $\Gamma = \Gamma_1 \times C$, T s'identifie à un polynôme de la dernière variable à coefficients dans $H_{\gamma,q-1}(\Gamma)$.

Enfin cette méthode donne directement la trivialité de la d''-cohomologie d'un convexe Γ.

Le cas de la cohomologie localement à croissance lente dans un ouvert Ω convexe inclus dans un ouvert Ω' est plus délicat car l'espace $\mathcal{D}'_{\gamma\, loc}(\Omega) = \varprojlim_{\Gamma} \mathcal{S}'(\Gamma \cap \Omega)$ Γ parcourant la famille des convexes compacts de Ω' (appendice B) n'est pas métrisable. Néanmoins nous allons employer la transformation de Fouriel-Borel en nous inspirant dans notre étude de la méthode décrite par B. Malgrange [M] (*) pour les équations avec second membre dans $\mathcal{D}'$. Si $p(x)$ est une fonction

(*) [*M*]: Malgrange, B. — *Sur la propagation de la régularité des équations à coefficients constants.* Bull. Math. de la Soc. Math. Phys. de la R. P. Roumaine, tome 3 (53) n.o 4, 1959, pp. 433-440.

convexe continue dans Ω' supérieure à $n+3$ et jouissant de la propriété suivante: l'ensemble des x tels que $p(x) < \lambda$ est relativement compact, on pose $\Omega_N = \{z \mid z \in \Omega, p(z) < N+1\}$ et on considère $\mathcal{D}'_{\Upsilon,p}$ l'espace des distributions dont la restriction à chaque Ω_N est somme finie de dérivées d'ordre inférieur ou égal à N de fonctions localement de carré intégrables dans $\Omega'_N = \{z \mid z \in \Omega', p(z) < N+1\}$. Son dual $\mathcal{D}_{\Upsilon,p}$ sera l'espace des fonctions φ à support compact dans Ω' et inclus dans $\overline{\Omega}$ qui, au voisinage de tout point x sont L^2—$[p(x)]$—fois dérivables. Le convexe Ω étant plongé dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$ on considère le sous-espace de $\mathcal{D}'_{\Upsilon,p}$ formé des distributions holomorphes des q dernières variables complexes qu'on notera $H_{\Upsilon,p,q}(\Omega)$. Désignons par $\wedge_l(u)$ la fonction $\sup\limits_{z \in \Omega_l} Im < z,u >$ et par $|u|$ la norme $\left(\sum u_j \bar{u}_j\right)^{\frac{1}{2}}$ $< z,u > = z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n$.

On a le

Lemme: *Si* $\sum \in H'_{\Upsilon,p,q}(\Omega)$, $\mathcal{F}\sum = F$ *est une fonction entière de type exponentiel qui satisfait à une inégalité:*

$$(1) \qquad |F(u)| \leqslant \sum_{l=1}^{N} \frac{A_l}{(1+|u|)^l} \quad exp \wedge_l(u)$$

Réciproquement il vient la

Proposition: *Si F est une fonction entière de type exponentiel qui satisfait à l'inégalité* (1) *elle est la transformée de Fourier-Borel d'un élément de* $H'_{\Upsilon,p+x+3,q}(\Omega_N)$.

Indiquons l'ébauche de la démonstration en nous appuyant sur [M].

Nous effectuons la transformation de Laplace et nous obtenons un $(n-1)$--cocycle du recouvrement du complémentaire de Ω_N par les demi-espaces et nous montrons que la forme de degré $(0,n-1)$ d''-fermée associée à ce cocycle se prolonge jusqu'à la frontière de Ω_N en une fonction qui, au voisinage de tout point de $\complement\, \Omega_N$ est $[p(x)]-n-3$ continuement différentiable. On en déduit le résultat après avoir vérifié que les fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{\Omega}_N$ sont denses dans $H_{\Upsilon,p+n-3,q}(\Omega_N)$.

Si $t_1,\ldots,t_n$ sont n vecteurs de l'espace $\mathbb{C}^n$ on considère l'intégrale

$$\int_{\Gamma(t_1\ldots t_n)} F(t) e^{-i<z,t>} = \Phi_{t_1\ldots t_n}(z)$$

définie dans $P_{t_1\ldots t_n}$ où $P_{t_j} = \{z \mid Im < z,t > > \wedge_N(t)\}$

Il faut maintenant prolonger $\Phi_{t_1 \ldots t_n}(z)$ ainsi que ses dérivées uniformément jusqu'à la frontière. On considère un voisinage fixe Ω' de Ω et x un point de $\complement\, \overline{\Omega}_N$. Comme en [M] on choisit un vecteur $C_t(x) \in \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $z \in \Omega'_N$ on ait: $Im < z-x, C_t(x) > \leqslant p(z)-p(x)$. On impose $|C_t(x)| < M$ et $C_t(x) \in \{t_1, \ldots, t_n\}_{\mathbb{R}}$. Quand la condition $x \in P_{t_1 \ldots t_n}$ est remplie on introduit le contour $\delta\Gamma_{(t_1 \ldots t_n)}$ défini comme suit. $Q_{t,h}$ désignant le demi-espace formé des vecteurs $u = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n$ avec $R_e \lambda_h > 0$, $\delta\Gamma_{(t_1 \ldots t_n)}$ est la trace de la variété

$$\Gamma(x; t) : \nu = C_t(x) \, log(1 + |\mu|) \quad (\lambda_j = \mu_j + i\nu_j)$$

dans $Q_{t,1,2 \ldots n} = Q_{t,1} \cap Q_{t,2} \cap \ldots\ldots$

Alors on a, pour tout y d'un voisinage $V(x)$ de x défini par $\varepsilon + M.|x-y| < \alpha$ où $0 < \varepsilon < \alpha < 1$ et quand $y \in P_{t_1 \ldots t_n}$, $|\varphi^{(k)}(y)| \leqslant C . \displaystyle\int_{\delta\Gamma(t_1 \ldots t_n)} (1 + |\xi|)^{-n-1-\alpha} . d\zeta$ si $k < [p(x)] - n - 2$, cf [M].

Et les intégrales $\displaystyle\int_{\delta\Gamma(t_1 \ldots t_n)} (1 + |\xi|)^{-n-1-\alpha} d\zeta$ sont bornées par une constante D qui ne dépend pas de $(t_1, \ldots, t_n)$ (*). Ensuite, on utilise une partition $\mathbb{C}^\infty$ continue de l'unité et uniformément bornée du recouvrement de $\complement\, \Omega_N$ par les P_t.

C'est à dire qu'on impose $\sup_g |\varphi^{(s)}(g)| \leqslant M(s)$ pour tout s. On vérifie qu'une telle partition existe bien. La procédure de Weil continue (Chapitre V) conduit à une forme d''-fermée de type $(0, n-1)$, à coefficients $\mathbb{C}^\infty$ dans le complémentaire de $\overline{\Omega}_N$ et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $[p(x)] - n - 2$ sont uniformément bornées. Donc ces coefficients se prolongent en des fonctions $[p(x)] - n - 3$ continuement différentiables sur $\complement\, \Omega_N$. Ceci conduit au résultat.

Utilisant la méthode de [M] on en tire que pour tout opérateur différentiel à coefficients constants D on a:

$$DH_{\Upsilon\, loc, p, q}(\Omega) = DH_{\Upsilon\, loc, p, q}(\Omega) \qquad \text{en particulier.}$$

Si T est une distribution de $\mathcal{D}'_{\Upsilon loc}(\Omega)$ ($\Omega \subset \Omega'$ ouverts convexes de $\mathbb{C}^n$) et holomorphe des s-dernières variables il existe U dans $\mathcal{D}'_{\Upsilon loc}(\Omega)$ holomorphe des s-dernières variables telle que $\dfrac{\partial U}{\partial \bar{z}_1} = T$. D'où la trivialité de la d''-cohomologie à coefficients distributions localement à croissance lente.

(*) Cet artifice dû essentiellement à L. Ehrenpreis est inutile lorsque Ω est un convexe d'intérieur non vide et de frontière strictement convexe.

Cette méthode justifie aussi la validité du procédé de Runge invoqué dans chap. IV § 3 proposition 5 et ante scriptum. Il nous semble que, pour $n>1$, l'appel à un argument de ce genre est indispensable, alors que pour $n=1$ comme on l'a vu au chapitre I il suffit d'utiliser un procédé de Runge classique.

Dans le problème des cohomologies avec conditions de croissance Monsieur Hörmander a obtenu des résultats très généraux (cf. Malgrange, B. — *Majorations à priori* et *d''-cohomologie.* In Séminaire Bourbaki mai 1964-pp. 275-01—275-06. Paris, Secrétariat Mathématique). L'article de M. L. Hörmander est paru (cf. [L]).

Nous esquissons ici la question de la représentation de la topologie de $\mathcal{S}',\mathcal{D}'$ par celle d'un espace de cocycles.

Si Γ est un convexe ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{S}'(\Gamma)$ est muni d'une topologie de dual de Fréchet nucléaire (donc de dual de Fréchet Schwartz) et on munira si Ω est un convexe ouvert de $\mathbb{C}^n \mathcal{D}'_{\gamma\, loc}(\Omega)$ de la topologie $\varprojlim_{\Gamma} \mathcal{S}'(\Gamma \cap \Omega)$ Γ parcourant la famille des convexes bornés de $\mathbb{C}^n$.

On obtient ainsi un espace complet.

D'autre part, $\mathcal{D}'_{\gamma\, loc}(\Omega)$ peut aussi être considéré comme le dual de l'espace suivant : Si Γ est un convexe borné on considère $\mathcal{S}(\Gamma)$ puis $\varinjlim_{\Gamma} \mathcal{S}(\Gamma \cap \Omega)$ Γ parcourant la famille des parties bornées de $\mathbb{C}^n$. Cet espace est un espace $\mathfrak{L}$-$\mathfrak{F}$ *strict* nucléaire donc un espace de Schwartz complet ; on en déduit que son dual s'identifie algébriquement et topologiquement à $\varprojlim_{\Gamma} \mathcal{S}'(\Gamma \cap \Omega)$ qui, en conséquence, d'après un théorème de L. Schwartz (*Théorie des distributions à valeurs vectorielles.* Ann. Inst. Fourier Grenoble T. 7, 1957, pp. 1-141) est ultra bornologique.

L'espace $H_{\gamma\, loc}(\Omega)$ apparaît comme un sous-espace fermé de $\mathcal{D}'_{\gamma\, loc}(\Omega)$ ou encore comme limite projective des espaces $H_\gamma(\Gamma \cap \Omega)$. J'ignore si cet espace est bornologique dans tous les cas. Il l'est du moins si Ω est strictement convexe.

Introduisons maintenant les espaces de cocycles.

Étant donné un recouvrement fini convexe $\Omega_{i_0},\ldots,\Omega_{i_N}$ de $\complement\, \Theta$, dans Ω voisinage complexe convexe de Θ dans $\mathbb{C}^n$ on considère l'espace

$$\prod_{i_0\cdots i_{n-1}} H_{\gamma\, loc}(\Omega_{i_0\cdots i_{n-1}})$$

ou $\prod_{i_0\cdots i_{n-1}} H_\gamma(\Omega_{i_0\cdots i_{n-1}})$, l'espace des $(n-1)$-cocycles localement à croissance lente (à croissance lente), est un sous-espace fermé de cet espace. Dans le premier cas j'ignore tout à fait s'il est bornologique.

Maintenant si $f_{i_0\cdots i_{n-1}} \in H_{\gamma\, loc}(\Omega_{i_0\cdots i_{n-1}})$ sa valeur au bord $T_{i_0\cdots i_{n-1}}$ dépend manifestement continuement de $f_{i_0\cdots i_{n-1}}$ puisqu'elle s'obtient par composition de prolongements canoniques et d'opérateurs d''. Donc la valeur au bord d'un élément z de Z va dépendre continuement de z dans l'espace Z des cocycles. Ceci montre que l'application $\delta = \partial \circ \lambda$ est continue en particulier l'espace des cobords est fermé (dans les deux cas).

Donc il est possible de définir une topologie séparée sur $H^{n-1}_{\Upsilon loc}(\mathcal{U}; O)$ (resp. sur $H^{n-1}_{\Upsilon}(\mathcal{U}; O)$) et l'application δ est continue de $H^{n-1}_{\Upsilon loc}(\mathcal{U}; O)$ (resp. $H^{n-1}_{\Upsilon}(\mathcal{U}; O)$) dans $\mathcal{D}'(\Theta)$ (resp. dans $\mathcal{S}'(\Theta)$). En sens inverse utilisant la procédure de Weil on peut montrer que toute suite convergente de $\mathcal{D}'(\Theta)$ est transformée en suite convergente de $H_{\Upsilon loc}(\mathcal{U}; O)$ d'où la

Proposition: *$\mathcal{D}'(\Theta)$ est isomorphe, avec sa topologie, à $H^{n-1}_{\Upsilon loc}(\mathcal{U}; O)$*

$\mathcal{S}'(\Theta)$ est isomorphe, avec sa topologie, à $H^{n-1}_{\Upsilon}(\mathcal{U}; O)$.

Appendice C: — REMARQUES SUR LES ULTRA DISTRIBUTIONS

Nous indiquons ici quelques remarques répondant à une questions posée. Il est naturel en relation avec la transformation de Fourier de considérer un voisinage convexe Ω de $\mathbb{R}^n$ (i. e. un tube) et d'étudier les ultra-distributions liées à ce voisinage en généralisant le travail [14]. Le nombre minimum de fonctions nécessaires pour représenter une distribution comme valeur au bord dépend essentiellement de la base de ce tube et n'est jamais inférieur à $(n+1)$ si n est la dimension complexe de l'espace quand cette base est compacte. Ce minimum correspond au cas où la base est un complexe. En général il faut une infinité de composantes. La théorie de la transformation de Fourier-Borel esquissée à l'appendice A, fournit un modèle de diverses généralisations possibles.

APPENDICE D: — PROBLÈME DE FRISCH

Monsieur J. Frisch a posé la question suivante

PROBLÈME (J. Frisch).

Soit Θ *un ouvert de* $\mathbb{R}$ (nous prendrons un segment) *caractériser les distributions* T *de* $\mathcal{D}'(\Theta)$ *telles qu'il existe un ouvert* Ω *voisinage de* Θ *dans* $\mathbb{C}$, f *holomorphe dans* $\Omega \cap P$ *où* $P = \{y \mid y > 0\}$, *de valeur au bord égale à* T.

Ce problème bien entendu se généralise comme suit.

Soit Θ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, Γ *un cône ouvert strictement convexe de sommet l'origine. Caractériser les distributions* T *de* $\mathcal{D}'(\Theta)$ *telles qu'il existe un ouvert* Ω *voisinage de* Θ *dans* $\mathbb{C}^n$, *une fonction* f *holomorphe dans* $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times i\Gamma)$ *de valeur au bord* T.

Nous désignerons cette propriété par $\delta^+(\Gamma)$ et quand Γ ne varie pas par δ^+. On peut introduire $\delta^+(k)$ $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ étant k cônes convexes: caractériser les T sommes de valeurs au bord de fonctions holomorphes données dans quelques $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times i\Gamma_h)$.

PROPOSITION 1 (Frisch). *La propriété* δ^+ *est de type local.*

DÉMONSTRATION: Soit Θ_1 et Θ_2 deux ouverts de $\mathbb{R}$ si (f_1, Ω_1) et (f_2, Ω_2) sont deux solutions $(f_1 - f_2; \Omega'_{1,2})$ est une solution de zéro dans $\Theta_1 \cap \Theta_2$ si $\Omega'_{1,2}$ désigne la composante connexe de $\Theta_1 \cap \Theta_2$ dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Mais alors ceci entraîne $f_1 - f_2 = 0$ d'où le prolongement analytique de f_1 par f_2 dans $\Omega' \cap P$ où Ω' désigne la composante connexe de $\Theta_1 \cup \Theta_2$ dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Nous allons transformer l'énoncé de la proposition 1 en lui donnant un aspect nettement cohomologique.

Si T satisfait dans Θ ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{C}$ à δ^+ et à δ^- nous savons qu'elle est analytique. Désignant par $\mathcal{D}'^+(\Theta)$ les T satisfaisant à la propriété δ^+ il est naturel d'introduire les espaces vectoriels

$$\mathcal{D}'(\Theta)\Big/_{H(\Theta)} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}'^+(\Theta)\Big/_{H(\Theta)}$$

où $H(\Theta)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de Θ. Désignons par $K(\Omega)$ l'espace des formes distribution en $d\bar{z}$ définies dans Ω ouvert de $\mathbb{C}$.

On introduit $K(\Theta) = \varinjlim_{\Omega \supset \Theta} K(\Omega)$.

Désignant par Ω^+ l'ouvert $\Omega \cap P$ on peut introduire de même

$$K^+_{\mathcal{D}'}(\Theta) = \varinjlim_{\Omega \supset \Theta} K_{\gamma\, loc}(\Omega^+)$$

et

$$K_{\mathcal{D}', P_-}(\Theta) = \varinjlim_{\Omega \supset \Theta} K_{P_-}(\Omega)\ ;\quad P_- = \mathbb{C} - P$$

on a la suite exacte:

$$0 \to K_{\mathcal{D}', P_-}(\Theta) \to K(\Theta) \to K^+_{\mathcal{D}'}(\Theta) \to 0$$

d'où, l'opérateur d'' étant clairement défini, une suite exacte:

$$0 \to H^0\big(K_{\mathcal{D}', P_-}(\Theta)\big) \to H^0\big(K(\Theta)\big) \to H^0\big(K^+_{\mathcal{D}'}(\Theta)\big) \xrightarrow{\ \partial\ } H^1\big(K_{\mathcal{D}', P_-}(\Theta)\big) \to \dots$$
$$\dots \to H^1\big(K(\Theta)\big) \to \dots$$

Mais $H^0\big(K(\Theta)\big)$ s'identifie à $H(\Theta)$.

En outre, on a: $H^1\big(K(\Theta)\big) = 0$ puis $H^0\big(K_{\mathcal{D}', P_-}(\Theta)\big) = 0$.

Le groupe $H^0\big(K^+(\Theta)\big)$ s'identifie aux germes de fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur admettant une valeur au bord sur Θ. Si f admet une valeur au bord l'application $f \to \delta f$ est biunivoque, δf holomorphe signifie que f se prolonge au dessous de l'axe réel.

Donc on constate, au vu de tous ces isomorphismes, que les deux suites

$$0 \to H(\Theta) \to \mathcal{D}'^+(\Theta) \to \mathcal{D}'^+(\Theta) \big/ {}_{H(\Theta)} \to 0$$

(1)

$$0 \to H^0\big(K(\Theta)\big) \to H^0\big(K^+_{\mathcal{D}'}(\Theta)\big) \to H^1\big(K_{\mathcal{D}', P_-}(\Theta)\big) \to 0$$

sont identifiables. On interpète donc $H^1\big(K_{\mathcal{D}', P_-}(\Theta)\big)$ comme étant le groupe

$$\mathcal{D}'^+(\Theta) \big/ {}_{H(\Theta)}$$

Reprenant les raisonnements du chapitre III § 1 la proposition 1 pour $n=1$ est conséquence du fait que $H^0(K_{\mathcal{D}',P-}(\Theta))=0$ pour tout $\Theta\subset\mathbb{R}$ car elle entraîne que la relation de passage au quotient dans $Z^1(K_{\mathcal{D}',P-}(\Theta))$ par les bords $B^1(K_{\mathcal{D}',P-}(\Theta))$ est de type local.

Dans le cas général d'après les résultats du § 3 du chapitre IV $H^q(K_{P-}(\Theta))=0$ pour tout $q<n$, et tout $\Theta\subset\mathbb{R}^n$ où P^- désigne le produit des demi-espaces $y_1\leqslant 0,\dots,y_n\leqslant 0$.

D'où la

Proposition 2: *La relation de passage au quotient dans* $Z^n(K_{\mathcal{D}',P-}(\Theta))$ *par les bords* $B^n(K_{\mathcal{D}',P-}(\Theta))$ *est de type local.*

Nous allons maintenant montrer que la propriété δ^+ se conserve par prolongement analytique.

Proposition 3: a) *Soit* $T(x,u,v,\zeta)$ *une distribution définie dans* $\mathbb{R}^n\times U\times \times V\times\mathbb{C}$ *où* $U\subset\mathbb{R}^q$, *ouvert,* $V\subset\mathbb{C}^s$, *ouvert, et holomorphe en* v,ζ. *On suppose que pour* $\eta<0,(\zeta=\xi+i\eta)$, *il existe* $f(z,u,v,\zeta)$ *holomorphe pour* $y_1>0,\dots,y_n>0$, $(z=x+iy)$, *de valeur au bord* $T(x,u,v,\zeta)$. *Alors* f *se prolonge analytiquement en une fonction* $\Phi(z,u,v,\zeta)$ *définie pour tout* ζ, *et* $y_1>0,\dots,y_n>0$ *et de valeur au bord (en z)* $T(x,u,v,\zeta)$.

b) *Si* T *et* f *sont à croissance lente,* Φ *est un polynôme en* ζ *à coefficients à croissance lente.*

c) *cas local analogue à* a).

Démonstration (du cas global).

Procédons par récurrence en supposant le résultat acquis pour tout $q\leqslant n-1$, tout U, tout V. L'hypothèse fait que $T(x,u,v,\zeta)$ est valeur au bord pour $\eta<0$ de $f(z_1,\dots,z_{n-1},x_n,u,v,\zeta)$. Donc $f(z_1,\dots,z_{n-1},x_n,u,v,\zeta)$ se prolonge analytiquement en une fonction $\Phi(z_1,\dots,z_{n-1},x_n,u,v,\zeta)$ pour $\eta>0$ et de valeur au bord (en $z_1,\dots,z_{n-1}$) $T(x,u,v,\zeta)$. La fonction $\Phi(z_1,\dots,z_{n-1},x_n,u,v,\zeta)$ est pour $\eta<0$ valeur au bord *en* z_n de $f(z_1,\dots,z_{n-1},z_n,u,v,\zeta)$ donc f se prolonge analytiquement en $\Phi(z_1,\dots,z_n,u,v,\zeta)$ pour $\eta>0$, et de valeur au bord $\Phi(z_1,\dots,z_{n-1},x_n,u,v,\zeta)$. Cette fonction Φ a en conséquence comme valeur au bord en z, la distribution $T(x,u,v,\zeta)$. Reste le cas $q=1$. Alors $T(x,u,v,\zeta)$ est de la forme $\delta\big(f^+(z,u,v,\zeta)-f^-(z,u,v,\zeta)\big)$ f^+ et f^- étant holomorphes en ζ, et en z pour $y>0$ (resp. $y<0$).

Pour $\eta<0$ f^- se prolonge analytiquement dans le demi-espace $y>0$. Donc f^- est holomorphe pour $\eta<0$ et $y<0$ en conséquence est la restriction à cet ouvert d'une fonction entière Φ^- des variables (z,ζ). Alors $f^+-\Phi^-$ est un prolongement analytique de f pour $\eta>0$ et $\delta(f^+-\Phi^-)=T(x,u,v,\zeta)$. C. q. f. d.

COROLLAIRE a) *Soit* $T(x,u,v,\zeta)$ *une distribution définie comme à la proposition* 3; *on suppose que pour* $\eta<0$ $T(x,u,v,\zeta)$ *est valeur au bord* (*en* z) *d'une fonction holomorphe* $\varphi_{1\ldots n}(z,u,v,\zeta)$ *définie pour* $y_1>0,\ldots,y_n>0$, *et telle que* $\varphi_{1\ldots n}=\sum\limits_{n}(-1)^h\varphi_{1\ldots\hat{h}\ldots n}$ *pour* $\eta<0$ *ou chaque* $\varphi_{1\ldots\hat{h}\ldots n}$ *est holomorphe pour* $y_1>0,\ldots,\widehat{y_h>0},\ldots,y_n>0$, *entière en* y_h. *Alors il existe des* $\psi_{1\ldots\hat{h}\ldots n}$ *entières en* η *localement à croissance lente telles que* $\varphi_{1\ldots n}=\sum\limits_{n}(-1)^h\psi_{1\ldots\hat{h}\ldots n}$.

b) *Si* T *et les* φ *sont tempérées, les* $\psi_{1\ldots\hat{h}\ldots n}$ *sont des polynômes en* z_h *à coefficients tempérés des autres variables.*

c) *cas local analogue à* a).

DÉMONSTRATION: cas global

On considère dans $\mathbb{C}^{n+1}\times U\times V$ l'ouvert Ω réunion de $\pi_0=\{(z,\zeta)\mid\eta<0\}$, $\pi_j=\{z,\zeta\mid y_j>0\}$; $\varphi_{1\ldots n}$ d'après la proposition 3 se prolonge pour $\eta>0$, si $y_1>0,\ldots,y_n>0$. Donc la donnée des $\psi_{\hat{0}1\ldots n}=\varphi_{1\ldots n}$ $\psi_{01\ldots\hat{h}\ldots n}=\varphi_{1\ldots\hat{h}\ldots n}$ est un $(n-1)$-cocycle du recouvrement de Ω pour les π_j.

En vertu du chapitre IV § 3 c'est un cobord c'est à dire qu'il existe des $\psi_{\hat{0}\ldots\hat{h}\ldots n}$ telles que $\psi_{01\ldots n}=\sum(-1)^h\psi_{\hat{0}\ldots\hat{h}\ldots n}=\varphi_{1\ldots n}$; *b)* et *c)* se traitent de façon semblable. C. q. f. d.

Pour terminer, supposons $\complement\{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$ recouvert par $(n+1)$ demi--espaces $P_0,\ldots,P_n$. Nous considérons le problème $\delta^{+(k)*}$ suivant: *Caractériser les* $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *valeurs au bord d'un système de k fonctions* $f_{0\ldots\hat{h}\ldots n}$ $0\leqslant h\leqslant k-1$, *holomorphes respectivement dans les ouverts* $\mathbb{R}^n\times iP_{0\ldots\hat{h}\ldots n}$ *et à croissance lente dans ces ouverts.*

Désignons par $u_0,\ldots,u_n$ les vecteurs associés aux P (*soit* $P_j=P_{u_j}$ avec les notations du chapitre V § 1) par $\Gamma(u_0,\ldots,\hat{u}_h,\ldots,u_n)$ le cône convexe engendré par les vecteurs $u_0,\ldots,\hat{u}_h,\ldots,u_n$ et par $\Gamma_k=\bigcup\limits_{h=0}^{k-1}\Gamma(u_0,\ldots,\hat{u}_h,\ldots,u_n)$ on vérifie immédiatement la

PROPOSITION 4: *T satisfait à* $\delta^{+(k)*}$ *si et seulement si* $\mathfrak{F}T$ *a son support dans* Γ_k.

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie est partagée en deux parties; celle en lettres est la bibliographie générale à laquelle on aura effectivement besoin pour la compréhension de ces notes; celle en chiffres établie par M. Bengel que nous remercions pour cette aide couvre l'essentiel des publications de mathématiciens sur la question des valeurs au bord. Elle sera surtout utile aux lecteurs qui veulent faire le point et aller plus avant.

Bibliographie-lettres

[A] Bourbaki, N. — *Espaces vectoriels topologiques.* Paris. Hermann. 1955. Coll. Act. Sc. Ind. N.º 1229.

[B] Cartan, H. — *Faisceaux analytiques cohérents.* Centro Internazionale Matematico estivo. Roma. Instituto Matematico dell'Università. 1963.

[C] Gelfand, I. M.; Shilov, G. E. — *Generalized functions.* Vol. 1. New York. Academic Press. 1964.

[D] Malgrange, B. — *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution.* Ann. Inst. Fourier. Grenoble. T. 6: 271-355. 1955-1956.

[E] Malgrange, B. — *Lectures on the theory of functions of several complex variables.* Bombay. Tata Institute of Fundamental Research. 1958.

[F] De Rham, J. — *Variétés différentiables «formes-courants-formes harmoniques».* Paris. Hermann. 1955.

[G] Schwartz, L. — *Théorie des distributions I.* Paris. Hermann. 1950. Coll. Act. Scient. Ind. N.º 1901.

[H] Schwartz, L. — *Théorie des distributions II.* Paris. Hermann. 1951. Coll. Act. Sci. Ind. N.º 1122.

[K] Godement, R. — *Topologie algébrique et théorique des faisceaux.* Paris. Hermann. 1958. Coll. Act. Sci. Ind. N.º 1252.

Rajouté sur épreuves
Pour la cohomologie avec conditions de croissance consulter:

[L] Hörmander, L. — *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar\partial$ operator.* Acta Mathematica. *113:* 89-152. 1965.

BIBLIOGRAPHIE SUR LES VALEURS AU BORD DES FONCTIONS HOLOMORPHES

établie par G. BENGEL (à ce jour 16 Juin 1964).

[1] BENGEL, G. — *Distributionen aus* D'_{Lp} *und Randverteilungen analytischer Funktionen.* Diplomarbeit. Heidelberg. 1963 (non publié).
Représentation des distributions de $D'_{L^p}(\mathbb{R}^N)$ par des fonctions $\tilde{u}(z)$ holomorphes dans $(\mathbb{C}-\mathbb{R})^N$ qui satisfont à l'inégalité $\|\tilde{u}(\xi+i\eta)\|_{L^p} \leqslant \dfrac{M}{|\eta_1|^{n_1}\ldots|\eta_N|^{n_N}}$.
Les normes $p_{(n)}(u) = \sup\limits_{\eta} |\eta_1|^{n_1}\ldots\ldots|\eta_N|^{n_N} \| \tilde{u}(\xi+i\eta) \|_{L^p}$ donnent la topologie forte de $\mathcal{D}'_{L^p}$.

[2] BOGOLYUBOV, N. N. et PARASYUK, O. O. — *On the analytic continuation of generalized functions.* Dokl. Akad. Nauk SSSR *109:* 717-719. 1956.
Une distribution $T \in S'$ est prolongeable, s'il existe une fonction holomorphe $T(z) = T(x+iy)$ dans $y>0$ telle que, $x \to T(x+iy)$ soit une distribution tempérée pour tout $y>0$, convergeant vers T lorsque $y \to 0$ et que pour $y \geqslant \delta > 0$, $|T(x+iy)|$ soit majorée par un polynôme fixe en $|x|$. Pour que T soit prolongeable il faut et il suffit que la transformée de Fourier de T soit nulle pour $x<0$.

[3] BREMERMANN, H. J. et DURAND, L. — *On analytic continuation, multiplication and Fourier--transforms of Schwartz-Distributions.* J. Math. Phys. *2:* 240-258. 1961.
Pour $T \in \mathcal{E}'$ on définit $T^0(z) = (2\pi i)^{-1} < T,(x-z)^{-1} >, z \in \mathbb{C}$. Im $z \neq 0$. On montre que T est limite dans $\mathcal{E}'$ de $T^0(x+i\varepsilon) - T^0(x-i\varepsilon)$ pour $\varepsilon \to 0$.

[4] BROWDER, F. E. — *On the «edge of the wedge» theorem.* Canad. J. Math., *15:* 125-131. 1963.
On donne une démonstration simplifiée du théorème du «edge of the wedge»; voir [6].

[5] EHRENPREIS, L. — *Analytically uniform spaces and some applications.* Trans. Am. Math. Soc. *101:* 52-74. 1961.
Comme application de sa théorie des espaces analytiquement uniformes, l'auteur démontre le théorème suivant: Soit W un espace (de fonctions ou distributions) analytiquement uniforme, K sa structure analytique uniforme. Si les fonctions $k \in K$ peuvent être choisies d'une telle façon, que l'on ait $\exp(-t|z|) = 0(k(z))$ pour tout $t>0$, alors tout $T \in W$ peut être représenté comme valeur au bord d'un systéme de 2^N fonctions holomorphes.

[6] EPSTEIN, H. — *Generalization of the edge on the wedge theorem.* J. Math. Phys. *1:* 524-531. 1960.
Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^N$, C un cône dans $\mathbb{R}^N$, dont l'intérieur n'est pas vide, soit $W^+ = E+iC, W^- = E-iC \subset \mathbb{C}^N$. Soit F^+ (resp. F^-) définie et holomorphe dans l'intérieur de W^+ (resp. W^-).

On suppose que $F^+(\xi+i\eta)$ (resp. $F^-(\xi-i\eta)$) tend vers $F_0^+(\xi)\in\mathcal{D}'(E)$,($F_0^-(\xi)$), au sens de $\mathcal{D}'$ pour $\eta \to 0$ et que $F_0^+=F_0^-$. Alors il existe un voisinage V de $Ex\{0\}$ dans $\mathbb{C}^N$ et une fonction holomorphe dans V qui coincide avec F^+ (resp. F^-) sur $W^+\cap V$ (resp. $W^-\cap V$).

[7] Hodžaev, L. Š. — *On the operator of analytic continuation of generalized functions.* (en russe) Dokl. Akad Nauk SSSR *147:* 1296-1299. 1962.
Soit R l'espace des fonctions $\Phi(z)$ holomorphes dans $\{z : |Im\, z| < a\}$ et satisfaisant à $|z|^{k+1}|\Phi^{(k)}(z)| < C^{(k)}|z|^{-k-1}$ ($|z|\to\infty$), l'espace des fonctions $\varphi(X)$ de classe C^∞, satisfaisant à des inégalités pareilles et représentables par

$$\varphi(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(z)}{x-z}\,dz\,,$$

$\Phi\in R$, L deux droites parallèles à $\mathbb{R}$. Une distribution $\rho\in\mathcal{D}'$ appartient à $\mathcal{L}'$ si et seulement si $|<\rho,\psi(x-x_0)>| \leqslant C(\psi)|x_0|^{-\alpha}$ $|x_0|\to\infty$, $0<\alpha<1$. Tout élément de $\mathcal{L}'$ peut être représenté comme valeur au bord de deux fonctions holomorphes dans $Im\, z>0$ (resp. $Im\, z<0$).

[8] Köthe, G. — *Die Randverteilungen analytischer Funktionen.* Math. Z. *57:* 13-33. 1962.
Soit C une courbe analytique fermée dans $\mathbb{C}$. On a $\mathcal{E}'(C)\subset H'(C)$. Les indicatrices $\tilde{u}(\zeta)$ des distributions de $\mathcal{E}'$ sont à croissance lente vers C : $|\tilde{u}(\zeta)| \leqslant \frac{N}{(dist(\zeta,C))^k}$ et pour k suffisamment grand, la primitive $\tilde{u}^{(-k)}(\zeta)$ admet des valeurs au bord continues. Les seminormes $p_k(\tilde{u}) = \max_{\mathbb{C}} \tilde{u}^{(-k)}(\zeta)$ donnent la topologie de $\mathcal{E}'$.

[9] Luszczki, Z. et Zielesny, Z. — *Distributionen der Räume $\mathcal{D}'_{L^p}$ als Randverteilungen analytischer Funktionen.* Colloq. Math. *8:* 125-131. 1961.
Les fonctions holomorphes $\tilde{u}(\zeta)$, qui représentent les distributions de $\mathcal{D}'_{L^p}$ sont charactérisées par

$$\|\tilde{u}(\xi+i\eta)\|_{L^p(\zeta)} \leqslant \begin{cases} \dfrac{M}{|\eta|^n} & \text{pour } |\eta|<1 \\ M & \text{pour } |\eta|\geqslant 1 \end{cases}$$

[10] Martineau, A. — *Les hyperfonctions de M. Sato.* Sem. Bourbaki 13° année. N.° 214. 1960-61. Exposé simplifié de la théorie de Sato (voir [13]).

[11] Roumieu, Ch. — *Nouvelles classes des distributions généralisées.* C. R. A. S. *248:* 346-348. 1959.

[12] Roumieu, Ch. — *Sur quelques extensions de la notion de distributions.* Ann. Sci. E. N. S. *3* (77): 41-121. 1960.
On considère plusieurs espaces de distributions généralisées représentables comme valeurs au bord.

[13] Sato, M. — *Theory of Hyperfunctions I, II.* J. Fac. Sci. Tokyo *8:* 139-193 et 387-439. 1959/60.
Définition des hyperfonctions comme classes de cohomologie relative à valeurs dans le

faisceau des fonctions holomorphes (ou plus général dans un faisceau analytique localement libre) et propriétés fondamentales.

[14] SILVA, J. SEBASTIÃO E — *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel.* Math. Ann. *136:* 58-96. 1958.
Construction d'un espace de distributions généralisées invariant par Fourier.

[15] TILLMANN, H. G. — *Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen.* Math. Z. *59:* 61-83. 1963.
Généralisation des résultats de Köthe [8] — au cas d'un produit de n courbes analytiques fermées dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

[16] TILLMANN, H. G. — *Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen II* Math. Z. *76:* 5-21. 1961.
Représentation des distributions de $\mathcal{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^N)$ par des fonctions holomorphes dans $(\mathbb{C}-\mathbb{R})^N$, nulles à l'infini, qui satisfont aux conditions:

$$|\tilde{u}(\zeta_1,\ldots,\zeta_N)| \leqslant M.\prod_1^N \left(|Im\,\zeta_i|^{-\frac{1}{p}} + |Im\,\zeta_i|^{-\frac{1}{p}-m}\right) \qquad M,\ m \text{ constant}$$

$$\left\{u_\varepsilon(x) = \sum_\sigma (\pi\sigma_i)\tilde{u}(x+i\varepsilon\sigma)\right\} \quad \text{borné dans } D'_{L^p}$$

[17] TILMANN, H. G. — *Darstellung der Schwartzchen Distributionen durch analytische Funktionen* Math. Z. *77:* 106-124. 1961.
Représentation des distributions de S', $\mathcal{D}'_F$, $\mathcal{D}'$, S': Soit H_L le sous-espace de $H((\mathbb{C}-\mathbb{R})^N)$ des fonctions $\tilde{u}(\zeta)$ qui satisfont à l'inégalité

$$|\tilde{u}(\zeta)| \leqslant M\,.\,\pi(1+|\zeta|^2)^{m_i}\,.\,|Im\,\zeta|^{-\frac{1}{2}-n_i}$$

On a une application surjective $\varphi: H_L \to S'$. Le noyau de φ consiste des pseudo--polynômes $P(z)$.

$$P(z) = \sum_{j,\nu} z_j^\nu \,.\, a_{j\nu}(z_1\ldots\hat{z}_j\ldots z_N)\,,\ a_{j\nu} \in H_L((\mathbb{C}-\mathbb{R})^{N-1})$$

$\mathcal{D}'_F$: On construit une application $\varphi: H_F \to \mathcal{D}'_F$, où H_F est le sous-espace de $H((\mathbb{C}-\mathbb{R})^N)$ défini par les inégalités $|\tilde{u}(z)| \leqslant k(|z|)\,.\,\prod_1^N |Im\,z_j|^{-m_j-\frac{1}{2}}$ $k(z)$ une fonction continue, monotonement croissante. Le noyau de φ est

$$H_{F,0} = \sum_1^N H((\mathbb{C}-\mathbb{R})^{j-1}\times\mathbb{C}\times(\mathbb{C}-\mathbb{R})^{N-j}) \cap H_F$$

$\mathcal{D}'$: (cas d'une variable) $H_*(\mathbb{C} - \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions qui satisfont à une des conditions équivalentes:

(i) $$|g(z)| \leqslant M(|z|) \cdot |Im\, z|^{-n(z)} \qquad 0 < |Im\, z| \leqslant 1$$

$M(z)$, $n(z)$ des fonctions continues.

(ii) Pour tout intervalle compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe un k, tel que la k-ième primitive $g^{(-k)}(z)$ admette des valeurs au bord continues sur K.

(iii) Pour tout a, il existe un k, tel que $g^{(-k)}(z)$ rest borné pour

$$|Re\, z| < a \ , \ 0 < |Im\, Z| \leqslant 1$$

On a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \cong H_*(\mathbb{C}-\mathbb{R}) \Big/_{H(\mathbb{C})}$

[18] Zerner, M. — *Les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles et leurs valeurs au bord.* Paris. Centre de Physique Théorique de L'École Polytechnique. (Par un groupe de travail sous le direction de M. Zerner).

Vient de paraître

[19] Bremermann, H. — *Distributions, complex variables, and Fourier transforms.* London. New York. Addison-Wesley Publ. Company. 1965.

RÉSUMÉ

Chapitre I : Il a pour but d'esquisser à une variable le formalisme qui sera utilisé à plusieurs variables. En outre, les leçons étant orientées sur les cas fondamentaux de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{S}'$ les rappels sur les espaces de distributions mettent en évidence les théorèmes fondamentaux utilisés, ce qui permet de voir que bien des résultats qui vont suivre peuvent être facilement transcrits dans une autre axiomatique que celle de L. Schwartz. (Néanmoins, pour les résultats fondamentaux, proposition 2 Chapitre III, et appendice A les démonstrations indiquées relèvent des méthodes par dualité).

1. Rappels sur les espaces de distributions

2. Valeur au bord pour une fonction holomorphe

Considérant un ouvert Ω de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, à frontière $\partial\Omega$ très régulière, et une fonction holomorphe dans Ω à valeurs scalaires, on définit la valeur au bord de f, distribution de $\mathcal{D}'(\partial\Omega)$.

On montre alors que:
pour que f admette une valeur au bord de Ω il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable en une distribution T dans $\mathbb{R}^2$.

3. Prolongement canonique d'une distribution

On définit un prolongement naturel $\bar{f}$ de f ce qui permet de relier la valeur au bord de f à celle de

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{f} + i \frac{\partial}{\partial y} \bar{f} = 2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

On montre (proposition 5) que ce procédé identifie en fait les valeurs au bord aux classes d'équivalence des distributions de $\mathbb{R}^2$ à support dans la frontière de Ω modulo un sous-espace convenable.

4. Le problème des représentations

On montre que le problème de la représentation d'une distribution de $\mathbb{R}$ comme valeur au bord d'une fonction holomorphe dans $\complement \mathbb{R}$ est un cas particulier de l'étude de l'équation $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} X = U$ où X inconnu est dans $\mathcal{D}'$, U est dans $\mathcal{D}'$ donné.

Le cas de $\mathcal{S}'$ est aussi esquissé.

Chapitre II: *Notions sur les fonctions de plusieurs variables complexes et sur le calcul différentiel complexe.*

Ce chapitre n'a pas l'intention de se substituer à l'étude d'ouvrages spécialisés, mais seulement de réaliser un résumé des notions qui vont intervenir dans la suite, orienté dans le sens qui me semble le plus utile à mon but.

1. Compléments sur les notions de distributions, les questions de variance.

Nous fixons la terminologie et les notations

a) *distributions et courants*

b) *identifications entre courants et distributions*

Ce point est capital pour la suite.

2. Fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes

a) *Quelques propriétés classiques*

On démontre en particulier qu'une distribution définie dans un ouvert de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ solution du système $\dfrac{\partial T}{\partial \bar{z}_j} = 0 : j=1,2,\ldots,n$ est une fonction holomorphe.

b) *L'opérateur d''*

On introduit le formalisme des formes différentielles em dz, $d\bar{z}$, et l'opérateur $d'' = \left(\sum_j \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) \wedge$

c) *Le théorème de Dolbeault-Grothendieck et variantes*

On donne des solutions, dans des hypothèses qui interviennent fondamentalement dans la suite, du problème suivant:

Étant donné dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ une forme distribution $\overset{p,q}{\omega}$ telle que $d'' \overset{p,q}{\omega} = 0$ et dont les coefficients satisfont à certaines conditions, trouver $\overset{p,q-1}{\omega}$ telle que $d'' \overset{p,q-1}{\omega} = \overset{p,q}{\omega}$. Les démonstrations dépendent de l'appendice A.

d) *Formes différentielles associées à une sous-variété*

C'est le pendant du point *b)* au § 1.

3. Quelques notions de cohomologie

a) *Suite exacte de cohomologie*

b) *Exemples de groupes de cohomologie*

bα) *d''*-cohomologie d'un ouvert ou d'un compact de $\mathbb{C}^n$

bβ) cohomologie de Čech d'un recouvrement

bγ) *d''*-cohomologie à croissance lente, et à supports fermés

bδ) cohomologie de Čech avec conditions de croissance.

CHAPITRE III: *La notion de valeur au bord pour un système de fonctions holomorphes.*

1. La valeur au bord d'une fonction holomorphe

a) La fonction est donnée dans une intersection d'ouverts à frontières très régulières et en position générale les unes par rapport aux autres. La valeur au bord est prise sur l'intersection des frontières. On généralise ensuite la proposition 5 § 3 du Chapitre I (Théorèmes I, I', I'') en calculant certains groupes de «cohomologie».

On montre qu'une fonction admet une valeur au bord si et seulement si elle est prolongeable en tant que distribution.

b) *Prolongement canonique.* Il généralise le prolongement naturel introduit dans le § 3 du Chapitre I.

2. Indications sur la théorie de Sato

3. Définition de la valeur au bord d'un cocycle localement à croissance lente.

a) on énonce les théorèmes fondamentaux

THÉORÈME 3: «*Edge on the wedge*» Soit $\Phi_{i_0 \cdots i_{n-1}}$ un cocycle (localement) à croissance lente relativement au recouvrement. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit un cobord (localement) à croissance lente est que sa valeur au bord soit nulle pour $n \geqslant 2$.

THÉORÈME 4: Existence des représentations.

b) *Choix des coefficients.* La définition de la valeur au bord d'un système de fonctions holomorphes $\Phi_{i_0 \cdots i_{n-1}}$ impose le choix de certains entiers $\alpha_{i_0 \cdots i_{n-1}}$. Le but de ce paragraphe est de montrer que ce choix peut être fait indépendamment de la donnée des fonctions et que les α sont une donnée géométrique. Ce fait, et le choix des α, étant évidents dans les cas usuels nous suggérons de sauter ce paragraphe jusqu'aux exemples.

bα) le cocycle générique

bβ) la résolution générique

bγ) réduction du cocycle générique

c) *Indications sur la démonstration des théorèmes 3 et 4.*

d) *Justification de la dénomination du théorème 3.*

On montre que les énoncés classiques du théorème du Edge on the Wegde résultent bien du théorème 3 et du théorème des polydisques; on constate en outre qu'ils restent vrais en théorie de Sato (§ 2).

CHAPITRE IV: *Démonstration des théorèmes fondamentaux*

Les deux premiers paragraphes de ce chapitre sont consacrés à la démonstration des théorèmes III et IV du Chapitre précédent.

1. L'isomorphisme λ

a) des formes aux cocycles

b) des cocycles de Čech aux formes

2. Les théorèmes de représentation

a) *forme abstraite (et incomplète) des théorèmes de représentation*

b) *démonstration de la formule* $\delta = \rho o \partial o \lambda o \pi$.

Le théorème 4 résulte de la démonstration de cette formule. On en donne quelques illustrations, montrant en particulier que toute distribution de $\mathbb{R}^n$ est valeur au bord d'un système de $(n+1)$ fonctions holomorphes.

3. Calcul de la cohomologie à support dans un produit de demi-espaces fermés

On démontre un lemme utilisé dans la justification de la dénomination du théorème 3 et on le relie à certains problèmes posés par des physiciens.

CHAPITRE V: *La transformation de Fourier-Carleman*

1. La transformation de Fourier-Carleman — Définition

On montre dans ce paragraphe comment la transformation de Fourier conduit naturellement aux concepts étudiés dans les deux chapitres précédents. La transformée de Fourier-Carleman d'une distribution de $\mathcal{S}'$ apparaît comme une classe de «cohomologie» de Čech du recouvrement de $\complement\, \mathbb{R}^n$ par les demi-espaces qu'il contient, et sa valeur au bord est la transformée de Fourier usuelle.

2. Valeur au bord d'une fonction holomorphe dans un «cône» convexe

Le but de ce paragraphe est de comparer nos notions aux énoncés classiques. On termine le paragraphe en montrant que $(n+1)$, le nombre de fonctions suffisant pour représenter toute distribution, est la meilleure constante possible.

Appendice A: *Trivialité de la d''-cohomologie à croissance lente — Cas d'un convexe*

On donne des indications succintes sur la solution du théorème I du point *c)* § 2 Chapitre II. Elle dépend de généralisations à n-variables du théorème de l'indicatrice de Polya concernant les fonctions entières de type exponentiel (ces généralisations sont nouvelles même pour $n=1$).

Appendice B: *Questions de topologie*

On indique comment représenter la topologie de $\mathcal{S}'$, de $\mathcal{D}'$, par l'introduction d'une topologie convenable sur les systèmes de fonctions holomorphes.

Appendice C: *Remarque sur les ultra-distributions*

On note que la constante, nombre minimum de fonctions permettant de représenter une distribution (une ultra-distribution), ne dépend que de considérations géométriques. Il faut en général une infinité de fonctions.

Appendice D: *Problème de Frisch*

On considère le problème suivant:

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Γ un cône ouvert strictement convexe de sommet l'origine. Que peut-on dire des distributions T de $\mathcal{D}'(\Theta)$ telles qu'il existe un ouvert Ω voisinage de Θ dans $\mathbb{C}^n$, une fonction f holomorphe dans $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times i\Gamma)$ de valeur au bord T?

On montre deux faits:

1) cette propriété est de type local (Frisch)

2) elle est stable par prolongement analytique.

INTEGRALS AND ORDERS OF GROWTH OF DISTRIBUTIONS

BY

J. SEBASTIÃO E SILVA

This page intentionally left blank

INTEGRALS AND ORDERS OF GROWTH OF DISTRIBUTIONS

by

J. SEBASTIÃO E SILVA

INTRODUCTION

In several papers dating from 1954 (see [8], [9], [10], [11] and [12] in References), I have tried to emphasize the advantages of an axiomatic approach to the theory of distributions, in connection with an idea of Bochner [1]. As is well known, one of the theorems given by L. Schwartz, starting from his definition of «distribution», states that every distribution T on an open set Ω in $\mathbf{R}^n$ can be represented, on each compact interval I contained in Ω, as a derivative $D^r F$ of a continuous function on I, where r is some system of n integers (F and r depending on I). If there is a system r and a continuous function F such that $T = D^r F$, the distribution T is said to be of «finite order».

The axiomatic characterization of distributions of finite order on an interval I in $\mathbf{R}^n$, in terms of «continuous functions» and «derivatives», is a very simple task, which can be achieved by means of four elementary axioms. The extension to the general case can be carried out by the method of projective limits, which corresponds in this case to the Schwartz's «Principe du recollement des morceaux».

However the case of distributions of infinite order seems to be of little importance in applications. So I shall here confine myself to distributions of finite order, which I shall for convenience call merely «distributions», without specification. But it should be observed that all the following discussion could be extended without difficulty to distributions of infinite order.

The chief purpose of these lectures is to introduce the foundations of a general theory of the integral for distributions, giving a direct justification of the heuristic methods used by physicists, specially as far as convolution and Fourier transformation for distributions are concerned. Such a theory was already developed by the Polish school, in the case of integrals on a bounded interval of $\mathbf{R}$, applying the Lojasiewicz's definition of limit of a distribution at a point of

R (see [5] and [6]). However, as will be shown, the definition of the limit of a distribution $f(x)$ as x tends to infinity, given by Mikusinski and Sikorski, does not seem to be sufficiently general. So the theory that I am proposing to discuss here concerns specially the case of integrals on unbounded intervals.

A feature of this theory, which will be somewhat surprising, is its elementary form. No elements of the theory of locally convex spaces are needed here. Definitions and theorems will appear as a simple extension of advanced calculus for undergraduate students. I must confess that my own conviction is that, in many questions concerning distributions, the intervention of topological linear methods is artificial, masking the simplicity of the essential ideas. As a matter of fact, it was the topological point of view that prevented Mikusiński and Sikorski from using the definition of limit that I shall introduce here, adopting the representation of distributions as derivatives of functions (according to the idea of Bochner), instead of as linear functionals (according to Schwartz) or as limits of sequences (according to Mikusiński-Sikorski).

The first type of representation affords at the same time a natural extension of the «o» and «O» symbols to distributions, which underlie the whole theory of the integral and permit a generalization of several convergence tests.

One of the avantages of this theory of the integral for distributions is to afford a *general definition of convolution*, which has just the usual form:

$$(f*g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$$

employed currently by physicists without any theoretical foundation. All the nice properties of convolution, in the most general situations arising in practice, can be proved in a very simple way, applying the rules which are valid for integrals of distributions.

The Fourier transformation also can be introduced by means of the standard integral

$$\int e^{ixy} f(y)\, dy$$

and *the whole theory of Fourier transformation for tempered distributions can be developed, without assuming any previous theory of the same transformation for functions:* we have only to follow more or less the intuitive methods employed by physicists, using them now in a quite rigorous way. This approach has *at least* a didactic advantage, since the direct theory of Fourier transformation for distributions is far more simple than the classical one. In this way, the classical difficulties can be avoided and, after all, we obtain a very simple and natural introduction to more refined theories. Thus the usual order is reversed.

But at the same time some new results, which will probably be interesting in practice, can actually be obtained by this approach.

§ 1. PRELIMINARIES

1. Notation and terminology

We shall denote by $\mathbf{N}$ the set of all positive integers, by $\mathbf{N}_0$ the set of all non-negative integers, by $\mathbf{R}$ the real field and by $\mathbf{C}$ the complex field. Consider any $n \in \mathbf{N}$; given two points $a=(a_1,\dots,a_n)$ and $b=(b_1,\dots,b_n)$ of $\mathbf{R}^n$ we shall write $a<b$, iff $a_j<b_j$ for $j=1,\dots,n$, and $a \leqslant b$ iff $a_j \leqslant b_j$ for $j=1,\dots,n$ (1). By an *interval* I in $\mathbf{R}^n$ we shall understand the cartesian product of n intervals $I_1,\dots,I_n$ in $\mathbf{R}^n$; the interval I is said to be *degenerate*, iff at least one of the intervals I_j reduces to a point. *We shall here consider only non-degenerate intervals.*

Consider the vector space $\mathcal{C}(I)$ of all complex-valued functions $f(x)= =f(x_1,\dots,x_n)$, which are defined and continuous on the interval I in $\mathbf{R}^n$. For each system $r=(r_1,\dots,r_n)$ of n integers $r_k \geqslant 0$, we shall put

$$D^r = D_1^{r_1} \dots D_n^{r_n} \quad , \quad \text{where } D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{for } k=1,\dots,n \ ,$$

and we shall denote by $\mathcal{C}^r(I)$ the set of all functions f such that $D^r f$ exists and is continuous on I in the ordinary sense, *independently of the order in which the differentiations are performed.*

On the other hand, considering for each k a fixed point c_k in $\mathfrak{I}_k$, arbitrarily chosen, we shall put for each $f \in \mathcal{C}(I)$ and $k=1,\dots,n$:

$$\mathfrak{I}_k f(x) = \int_{c_k}^{x_k} f(x_1,\dots,\xi_k,\dots,x_n)\, d\xi_k$$

and, more generally, $\mathfrak{I}^r = \mathfrak{I}_1^{r_1} \dots \mathfrak{I}_n^{r_n}$. Then $\mathfrak{I}^r$ is a *right inverse* of D^r, i. e. $D^r \mathfrak{I}^r f = f$, for all $f \in \mathcal{C}(I)$.

2. Axiomatic introduction of distributions (2)

As each derivation operator D_k is not defined on the whole space $\mathcal{C}(I)$, there arises the problem of enlarging this set, in order that the operators $D_1,\dots,D_n$ may be extended as mappings of the enlarged set into itself, according to some

(1) The expression «iff» is an abbreviation of «if and only if».

(2) As we have said in the Introduction, we call here «distributions» the distributions of finite order according to Schwartz.

natural conditions, which we are going to state precisely, under the form of axioms. The new set will be denoted by $\mathcal{C}_\infty(I)$ and its elements will be called *distributions* on I. The set $\mathcal{C}_\infty(I)$, provided with the n basic operators $D_1,\ldots,D_n$, is just defined, up to an isomorphism, by the following system of axioms:

AXIOM 1. *If $f \in \mathcal{C}(I)$, then $f \in \mathcal{C}_\infty(I)$.*

AXIOM 2. *To each $f \in \mathcal{C}_\infty(I)$ and each $k=1,\ldots,n$, there corresponds an element $D_k f$ of $\mathcal{C}_\infty(I)$ (the derivative of f with respect to x_k), in such a way that:* (i) *if f is a function having a derivative f'_{x_k}, with respect to x_k, in the ordinary sense, and continuous on I, then $D_k f$ coincides with f'_{x_k};* (ii) *the operators $D_1,\ldots,D_n$ are mutually interchangeable, that is: $D_j D_k f = D_k D_j f$, for all $j,k=1,\ldots,n$, and all $f \in \mathcal{C}_\infty(I)$.*

DEFINITION 1. If r is any system $(r_1,\ldots,r_n)$ of n non negative integers, then $D^r = D_1^{r_1}\ldots D_n^{r_n}$.

AXIOM 3. *For each $f \in \mathcal{C}_\infty(I)$ there exists a system r of n integers $\geqslant 0$ and a function $F \in \mathcal{C}(I)$ such that $f = D^r F$.*

AXIOM 4. *If r is a system of n integers $r_k \geqslant 0$ and $F,G \in \mathcal{C}(I)$, then we have $D^r F = D^r G$, if and only if $F-G$ is of the form $F-G=\theta_1+\ldots+\theta_n$, where θ_k is a polynomial in x_k of degree $< r_k$ whose coefficients are continuous functions on I, independent of x_k $(k=1,\ldots,n)$.*

It can be proved that this system of axioms is both *consistent* and *categorical.* The functions θ_k considered in axiom 4 are of the form

$$\theta_k(x) = \sum_{\nu=0}^{r_k-1} x_k^\nu \cdot a_{k\nu}(x)$$

where the coefficients $a_{k\nu}$ are continuous functions on I independent of x_k. We shall denote by $\mathcal{P}_r$ the set of all functions θ of the form $\theta=\theta_1+\ldots+\theta_k$, which we shall call *pseudo-polynomials of degree* $<r$. In turn, $\mathbf{N}_0^n$ is the set of all systems of n non negative integers.

Let us consider two distributions f and g on I. Then, according to axiom 3, there exist $F,G \in \mathcal{C}(I)$ and $r,s \in \mathbf{N}_0^n$ such that

$$f = D^r F \quad , \quad g = D^s G \, .$$

Take $p \in \mathbf{N}_0^n$ such that $r \leqslant p$ and $s \leqslant p$. Remembering that $\mathcal{J}^m$ is a right inverse of D^m and applying the condition (i) of axiom 2, we can represent f and g in the form

$$f=D^p\widetilde{F} \quad , \quad g=D^p\widetilde{G}$$

where $\widetilde{F}=\mathfrak{J}^{p-r}F$, $\widetilde{G}=\mathfrak{J}^{p-s}G$. And so we have, *according to axiom 4:*

$$f=g \quad \text{iff} \quad \mathfrak{J}^{p-r}F-\mathfrak{J}^{p-s}G\in\mathfrak{D}_p \ .$$

On the other hand we shall write *by definition:*

$$f+g=D^p(\mathfrak{J}^{p-r}F+\mathfrak{J}^{p-s})$$

$$\alpha f=D^r(\alpha F) \quad , \quad \text{for all } \alpha\in\mathbf{C} \ .$$

By these two definitions the set $C_\infty(I)$ becomes a vector space (over $\mathbf{C}$) and D_k, for each $k=1,\ldots,n$, a linear mapping of the space $C_\infty(I)$ into itself.

Let now J be an interval contained in I. We shall call *restriction of* f to J and denote by $\rho_J f$, the distribution $D^r(\rho_J F)$, where $\rho_J F$ is the restriction of the function F to J in the ordinary sense. It is readily seen that ρ_J is a linear mapping of $C_\infty(I)$ on to $C_\infty(J)$.

3. Locally summable functions and measures as distributions

For the sake of simplicity we shall confine ourselves to the case $n=1$, since the extension to the general case offers no essential difficulty.

Let f be a locally summable function on an open interval I in $\mathbf{R}$. A *primitive function* of f is any function F of the form

$$F(x)=k+\int_c^x f(\xi)d\xi \ , \qquad \text{with arbitrary } c\in I,\ k\in\mathbf{C}.$$

Then F is a continuous function such that $F'(x)=f(x)$ almost everywhere, in the ordinary sense. Denote by $\tilde{f}$ the function such that: (i) the domain of $\tilde{f}$ is the set $\tilde{I}$ of all points x of I for which $F'(x)$ exists in the ordinary sense; (ii) $\tilde{f}(x)=F'(x)$ for all $x\in\tilde{I}$. Then $\tilde{f}$ is *equivalent* to f, that is $\tilde{f}(x)=f(x)$ almost everywhere in I, and we say that $\tilde{f}$ is the *standard function* equivalent to f. From now on, when we shall speak of locally summable functions, it will be understood that they are standard functions. The sum of two such functions f, g is defined by the formula

$$(f+g)(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x [f(\xi)+g(\xi)]d\xi$$

and the product αf of any $\alpha \in \mathbf{C}$ by f is defined in the usual way. Then the set of all (standard) locally summable functions on I becomes a vector space over $\mathbf{C}$. We shall denote by $\dot{L}(I)$ this space; it is easily seen that:

By assigning to each function $f \in \dot{L}(I)$ the distribution $f^* = DF$, where F is any primitive function of f, there is defined a one-to-one linear mapping of $\dot{L}(I)$ into $C_\infty(I)$ such that, if f is continuous on I, then $f = f^*$.

This proposition enables us to identify every function $f \in \dot{L}(I)$ with the distribution DF, where F is a primitive a f.

Let now μ be a measure on I, i. e. a complex valued σ-additive function defined (for example) on the family of all bounded intervals J such that $\bar{J} \subset I$. A *primitive function* of μ is any function F of the form

$$F(x) = \begin{cases} k + [c,x], & \text{if } x \geqslant c \\ k -]c,x[, & \text{if } x < c \end{cases} \qquad \text{with arbitrary } c \in I,\ k \in \mathbf{C}\,.$$

A necessary and sufficient condition for a function F on I to be the primitive of a measure is that F be a function of (locally) bounded variation and continuous on the right at every point x of I. In particular, F may be absolutely continuous, i. e. the primitive of some locally summable function f; *then the measure μ is identified whith the function f, so that $\mu(J) = f(J) = \int_J f(\xi) d\xi$ for every bounded interval J such that $\bar{J} \subset I$.*

We shall denote by $\mathfrak{M}(I)$ the vector space of all measures on I. It is easily seen that:

By assigning to each $\mu \in \mathfrak{M}(I)$ the distribution $f = D\widetilde{F}$, where F is any primitive of μ (and $\widetilde{F}$ the standard function equivalent to F), there is defined a one-to-one linear mapping of $\mathfrak{M}(I)$ into $C_\infty(I)$, such that, if μ is a locally summable function, then $\mu = f$.

This proposition enables us to identify every measure μ on I with the distribution $D\widetilde{F}$, where $\widetilde{F}$ a standardized primitive of f.

4. Multiplication and change of variable

We shall confine ourselves to the case $n=1$.

Let I be an interval in $\mathbf{R}$. For each $p \in \mathbf{N}_0$, we denote by $\mathcal{C}_p(I)$ the space of all distributions f of the form $f=D^pF$, with $F \in \mathcal{C}(I)$. The following theorem can be proved:

For every $p \in \mathbf{N}_0$ it is possible, in one single way, to assign to each couple (f,g) where $f \in \mathcal{C}^p(I)$ and $g \in \mathcal{C}_p(I)$, a distribution $fg \in \mathcal{C}_p(I)$ independent of p and satisfying the following conditions:

(i) *if $g \in \mathcal{C}(I)$, then fg is the product of the functions f,g in the ordinary sense;*

(ii) *if $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I)$ and $g \in \mathcal{C}_p(I)$, then $D(fg)=f.Dg+Df.g$.*

By these conditions, if $f \in \mathcal{C}^p(I)$ and $g=D^pG$, with $G \in \mathcal{C}(I)$, the distribution fg is uniquely defined by the formula

$$fg=f\cdot D^pG=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}D^{p-k}(f^{(k)}G) .$$

Then it is natural to call fg *the product of* f by g.

Besides, it is proved that, by this definition, $\mathcal{C}_p(I)$ *becomes a module over the complex algebra* $\mathcal{C}^p(I)$. In particular, observing that

$$\mathcal{C}_\infty(I)=\bigcup_{p=0}^{\infty}\mathcal{C}_p(I) \quad , \quad \mathcal{C}^\infty(I)=\bigcap_{p=0}^{\infty}\mathcal{C}_p(I)$$

the space $\mathcal{C}_\infty(I)$ becomes a module over $\mathcal{C}^\infty(I)$.

The preceding theorem can be extended, replacing $\mathcal{C}_p(I)$ by the space $\mathcal{M}_p(I)$ of all distributions f of the form $f=D^pF$, where $F \in \mathcal{M}(I)$, and the condition (i) by the following one:

(i′) *If $g \in \mathcal{M}(I)$, then fg is the product of f by the measure g according to the usual definition.*

Let now consider another interval I^* in $\mathbf{R}$. The following theorem can be proved. *For every $p \in \mathbf{N}_0$ it is possible, in one single way, to assign to each couple (f,g), where $f \in \mathcal{C}_p(I)$ and g is a $\mathcal{C}^1$ mapping of I^* into I such that $1/g' \in \mathcal{C}^p(I^*)$, a distribution $f \circ g$, not depending on p and satisfying the following conditions:*

(i) *if $f \in \mathcal{C}(I)$, then $(f \circ g)(x) \equiv f(g(x))$.*

(ii) *if $f \in \mathcal{C}_p(I)$ and $1/g' \in \mathcal{C}^{p+1}(I^*)$, then*

$$D(f \circ g)=g'(Df \circ g)$$

By these conditions, if $1/g' \in \mathcal{C}^p(I^*)$ *and* $f = D^p F$, *with* $F \in \mathcal{C}(I)$, *the distribution* $f \circ g$ *is uniquely defined by*

$$f \circ g = \left(\frac{1}{g'} D\right)^p (F \circ g)$$

Moreover it can be proved that:

If $1/g' \in \mathcal{C}^p(I^*)$, *g defines a linear mapping* $f \to f \circ g$ *of* $\mathcal{C}_p(I)$ *into* $\mathcal{C}_p(I^*)$.

If in addition h is a $\mathcal{C}^1$ *mapping of an interval* I^{**} *into* I^* *such that* $1/h' \in \mathcal{C}^p(I^{**})$, *then*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) .$$

§ 2. LIMITS AND INTEGRALS OF DISTRIBUTIONS OF ONE VARIABLE

5. Limit of a distribution as $x \to +\infty$

Let I be an open interval unbounded on the right, i. e. of the form $I =]a, +\infty[$, with $a \in \mathbf{R}$ or $a = -\infty$. The two following definitions are well known in classical analysis:

5.1. Definitions. Let f and φ be two functions on I. The function f is said to be of *order less than* φ, iff there exist a real x_0 and a function f_0 such that

$$f = \varphi f_0 \text{ for } x > x_0 \ , \ f_0(x) \to 0 \text{ as } x \to +\infty \ .$$

On the other hand, f is said to be *at most of the order of* φ, as $x \to +\infty$, iff there exist a real x_0 and a function f_0 bounded for $x > x_0$ such that $f = \varphi f_0$.

In the first case we shall write

$$f \in o(\varphi) \text{ as } x \to +\infty \qquad (\text{or } \textit{on the right})$$

and in the second case

$$f \in O(\varphi) \text{ as } x \to +\infty \qquad (\text{or } \textit{on the right}) .$$

These notations replace the classical ones $f = o(\varphi)$ and $f = O(\varphi)$, which are not logically correct and may produce some confusion in functional analysis.

Observe that

5.2 *If there exists x_0 such that $\varphi(x)\neq 0$ for $x>x_0$, then*

$$f\in o(\varphi) \quad \text{as} \quad x\to+\infty \iff \frac{f(x)}{\varphi(x)}\to 0 \quad \textit{as} \quad x\to+\infty$$

$$f\in O(\varphi) \quad \text{as} \quad x\to+\infty \iff \frac{f(x)}{\varphi(x)} \textit{ is bounded on the right .}$$

In order to extend the symbol O to distributions, we shall consider at first the case when $\varphi=\hat{x}^{\alpha}$ with $\alpha>-1$ (for simplicity the sign ^, *of dummy variable*, will be omitted). Let $\mathcal{J}$ be the integration operator defined by $\mathcal{J}f(x)=\int_c^x f(\xi)d\xi$ with c in I.

5.3. Lemma. *If α is a real number >-1 and f a continuous function such that $f\in o(x^{\alpha})$ as $x\to+\infty$, then*

$$\mathcal{J}f\in o(x^{\alpha+1}) \quad \textit{as} \quad x\to+\infty\,.$$

Proof. Suppose $f\in o(x^{\alpha})$ as $x\to+\infty$. This means that there exist x_0 and f_0 such that $f=x^{\alpha}f_0$ for $x>x_0$ and $f_0\to 0$ as $x\to+\infty$. Let ε be an arbitrary positive number; then there exists x_1 such that $|f_0(x)|<\varepsilon$ for $x>x_1$. We may assume of course $x_1>x_0>0$. Now, for every $x\in I$:

$$\mathcal{J}f(x)=k+\int_{x_1}^{x}\xi^{\alpha}f_0(\xi)d\xi \quad , \quad \text{where } k=\int_c^{x_1}f(\xi)d\xi$$

Since $|f_0(\xi)|<\varepsilon$ and $\xi>0$ for $\xi>x_1$ we have

$$\left|\frac{\mathcal{J}f(x)}{x^{\alpha+1}}\right|\leqslant\frac{|k|}{x^{\alpha+1}}+\frac{(x-x_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)x^{\alpha+1}}\,\varepsilon \quad , \quad \text{for } x>x_1\ ,$$

and therefore, remembering that $\alpha>-1$:

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{\mathcal{J}f(x)}{x^{\alpha+1}}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\alpha+1}\,.$$

As ε is arbitrary, this implies that $\mathcal{J}f(x)/x^{\alpha+1} \to 0$ as $x \to +\infty$, i. e. $\mathcal{J}f \in o(x^{\alpha+1})$ as $x \to +\infty$.

5.4. Remark. This lemma extends obviously to locally summable functions and even to measures.

The lemma suggests the following:

5.5. Definition. Let α be a real number > -1 and f a distribution on I. We write: $f \in o(x^\alpha)$ as $x \to +\infty$, iff there exist an integer $p \geqslant 0$ and a continuous function F on I, such that

$$f = D^p F \quad \text{and} \quad \frac{F(x)}{x^{\alpha+p}} \to 0 \quad \text{as } x \to +\infty .$$

5.6. Remark. The lemma implies that, *if there exist $p \in \mathbf{N}_0$ and $F \in \mathcal{C}(I)$ satisfying the preceding conditions, then every integer $m \geqslant p$ and every function G such that $G = \mathcal{J}^{m-p}F + P$, where $P \in \mathcal{P}_m$, satisfy the same conditions* (observe that if $P \in \mathcal{P}_m$, then $P(x)/x^{\alpha+m} \to 0$ as $x \to +\infty$).

5.7. Linearity Property. *If $f \in o(x^\alpha)$ and $g \in o(x^\alpha)$ as $x \to +\infty$, with $\alpha > -1$, then*

$$\lambda f + \mu g \in o(x^\alpha) \quad \textit{as} \quad x \to +\infty \quad \textit{for all} \quad \lambda, \mu \in \mathbf{C} .$$

For the proof, it is sufficient to represent f, g as derivatives of the same order of continuous functions, taking 5.6 into account.

In particular, α may be equal to 0. Then $x^0 = 1$ and, if $f \in o(1)$ as $x \to +\infty$, it is natural to say that $f \to 0$ as $x \to +\infty$. More generally, let λ be any complex number and $f \in \mathcal{C}_\infty(I)$; then:

5.8 Definition. We say that f *converges* to λ as $x \to +\infty$, iff $f - \lambda \in o(1)$ as $x \to +\infty$. A distribution f is said to be *convergent* as $x \to +\infty$, iff there exists $\lambda \in \mathbf{C}$ such that $f \to \lambda$ as $x \to +\infty$.

Taking the definition 5.5 into account and observing that $\lambda = D^p(\lambda^p/p!)$ for every $p \in \mathbf{N}_0$, we can define directly the preceding concept as follows:

5.9. Definition. We say that $f \to \lambda$ as $x \to +\infty$, iff there exist $p \in \mathbf{N}_0$ and $F \in \mathcal{C}(I)$ such that

$$f = D^p F \quad \text{and} \quad \frac{F(x)}{x^p} \to \frac{\lambda}{p!} \text{ as } x \to +\infty \text{ (in the ordinary sense).}$$

REMARK. Instead of «f tends to λ as $x \to +\infty$», we shall write sometimes «$f(x) \to \lambda$ as $x \to +\infty$». But it should be remembered that in these cases «x» is a dummy variable.

5.10. *If $f \to \lambda$ as $x \to +\infty$ and $f \to \mu$ as $x \to +\infty$, then $\lambda = \mu$.*

In fact, if $f - \lambda \to 0$ and $f - \mu \to 0$ as $x \to +\infty$, then, by 5.7, $(F-\lambda)-(F-\mu) = \mu - \lambda \to 0$ as $x \to +\infty$. But, for every integer $p \geqslant 0$ and every continuous function F such that $\mu - \lambda = D^p F$, we have necessarily $F = (\mu-\lambda)x^p/p! + P$, where P is a polynomial of degree $< p$. Hence, according to def. 5.9, $\mu - \lambda$ cannot tend to 0, *unless* $\mu = \lambda$.

This legitimates the definition complementary to 5.8:

5.11. DEFINITION. We say that λ is *the limit of f as $x \to +\infty$*, iff $f \to \lambda$ as $x \to +\infty$. In this case, we shall write $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ or $\lambda = f(+\infty)$.

The uniqueness of the limit is guaranteed just by 5.10. Besides, from 5.7 follows:

5.12. LINEARITY PROPERTY. *If f and g are convergent as $x \to +\infty$, then*

$$\lim_{x \to +\infty} (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_{x \to +\infty} f + \beta \lim_{x \to +\infty} g \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$$

In turn, from 5.3 and the preceding definitions, it follows:

5.13. *If f is a continuous function such that $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ in the ordinary sense, then the same fact holds in the distributional sense, i. e. in the sense of definitions* 5.4 *and* 5.8.

Observe that, according to 5.4, this theorem extends to locally summable functions (and even to measures). However, it must be observed that *the converse of this theorem is not true:*

5.14. EXAMPLE. As is well known, the function $\cos x$ is not convergent, in the *ordinary sense*, as $x \to +\infty$. But we have

$$\lim_{x \to +\infty} \cos x = 0 \text{ , } \textit{in the distributional sense}$$

To see that, it is enough to apply def. 5.4, observing that $\cos x = D \sin x$ and $\dfrac{\sin x}{x} \to 0$ as $x \to +\infty$.

5.15. GENERAL REMARK. *All preceding definitions may be extended and all propositions remain true, if we replace throughout $+\infty$ by $-\infty$ and «on the right»* *by «on the left». In particular, we must then consider an interval I unbounded on the left, $I =]-\infty, a[$, instead of an interval unbounded on the right.*

5.16. Definition. We say that f tends to λ as $x \to \infty$ and we write $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lambda$, iff $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lambda$.

For example, it is easily seen that (cf. 5.14):

$$\lim_{x\to\infty} \sin x = 0 \quad \textit{(in the distributional sense)} .$$

6. Limit and value of a distribution at a point of $\mathbf{R}$

Let now I be any open interval $]a, b[$, bounded on the left, i. e. with $a \in \mathbf{R}$ (but $b \in \mathbf{R}$ or $b = +\infty$). Then, definitions 5.1 are readily extended to this case, replacing throughout «$x \to +\infty$» by «$x \to a^+$» and «on the right» by «on the left». Besides, if we put $\mathcal{J}f(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$, we prove, as we did for 6.1.3 (the proof is even simpler):

6.1. Lemma. *If f is a continuous function on I, such that $f \in O((x-a)^\beta)$ as $x \to a^+$, where β is a real number > -1, then*

$$\mathcal{J}^n f \in O\big((x-a)^{\beta+n}\big) \quad \textit{as } x \to a^+ \quad , \quad \textit{for } n = 0, 1, \ldots$$

This lemma justifies the following:

6.2. Definition. If $f \in C_\infty(I)$ and $\beta > -1$, we write $f \in o(x^\beta)$ as $x \to a^+$, iff there exist $p \in \mathbf{N}_0$ and $F \in C(I)$ such that $f = D^p F$ and $F(x)/(x-a)^{\beta+p} \to 0$ as $x \to a^+$.

6.3 Remark. *The lemma implies that, if there exist p and F satisfying these conditions, then every integer $m \geq p$, along with the function $\mathcal{J}^{m-p}F$, satisfies the same conditions* (but it must be observed that for each integer $m \geq p$, there is no function different from $\mathcal{J}^{m-p}F$ satisfying the same conditions).

Now we are able to extend definitions 5.8 and 5.11, as well as propositions 5.7, 5.10, 5.12 and 5.13, replacing $+\infty$ by a^+. In particular, the convergence as $x \to a^+$ can be defined directly as follows:

6.4. Definition. A distribution f on $I=]a,b[$ tends to λ as $x\to a^+$, iff there exist $p\in\mathbf{N}_0$ and $F\in C(I)$, such that

$$f=D^pF \quad \text{and} \quad \frac{F(x)}{(x-a)^p}\to\frac{\lambda}{p!} \quad \textit{as } x\to a^+ \textit{ (in the ordinary sense)}.$$

Besides, the concepts of convergence corresponding to the cases $x\to+\infty$ and $x\to a^+$ are related to each other according to the following rule:

6.5. *Suppose $I=]a,+\infty[$ and $f\in C_\infty(I)$. Then, if $g(t)=f(a+1/t)$, we have:*

$$\lim_{t\to+\infty} g(t)=\lambda \iff \lim_{x\to a^+} f(x)\,.$$

Proof. We can obviously reduce to the case $a=0$ and $\lambda=0$. Suppose $f(x)\to 0$ as $x\to 0^+$. Then, there exist $p\in\mathbf{N}_0$ and $F\in C(I)$ such that $f=D^pF$ and $F(x)/x^p\to 0$ as $x\to a^+$. Moreover (cf. 4) we have $g(t)=(-t^2D_t)^pF(1/t)$ and it is easily shown by induction on p that there exist $p+1$ numbers a_k (whose expressions are not needed here) such that

6.6. $$g(t)=\sum_{k=0}^{p} a_kD_t^k\left[t^{p+k}F\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

Now, since $F(x)/x^p$ tends to 0 as $x\to 0^+, t^pF(1/t)$ tends to 0 as $t\to+\infty$. Hence

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{p+k}F(1/t)}{t^k}=0\,, \qquad \text{for } k=0,\dots,p\,,$$

which according to def. 5.9, means that all terms in the right side of 6.6 tend to 0 as $t\to+\infty$. Therefore, according to the linearity property, $g(t)$ tends to 0 as $t\to\infty$. In a similar way, we prove that, if $g(t)\to 0$ as $t\to+\infty$ then $f(x)\to 0$ as $x\to 0^+$. We can obviously define the meaning of

$$f(x)\to\lambda \qquad \text{as } x\to b^-,$$

as we did for the case $x\to a^+$ considering now an interval $]a,b[$ *bounded on the right.* It is readily seen that all preceding propositions and remarks can be extended to this case.

Let I be now any open interval in $\mathbf{R}$, $I =]a, b[$, and let c be any point of I, that is $a < c < b$. Then, if $f \in C_\infty(I)$, we define the meanings of

$$«f(x) \to \lambda \text{ as } x \to c^+» \quad \text{and} \quad «f(x) \to \lambda \text{ as } x \to c^-»$$

by considering, instead of f, *its restrictions* to the intervals $]a, c[$ and $]c, b[$.

As in classical analysis, we shall put

$$f(c^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \textit{(right-hand limit of } f \textit{ at } c\textit{)}$$

$$f(c^-) = \lim_{x \to a^-} f(x) \qquad \textit{(left-hand limit of } f \textit{ at } c\textit{)}$$

whenever the limit in question exists.

6.7. Definition. We say that f *tends to* λ *as* $x \to c$, iff $f(x) \to \lambda$ as $x \to c^+$ *and* $f(x) \to \lambda$ as $x \to c^-$. In this case we write $\lambda = \lim_{x \to c} f(x)$.

According to the preceding definitions and remarks, we can also define directly this concept:

6.8. Definition. The distribution f *tends to* λ *as* $x \to c$, iff there exist an integer $p \geqslant 0$ and a function F continuous at every point x of I *distinct from* c, such that

$$f = D^p F \quad \text{and} \quad \lim_{x \to c} \frac{F(x)}{(x-c)^p} = \frac{\lambda}{p!} \quad \textit{in the ordinary sense}.$$

Remark. Suppose that I is, more generally, *any* (non-degenerate) interval I in $\mathbf{R}$ and c is an inner point or an extremity of I. Then definition 6.8 applies, *even* if is c an extremity of the domain I of f; for example, if c is the left extremity of I, we have by definition $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$.

With the general hypothesis considered above, we have:

6.9. Definition. A distribution f on I is said to be *continuous at the point* c, iff there exist $p \in \mathbf{N}_0$ and $F \in C(I)$ such that $f = D^p F$ and $F(x)/(x-c)^p$ is convergent in ordinary sense as $x \to c$. Then we write

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x) = p! \lim_{x \to c} \frac{F(x)}{(x-c)^p}$$

and the number $f(c)$ is said to be the *value* of the distribution f at the point c (or for $x = c$).

EXAMPLES — I. Consider $f(x)=\cos 1/x$. Then f is a locally summable function on $\mathbf{R}$ and, since

$$\cos\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-D\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right),\quad \lim_{x\to 0}\left(x\,.\,\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

it is easily seen that f is continuous at the point 0 with the value 0 (in the distributional sense, not in the ordinary sense!). Observe that the right member has the value 0 *even in the ordinary* sense after the functions have been standardized.

II. It can be seen, as an exercise, that $\lim_{x\to 0}\delta^{(k)}=0$ and yet $\delta^{(k)}$ is not continuous at 0 for any $k=0,1,\ldots$

III. It can be proved, as an exercise, that: *If f is a distribution on an interval I minus a point c of $\mathbf{R}$ belonging to $\bar{I}$, and if f is convergent as $x\to c$, then there exists one, and only one distribution $\tilde{f}$ on I plus c, which is continuous at c and such that $\tilde{f}=f$ on I.*

REMARK. The previous concepts of limit and value of a distribution at a point of $\mathbf{R}$ have been introduced by Lojasiewicz [5]. As for the concepts of limit as $x\to+\infty$ or as $x\to-\infty$, the definitions given by Mikusiński and Sikorski [6] seem to be too restrictive, as they are not invariant for very simple substitutions, such as $x=1/t$ and do not allow to justify certain integral formulas occuring in applications. The definitions that we are using here do not present these disadvantages.

7. Primitives and integrals of distributions

If f is a distribution with domain in $\mathbf{R}$, we call *primitive of f* any distribution φ such that $D\varphi=f$. According to this definition:

7.1. THEOREM. *Every distribution f on an interval I has infinitely many primitives and any two primitives of f differ by a constant.*

Let f be a distribution on I. Then f is of the form $f=D^nF$, with $F\in\mathcal{C}(I)$, and every distribution φ of the form $\varphi=D^n\mathfrak{J}F+k$, where $\mathfrak{J}$ is an integration operator and $k\in\mathrm{C}$, is obviously a primitive of f. Suppose now $D\varphi_1=D\varphi_2=F$; then, if $\varphi_1=D^n\Phi_1$ and $\varphi_2=D^n\Phi_2$, with $\Phi_1,\Phi_2\in\mathcal{C}(I)$, we have $D^{n+1}\Phi_1=D^{n+1}\Phi_2$, which implies, according to axiom 4 (cf. 2), that $\Phi_1-\Phi_2$ is a polynomial P of degree $<n+1$. Thus $\varphi_1-\varphi_2=D^nP=const.$

From here and 6.9 it follows immediately:

7.2. COROLLARY. *If there exists a primitive of f which is continuous at a point a, then every primitive of f is continuous at a, and, for every complex number k, there exists one, and only one, primitive φ of f such that $\varphi(a)=k$.*

It will be natural to denote by the symbol.

$$\int_a^{\hat{x}} f(\xi)d\xi \qquad \text{or shortly by} \quad \int_a^{\hat{x}} f$$

the primitive of f assuming the value 0 at a. (Remember that the sign $\hat{}$, indicating that x is a dummy variable, may be omitted, whenever no confusion is possible). Thus, according to 7.2, if there exists at least one primitive of f which is continuous at the point a, the *differential equation* $D\varphi=f$ will have one single solution satisfying the *initial condition* $\varphi(a)=k$; and such a solution is

$$\varphi(x)=k+\int_a^x f(\xi)\,d\xi\ .$$

As we observed, it is understood that here x is only a dummy variable: the distribution φ need not actually have any value $\varphi(x)$ at *every* point x of I. But, obviously, if φ has a value at *some* point b of I, this value will be given by the formula

$$\varphi(b)=k+\int_a^b f(\xi)d\xi\ .$$

Thus the integral $\int_a^b f(\xi)d\xi$ (in short $\int_a^b f$) is *defined* by the generalized BARROW'S FORMULA:

$$\int_a^b f(x)dx=\varphi(b)-\varphi(a)\ .$$

The corollary 7.2 can be extended as follows:

7.3. COROLLARY. *If there exists a primitive of f having a limit as $x\to a^+$ [resp. as $x\to a^-$], then, for every complex number k, there exists one, and only one, primitive φ of f such that $\varphi(a^+)=k$* [resp. $\varphi(a^-)=k$].

Remember that the existence of both $\varphi(a^+)$ and $\varphi(a^-)$ does not imply the existence of $\varphi(a)$.

All preceding remarks and conventions may now be extended analogously to new cases. For example, we shall denote by $\int_{a^-}^{x} f(\xi)d\xi$ (in short $\int_{a^-}^{x} f$) the primitive of f on I which tends to zero as $x \to a^-$; accordingly, if such a limit exists, the differential equation $D\varphi = f$ along with the initial condition $\varphi(a^-) = k$ will have the only solution·

$$\varphi(x) = k + \int_{a^-}^{x} f(\xi)d\xi \ .$$

So we shall have by definition:

$$\int_{a^-}^{b^-} f(x)dx = \varphi(b^-) - \varphi(a^-) \ , \quad \int_{a^-}^{b^+} f(x)dx = \varphi(b^+) - \varphi(a^-) \ .$$

If $a < b$, these are, respectively, *the integrals of the distribution on the intervals* $[a, b[$ *and* $[a, b]$. The integrals of f on $]a, b]$ and $]a, b[$ are analogously defined. Naturally, such an integral is said to *exist* or to be *convergent* iff the two corresponding limits exist. If $b \leqslant a$, we have of course

$$\int_{a^-}^{b^+} f = -\int_{b^+}^{a^-} f \ , \quad \int_{a^+}^{b^+} f = -\int_{b^+}^{a^+} f \ , \quad \text{etc.}$$

Finally all preceding definitions may be extended to *infinite intervals.* For example, we have by definition:

$$\int_{a^-}^{+\infty} f(x)dx = \varphi(+\infty) - \varphi(a^-) \ ,$$

if φ is a primitive of f such that the limits on the right side exist; and $\int_{a^-}^{+\infty} f(x)\,dx$ is called the integral of f *on the interval* $[a, +\infty[$. For other kinds of infinite intervals such as $]-\infty, a[$, $]-\infty, +\infty[$, etc. the definitions are quite analogous.

In general case, a distribution f is said to be *integrable on an interval* I, iff the integral of f on I exists. This integral may be denoted by $\int_I f(x)dx$ or simply by $\int_I f$.

From the linearity property of limits it follows immediately the corresponding property for integrals:

7.4. LINEARITY PROPERTY. *If two distributions f and g are integrable on I, so is $\alpha f+\beta g$, for any $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ and*

$$\int_I (\alpha f+\beta g)=\alpha\int_I f+\beta\int_I g\ .$$

On the other hand, it should be observed that:

7.5. *If f is a function summable on I, then the integral of f on I, in the distributional sense, exists and equals the Lebesgue integral on I. More generally, if f is a locally summable function on I, such that $\int_I f$ is convergent in the classical sense (even simply convergent), then $\int_I f$ exists with the same value, in distributional sense.*

However, the converse of this proposition is not true, as we shall presently see. Consider the integral $\int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t}dt$, where ω is a real parameter. This integral is obviously divergent, in classical sense, for every value of ω. However, for $\omega\neq 0$, one primitive of $e^{i\omega t}$ is $e^{i\omega t}/i\omega$ and

$$\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}=\frac{1}{(i\omega)^2}D_t e^{i\omega t}\quad,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{e^{i\omega t}}{t}=0\ .$$

Hence, we have in the distributional sense, for every $\omega\neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega}\left(\lim_{t\to+\infty}e^{i\omega t}-\lim_{t\to-\infty}e^{i\omega t}\right)=0\ .$$

For $\omega=0$ this integral is divergent, even in the distributional sense. These results agree with the intuition of physicists, which have, since long, adopted the formula

7.6. $$\int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)\ .$$

However, a complete justification of this formula cannot be achieved, without a suitable definition of *parametric integral*, which will be given in § 3. Let us now prove the following proposition:

7.7. *Every distribution with a bounded carrier on* $\mathbf{R}$ *is integrable on* $\mathbf{R}$.

Proof. Let f be a distribution of bounded carrier on $\mathbf{R}$. This means that there exists a bounded interval $I=[a,b]$ such that $f=0$ outside I. Hence, if φ is a primitive of f, $D\varphi=0$ outside I and φ reduces to constants c_1 and c_2, respectively on $]-\infty,a[$ and on $]b,+\infty[$. Thus

$$\varphi(-\infty)=\varphi(a^-)=c_1 \qquad \text{and} \quad \varphi(b^+)=\varphi(+\infty)=c_2\,.$$

Hence f is integrable on $\mathbf{R}$ and $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f=\int_I f=\int_{a^-}^{b^+} f=c_2-c_1$.

8. Orders of growth for distributions

For brevity, we shall confine ourselves to the typical case when $x\to+\infty$, since the considerations in the other cases are analogous. Let I be any interval unbounded on the right and $\mathfrak{I}f(x)=\displaystyle\int_c^x f$ with $c\in I$, for $f\in\mathcal{C}(I)$. The extension of the «O» symbol to distributions is based on the following lemma, whose proof is similar to the one of 5.3, and even more simple:

8.1. Lemma. *If f is a continuous function on I such that $f\in O(x^\alpha)$ as $x\to+\infty$ with $\alpha>-1$, then $\mathfrak{I}f\in O(x^{\alpha+1})$ as $x\to+\infty$.*

8.2. Definition. If $f\in\mathcal{C}_\infty(I)$ and $\alpha>-1$, then we write $f\in O(x^\alpha)$ as $x\to+\infty$, iff there exist $x\in\mathbf{N}_0$ and $F\in\mathcal{C}(I)$ such that: $f=D^nF$ and $F(x)/x^{\alpha+n}$ is bounded on the right.

The lemma guarantees the linearity property for this case. In particular:

8.3. Definition. A distribution f on I is said to be *bounded on the right*, iff $f\in O(1)$ as $x\to+\infty$, that is, iff there exist $n\in\mathbf{N}_0$ and $F\in\mathcal{C}(I)$ such that $f=D^nF$ and $F(x)/x^n$ is bounded on the the right.

Now we are able to define the meaning of expressions such that «$f\in o(\varphi)$» and «$f\in O(\varphi)$» in the more general case when $f\in\mathcal{C}_\infty(I)$ and $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(I)$. For that purpose, we can take as a model the classical definitions 5.1:

8.4. Definitions. We shall write $f\in o(\varphi)$ as $x\to+\infty$, iff there exist a real x_0 and a distribution f_0 such that: $f=\varphi f_0$ for $x>x_0$ and $f_0\to0$ as $x\to+\infty$.

We shall write $f \in O(\varphi)$ as $x \to +\infty$, iff there exist a real x_0 and a distribution f_0 such that: $f = \varphi f_0$ for $x > x_0$ and f_0 is bounded on the right.

The first thing to do is to see whether these definitions are equivalent to the previous ones, in the particular case when φ is of the form x^α, with $\alpha > -1$. This is easily proved, by means of the formulas

$$x^\alpha . D^n F_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(F_0 . D^k x^\alpha)$$

$$D^n(x^\alpha G_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D_x^k x^\alpha)(D^{n-k} G_0)$$

taking into account the linearity property.

On the other hand, this same property can be now immediately extended to the general case. Moreover definitions 8.4 introduce a remarkable new property, which is a counterpart of the preceding lemmas:

8.5. Differenciation Property. *If $f \in O(x^\alpha)$ on the right, then $Df \in O(x^{\alpha-1})$ on the right, for every $\alpha \in \mathbf{R}$.*

We shall begin the proof in the case $\alpha = 0$:

8.6. *If f is bounded on the right, then $Df \in O(x^{-1})$ as $x \to +\infty$.*

Suppose f bounded on the right. Then there exist $p \in \mathbf{N}_0$, $F \in \mathcal{C}(I)$ and c such that $f = D^p F$ for $x > c$ and $F(x)/x^p$ is bounded on the right. We may choose $c > 0$; then we have $Df = x^{-1}(x . D^{p+1} F) = x^{-1}[D^{p+1}(xF) - D^p F]$ for $x > c$ and it is readily seen that $D^{p+1}(xF)$ is bounded on the right, as well as $D^p F$. Hence $Df \in O(x^{-1})$ as $x \to +\infty$.

Suppose now $f \in O(x^\alpha)$ as $x \to +\infty$, where $\alpha \in \mathbf{R}$. Then there exist x_0 and f_0 such that $f = x^\alpha f_0$ for $x > x_0$ and $f_0 \in O(1)$ on the right. It follows that $Df = \alpha x^{\alpha-1} . f_0 + x^\alpha . Df_0$, and it is readily seen, applying 8.6, that $Df \in O(x^{\alpha-1})$ as $x \to +\infty$.

By an identical argument it is shown that the *differenciation property extends to the «o» symbol.*

Furthermore it is a simple matter to prove the following properties, where the expression «on the right» or «as $x \to +\infty$» is omitted for simplicity:

8.7. *If f is convergent, then f is bounded.*

8.8. *If $f \in o(\varphi)$ then $f \in O(\varphi)$.*

8.9. *If* $f \in \mathrm{O}(x^{\alpha})$ *and* $\alpha < \beta$, *then* $f \in \mathrm{o}(x^{\beta})$.

Obviously, we have chosen the case when $x \to +\infty$ as a model; concepts and properties are quite analogous in cases when $x \to -\infty$, $x \to c^{+}$, etc.

8.10. Convention. If a distribution f has the same growth property as $x \to +\infty$ and as $x \to -\infty$, we shall say simply that f has this property as $x \to \infty$. If a a distribution f on an interval I is bounded both on the right and on the left (i. e. as x tends to the right extremity and to the left extremity), we shall say that f is *bounded on* I or simply *bounded.*

Remark. The concept of bounded distribution that we have just introduced is more general than the concept of bounded distribution according to Schwartz, and it is necessary for the integral theory, as we shall next see.

9. Convergence tests for integrals

Let us consider, at first, the case of integrals on $\mathbf{R}$. We have then the following test, which is not true in classical analysis:

9.1. (A Necessary Condition For Convergence). *If a distribution* f *is integrable on* $\mathbf{R}$, *then* $f \in \mathrm{O}(x^{-1})$ *as* $x \to \infty$.

Proof. Suppose that there exists a primitive φ of f such that φ is convergent as $x \to +\infty$ and as $x \to -\infty$ (1). Then, by 8.7, φ is bounded on $\mathbf{R}$ and, by 8.5 (and its analogue for the case $x \to -\infty$), we have $\varphi \in \mathrm{O}(x^{-1})$ as $x \to \infty$.

On the other hand, the following theorem extends to distributions a well known classical test:

9.2 (A Sufficient Condition For Convergence). *If there exists a number* $\alpha < -1$ *such that* $f \in \mathrm{O}(x^{\alpha})$ *as* $x \to \infty$, *then* f *is integrable on* $\mathbf{R}$.

Proof. Suppose $f \in \mathrm{O}(x^{\alpha})$ as $x \to \infty$, with $\alpha < -1$. Then there exist a number $c > 0$, an integer $n \geqslant 0$ and a continuous function F, such that

$$f = x^{\alpha} D^{n} F \text{ for } |x| > c \quad , \quad \text{with } \frac{F(x)}{x^{n}} \text{ bounded for } |x| > c$$

(1) This does not mean that f is convergent as $x \to \infty$, for the limits are in general different.

Set

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) \ , & \text{for } |x| > c \\ 0 \ , & \text{for } |x| < c \end{cases} \quad , \quad f_1 = x^\alpha D^n F_1 \quad , \quad f_2 = f - f_1 \, .$$

Then f_2 is a distribution with support contained in $[-c, c]$, hence integrable on $\mathbf{R}$. So we have only to prove that f_1 is integrable on $\mathbf{R}$, for then we have $\int_{\mathbf{R}} f = \int_{\mathbf{R}} f_1 + \int_{\mathbf{R}} f_2$. We shall put for simplicity $f_1 = f$ and $F_1 = F$. Then

$$f = x^\alpha D^n F = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k D^{n-k}(x^{\alpha-k} F)$$

where $c_k = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\binom{n}{k}$. From here we deduce the following primitive of f:

9.3. $$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_k D^{n-k-1}(x^{\alpha-k} F) + (-1)^n c_n \int_0^x \xi^{\alpha-n} F(\xi) d\xi \, .$$

But, since $F \in \mathrm{O}(x^n)$ as $x \to \infty$, in the ordinary sense, we have $\xi^{\alpha-n} F \in \mathrm{O}(\xi^\alpha)$ as $x \to \infty$, with $\alpha < -1$, and, according to the classical test, this implies that the function $\xi^{\alpha-n} F$ is summable on $\mathbf{R}$. Hence the last term in 9.3 is convergent as $x \to +\infty$ and as $x \to -\infty$.

As to the other terms, observe that the functions

$$\frac{x^{\alpha-k} F(x)}{x^{n-k-1}} = x^{\alpha+1} \frac{F(x)}{x^n} \qquad \text{for } k = 0, \ldots, n-1$$

tend to 0 as $x \to \infty$, since $\alpha+1 < 0$ and $F(x)/x^n$ is bounded (in the ordinary sense). Hence, by def. 5.9,

$$D^{n-k-1}(x^{\alpha-k} F) \to 0 \qquad \text{as } x \to \infty$$

so that

$$\varphi(+\infty) = (-1)^n c_n \int_0^{+\infty} x^{\alpha-n} F(x) dx \quad , \quad \varphi(-\infty) = (-1)^n c_n \int_0^{-\infty} x^{\alpha-n} F(x) dx \, .$$

Therefore f is integrable on $\mathbf{R}$ and

$$\int_{\mathbf{R}} f = \int_{\mathbf{R}} x^{\alpha} D^n F = (-1)^n \int_{\mathbf{R}} F(x) \frac{d^n x^{\alpha}}{dx^n}\, dx .$$

We can deduce similar tests for integrals on intervals distinct from $\mathbf{R}$. For example, consider an interval $I =]a, +\infty[$ and $f \in \mathcal{C}_{\infty}(I)$. Then it is easily seen that:

If f is integrable on I, then $f \in O(x^{-1})$ as $x \to +\infty$ and $f \in O\big((x-a)^{-1}\big)$ as $x \to a^+$.

If there exist $\alpha < -1$ and $\beta > -1$ such that $f \in O(x^{\alpha})$ as $x \to +\infty$ and $f \in O\big((x-a)^{\beta}\big)$ as $x \to a^+$, then f is integrable on I.

10. Multiplication and change of variable in connection with limits and integrals

It is a simple matter to prove the following propositions:

10.1. *If a distribution f on an interval I is convergent as x tends to c^+ with $c \in I$, and if $g \in \mathcal{C}^{\infty}(I)$, then fg is convergent as $x \to c^+$ and*

$$\lim_{x \to c^+} (fg) = (\lim_{x \to c^+} f)(\lim_{x \to c^+} g) .$$

10.2. *If a distribution f on an interval I is convergent as $x \to c^+$ with $c \in I$, and if φ is an increasing $\mathcal{C}^{\infty}$ mapping of an interval I^* into I, then $f(\varphi(t))$ is convergent as $t \to \gamma^+$, with $\varphi(\gamma) = c$, and*

$$\lim_{t \to \gamma^+} f(\varphi(\tau)) = \lim_{x \to c^+} f(x) .$$

Obviously, these two propositions can be extended to the case when f is convergent as $x \to c^-$. Then the second one enables the usual substitution property to be extended to integrals of distributions on bounded intervals. For example, assuming that $f \in \mathcal{C}_{\infty}(I)$, $a, b \in I$ and φ is an increasing $\mathcal{C}^{\infty}$ mapping of I^* into I such that $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, we have

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \int_{\alpha^+}^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

whenever the first integral exist.

However these criteria are not sufficient in certain cases which occur in practice. Our next purpose is to introduce a stronger criterion than 10.2. For simplicity, we shall reduce our discussion to the case when $x\to+\infty$ and $\varphi(+\infty)=+\infty$, which can be taken as a model for other cases:

10.3. THEOREM. *Let f be a distribution on an interval I unbounded on the right and φ a C^∞ mapping of an interval I^* into I such that $\varphi'(t)\neq 0$ on I^* and $\varphi(t)\to+\infty$ as $t\to+\infty$. Suppose that:*

(i) *f is convergent as $x\to+\infty$.*

(ii) *φ' tends to a number $c\neq 0$ as $t\to+\infty$ (in the ordinary sense).*

(iii) *$\varphi^{(k+1)}\in o(t^{-k})$ as $t\to+\infty$ (in the ordinary sense) for all $k=1,2,\ldots$*

Then we have

$$\lim_{t\to+\infty} f(\varphi(t)) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Proof. Suppose $f\to\lambda$ as $x\to+\infty$. Then there exist $n\in\mathbf{N}_0$ and $F\in C(I)$ such that $f=D^nF$ and $F(x)/x^n\to\lambda/n!$ as $x\to+\infty$. Now $f\circ\varphi=[(1/\varphi')D_t]^n(F\circ\varphi)$ and, according to the hypothesis,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{x\to+\infty}\varphi'(t)=c$$

Hence

$$\frac{F(\varphi(t))}{t^n}=\frac{F(\varphi(t))}{(\varphi(t))^n}\cdot\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)^n\longrightarrow\frac{\lambda c^n}{n!} \tag{10.4}$$

On the other hand it is easily seen that

$$\left(\frac{1}{\varphi'}D_t\right)^n(F\circ\varphi)=\sum_{k=0}^{n}D_t^{n-k}[\alpha_k(t)F(\varphi(t))]$$

where $\alpha_0=(1/\varphi')^n$ and $\alpha_k\in o(t^{-k})$ as $t\to+\infty$, for $k=1,\ldots,n$. Thus all terms in last sum tend to zero as $x\to+\infty$, except $D_t^n[\alpha_0(F\circ\varphi)]$, which, according to 10.4 tends to λ.

This criterion and the corresponding ones for the cases when $x\to-\infty$, $t\to-\infty$, etc. lead to the following substitution rule for integrals:

10.5. Corollary. *Let f be a distribution integrable on* $\mathbf{R}$ *and* φ *a* C^∞ *mapping of* $\mathbf{R}$ *onto* $\mathbf{R}$ *such that:*

(j) $\varphi'(t)$ *is* $\neq 0$ *on* $\mathbf{R}$ *and tends to numbers* $\neq 0$ *as* $t \to +\infty$ *and as* $t \to -\infty$ *(in the ordinary sense)*

(jj) $\varphi^{(k+1)} \in o(t^{-k})$ *as* $t \to \infty$ *(in the ordinary sense) for all* $k = 1, 2, \ldots$

Then $f(\varphi(t))$ *is integrable on* $\mathbf{R}$ *and*

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}} f(\varphi(t)) \, |\varphi'(t)| \, dt \, .$$

This rule is an immediate consequence of theorem 10.3 and its analogues, applied to a primitive of f. Observe that in the case $\varphi'(t) < 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \, .$$

In particular, 10.5 applies in the elementary cases when $x = t + a$ or $x = ct$, with $a \in \mathbf{R}$ and $c \in \mathbf{C}$. Then we have

10.6 $$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = |c| \int_{\mathbf{R}} f(cx)\, dx$$

10.7 $$\int_{\mathbf{R}} f(x+a)dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx \, .$$

The last formula can be expressed by saying that the integral is invariant under translations.

More refined criteria can be obtained, by using the concept of measure, as we did for multiplication:

Remember that, if μ is a measure on an open interval I, the *total variation of* μ in a bounded interval J such that $J \subset I$ is defined to be the supremum of the sums $S_P = \Sigma_1^p |\mu(J_i)|$, for all finite partitions P of J in intervals $J_1, \ldots, J_p$. We shall denote by $|\mu|(J)$ the total variation of μ in J; as is well known, $|\mu|$ is again a measure on $\mathbf{R}$ (the *modulus of* μ) such that: (i) if $\mu \in \dot{L}(I)$, then $|\mu|$ is the modulus of the *function* μ in the ordinary sense; (ii) $|\varphi\mu| = |\varphi||\mu|$ for all $\varphi \in C(I)$. On the other hand, if μ and ν are two measures on I, we write $\mu \leqslant \nu$, iff $\mu(J) \leqslant \nu(J)$ for each bounded interval J such that $\bar{J} \subset I$.

Suppose I unbounded on the rigth. A measure μ on I is said to be *bounded on the right*, iff there exist two numbers x_0 and k such that $|\mu| \leqslant k$ for $x > x_0$, i. e. $|\mu|(J) \leqslant k|J|$ for all bounded intervals $J \subset [x_0, +\infty[$. On the other hand, we say that μ *converges to a number c as* $x \rightarrow +\infty$, iff for every $\varepsilon > 0$ there exists a real x_0 such that $|\mu - c| < \varepsilon$ for $x < x_0$. It is readily seen that these concepts coincide with the classical ones if μ turns out to be a function. Besides, the preceding lemmas for the «o» and «O» symbols keep true, if f is a measure.

These remarks suggest the following refinement of the concept of convergence for distributions:

10.8. Definition. Let $f \in C_\infty(I)$, $n \in \mathbf{N}_0$ and $\lambda \in \mathbf{C}$. We write $f \xrightarrow[n]{} \lambda$ as $x \rightarrow +\infty$, iff there exist a real x_0 and a measure F such that $f = D^n F$ for $x > x_0$ and $F(x)/x^n \rightarrow \lambda/n!$ in the measure sense as $x \rightarrow \infty$.

On the other hand, if $\varphi \in C^\infty(I)$, we shall write $f \in o_n(\varphi)$ as $x \rightarrow +\infty$, iff there exist x_0 and f_0 such that $f = \varphi f_0$ for $x > x_0$ and $f_0 \xrightarrow[n]{} 0$ as $x \rightarrow +\infty$.

The expression «$f \in O_n(\varphi)$» can be analogously defined and the «dual» concepts of the preceding ones can be introduced as follows:

10.9. Definition. Let $n \in \mathbf{N}_0$, $f \in C^n(I)$ and $\lambda \in \mathbf{C}$. We write $f \xrightarrow{n} \lambda$ as $x \rightarrow +\infty$, iff f tends to λ and $f^{(k)} \in o(x^{-k})$ as $x \rightarrow +\infty$, for $k = 1, \ldots, n$ (in the ordinary sense). We write $f \in o^n(\varphi)$ as $x \rightarrow +\infty$, iff there exist x_0 and f_0 such that $f = \varphi f_0$ for $x > x_0$ and $f_0 \xrightarrow{n} 0$ as $x \rightarrow +\infty$.

That being so, it is readily seen that:

10.10. *If* $f \xrightarrow[n]{} \lambda$ *as* $x \rightarrow +\infty$ *and* $g \xrightarrow{n} \mu$ *as* $x \rightarrow +\infty$ *then* $fg \xrightarrow[n]{} \lambda\mu$ *as* $x \rightarrow +\infty$.

10.11. *If* $f \in o_n(\varphi)$ *and* $g \in o^n(\psi)$ *on the right, then* $fg \in o_n(\varphi\psi)$ *on the right, and analogously for the* «O» *symbols.*

There are similar criteria, which extend theorem 10.3 and corollary 10.5, for change of variable.

§ 3. PARTIAL INTEGRALS AND MULTIPLE INTEGRALS

11. Partial limits for distributions of two variables

Let I and J be two intervals in $\mathbf{R}$, and suppose that J is unbounded on the right. Given two functions $f(x,y)$ and $g(x)$ respectively on $I\times J$ and I, $f(x,y)$ is said to *converge uniformly on I to $g(x)$ as $y\to+\infty$*, iff for every $\varepsilon>0$ there exists a $\eta\in J$ (independent of x), such that: $|f(x,y)-g(x)|<\varepsilon$ for all $y>\eta$ and $x\in I$. On the other hand, if α is any real, we write

$$f(x,y)\in o(y^{\alpha}) \qquad \textit{uniformly} \text{ on } I \text{ as } y\to+\infty\,,$$

iff $f(x,y)/y^{\alpha}\to 0$ uniformly on I as $y\to+\infty$.

Put for every $f\in C(I\times J)$:

$$\mathfrak{I}_x f(x,y)\equiv\int_{x_0}^{x} f(\xi,y)d\xi \;\;,\;\; \mathfrak{I}_y f(x,y)\equiv\int_{y_0}^{y} f(x,\eta)d\eta \;,$$

where x_0 resp. y_0 is a fixed point, arbitrarily chosen in I resp. J. The following lemma is easily proved (cf. 5.3):

11.1. Lemma. *If $\alpha>-1$ and $f(x,y)\in o(y^{\alpha})$ uniformly on I as $y\to+\infty$, then:*

$$\mathfrak{I}_x f\in o(y^{\alpha}) \;\; \textit{and} \;\; \mathfrak{I}_y f\in o(y^{\alpha+1}) \;\; \textit{uniformly on } I \textit{ as } y\to+\infty\,.$$

This lemma leads to the following:

11.2. Definition. If $f\in C_{\infty}(I\times J)$ and $\alpha>-1$, we write:

$$f(x,y)\in o(y^{\alpha}) \;\; \textit{on } I \textit{ as } y\to+\infty,$$

iff there exist $m,n\in\mathbf{N}_0$ and $F\in C(I\times J)$ such that:

(1) $f(x,y)=D_x^m D_y^n F(x,y)$.

(2) $F(x,y)\in o(y^{\alpha+n})$ uniformly on each compact interval $I^*\subset I$ as $y\to+\infty$ (1)

Applying this definition and the lemma, the following properties are easily shown (with $\alpha>-1$):

11.3. *If $f(x,y)\in o(y^{\alpha})$ and $g(x,y)\in o(y^{\alpha})$ on I as $y\to+\infty$, then, for all $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$:*

$$\lambda f+\mu g\in o(y^{\alpha}) \;\; \textit{on } I \text{ as } y\to+\infty$$

(1) A more general condition might be considered instead of (2), but this definition is quite sufficient for applications.

11.4. *If* $f(x,y) \in o(y^{\alpha})$ *on* I *as* $y \to +\infty$, *then*

$$D_x f(x,y) \in o(y^{\alpha}) \quad \text{on } I \text{ as } y \to +\infty .$$

11.5. *If* $f(x,y) \in o(y^{\alpha})$ *on* I *as* $y \to +\infty$ *and* $\varphi(x)$ *is multipliable by* $f(x,y)$, *then*

$$\varphi(x) f(x,y) \in o(y^{\alpha}) \quad , \quad \text{on } I \text{ as } y \to +\infty .$$

Consider now $g \in C_{\infty}(I)$ and $f \in C_{\infty}(I \times J)$; then:

11.6. Definition. We say that $f(x,y)$ *converges on* I *to* $g(x)$, if and only if $f(x,y) - g(x) \in o(1)$ on I *as* $y \to +\infty$.

The uniqueness property as well as the linearity property of convergence are in this case immediate consequences of 11.3. Then we can write

$$g(x) = \lim_{y \to +\infty} f(x,y) \quad \text{or} \quad g(x) = f(x, +\infty) \quad \text{on } I,$$

to express that $f(x,y) \to g(x)$ on I as $y \to +\infty$.

On the other hand, the following important property, *which does not hold in classical analysis*, is an immediate consequence of 11.4:

11.7. Differentiation Property. *If* $f(x,y) \to g(x)$ *on* I as $y \to +\infty$, *then* $D_x f(x,y) \to D_x g(x)$ *on* I *as* $y \to +\infty$, *that is:*

$$D_x \lim_{y \to +\infty} f(x,y) = \lim_{y \to +\infty} D_x f(x,y) \quad \text{on } I .$$

In turn from 11.5 follows:

11.7′ Multiplication Property. *If* $f(x,y) \to g(x)$ *on* I *as* $y \to +\infty$ *and* $\varphi(x)$ *is multipliable* by $f(x,y)$, *then*

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) f(x,y)] = \varphi(x) \lim_{y \to +\infty} f(x,y) \quad \text{on } I .$$

Moreover, applying 11.7 and the linearity property, it is easily shown:

11.8. Substitution Property. *If* $f(x,y) \to g(x)$ *on* I *as* $y \to +\infty$, *and if* φ *is a mapping of an interval* I^* *into* I, *such that* $f(\varphi(t),y)$ *exists* (1), *then* $g(\varphi(t))$ *exists too and*

$$f(\varphi(t),y) \to g(\varphi(t)) \quad \text{on } I^* \quad \text{as} \quad y \to +\infty .$$

---

(1) The change of variables for distributions of several variables is defined according to criteria similar to those adopted for the case of one variable.

This substitution rule concerns the *parameter* x. Substitution rules concerning the *converging variable* y can be easily found, as generalization of the criteria given in 10.

The «O» symbol is extended to distributions $f(x,y)$ on $I\times J$, with respect to y, in the following way:

11.9. DEFINITION. If $\alpha>-1$, we write

$$f(x,y)\in O(y^{\alpha}) \quad on\ I\ as\ y\to+\infty$$

iff there exist $m,n\in \mathbf{N}_0$ and $F\in C(I\times J)$ such that:

(i) $f(x,y)=D_x^m D_y^n F(x,y)$;

(ii) for every compact interval $I^*\subset I$, there exists a number M such that

$$\frac{F(x,y)}{(1+|y|)^{\alpha+n}}\leqslant M \quad \text{on} \quad I^*\times J \ (^1).$$

More generally, if $\varphi\in C^{\infty}(J)$, we write

$$f(x,y)\in O(\varphi(y)) \quad \text{on } I \text{ as } y\to+\infty\,,$$

iff there exist a real y_0 and a distribution $f_0(x,y)$ such that $f(x,y)=\varphi(x)f_0(x,y)$ for $y>y_0$ and $f_0(x,y)\in O(1)$ on I as $y\to+\infty$.

Besides, by the linearity property it is easily shown:

11.10. DIFFERENTIATION PROPERTIES. *If α is any real and $f(x,y)\in O(y^{\alpha})$ on I as $y\to+\infty$, then*

$$D_x f(x,y)\in O(y^{\alpha}) \quad \text{and} \quad D_y f(x,y)\in O(y^{\alpha-1}) \ \text{on } I \text{ as } y\to+\infty\,.$$

Obviously all preceding considerations extend to the case when J is an interval unbounded on the right and $y\to+\infty$.

12. Partial integrals for distributions of two variables

Let I and J be any two intervals in $\mathbf{R}$, and $f(x,y)$ a distribution on $I\times J$. A distribution $\varphi(x,y)$ such that $D_y\varphi(x,y)=f(x,y)$ will be called a *(partial) primitive*

(1) The choice of $(1+|y|)^{\alpha+n}$ instead of $y^{\alpha+n}$ is only to make the quocient continuous on $I^*\times J$.

of $f(x,y)$ with respect to y. On the other hand, a distribution $u(x,y)$ on $I\times J$ is said to be *independent* of y, iff it reduces to a distribution g of the only variable x, i. e, iff it is of the form $u(x,y)=D_x^m G(x)$ with $m\in\mathbf{N}_0$, $G\in\mathcal{C}(I)$.

12.1. Lemma. *A distribution u on $I\times J$ is independent of x, iff $D_y u=0$.*

Proof. It is readily seen that, if u is independent of y, then $D_y u=0$. Suppose now conversely that $D_y u=0$ and assume $u=D_x^m D_y^n U$, with $m,n\in\mathbf{N}_0$ and $U\in\mathcal{C}(I)$. Then $D_y u=D_x^m D_y^{n+1} U=0$ and therefore (cf. 2, axiom 4) U must be of the form $U(x,y)=\sum_0^{m-1} x^i a_i(y)+\sum_0^n y^j b_j(x)$, with $a_i\in\mathcal{C}(J)$ and $b_j\in\mathcal{C}(I)$. Hence $u(x,y)=D_x^m D_y^n U(x,y)=n!\,D_x^m b_n(x)$.

Now it is easily proved, as in the case of one variable:

12.2. Theorem. *Every distribution f on $I\times J$ has infinitely many primitives with respect to y and two such primitives differ by a distribution independent of x.*

We are able to define, in a natural way, the concept of *partial* (or *parametric) integral* of a distribution $f(x,y)$. It will be sufficient to consider integrals on $\mathbf{R}$. Let I be any interval in $\mathbf{R}$ and $f\in\mathcal{C}_\infty(I\times\mathbf{R})$; then:

12.3. Definition. The integral $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ is said to be *convergent on I*, iff there exists a primitive φ of f with respect to y which is convergent on I as $y\to+\infty$. Then we write

$$\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy=\varphi(x,+\infty)-\varphi(x,-\infty) \quad \text{on} \quad I\,.$$

From 11.2 follows at once the uniqueness of the partial integral. From the properties of partial limits we can deduce the *linearity property for partial integrals* as well as the following properties:

12.4. Differenciation Property. *If $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ is convergent on I, so is $\int_{\mathbf{R}} f'_x(x,y)dy$ and*

$$D_x\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy=\int_{\mathbf{R}} D_x f(x,y)dy \quad \text{on} \quad I\,.$$

12.5 SUBSTITUTION PROPERTY. *If* $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy = g(x)$ *on* I *and if* φ *is any continuous mapping of an interval* I^* *into* I *such that* $f(\varphi(t),y)$ *exists, then*

$$\int_{\mathbf{R}} f(\varphi(t),y)dy = g(\varphi(t)) \quad \text{on} \quad I^* .$$

As for substitutions concerning the integration variable y, the criteria established in 10 can be easily extended to partial integrals. In particular, we have for all $h \in \mathbf{R}$:

12.6. $$\int_{\mathbf{R}} f(x,y+h)dy = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$$

12.7. $$\int_{\mathbf{R}} f(x,hy)dy = |h| \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy .$$

Applying lemma 12.1, criterion 7.7 can be also extended to partial integrals:

12.8. THEOREM. *If for any compact interval* $I^* \subset I$ *there exists a compact interval* K *such that* $f(x,y)=0$ *on* $I^* \times (\mathbf{R}-K)$, *then* $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ *is convergent on* I.

Finally the following extensions of 9.1 and 9.2 are easily proved:

12.9. THEOREM. *If* $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ *is convergent on* I, *then* $f \in \mathrm{O}(y^{-1})$ *on* I *as* $y \to \infty$. *On the other hand, if there exists* $\alpha < -1$ *such that* $f \in \mathrm{O}(y^{\alpha})$ *on* I *as* $y \to \infty$, *then* $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ *is convergent on* I.

REMARKS—I. If $f(x,y)$ is a function, then for the convergence of $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ on I in distributional sense it is not sufficient (neither necessary) that the integral be convergent *for each* $x \in I$. Obviously, a sufficient condition is that the integral be uniformly convergent on each compact set contained in I. More generally, it can be proved that, if f is summable on each set $I^* \times \mathbf{R}$, where I^* is a compact interval contained in I, then $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ is convergent on I in distributional sense.

II. The differentiation property can be associated with the linearity property in a more general property. Let $p(D)$ be a *derivation polynomial*, that is an operator of the form $p(D)=\sum_1^n a_k D^k$, with $a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{C}$. Then we have

$$p(D_x)\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy = \int_{\mathbf{R}} p(D_x)f(x,y)dy \quad \text{on} \quad I\,,$$

whenever the first integral is convergent on I.

EXAMPLE. The preceding remarks offer a simple justification of formula 7.6. Observe that in the usual sense:

12.10. $$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ixy}}{1+y^2}\,dy = \pi e^{-|x|} \qquad \textit{for each } x\in\mathbf{R}\,.$$

This can be easily found by the *method of residues.* Besides, as x,y are real variables, we have $|e^{ixy}|=1$ and

$$\left|\frac{e^{ixy}}{1+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+y^2} \qquad \text{for all } x,y\in\mathbf{R}\,.$$

Thus the integral 12.10 is dominated, for all $x\in\mathbf{R}$, by the integral $\int_{\mathbf{R}}(1+y^2)^{-1}dy$, which is obviously convergent. Hence, according to the Weierstrass test, the first integral is *uniformly convergent on* $\mathbf{R}$ *and therefore convergent on* $\mathbf{R}$ *in distributional sense.* Consequently

$$(1-D_x^2)\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ixy}}{1+y^2}\,dy = \int_{\mathbf{R}} \frac{(1-D_x^2)\,e^{ixy}}{1+y^2}\,dy = \int_{\mathbf{R}} e^{ixy}dy, \quad \text{on} \quad \mathbf{R}\,.$$

On the other hand, $D_x^2 e^{-|x|} = -D_x(e^{-|x|} sg\, x) = e^{-|x|} - 2e^{-|x|}\delta(x)$, so that $(1-D_x^2)\,e^{-|x|} = 2\,\delta(x)$. Hence from 12.10 follows:

12.11. $$\int_{\mathbf{R}} e^{ixy}dy = 2\pi\delta(x) \quad \text{on} \quad \mathbf{R}\,.$$

13. Multiple integrals (on $\mathbf{R}^n$)

Let f be a distribution on $\mathbf{R}^n$ and λ any complex number. We say that $f(x)$ converges to λ as $x \to +\infty_n$, iff there exist $r \in \mathbf{N}_0^n$ and $F \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ such that $f = D^n F$ and

$$\frac{F(x)}{x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}} \longrightarrow \frac{\lambda}{r_1! \ldots r_n!} \quad \text{as} \quad x_1 \to +\infty, \ldots, x_n \to +\infty .$$

Then we write $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty_n} f(x)$ or $\lambda = f(+\infty_n)$. The uniqueness of the limit, as well as the linearity property can be proved by an argument similar to the one used in the case $r = 1$. The concept of convergence as $x \to -\infty_n$ is analogously defined.

On the other hand, every distribution φ such that $\bar{D}\varphi = f$ (where $\bar{D} = D_1 \ldots D_n$) will be called a $\bar{1}$-*primitive of* f. It is easily seen that:

13.1. THEOREM. *Every* $f \in \mathcal{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ *has infinitely many* $\bar{1}$-*primitives and two such primitives differ necessarily by a distribution of the form* $\sum_1^n u_j$ *where* u_j *is a distribution independent of* x_j *(that is, of the form* $D^r U$, *where* U *is a continuous function on* $\mathbf{R}^n$ *independent of* x_j).

So we shall write by definition

13.2. $$\int_x^{x'} f(\xi) d\xi = \bar{\Delta}_{x'-x} \varphi(x)$$

where φ is any $\bar{1}$-primitive of f and $\bar{\Delta}_h$ is the mixed difference operator $\Delta_{1h_1} \ldots \Delta_{nh_n}$.

From 13.1 follows that formula 13.2 defines actually a distribution $\Phi(x, x')$ on $\mathbf{R}^{2n}$, independent of the choice of the primitive φ. To see this, it is sufficient to observe that $\Delta_{h_j} u_j = 0$ for every distribution u_j independent of j and every $h_j \in \mathbf{R}$.

13.3. DEFINITION. A distribution f is said to be *integrable on* $\mathbf{R}^n$, iff $\int_x^{x'} f(\xi) d\xi$ is convergent as $(x, x') \to (-\infty_n, +\infty_n)$. Then we write

13.4. $$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \lim_{\substack{x \to -\infty_n \\ x \to +\infty_n}} \int_x^{x'} f(\xi) d\xi .$$

For example, if $n=2$:

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \varphi(+\infty,+\infty)-\varphi(+\infty,-\infty)-\varphi(-\infty,+\infty)+\varphi(-\infty,-\infty)$$

where φ is a $\overline{1}$-primitive of f with respect to x.

The integral of f on $\mathbf{R}^n$ can be also denoted by $\int_{\mathbf{R}^n} f$ or simply by $\int f$. Uniqueness and linearity properties are immediate consequences of the corresponding properties for limits. In order to obtain further criteria, it is convenient to introduce a suitable definition of a bounded distribution:

13.5. Definition. A distribution f is said to be *bounded on* $\mathbf{R}^n$, iff there exist $r \in \mathbf{N}_0^n$ and $F \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ such that:

(i) $f = D^r F$

(ii) for every regular matrix A of order n the function $x_1^{-r_1} \dots x_n^{-r_n} F(Ax)$ is bounded on $\mathbf{R}^n$.

The linearity property of boundedness is easily proved.

13.6. Definition. Given $f \in \mathcal{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ and $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, we write $f \in \mathrm{O}(\varphi)$ as $|x| \to \infty$ or simply $f \in \mathrm{O}(\varphi)$, iff there exists a distribution f_0 bounded on $\mathbf{R}^n$ and a real $\varepsilon > 0$, such that $f = \varphi f_0$ for $|x| > \varepsilon$.

The following generalisation of 9.1 is easily obtained:

13.7. Theorem. *If there exists $\alpha < -n$ such that $f \in \mathrm{O}(|x|^\alpha)$, then f is integrable on $\mathbf{R}^n$.*

On the other hand:

13.8. Theorem. *Suppose $f \in \mathrm{O}(|x|^\alpha)$ with $\alpha < -n$ and let φ be a $\mathcal{C}^\infty$ mapping of $\mathbf{R}^n$ onto itself such that:*

(i) *the Jacobian matrix $[D_i \varphi_j]$ of φ is regular on $\mathbf{R}^n$ and converges to a regular matrix as $|t| \to \infty$;*

(ii) $D^r D_i \varphi_j \in \mathrm{o}(t^r)$ *for all* $r \in \mathbf{N}_0^n$, $r \neq 0$, $i,j = 1,\dots,n$; (1)
then the classical substitution rule applies:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(\varphi(t)) \left| J\begin{pmatrix}\varphi \\ t\end{pmatrix} \right| dt .$$

---

(1) As far as functions are concerned it is understood that the stated conditions are to be taken in ordinary sense.

We are going to outline the proof only in the case when φ is a non degenerate *affine mapping*, that is a mapping of the form $\varphi(t) = c+Mt$, where c is any vector in $\mathbf{R}^n$ and M is a regular matrix of order n. This case may be taken as a model for the general case, since φ behaves *assimptotically* just as an affine mapping, according to (i).

Put $h(x) = (1+x_1^2+\dots x_n^2)^{1/2}$ and suppose $f \in \mathrm{O}(|x|^\alpha)$, with $\alpha < -n$. Then it is readily seen that $f \in \mathrm{o}(h^\alpha)$, i. e. there exist $r \in \mathbf{N}_0^n$ and $F \in \mathcal{C}$, such that $f = h^\alpha . D^r F$, with $x_1^{-r_1} \dots x_n^{-r_n} F(Ax)$ bounded on $\mathbf{R}^n$ for every regular matrix A of order n. In such conditions it is easily found:

$$\int f(x)dx = (-1)^{\|r\|} \int h^{(r)}(x) F(x) dx, \quad \textit{where} \quad \|r\| = r_1+\dots+r_n \, .$$

Now

$$\int h^{(r)}(x) F(x) dx = \int h^{(r)}(\varphi(t)) F(\varphi(t)) \, |det \; M| \, dt$$

and it can be seen, without difficulty, that the last integral is just equal to

$$(-1)^{\|r\|} . \int f(h(t)) \, |det \; M| \, dt \, .$$

14. Partial and multiple integrals

Let us consider a distribution $f(x,y)$ on $\mathbf{R}^{m+n}$ with $x \in \mathbf{R}^m$ and $y \in \mathbf{R}^n$ $(m,n = 1,2,\dots)$. The concept of partial integral $\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)dy$ can be easily defined as a generalization of preceding concepts of partial integral and multiple integral, with similar properties. But there is also a new property:

14.1. THEOREM. *If $f(x,y)$ is integrable on $\mathbf{R}^{m+n}$ and if, in addition, the integral $\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)dy$ is convergent on $\mathbf{R}^m$, then*

$$\int_{\mathbf{R}^{m+n}} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbf{R}^m} \Big[\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y) dy \Big] dx \, .$$

This is a consequence of a property for limits that we can state as follows:

14.2. Theorem. *If $f(x,y)$ is convergent as $(x,y) \to (+\infty_m, +\infty_n)$ and if in addition $f(x,y)$ is convergent on $\mathbf{R}^m$ as $y \to +\infty_n$, then*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty_m \\ y \to +\infty_n}} f(x,y) = \lim_{x \to +\infty_m} \left[\lim_{y \to +\infty_n} f(x,y) \right].$$

It is sufficient to prove this rule in the case $m = n = 1$. Suppose that the hypothesis holds. Then there exist four integers p,q,r,s, two functions $F_1, F_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$, a function $G \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ and a number λ, such that $f = D_x^p D_y^q F_1 = D_x^r D_y^s F_2$ and

$$\text{(i)} \qquad \frac{F_1(x,y)}{x^p y^q} \to \frac{\lambda}{p!q!}, \quad \text{as} \quad (x,y) \to (+\infty, +\infty)$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{F_2(x,y)}{y^s} \to \frac{G(x)}{s!}, \quad \text{uniformly on each compact set in } \mathbf{R} \text{ as } y \to +\infty$$

We can assume $p = r, q = s$. Take $\varepsilon > 0$. Then according to (i) there exist $a, b > 0$ such that

$$14.3. \qquad \left| \frac{F_1(x,y)}{x^p y^q} - \frac{\lambda}{p!q!} \right| < \varepsilon, \quad \text{for } x > a, \ y > b.$$

Take now p arbitrary points $x_j > a$, q arbitrary points $y_k > b$ and consider two pseudo-polynomials $P_1(x,y), P_2(x,y)$ of degree (p,q) sucht hat $F_1 - P_1$ and $F_2 - P_2$ vanish on the lines $x = x_j, y = y_k$. Then, if we put $F_0 = F_1 - P_1$, we have again $F_0 = F_2 - P_2$, so that $f = D_x^p D_y^q F_0$. Now, taking 14.3 into account and remembering that the coefficients of the pseudo-polynomials P_1, P_2 are obtained as linear combinations, respectively, of the values of $F_1(x,y)$ and $F_2(x,y)$ on the lines $x = x_j, y = y_k$, it is easily seen that (i) and (ii) are again satisfied, replacing F_1 and F_2 by F_0 and G by $G^* = G + P$, where P is a polynomial in x of degree $< p$. Hence from 14.3 follows, with F_0 in the place of F_1 and taking the limit as $y \to +\infty$:

$$\left| \frac{G^*(x)}{x^p} - \frac{\lambda}{p!} \right| \leqslant q!\,\varepsilon, \quad \text{for} \quad x > a.$$

The number ε being arbitrary, this implies that $G^*(x)/x^p \to \lambda/p!$ as $x \to +\infty$, which means that $\lambda = \lim_{x \to +\infty} \lim_{y \to +\infty} f(x,y)$.

More generally:

14.4. *If* $f(x,y,z)$ *is a distribution on* $\mathbf{R}^{m+n+p}$ *with* $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$, $z \in \mathbf{R}^p$, *such that* $\int_{\mathbf{R}^{n+p}} f(x,y,z)dydz$ *is convergent on* $\mathbf{R}^m$ *and* $\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y,z)dz$ *is convergent on* $\mathbf{R}^{m+n}$, *then*

$$\int_{\mathbf{R}^{n+p}} f(x,y,z)dy\, dz = \int_{\mathbf{R}^n} \left[\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y,z)dz \right] dy .$$

§ 4. CONVOLUTION

15. Convolution of two distributions on $\mathbf{R}$

Consider two distributions $f = D^m F$ and $g = D^n G$, where $F, G \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$. Then we have

$$f(x-t) = D_x^m F(x-t) = (-1)^m D_t^m F(x-t) ,$$

so that, for every $k = 0,1,\ldots,$

$$D_t^k f(x-t) = (-1)^k D_x^k f(x-t) .$$

This suggests to write by definition

$$f(x-t)g(t) = f(x-t) D_t^n G(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_t^{n-k} [G(t) D_x^k f(x-t)] ,$$

with $G(t) D_x^k f(x-t) = D_x^{m+k}[F(x-t)G(t)]$, that is

15.1. $$f(x-t)g(t) = \sum^{n} \binom{n}{k} D_x^{m+k} D_t^{n-k} [F(x-t)G(t)] .$$

It is easily seen that the «product» $f(x-t)g(t)$ does not depend on the representation of the distributions f and g. This can be proved as in the simpler case of the product of a $\mathcal{C}^n$ function φ by a distribution g of the form $g = D^n G$ with $G \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$. The analogy between these two situations come from the well--known proposition (which is not needed for the present developments):

The mapping $t \to f(x-t)$ *of* $\mathbf{R}$ *into the topological linear space* $\mathcal{C}_\infty(\mathbf{R})$ *is infinitely differentiable.*

Consider now the expression $f(x-t)g(t-y)$. We have two possible interpretations:

15.2.
$$\begin{cases} f(x-t)g(t-y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_x^{m+k} D_t^{n-k}[F(x-t)G(t-y)] \\ f(x-t)g(t-y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k D_t^{m-k} D_y^{n+k}[F(x-t)G(t-y)]. \end{cases}$$

Now:

15.3. *The right members of the formulas* 15.2 *represent the same distribution.*

A direct proof of this proposition does not seem to be easy. On the contrary, a very simple proof can be found, remembering that the functions F and G can be aproached by two sequences (F_ν) and (G_ν) of C^∞ functions, converging uniformly on each compact interval, so that $D^m F_\nu \to f$ and $D^n G_\nu \to g$ as $\nu \to \infty$, in the distributional sense (1).

15.4. Definition. If the integral $\int_{\mathbf{R}} F(x-t)g(t)dt$ is convergent on $\mathbf{R}$, the distribution

$$h(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt$$

is called the *convolution* of f and g and denoted by $f*g$.

From this definition, taking into account the linearity property of the partial integral, as well as 15.1, follows immediately that the *convolution is bilinear*, that is, we have:

15.5. $$(\alpha f_1 + \beta f_2)*g = \alpha(f_1*g) + \beta(f_2*g) \quad , \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$$

whenever f_1*g and f_2*g exist; and analogously for the right side.

15.6. Commutative Law. *If $f*g$ exists, $g*f$ exists too and $f*g = g*f$.*

Proof. Suppose that $f*g$ exists and put $h = f*g$, that is $h(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt$.

Then for each $y \in \mathbf{R}$ we have

$$h(x-y) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y-t)g(t)dt$$

---

(1) This is a well-known result of the Schwartz's theory, which can be established directly without difficulty.

and it is obvious that the last integral is still convergent with respect to (x,y) on $\mathbf{R}^2$. On the other hand, for each $y \in \mathbf{R}$, we may perform on this integral the substitution $t = u-y$, which gives:

$$h(x-y) = \int_{\mathbf{R}} f(x-u)g(u-y)du$$

Now, taking 15.3 into account, it can be seen that the last integral is also convergent with respect to y *for each* $x \in \mathbf{R}$. In particular for $x=0$ we have

$$h(-y) = \int_{\mathbf{R}} f(-u)g(u-y)du$$

Hence by the substitution $y = -x$, $u = -t$:

$$h(x) = \int_{\mathbf{R}} g(x-t)f(t)dt \quad \text{that is} \quad h = g*f \, .$$

In the general case the convolution is not associative. But the following criterion can be used in several cases:

15.7. *Id* f,g,h *are distributions on* $\mathbf{R}$ *such that* $f*g$ *and* $g*h$ *exist and* $\int_{\mathbf{R}^2} f(x-y)g(y-t)h(t)dydt$ *is convergent on* $\mathbf{R}$, *then*

$$(f*g)*h = f*(g*h) = \int_{\mathbf{R}^2} f(\hat{x}-y)g(y-t)h(t)dydt \, .$$

This is an immediate consequence of 14.4.

In turn, from the differentiation and substitution properties for partial integrals and from 15.6 follows immediately, taking definition 15.4 into account:

15.8. Differentiation Property. *If* $f*g$ *exists, then* $D(f*g)$ *exists too and*

$$D(f*g) = Df*g = f*Dg \, .$$

15.9. Translation Property. *If* $f*g$ *exists, then* $\tau_h(f*g)$ *exists for every* $h \in \mathbf{R}$ *and*

$$\tau_h(f*g) = (\tau_h f)*g = f*(\tau_h g) \, .$$

On the other hand:

15.10. *If* $f*g$ *and* $f*(xg)$ *exist, then* $(\hat{x}f)*g$ *exists too and*

$$\hat{x}(f*g) = (\hat{x}f)*g + f*(\hat{x}g) \, .$$

Proof. It is sufficient to observe that $(\hat{x}f)*g$ is given by

$$\int_{\mathbf{R}}(x-t)f(x-t)g(t)dt = x\int_{\mathbf{R}}f(x-t)g(t)dt - \int_{\mathbf{R}}f(x-t)tg(t)dt \ .$$

This important property shows that multiplication by x, with respect to convolution, behaves like a derivation operator with respect to multiplication.

Finally, we can analogously prove that:

15.11. *If $f*g$ exists, then*

$$e^{ax}(f*g) = (e^{ax}f)*(e^{ax}g) \ , \qquad \forall\, a\in\mathbf{C} \ .$$

16. Convolution of distributions whose support is bounded on the left and (or) on the right

We shall denote by $\mathcal{C}^0_\infty(\mathbf{R})$ or simply by $\mathcal{C}^0_\infty$ the vector space of all *distributions with bounded support on* $\mathbf{R}$.

16.1. Theorem. *The convolution $f*g$ exists whenever $f\in\mathcal{C}^0_\infty$ and $g\in\mathcal{C}_\infty$. Besides:*

(i) $f*(g*h) = (f*g)*h$, *whenever* $f,g\in\mathcal{C}^0_\infty$, $h\in\mathcal{C}_\infty$.

(ii) $\delta*f = f$, *for every* $f\in\mathcal{C}^0_\infty$.

Proof. *a*) Suppose $f\in\mathcal{C}^0_\infty$, $g\in\mathcal{C}_\infty$. Then there exists a bounded interval I such that $g(x-t)f(t)$ vanishes for $t\in\mathbf{R}-I$. Hence $\int_{\mathbf{R}} g(x-t)f(t)dt$ is convergent on $\mathbf{R}$ and gives $f*g$.

b) Suppose $f,g\in\mathcal{C}^0_\infty$, $h\in\mathcal{C}_\infty$. Then by an argument similar to the preceding it is shown that the integral $\int_{\mathbf{R}^2} h(x-y)g(y-t)h(t)dydt$ is convergent on $\mathbf{R}$ and this, according to 15.7, implies (i),

c) Consider $f = D^nF$, where $F\in\mathcal{C}(\mathbf{R})$, and put $F_1 = FH$, $F_2 = F-F_1$. Now

$$H*F_1 = \int_0^{+\infty} H(x-t)F_1(t)dt = \int_0^x F_1(t)dt \ .$$

Hence $\delta * D^n F_1 = D^{n+1}(H * F_1) = D^n F_1$. It is seen analogously that $\delta * D^n F_2 = D^n F_2$, so that $\delta * f = D^n F_1 + D^n F_2 = f$.

This theorem along with 15.5 and 15.6, can be expressed by saying:

16.2. *The space C^0_∞ is a commutative algebra under the convolution and C_∞ is a module over that algebra, having δ as the unity element.*

Property (ii) in 16.1 can be expressed explicitely by the important formula:

16.3. $$f(x) = \int_{\mathbf{R}} \delta(x-t) f(t)\,dt \qquad \text{(DIRAC'S FORMULA)}$$

We shall denote by C^+_∞ (resp. C^-_∞) the vector space of all distributions vanishing on the left (resp. on the right) of 0 and by $\tilde{C}^+_\infty$ (resp. $\tilde{C}^-_\infty$) the space of all distributions whose carrier is bounded on the left (resp. on the right).

16.4. *The space $\tilde{C}^+_\infty$ (resp. $\tilde{C}^-_\infty$) is an algebra under the convolution and C^+_∞ (resp. C^-_∞) is a subalgebra of $\tilde{C}^+_\infty$ (resp. $\tilde{C}^+_\infty$).*

In fact, if $f, g \in \tilde{C}^+_\infty$, there exists a real c such that f and g vanish for $x < c$. Then $f(x-t)g(t)$ vanishes for $t < c$ and for $t > x - c$. Hence $\int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)\,dt$ is convergent on $\mathbf{R}$ and vanishes for $x < 2c$. The remaining parts of the theorem are easily proved.

17. Convolution and orders of growth. Tempered distributions and rapidy decreasing distributions (on $\mathbf{R}$) [1]

Several criteria can be found, connecting convolution with orders of growth of distributions. One of those criteria is the following:

17.1. THEOREM. *Let α and β be two real numbers such that $\alpha \geq \beta$ and $\alpha + \beta + n < -1$, where n is the integer satisfying $0 \leq \alpha + n < 1$. On the other hand, let f and g be two continuous functions on $\mathbf{R}$ such that $f \in O(x^\alpha)$ and $g \in O(x^\beta)$. Then $f * g$ exists and $f * g \in O(x^\alpha)$* [2].

Proof. a) Suppose $\alpha + \beta < -1$ with $\alpha \geq 0$. Then, as $f \in O(x^\alpha)$, there exists a number M such that $|f(x)| \leq M(1+|x|)^\alpha$ for all $x \in \mathbf{R}$. Hence

$$|f(x-t)| \leq M(1+|x-t|)^\alpha \leq M(1+|x|)^\alpha (1+|t|)^\alpha, \quad \forall x, t \in \mathbf{R}$$

(1) See «Notes ajoutées pendant la correction des épreuves» after the «Résumé».

(2) It is understood: «in the ordinary sense as $x \to \infty$».

since $\alpha \geqslant 0$. So the integral $\int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt$ is dominated by the integral $M(1+|x|)^{\alpha} \int_{\mathbf{R}} (1+|t|)^{\alpha} |g(t)| dt$. Since $g \in O(t^{\beta})$ and $\alpha+\beta<-1$, the last integral exists. Hence the first integral is uniformly convergent on each compact set in $\mathbf{R}$ and its modulus is $\leqslant MK(1+|x|^{\alpha})$, where $K = \int_{\mathbf{R}} (1+|t|)^{\alpha} |g(t)| dt$. Consequently $f*g \in O(x^{\alpha})$.

b) Let now n be the integer such that $0 \leqslant \alpha+n<1$ and suppose $\alpha+\beta+n<-1$, $\beta \leqslant \alpha$. Then $x^k f * x^{n-k} g$ exists and is $O(x^{\alpha+n})$ for $k=0,\ldots,n$, according to the previous conclusion. Hence (cf. 15.10):

$$x^n(f*g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^k f * x^{n-k} g) \in O(x^{\alpha+n})$$

so that $f*g \in O(x^{\alpha})$.

17.2. Corollary. *Let α be a real <-2, $\mathcal{A}_{\alpha}$ the set of all continuous functions f on $\mathbf{R}$ such that $f \in O(x^{\alpha})$ as $x \to \infty$ and $\mathcal{B}_{\alpha}$ the set of all continuous functions g on $\mathbf{R}$ such that there exists a real β (depending on g) satisfying the conditions: $\alpha+\beta<-1$ and $g \in O(x^{\beta})$. Then $\mathcal{A}_{\alpha}$ is an algebra under the convolution and $\mathcal{B}_{\alpha}$ is a module over $\mathcal{A}_{\alpha}$.*

Proof. Applying to the theorem (changing the roles of α and β), it is readily seen that, $f*g$ exists and belongs to $\mathcal{B}_{\alpha}$ whenever $f \in \mathcal{A}_{\alpha}$ and $g \in \mathcal{B}_{\alpha}$; and that $f*g \in \mathcal{A}_{\alpha}$ whenever $f, g \in \mathcal{A}_{\alpha}$. So we have only to prove the associative law:

$$f*(g*h) = (f*g)*h, \qquad \forall f, g \in \mathcal{A}_{\alpha}, h \in \mathcal{B}_{\alpha}.$$

But this can be easily seen applying 15.7, as we did for 16.1.

17.3. Remark. The preceding theorem and corollary can be extended to locally summable functions, according to the following criterion (Fubini-Tonnelli's theorem): *If $f, g \in L(\mathbf{R})$,* then $\int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt$ *is convergent almost everywhere in $\mathbf{R}$ and defines a functions $h \in L(\mathbf{R})$.* It is also true that the preceding integral is convergent in the mean on $\mathbf{R}$, so that $f*g$ exists in the distributional sense.

Applying 15.11 and taking the Fubini-Tonnelli's theorem into account, it is a simple matter to obtain the following generalization of 17.1:

17.4. THEOREM. *Let α, β be two real numbers satisfying the hypothesis of 17.1, α', β' two real numbers such that $\alpha'+\beta' \leqslant 0$ and f, g two locally summable functions such that $f \in O(x^\alpha e^{\alpha'|x|})$ and $g \in O(x^\beta e^{\beta'|x|})$. Then $f*g$ exists and $f*g \in O(x^\alpha e^{\gamma|x|})$, where $\gamma = \max(\alpha', \beta')$.*

For the proof it is convenient to consider f and g in the form $f=f_1+f_2$ and $g=g_1+g_2$, with $f_1, g_1 \in L^+$, $f_2, g_2 \in L^-$, remembering that $f_1*g_1 \in L^+$, $f_2*g_2 \in L^-$.

From 17.4 it is easily deduced a corresponding generalization of 17.2.

Now, applying the differentiation property, we can derive from the preceding criteria corresponding rules for distributions. For example let us denote by $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$, for every $\alpha < -2$, the set of all distributions of the form $f = \sum_{k=0}^{p} D^{n_k} F_k$, where $p, n_1, \ldots, n_p$ are arbitrary integers and F_k locally summable functions such that $F_k \in O(x^\alpha)$; and by $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ the set of all distributions of the form $g = \sum_{k=0}^{q} D^{r_k} G_k$ where $q, r_1, \ldots, r_q$ are arbitrary integers and G_k locally summable functions such that $G_k \in O(x^\beta)$ with $\alpha+\beta < -1$ (β depending on g). Then it is easily seen that $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ is an algebra under convolution and $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ a module over $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$.

17.5. DEFINITION. A distribution on $\mathbf{R}$ is said to be *tempered (slowly increasing* or *of polynomial type)*, iff there is a real α such that $f \in O(x^\alpha)$ (in the distributional sense).

An equivalent definition to this is the following: *f is tempered, iff there exist two integers n, k and a function $F \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ such that $f = D^n F$ and $F \in O(x^k)$ in the ordinary sense.*

We shall denote by $\check{\mathcal{C}}_\infty(\mathbf{R})$ or simply by $\check{\mathcal{C}}_\infty$ the set of all tempered distributions. It is readily seen that $\check{\mathcal{C}}_\infty$ *is a vector space closed under the operator D.*

17.6. DEFINITION. A distribution f on $\mathbf{R}$ is said to be *rapidly decreasing*, iff, for every $\alpha < 0$, f can be represented in the form $f = \sum_{k=0}^{p} D^{n_k} F_k$, where $p, n_1, \ldots, n_p$ are arbitrary integers ($n_k \geqslant 0, p \geqslant 1$) and F_k continuous functions such that $F_k \in O(x^\alpha)$ in the ordinary sense.

We shall denote by $\hat{\mathcal{C}}_\infty$ the set of all rapidly decreasing distributions on $\mathbf{R}$. From the preceding results it is easily deduced the well known fact:

17.7. COROLLARY. *$\hat{\mathcal{C}}_\infty$ is an algebra under convolution and $\check{\mathcal{C}}_\infty$ a module over $\hat{\mathcal{C}}_\infty$.*

A similar result can be obtained, concerning the space $\check{\mathcal{C}}_\infty$ of all distributions of *exponential type* (that is, of the form $f = D^n F$, where F is a continuous function on $\mathbf{R}$ such that $F \in O(e^{\alpha|x|})$ for *some* real α and the space $\hat{\mathcal{C}}_\infty$ of all *exponentially decreasing distributions* (that is, of the form $f = D^n F$ where F is a continuous function such that $F \in O(e^{\alpha|x|})$ for every $\alpha < 0$).

Observe that $\mathrm{C}^0_\infty \subset \hat{\mathrm{C}}_\infty \subset \widehat{\mathrm{C}}_\infty \subset \breve{\mathrm{C}}_\infty \subset \hat{\mathrm{C}}_\infty \subset \mathrm{C}_\infty$.

18. Convolution on $\mathbf{R}^n$

The concept of convolution of distributions on $\mathbf{R}$ is readily extended to the case of distributions on $\mathbf{R}^n$ and all preceding properties of convolution can be generalized to this case (now we have to consider derivation operators, translation operators, etc. for several variables).

Theorem 16.1 is readily extended to distributions of several variables. As for theorem 16.4 it gives place to new possibilities in the case of n variables. Let Γ be any convex cone in $\mathbf{R}^n$ whose vertex is the origin and not reducing to an half plane. We shall denote by $\mathrm{C}_\infty[\Gamma]$ the set of all distributions on $\mathbf{R}^n$ vanishing outside some cone $a + \Gamma$, with $a \in \mathbf{R}^n$. Then it is easily seen that $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)$ is an algebra *under convolution*; besides there exists a maxinal subspace $\mathrm{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ distinct from $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)$, which is a module over $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)$.

Finally the criteria given in 17. can be also extended to the case of n variables and connected between them and the preceding ones, according to the different variables (¹).

§ 5. FOURIER TRANSFORMATION

19. Fourier transformation for tempered distributions on $\mathbf{R}$

Let f be any distribution on $\mathbf{R}$. If the integral $\int_{\mathbf{R}} e^{ixy} f(y) dy$ is convergent on $\mathbf{R}$, then the distribution

$$19.1. \qquad g(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ixy} f(y) dy$$

is called the *Fourier transform* of f and we write

$$g(x) = \mathfrak{F}_{x|y} f(y) \qquad \text{or simply } g = \mathfrak{F} f .$$

(¹) See further results in «Notes ajoutées pendant la correction des épreuves» after the «Résumée».

The Fourier transform of f is often denoted by $\hat{f}$. For simplicity, we shall omit the subscript $\mathbf{R}$ in the integral symbol, when no confusion seems possible.

For example, we have seen that $\int \frac{e^{ixy}}{1+y^2} dy = \pi e^{-|x|}$ in the distributional sense. So we have

$$\mathfrak{F}_{x|y} \frac{1}{1+y^2} = \pi e^{-|x|} .$$

From here we have deduced $\int e^{ixy} dy = 2\pi\delta(x)$. Hence

19.2. $$\mathfrak{F}1 = 2\pi\delta .$$

On the other hand, since $e^{ixy}\delta(y) = \delta(y)$, it is readily seen that

19.3. $$\mathfrak{F}\delta = 1 .$$

We are going to establish in a direct way some fundamental properties of the Fourier transformation for distributions.

19.4 *If $\mathfrak{F}f$ and $\mathfrak{F}g$ exist, then $\mathfrak{F}(\lambda f + \mu g)$ exists too, for all $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ and we have $\mathfrak{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda(\mathfrak{F}f) + \mu(\mathfrak{F}g)$.*

This is an immediate consequence of the linearity property of integrals.

19.5. *If $\mathfrak{F}f$ exists, then $\mathfrak{F}(Df)$ exists too and*

$$\mathfrak{F}(Df) = -i\hat{x}.(\mathfrak{F}f) \text{ (}^1\text{)}.$$

Proof. Observe that

$$e^{ixy} f'(y) = D_y[e^{ixy} f(y)] - ixe^{ixy} f(y) .$$

If $\mathfrak{F}f$ exists, i. e. if $\int e^{ixy} f(y) dy$ is convergent on $\mathbf{R}$, then $e^{ixy} f(y) \to 0$ on $\mathbf{R}$ as $y \to \infty$, and so

$$\int e^{ixy} f'(y) dy = -ix \int e^{ixy} f(y) dy$$

that is $\mathfrak{F}(Df) = -ix(\mathfrak{F}f)$.

(1) Here the sign ^ means that x is a dummy variable.

19.6. *If $\mathfrak{F}f$ exists, then $\mathfrak{F}(\hat{y}f)$ exists too and*

$$\mathfrak{F}(\hat{y}f) = -iD(\mathfrak{F}f).$$

Proof. If $\int e^{ixy}f(y)dy$ is convergent on $\mathbf{R}$, we have by the differentiation property

$$D\int e^{ixy}f(y)dy = i\int e^{ixy}yf(y)dy$$

that is $D(\mathfrak{F}f) = i\mathfrak{F}(\hat{y}f)$, hence $\mathfrak{F}(\hat{y}f) = -iD(\mathfrak{F}f)$.

Properties 19.4, 19.5 and 19.6 can be associated as follows:
If p is any polynomial, then:

19.7. $\quad \mathfrak{F}[p(D)F] = p(-ix)(\mathfrak{F}f) \quad , \quad \mathfrak{F}[p(y)f] = p(-iD)(\mathfrak{F}f)$.

We shall now prove some existence criteria for Fourier transforms.

19.8. *If f is summable on $\mathbf{R}$, the $\mathfrak{F}f$ exists and is a bounded continuous function on $\mathbf{R}$.*

Proof. Suppose $f \in L(\mathbf{R})$. Since $|e^{ixy}f(y)| = |f(y)|$ for all $x, y \in \mathbf{R}$, the integral $\int |e^{ixy}f(y)|dy$ is dominated by the integral $\int |f(y)|dy$, which is convergent and independent of x. Hence the integral $\int e^{ixy}f(y)dy$ is uniformly convergent on $\mathbf{R}$, which implies that it is convergent on $\mathbf{R}$ in the distributional sense and it represents a continuous function $g(x)$ on $\mathbf{R}$. Now this function is bounded, since $|g(x)| \leq \int |f(y)|dy$ for all $x \in \mathbf{R}$.

We shall denote by $\mathcal{C}_b$ the space of all bounded continuous functions on $\mathbf{R}$. Remember that we have denoted by $\check{\mathcal{C}}_\infty$ the space of all tempered distributions on $\mathbf{R}$ (17.5). Now from 19.7 and 19.8 follows:

19.9. *If $f \in \check{\mathcal{C}}_\infty$, then $\mathfrak{F}f$ exists and $\mathfrak{F}f \in \check{\mathcal{C}}_\infty$.*

Proof. Suppose $f \in \check{\mathcal{C}}_\infty$. Then there exist $m, p \in \mathbf{N}_0$ and $F \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ such that $f = D^m F$ and $F \in O(x^p)$ (in the ordinary sense as $x \to \infty$). Put $\Phi = F/(1+i\hat{x})^{p+2}$. Then $f = D^m(1+i\hat{x})^{p+2}\Phi$ and $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, $\Phi \in O(x^{-2})$. Therefore, by 19.7, $\mathfrak{F}\Phi$ exists and $\mathfrak{F}\Phi \in \mathcal{C}_b \subset \check{\mathcal{C}}_\infty$. Hence, by 19.6, $\mathfrak{F}f$ exists too and $\mathfrak{F}f = (-i\hat{x})^m(1+D)^{p+2}(\mathfrak{F}\Phi) \in \check{\mathcal{C}}_\infty$.

We next purpose to study the problem of the inversion of $\mathfrak{F}$. Observe that $\mathfrak{F}$ transforms 1 into $2\pi\delta$, δ into 1, D into multplication by $-i\hat{x}$ and multiplication by $\hat{x}$ into $-iD$. Hence, if $\mathfrak{F}^{-1}$ exists, it should transform δ into $1/2\pi$, 1 into δ, etc. and so we may expect that $\mathfrak{F}^{-1}$ is given by the formula:

19.10. $$f(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{-ixy}g(x)dx\ .$$

We shall provisionally denote by $\mathfrak{F}^*$ the transformation $g\to f$ defined by this formula. Observing that, in this case, $f(-y)=(2\pi)^{-1}\mathfrak{F}_{y|x}g(x)$, it is readily seen that $\mathfrak{F}^*$ has the required properties and that $\mathfrak{F}^*f$ exists for all $f\in\breve{C}_\infty$. Moreover:

19.11. *If* $f\in\breve{C}_\infty$ *and* $g=\mathfrak{F}f$, *then* $f=\mathfrak{F}^*g$. *Conversely, if* $g\in\breve{C}_\infty$ *and* $f=\mathfrak{F}^*g$ *then* $g=\mathfrak{F}f$.

Proof. Suppose $f\in\breve{C}_\infty$ and put $g=\mathfrak{F}f$, $h=\mathfrak{F}^*g$. Then

$$h(y)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ixy}\left[\int e^{ixy'}f(y')\,dy'\right]dx$$

and, *if it is allowed to interchange the integrations*, we find

$$h(y)=\frac{1}{2\pi}\int\left[\int e^{ix(y'-y)}dx\right]f(y')dy'$$

But $\int e^{ix(y'-y)}dx=2\pi\delta(y'-y)=2\pi\delta(y-y')$ (by 19.2) and so, by the Dirac's formula,

$$h(y)=\int\delta(y-y')f(y')dy'=f(y),\quad \text{that is}\quad \mathfrak{F}^*g=f.$$

It is shown analogously that, if $g\in\breve{C}_\infty$ and $f=\mathfrak{F}^*g$, then $g=\mathfrak{F}f$, *under the hypothesis that the integrations are interchangeable.* To prove this, it will be enough (according to 14.2) to show that the double integral

19.12. $$\int\int e^{ix(y'-y)}f(y')dxdy'$$

is convergent on $\mathbf{R}$. This can be made, at first, in the case when $f\in L$; in this case the integral

19.13. $$\int\int\frac{e^{-ixy}}{1+x^2}\,e^{ixy'}f(y')dxdy'$$

is uniformly convergent on $\mathbf{R}$, since for all $x,y,y' \in \mathbf{R}$,

$$\left| \frac{e^{ixy}}{1+x^2} \right| = \frac{1}{1+x^2} \quad , \qquad |e^{ixy'} f(y')| = |f(y')|$$

and the functions $(1+x^2)^{-1}$, $f(y')$ are summable on $\mathbf{R}$. Hence, by applying to 19.13 the operator $1-D_y^2$, it is seen that the integral 19.12 is convergent on $\mathbf{R}$ in the case when $f \in L$. Finally this conclusion can be extended for every $f \in \mathcal{C}_\infty$, by an argument similar to the proof of 19.9, observing that the integral 19.12 represents $\mathfrak{F}^* \mathfrak{F}$ and applying 19.7.

Hence we have proved that $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^{-1}$ in the case when $\mathfrak{F}$ is restricted to $\check{\mathcal{C}}_\infty$.

The preceding results can be summarized as follows:

19.14. Theorem. *$\mathfrak{F}$ is a 1-1 linear mapping of the space $\check{\mathcal{C}}_\infty$ onto itself, changing D into multiplication by $-i\hat{x}$, multiplication by $\hat{x}$ into $-iD$, 1 into $2\pi\delta$ and δ into 1. The inverse of $\mathfrak{F}$ is given by* 19.10.

20. Fourier transformation and convolution

The following theorem is well known:

20.1. Theorem. *If f and g are summable functions on $\mathbf{R}$, then $\mathfrak{F}$ transforms the convolution $f*g$ into the usual product of the continuous functions $\mathfrak{F}f$ and $\mathfrak{F}g$, that is*

$$\mathfrak{F}(f*g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g) .$$

We shall give here the proof of this theorem. It is known that, if $f,g \in L$, then $f*g$ exists and $f*g \in L$ (Fubini-Tonnelli's theorem, 17.3). Put $\hat{f} = \mathfrak{F}f$, $\hat{g} = \mathfrak{F}g$. Then $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{C}_b$ (th. 19.8) and

$$\hat{f}(x)\,\hat{g}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ixu} f(u)\,du \,.\, \int_{\mathbf{R}} e^{ixv} g(v)\,dv$$

$$= \int_{\mathbf{R}^2} e^{ix(u+v)} f(u) g(v)\,du\,dv \; .$$

Put now $u+v=y, v=t$. Then $u=y-t, v=t$ ant it is readily seen that the transformation defined by these formulas has a Jacobian equal to 1 and maps $\mathbf{R}^2$ onto $\mathbf{R}^2$. Therefore

$$\hat{f}(u)\hat{g}(x) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{ixy} f(y-t)g(t)dy\,dt$$

$$= \int_{\mathbf{R}} e^{ixy}\left[\int_{\mathbf{R}} f(y-t)g(t)dt\right]dy$$

so that $\hat{f}\hat{g} = \mathfrak{F}(f*g)$, that is $\mathfrak{F}(f*g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)$.

20.2. Corollary. *Let f,g be two distributions on $\mathbf{R}$ of the form $f=D^mF$, $g=D^nG$, where F, G are l.s. functions satisfying the condition: there exists an integer p such that $(1+i\hat{x})^pF$ and $(1+i\hat{x})^{-p}G$ are summable on $\mathbf{R}$. Then $\mathfrak{F}(f*g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)$.*

This is a consequence of the theorem, in conjunction with properties 15.8 and 15.10. The corollary can obviously be extended to distributions f,g each of the preceding form. Remembering now the definition of the space $\hat{\mathcal{C}}_\infty$ of all rapidly decreasing distributions (17.6), it is easily deduced from 20.2:

20.3. Corollary. *If $f \in \hat{\mathcal{C}}_\infty$ and $g \in \check{\mathcal{C}}_\infty$ then $\mathfrak{F}(f*g) = (\mathfrak{F}f)(\mathfrak{F}g)$.*

In order to characterize in a direct way the Fourier transforms of rapidly decreasing distributions, we shall at first establish two general criteria:

20.4. Theorem. *If f is a distribution of the form D^nF, where F is a locally summable function on $\mathbf{R}$ such that $F \in \mathrm{O}(x^{-p})$, p being an integer $\geqslant 0$, and if $\varphi = \mathfrak{F}f$, then φ is a C^{p-2} function such that $\varphi^{(k)} \in \mathrm{O}(x^n)$, for $k=0,\ldots,p-2$.*

Proof. Suppose that the hypothesis is satisfied and put $\Phi = \mathfrak{F}F$. Then $\varphi = (-i\hat{x})^n\Phi$ and, since $\hat{x}^kF \in \mathrm{O}(x^{-2})$ for $k=0,\ldots,p-2$, it follows, by 19.6 and 19.8, that $D^k\Phi \in \mathcal{C}_b$ for $k=0,\ldots,p-2$. Hence $\varphi \in C^{p-2}$ and $\varphi^{(k)} \in \mathrm{O}(x^n)$ for $k=0,\ldots,p-2$.

20.5. Theorem. *If φ is a C^p function such that $\varphi^{(p)} \in \mathrm{O}(x^n)$, with $n,p \leqslant \mathbf{N}_0$, and if $f = \mathfrak{F}\varphi$, then f is of the form $f=(1+D)^{n+2}F$, where F is a continuous function such that $F \in \mathrm{O}(x^{-p})$.*

Proof. Suppose that the hypothesis is satisfied and put $\Phi = (1-i\,\hat{x})^{-n-2}\varphi$, $F = \mathfrak{F}\Phi$. Then $f=(1+D)^{n+2}F$. On the other hand, $\varphi^{(k)} \in \mathrm{O}(x^{n+p-k})$ for $k=0,\ldots,p$, and this implies $\Phi^{(p)} \in \mathrm{O}(x^{-2})$. Hence $\hat{x}^pF \in \mathcal{C}_b$ and so $F \in \mathrm{O}(x^{-p})$.

20.6. DEFINITION. A tempered C^∞ function on $\mathbf{R}$ is a function $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$, satisfying the following condition: for every $p=0,1,\ldots$, there exists an integer n, such that $\varphi^{(p)} \in O(x^n)$ (in the ordinary sense as $x \to \infty$).

We shall denote by $\breve{C}^\infty$ the set of all tempered C^∞ functions on $\mathbf{R}$. It is easily seen that $\breve{C}^\infty$ is a vector subspace of $\breve{C}_\infty \cap C^\infty$, but it must be observed that $\breve{C}^\infty \neq \breve{C}_\infty \cap C^\infty$. Now from 20.4 and 9.2.5 follows:

20.7. COROLLARY. *The Fourier transformation maps the convolution algebra* $\hat{C}_\infty$ *onto the multiplication algebra* $\breve{C}^\infty$.

Proof. a) Suppose $f \in \hat{C}_\infty$. This implies that, for every $p=0,1,\ldots$, f can be represented in the form $f=\sum_1^m D^{n_k} F_k$ where $F_k \in O(x^{-p-2})$ for $k=1,\ldots,m$. Then, if $\varphi = \mathfrak{F} f$, it is easily seen, taking 20.4 into account, that $\varphi \in C^p$ and $\varphi^{(p)} \in O(x^\mu)$ where $\mu = \max\,(n_1,\ldots,n_k)$. Hence $\varphi \in \breve{C}^\infty$.

b) Suppose $\varphi \in \breve{C}^\infty$. Then, for every $p=0,1,\ldots$, there exists n such that $\varphi^{(p)} \in O(x^n)$. Hence, if we put $f = \mathfrak{F}^{-1}\varphi$, we conclude applying 20.5 (which extends obviously to $\mathfrak{F}^{-1}$) that f is of the form $(1+D)^{n+2}F$, where F is a continuous function such that $F \in O(x^{-p})$. Hence $f \in \breve{C}_\infty$.

The remaining part the of corollary is an obvious consequence of 20.3.

21. Fourier transformation on $\mathbf{R}^n$

The Fourier transformation on $\mathbf{R}^n$ may be defined by the formula

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{ixy} f(y)\,dy$$

where f is a distribution on $\mathbf{R}^n$ and $xy = \sum_1^n x_h y_h$. If this integral is convergent on $\mathbf{R}^n$ we write $g = \mathfrak{F} f$. A distribution f on $\mathbf{R}^n$ is said to be *tempered*, iff there exist two systems $r, s \in \mathbf{N}_0^n$ and a function $F \in C(\mathbf{R}^n)$ such that $f = D^r F$ and $F \in O(x_1^{s_1} \ldots x_n^{s_n})$ in the ordinary sense; then we write $f \in \breve{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ or simply $f \in \breve{C}_\infty$.

All preceding properties of the Fourier transformation can be extended to the present case, with the obvious modifications concerning the existence of n derivation operators and n coordinate functions, $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$. Thus

$$\mathfrak{F}(D_k f) = (-ix_k)(\mathfrak{F} f)\,, \quad \mathfrak{F}(\hat{x}_k f) = (-iD_k)\mathfrak{F}(f)$$

for all $f \in \breve{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ and $k=1,\ldots,n$. Moreover, in the inversion formula, the coefficient $1/(2\pi)$ must be replaced by $1/(2\pi)^n$.

Observe that, if $f \in \check{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$, we can define by the formula

$$g_k(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ixy_k} y_k f(x) dx_k$$

the *Fourier transform of f with respect to x_k* (it is easily proved that this partial integral is then convergent on $\mathbf{R}^n$). Then we shall write $g_k = \mathfrak{F}_{x_k} f$ or simply $g_k = \mathfrak{F}_k f$ and it is easily seen that

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_k .$$

But for the existence of $\mathfrak{F}_k f$ it is not necessary that $f \in \check{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$: *it is sufficient that there exists an integer p such that*

$$f \in O(x_k^p) \quad \text{on} \quad \prod_{j \neq k} \mathbf{R}_{x_j} \quad \text{as} \quad x_k \to \infty .$$

Finally, applying theorem 13.8, it easily proved that *Fourier transformation on $\check{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ is invariant under isometric linear transformation of the $\mathbf{R}^n$-space with the usual norm.*

REFERENCES

[1] BOCHNER, S. — *Vorlesungen über Fouriersche Integrale.* Leipzig. 1932.

[2] FERREIRA, J. CAMPOS — *Sobre a permutabilidade da integração com a passagem ao limite na teoria das distribuições.* Publicações do Laboratório de Física e Engenharia Nucleares. Lisboa. 1964.

[3] ——— — *Sur la notion de limite d'une distribution à l'infini.* To be published.

[4] KÖNIG, H. — *Neue Begründung der Theorie der «Distributionen» von L. Schwartz.* Math. Nachrichten, *9:* 129-148. 1953.

[5] LOJASIEWICZ, S. — *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point.* Studia Math. *16:* 1-36. 1957.

[6] MIKUSINSKI, J.-SIKORSKI, R. — *The elementary theory of distributions.* PańStwowe Wydawnictwo Naukowe. Warsaw (I) 1957. (II) 1961.

[7] SCHWARTZ, L. — *Théorie des distributions,* I, II, Paris. Hermann.

[8] SILVA, J. SEBASTIÃO E — *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions.* Rev. Fac. Ciências Lisboa, 2.ª série A, *4:* 79-186. 1954/55.

[9] ——— — *Sur la définition et la structure des distributions vectorielles.* Portugaliae Math., *19:* 1-80. 1960.

[10] ——— — *Sur l'axiomatique des distributions et ses possibles modèles* (Centro Internazionale Matematico Estivo, 1961) Roma. Istituto Matematico. 1962.

[11] ——— — *Novos elementos para a teoria do integral no campo das distribuições.* Boletim da Academia das Ciências de Lisboa. 1963.

[12] ——— — *Theory of distributions.* Mimeographed notes of lectures. University of Maryland, Department of Mathematics. 1964.

RÉSUMÉ

1. Les symboles O et o pour des distributions

Pour fixer les idées, nous nous bornerons au cas où $x \to +\infty$. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, non borné à droite, $I =]a, +\infty[$; si f er φ sont deux fonctions sur I, on écrit

$$f \in \mathrm{O}(\varphi) \qquad \text{lorsque } x \to +\infty$$

s'il existe un nombre réel x_0 et une fonction f_0 bornée pour $x > x_0$ tels que $f = \varphi f_0$ pour $x > x_0$. D'autre part on écrit

$$f \in \mathrm{o}(\varphi) \qquad \text{lorsque } x \to +\infty$$

s'il existe un nombre réel x_0 et une fonction f_0 tendant vers 0 lorsque $x \to +\infty$, tels que $f = \varphi f_0$ pour $x > x_0$.

En particulier, on peut avoir $\varphi = \hat{x}^\alpha$ où α est un nombre réel, c'est-à-dire $\varphi(x) \equiv x^\alpha$. Dans ce cas nous écrirons x^α au lieu de $\hat{x}^\alpha$, pour alléger les notations.

Soit maintenant c un point de I et posons $\mathcal{J}f(x) = \int_c^x f(\xi)d\xi$ pour toute fonction f localement sommable sur I. Cela étant:

Lemmes 1 et 2. *Si α est nombre un réel > -1 et f une fonction localement sommable sur I telle que $f \in \mathrm{O}(x^\alpha)$ [resp. $f \in \mathrm{o}(x^\alpha)$] lorsque $x \to +\infty$, alors*

$$\mathcal{J}f \in \mathrm{O}(x^{\alpha+1}) \ [\text{resp. } \mathcal{J}f \in \mathrm{o}(x^{\alpha+1})] \ \textit{lorsque } x \to +\infty$$

Ces deux lemmes justifient les définitions suivantes:

Définitions 1 et 2. Si α est un nombre réel > -1 et f une distribution sur I, on écrit

$$f \in \mathrm{O}(x^\alpha) \ [\text{resp. } f \in \mathrm{o}(x^\alpha)] \quad \text{lorsque } x \to +\infty,$$

s'il existe un entier $n \geqslant 0$ et une fonction F localement sommable sur I, tels que $f = D^n F$ et $F \in O(x^{\alpha+n})$ [resp. $F \in o(x^{\alpha+n})$] lorsque $x \to +\infty$, au sens usuel. En particulier, si $f \in O(1)$ lorsque $x \to +\infty$, on dit que f est *bornée à droite*, et si $f \in o(1)$ lorsque $x \to +\infty$, on dit que f *tend vers* 0 *lorsque* $x \to +\infty$ [1]. Cela étant, on peut encore élargir les notions de O et de o de la façon suivante:

Définitions 1′ et 2′. Si φ est une fonction indéfiniment différentiable sur I et f une distribution sur I, on écrit

$$f \in O(\varphi) \text{ [resp. } f \in o(\varphi)] \quad \text{lorsque } x \to +\infty,$$

s'il existe un réel x_0 et une distribution f_0 bornée à droite [resp. tendant vers zéro lorsque $x \to +\infty$] tels que $f = \varphi f_0$ pour $x > x_0$.

Les lemmes 1 et 2 permettent de voir que les définitions 1′ et 2′ sont équivalentes aux définitions 1 et 2 dans le cas où $\varphi = x^\alpha$ avec $\alpha > -1$. D'autre part, il est aisé de généraliser au cas des distributions plusieurs propriétés élémentaires des symboles O et o, parmi lesquelles la

Propriété de Linéarité. *Si* $f \in O(\varphi)$ *et* $g \in O(\varphi)$ *lorsque* $x \to +\infty$, et *si* $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, *alors*

$$\lambda f + \mu g \in O(\varphi) \quad \text{lorsque } x \to +\infty$$

(Et de même pour le symbole o*)*

Mais on obtient une propriété nouvelle:

Si α *est un nombre réel quelconque et* $f \in O(x^\alpha)$ *lorsque* $x \to +\infty$, *alors* $Df \in O(x^{\alpha-1})$ *lorsque* $x \to +\infty$; *et de même pour le symbole* o (cf. lemmes 1 et 2).

2. Limites et intégrales de distributions

Considérons encore, pour fixer les idées, le cas où $x \to +\infty$ et soit $I =]a, +\infty[$.

Définition 3. Si f est une distribution sur I et λ un nombre complexe, on écrit

$$f(x) \to \lambda \quad \text{lorsque } x \to +\infty$$

[1] Cette définition de «distribution bornée» est plus générale que celle donnée par L. Schwartz.

si $f-\lambda \in o(1)$ lorsque $x \to +\infty$; ou, ce qui revient au même, s'il existe un entier $n \geqslant 0$ et une fonction F continue sur I, tels que $f = D^n F$ et $F(x)/x^n \to \lambda/n!$ lorsque $x \to +\infty$ (au sens usuel) [1].

On démontre aisément que, *si* $f \to \lambda$ *lorsque* $x \to +\infty$ *et* $f \to \mu$ *lorsque* $x \to +\infty$, *alors* $\lambda = \mu$. Cela justifie que l'on écrit ce cas $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} f$ ou $\lambda = f(+\infty)$. D'autre part, on généralise plusieurs propriétés usuelles de la notion de limite. Observons encore que

Si une distribution f *tend vers un nombre* λ *lorsque* $x \to +\infty$, *alors* f *est bornée à droite.*

On définit d'une façon analogue les notions de limite d'une distribution lorsque $x \to -\infty$ ou lorsque $x \to a^+$, $x \to a^-$ or $x \to a$, où a est un réel quelconque.

De ces notions de limite découlent des notions correspondantes d'intégrale. Soit par exemple f une distribution sur $\mathbf{R}$. On sait qu'il existe au moins une primitive F de f; alors, on dit que f est *intégrable sur* $\mathbf{R}$ si F est convergente lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to -\infty$, et on écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) .$$

L'intégrale de f sur $\mathbf{R}$ peut être aussi notée $\int_{\mathbf{R}} f$.

On démontre aisément l'unicité de l'intégrale, ainsi que sa linéarité, etc. Considérons par exemple l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}dx$, où ξ est un paramètre réel. Pour $\xi \neq 0$, une primitive de $e^{i\xi x}$ par rapport à x sera $e^{i\xi x}/i\xi$. À son tour

$$\frac{e^{i\xi x}}{i\xi} = D_x \frac{e^{i\xi x}}{(i\xi)^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^{i\xi x}}{x} = 0$$

Donc, d'après les définitions précédentes:

$$e^{i\xi x}/i\xi \to 0 \qquad \text{lorsque } x \to \infty ,$$

et, par conséquent $\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}dx = 0$, pour tout $\xi \neq 0$.

Si $\xi = 0$ l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}dx$ est divergente, même au sens des distributions. Ces résultats sont d'accord avec la formule

(1) $$\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x}dx = 2\pi\delta(\xi)$$

---

[1] Cette définition est plus générale que celle donnée par Mikusiński et Sikorski.

qui a été depuis longtemps introduite par les physiciens d'une façon heuristique. Mais cette formule ne pourra être justifiée complètement que par une généralisation convenable de la notion d'intégrale paramétrique, ce dont nous nous occupons plus loin.

Il est à remarquer que, d'après les définitions de limite d'une distribution, proposées, à notre connaissance, par d'autres auteurs, l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} e^{i\xi x} dx$ n'est convergente pour *aucune valeur réelle* de ξ.

3. Critères de convergence pour des intégrales

Considérons, par exemple, le cas d'une intégrale sur $\mathbf{R}$. On a d'abord le critère (condition nécessaire de convergence), qui n'est pas valable dans le domaine classique:

Théorème 1. *Si f est une distribution intégrable sur $\mathbf{R}$, on a $f \in O(x^{-1})$ lorsque $x \to \infty$.*

D'autre part, on obtient la généralisation suivante d'un critère classique (condition suffisante de convergence):

Théorème 2. *S'il existe un réel $\alpha < -1$ tel que $f \in O(x^{\alpha})$ lorsque $x \to \infty$, alors f est intégrable sur $\mathbf{R}$.*

On peut encore établir des critères semblables pour d'autres types d'intervalles. Par exemple, considérons $I =]a, +\infty[$, avec $a \in \mathbf{R}$, et soit f une distribution sur I; alors:

Théorème 1'. *Si f est intégrable sur I, on a $f \in O(x^{-1})$ lorsque $x \to +\infty$ et $f \in O((x-a)^{-1})$ lorsque $x \to a^+$.*

Théorème 2'. *S'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < -1$, $\beta > -1$, $f \in O(x^{\alpha})$ lorsque $x \to +\infty$ et $f \in O((x-a)^{\beta})$ lorsque $x \to a^+$, alors f est intégrable sur I.*

4. Limites partielles et intégrales paramétriques

Nous nous bornerons ici à un cas particulier qui servira de paradigme:

Définition 4. On dit qu'une distribution $f(x,y)$ sur $\mathbf{R}^2$ *tend vers une distribution $g(x)$, lorsque $y \to +\infty$*, s'il existe deux entiers $m,n \geqslant 0$ et deux fonctions continues $F(x,y)$ et $G(x)$, respectivement sur $\mathbf{R}^2$ et sur $\mathbf{R}$, tels que: 1) $f(x,y) = D_x^m D_y^n F(x,y)$; 2) $g(x) = D_x^m G(x)$; 3) $\dfrac{F(x,y)}{y^n} \to \dfrac{G(x)}{n!}$ lorsque $y \to +\infty$, uniformément sur tout borné.

On démontre d'abord l'unicité de la limite, ce qui permet d'écrire

$$g(x) = \lim_{y\to+\infty} f(x,y) \quad \text{ou} \quad g(x) = f(x, +\infty)$$

Ensuite on établit des propriétés élémentaires telles que la linéarité, etc., et encore la *propriété nouvelle:*

$$D_x \lim_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim_{y\to+\infty} D_x f(x,y)$$

La définition 4 et la définition correspondante pour le cas où $x \to -\infty$, permettent de définir l'intégrale paramétrique sur $\mathbf{R}$.

Définition 5. On dit que l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ est convergente sur $\mathbf{R}$ (par rapport à x), si, étant donnée $F(x,y)$ telle que $D_y F = f$, les limites $F(x, +\infty)$ et $F(x, -\infty)$ existent. Alors on écrit $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy = F(x, +\infty) - F(x, -\infty)$.

Evidemment, on aura non seulement l'unicité et la linéarité de l'intégrale paramétrique, mais aussi la *propriété nouvelle:*

$$D_x \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy = \int_{\mathbf{R}} D_x f(x,y)dy$$

En particulier, cela permet de démontrer la formule (1) par une méthode rigoureuse, dont la technique se rapprouche des méthodes heuristiques des physiciens.

5. Limites et intégrales multiples

Nous prendrons encore un cas particulier pour modèle:

Définition 6. On dit qu'une distribution $f(x,y)$ sur $\mathbf{R}^2$ tend vers un nombre λ lorsque $x \to +\infty$ et $y \to +\infty$, s'il existe deux entiers $m,n \geqslant 0$ et une fonction $F(x,y)$ continue sur $\mathbf{R}^2$ tels que: 1) $f(x,y) = D_x^m D_y^n F(x,y)$; 2) $\dfrac{F(x,y)}{x^m y^n}$ tend vers $\dfrac{\lambda}{m!n!}$ lorsque $x \to +\infty$ et $y \to +\infty$ (au sens usuel).

On peut écrire dans ce cas:

$$\lambda = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y) = f(+\infty, +\infty)$$

l'unicité de la limite étant assurée (ainsi que sa linéarité).

On définit d'une façon analogue les limites $f(-\infty, -\infty)$, $f(-\infty, +\infty)$ et $f(+\infty, -\infty)$. Ces définitions conduisent à la définition suivante d'intégrale double:

Definition 7. On dit que f est *intégrable* sur $\mathbf{R}^2$, s'il existe une distribution F, telle que $f = D_x D_y F$, pour laquelle les limites $F(+\infty, +\infty)$, $F(-\infty, +\infty)$, $F(+\infty, -\infty)$, $F(-\infty, -\infty)$ existent. On écrit alors:

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = F(+\infty, +\infty) - F(-\infty, +\infty) - F(+\infty, -\infty) + F(-\infty, -\infty)$$

L'unicité et la linéarité de l'intégrale sont assurées. En outre:

Théorème 3. *Si l'intégrale* $\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ *est convergente par rapport à* x *sur* $\mathbf{R}$ *et si* f *est intégrable sur* $\mathbf{R}^2$, *alors*

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbf{R}} \left[\int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy \right] dx$$

Toutefois l'intégrale double, telle que nous venons de la définir, n'est pas invariante pour les rotations. Mais cet inconvénient disparait dans les cas où s'applique le critère de convergence que nous indiquerons plus loin.

Dans le cas général, où il s'agit d'une distribution sur $\mathbf{R}^n$, on définit d'une façon semblable les limites multiples et l'intégrale sur $\mathbf{R}^n$

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$$

Plus généralement encore, étant donné une distribution $f(x,y) \equiv f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ sur $\mathbf{R}^{m+n}$ on définit l'intégrale multiple-paramétrique

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)dy = \int_{\mathbf{R}^n} f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)dy_1 \ldots dy_n ,$$

en généralisant de façon triviale les définitions précédentes d'intégrale multiple et d'intégrale paramétrique.

Enfin, pour généraliser les critères de convergence aux intégrales multiples, il faut d'abord prolonger le symbole O aux distributions de n variables.

DÉFINITION 8. On dit qu'une distribution f est *bornée sur* $\mathbf{R}^n$, s'il existe un sistème r de n entiers $r_1,\ldots,r_n$ et une fonction F continue sur $\mathbf{R}^n$ tels que:

1) $f = D^r F$

2) pour toute matrice A régulière d'ordre n la fonction $x_1^{-r_1}\ldots x_n^{-r_n}F(Ax)$ est bornée sur $\mathbf{R}^n$.

DÉFINITION 9. Si φ est une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbf{R}^n$, on écrit

$$f \in O(\varphi) \quad \text{sur } \mathbf{R}^n,$$

s'il existe une distribution f_0 bornée sur $\mathbf{R}^n$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$, tels que $f = \varphi f_0$ pour $|x| > \varepsilon$.

Cela posé, on démontre le critère suivant:

THÉORÈME 4. *S'il existe un réel* $\alpha < -n$ *tel que* $f \in O(|x|^\alpha)$, *où* $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, *alors* f *est intégrable sur* $\mathbf{R}^n$.

6. Convolution et transformation de Fourier

Les notions et les résultats précédents permettent, en particulier, de construire une théorie directe de la convolution et des transformations de Fourier et de Laplace pour des distributions, qui se rapproche beaucoup des méthodes heuristiques des physiciens et qui offre des moyens d'obtenir des résultats essentiellement nouveaux.

D'abord deux distributions f et g sur $\mathbf{R}^n$ sont dites *composables*, si l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

est convergente, par rapport à x, sur $\mathbf{R}^n$; alors la distribution $h(x)$ définie par cette intégrale est nommée la *convolution* de f et g, et on écrit $h = f*g$. La convolution est bilinéaire et commutative; en outre, on a les propriétés suivantes:

$$D(f*g) = (Df)*g = f*(Dg)$$

$$x(f*g) = (xf)*g + f*(xg)$$

(on sous-entend que l'existence de deux des convolutions $x(f*g)$, $(xf)*g$ et $f*(xg)$ entraîne l'existence de la troisième).

Toutes ces propriétés permettent d'étudier plusieurs cas intéressants de couples de distributions composables et d'établir des conditions suffisantes pour que l'associativité se vérifie (dans le cas général, la convolution n'est pas associative).

D'autre part, si f est une distribution sur $\mathbf{R}^n$ telle que l'intégrale paramétrique

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi \qquad (x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n)$$

est convergente sur $\mathbf{R}^n$, on définit une distribution $\varphi(x)$ sur $\mathbf{R}^n$ qui s'appelle la transformée de Fourier de f et on écrit $\varphi = \mathfrak{F}f$. Cela étant, on établit aussitôt les propriétés élémentaires de la transformation de Fourier, $\mathfrak{F}$, et on démontre aisément que $\mathfrak{F}$ définit une application biunivoque de l'espace des distributions tempérées sur lui-même, etc., etc.

1. **Sur la notion d'intégrale d'une distribution.** Récemment nous avons pu vérifier que la notion d'intégrale d'une distribution f d'une variable, telle que nous l'avons définie, coincide, dans le cas où f est une fonction localement sommable, avec une notion d'intégrale généralisée, que Du Bois-Reymond a introduit en 1887 (Journal de Crelle, vol. C, p. 356), en étendant aux intégrales les méthodes de sommation de Cesàro pour les séries. Voici l'idée de Du Bois-Reymond:

Soit r un entier $\geqslant 0$ et a un nombre réel quelcomque. Si l'on pose

$$F(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^r}{r!} f(t)dt\,,$$

on a $F = \mathfrak{J}_a^{r+1} f$, donc $\mathfrak{J}_a f = \int_a^x f = D^r F$. Alors, si la fonction $F(x)/x^r$ tend vers une limite finie lorsque $x \to +\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est *sommable* (C, r) et on écrit:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{r!\,F(x)}{x^r} = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^r f(t)dt$$

Or, on voit aussitôt que, dans ce cas, la fonction f est intégrable au sens des distributions sur $[a, +\infty[$ et que son intégrale sur cette intervalle a pour valeur la limite ci-dessus indiquée.

Cette notion de sommabilité (C, r) peut évidemment s'étendre au cas où r est un nombre réel non-négatif quelconque.

Pour les détails, voir E. W. Hobson, «*The theory of fonctions of a real variable*», Dover Publications, Inc., New York, pp. 384-388, 737-741.

2. **Sur les critères d'existence de la convolution, faisant intervenir les ordres de croissance.** Les critères que nous avons indiqués au n.º 17 (Convolution and orders of growth) font intervenir seulement les notions usuelles d'ordre de croissance pour les fonctions. On obtient des critères beaucoup plus fins, si l'on emploie les notions d'ordre de croissance d'une distribution (cf. définitions 10.8 et 10.9). Par exemple:

Si f est g sont deux distributions sur $\mathbf{R}$ *telles que* $f \in O_n(x^\alpha)$ *et* $g \in O^n(x^\beta)$, *et si* α, β *vérifient la condition* $\alpha + \beta < -1$, *alors* $f * g$ *existe au sens des distributions.*

On peut se demander quel est dans ce cas l'ordre de $f * g$. Il n'existe peut-être pas des critères généraux à cet effet. Mais on peut trouver des réponses intéressantes dans des cas particuliers. Posons, par exemple,

$$h_y(x) = \frac{1}{x^2 + y^2}\,, \quad \forall\, y \in \mathbf{R}$$

Alors, on a la proposition:

Si f est une distribution telle que $f \in \mathrm{O}(x^{\alpha})$, où $\alpha < 1$, la convolution $h_y * f$ existe pour tout $y \neq 0$ et on a encore $h_y * f \in \mathrm{O}(x^{\alpha})$.

Observons que, si l'on pose dans ce cas

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi} h_y(x) * f(x) \,, \qquad \text{pour } x \in \mathbf{R}, y > 0 \,,$$

φ est la solution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ dans la demi-plan $y > 0$, telle que

$$\varphi(x,0^+) = f(x) \,, \quad \varphi(x,y) \in \mathrm{o}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Ces résultats, que nous n'avons d'ailleurs pas eu l'occasion de vérifier en détail, sont en rapport avec l'étude de la transformation de Stieltjes (voir notre article «*La théorie des ultradistributions et les séries de multipôles des physiciens*», à paraître dans «Mathematischen Annalen»).

Nous estimons que ce point de vue pourra conduire à des résultats nouveaux, intéressants pour les physiciens, dans le cas de distributions de plusieurs variables.

Observons d'autre part que l'on obtient encore un critère probablement utile, en remplaçant dans la proposition 17.2 (corollaire de 17.1) la condition «$\alpha < -2$» par la condition «α entier $\leqslant -1$».

Acabou de se imprimir
na GRÁFICA DE COIMBRA
em Fevereiro de 1967.