José Sebastião e Silva e a Lógica Matemática — pioneirismo e actualidade[1]

Augusto J. Franco de Oliveira

Professor Emérito da Universidade de Évora
Centro de Filosofia das Ciências
da Universidade de Lisboa

1. Introdução. Os rapazes da "Portugaliæ"

José Sebastião e Silva (JSS, no que segue) teve sempre um especial interesse e carinho pela lógica e os fundamentos da matemática. Distingo três fases do seu envolvimento em vida e postumamente com estes assuntos:

a) A fase da lógica básica, ou seja, dos artigos de divulgação de temas lógicos e de propostas para a sua inclusão em diferentes graus de ensino, abrangendo as décadas de 40 e 50, bem como as propostas de reforma dos planos de estudo da licenciatura em Ciências Matemáticas na Faculdade de Ciências de Lisboa e os capítulos dos manuais e guias utilizados na reforma "matemáticas modernas" nos anos 60;
b) A fase de investigação em lógica superior (definibilidade, teoria dos modelos de ordem superior, linguagens infinitárias), abrangendo a época da estadia em Itália, com a elaboração de uma "tese" não submetida e um artigo publicado, bem como a famosa axiomática das distribuições e a aplicação de alguns dos seus resultados (o *método metamatemático*) em trabalhos posteriores em análise funcional e teoria das distribuições;
c) A fase póstuma, a partir de 1985 (publicação da tradução do artigo de 1945), que compreende as investigações de Newton da Costa e colaboradores, que estende (corrigindo, refinando e generalizando) os trabalhos de JSS no sentido de uma teoria de Galois generalizada (com aplicações à lógica, à geometria, à álgebra e à análise funcional) e uma teoria universal das estruturas.

Recordemos que entre a conclusão da licenciatura (1937) e a sua partida para Roma (1943) como bolseiro do Instituto para a Alta Cultura, JSS terá sido um dos (ou, pelo menos, contactado com os) "rapazes da *Portugaliæ Mathematica*", de que fala Edmundo Curvelo em 1947:

[1] Texto expandido (com extensas citações, sem omissão de eventuais repetições) de um intervenção na Mesa Redonda "JSS no Portugal dos anos 30 e 40 do séc. XX — a matemática e a física, a lógica", no âmbito das tertúlias comemorativas do centenário do nascimento de José Sebastião e Silva. Universidade de Évora, 27 de Março de 2015. A versão final beneficiou de algumas observações pertinentes do colega e amigo Prof. Paulo Almeida.

«(…) Mas a nossa gente anda tão divorciada de estas coisas [problemas fundamentais da lógica elementar encarados de ponto de vista superior] q̄ talvez não seja aconselhável, numa Biblioteca q̄ deve, segundo me parece, atender ao grande público, começar-se logo com cavalarias demasiadamente altas. Aqui em Lisboa, contudo, os homens da Matemática e da Física, mas principalmente os da Matemática, vão considerando o conhecimento da lógica simbólica cada vez mais indispensável para as suas próprias especialidades. Eu tenho andado a trabalhar com os rapazes da "Portugaliæ Mathematica", no problema dos fundamentos lógicos da Matemática, e procurarei conseguir q̄ a partida do Baptista Ribeiro para a América, agora, não venha interromper grandemente esta colaboração nem retardar grandemente a publicação de alguns resultados q̄ já alcançámos.» (Carta a Joaquim de Carvalho, 4 de Outubro de 1947, in Curvelo *2005*)

O panorama dos estudos de lógica estava então (finais dos anos 30 e primórdios dos anos 40) em mudança fervilhante, como anota Manuel Curado em 2001:

«Não foi feliz o destino da lógica no pensamento filosófico português do século XX. A herança prestigiosa de Pedro Hispano e dos Conimbricenses não teve sucessores. (...) é difícil encontrar algum texto português de lógica escrito por pessoas de formação filosófica no século XX que ultrapasse o nível de conhecimentos introdutórios da disciplina. A audiência filosófica mais importante de qualquer país, os que frequentaram cursos superiores de filosofia, tem em Portugal deficiências enormes e é muito difícil encontrar licenciados num curso superior de filosofia português que dominem um nível mínimo de conhecimentos de lógica. Se o mais frequente nos programas superiores de lógica são as banalidades historiográficas que qualquer manual pode oferecer, o mais raro é encontrar docentes a leccionar os quatro pilares mais importantes dos estudos de iniciação à lógica: a teoria da argumentação, o calculo proposicional, o calculo de predicados e a lógica modal.

«(...) Um nível de conhecimentos suficiente raramente é alcançado e o clima geral nas faculdades de letras que leccionam cursos de filosofia é o de uma enorme dificuldade em promover programas actualizados, em defender teses em lógica (a falta de orientadores de tese é paralela à falta de professores especializados para a constituição de júris), em organizar bibliotecas de apoio e em desenvolver projectos de investigação em que a lógica seja uma componente importante. Alguém que queira trabalhar em ética com ferramentas de lógica deôntica, em teoria do conhecimento com ferramentas de lógica epistémica, ou em filosofia da linguagem com ferramentas de semântica formal dificilmente encontrará recursos académicos para isso. Apesar de existirem excepções a este panorama (Edmundo Curvelo é a figura mais notável mas não a única), o que caracteriza positivamente a produção lógica dos pensadores Portugueses do século XX é a intenção de divulgar alguns capítulos importantes da lógica (separação da lógica clássica em relação à lógica simbólica, relações entre linguagem natural e estruturas lógicas do pensamento, calculo proposicional) e a elaboração de compêndios e textos didácticos. Infelizmente, o que caracteriza negativamente a lógica contemporânea portuguesa em filosofia é a desactualização temática e a utilização frequente do simbolismo lógico como uma roupagem inútil e decorativa. Apesar da gravidade em subscrever um juízo excessivamente geral (cometer o sofisma da generalização apressada não é um perigo a olvidar), é correcto afirmar que pouco foi feito em lógica por pensadores portugueses do século XX. Apesar de os pensadores técnicos e matemáticos dominarem um nível de conhecimentos em lógica mais especializado, em muito superior a um nível de conhecimentos introdutórios, não é claro que nas suas obras esteja presente verdadeira criatividade.

«(...) Procurar descobrir por que é que uma área de vanguarda do pensamento filosófico e aquela que está na base de algumas das construções intelectuais mais poderosas do século XX (computação, matemática, teoria de sistemas, ciência cognitiva) ficou menosprezada na cultura portuguesa e no ensino secundário e superior do país é empreender uma viagem dolorosa. A causa maior da dor reside na verificação de que em meados do século nada faria prever uma avaliação final tão negativa dos resultados alcançados. Os sinais eram prometedores. Assim, o astrónomo, matemático e historiador da matemática Pedro José da Cunha ainda nas primeiras décadas do século, mostrou interesse pela teoria dos conjuntos e chegou a publicar um estudo académico sobre esse tema. Como se sabe, é difícil promover qualquer início de estudos em lógica ou em fundamentos da matemática sem noções de teoria de conjuntos. Nos anos 20, Leonardo Coimbra coloca a lógica no subtítulo de uma das suas obras mais importantes, *A Razão Experimental (Lógica e Metafísica)*, de 1923, e quatro anos depois publica uns apontamentos com o título *Notas* sobre a abstracção científica e o silogismo, em que revela grande conhecimento do passado da lógica e alguma informação sobre os desenvolvimentos recentes em lógica matemática ou logística através de obras de Burali-Forti e de A. Padoa. A revista *Portugaliae Mathematica*, desde o primeiro volume de 1937, publicou ocasionalmente artigos de lógica matemática de autores nacionais (António Aniceto Monteiro, Hugo Baptista Ribeiro, José Morgado Jr., José Ribeiro de Albuquerque) e de grandes vultos estrangeiros (John von Neumann, Alonzo Church, Haskell B. Curry, Patrick Suppes e outros). Professores dedicados defenderam dissertações universitárias sobre assuntos lógicos (Arnaldo de Miranda Barbosa, em Coimbra, e Curvelo, em Lisboa). O influente e muito dotado Francisco Vieira de Almeida dedicou uma parte substancial da sua obra a divulgação da lógica, e Edmundo Curvelo, o seu assistente na Faculdade de Letras de Lisboa, para além de escrever obras lógicas de maior fôlego (...) e de revelar uma informação extraordinária do que se fazia além-fronteiras, dedicou-se com grande empenho e sucesso à didáctica, um dos aspectos mais difíceis da lógica.» (Curado *2001*)

Recordemos que António Aniceto Monteiro, depois do doutoramento em Paris com Maurice Fréchet em 1936, se dedicou crescentemente às álgebras da lógica, Hugo Baptista Ribeiro doutorou-se em Zurique com Paul Bernays também em 1936, no tema das álgebras de Boole e nunca mais deixou a lógica, e José Ribeiro de Albuquerque trabalhou inicialmente em conjuntos projectivos. Em 1940, JSS foi chamado por António Monteiro para integrar o Centro de Estudos de Matemática da Universidade de Lisboa.

2. A lógica média

É à luz do clima descrito no final da secção anterior que devemos encarar os interesses emergentes de JSS na lógica e seu ensino. A nível do ensino pré-universitário destacam-se os artigos de divulgação:

- A Lógica Matemática e o ensino médio I, II e III. *Gazeta de Matemática*, nºs. **5**, **6** e **7**, 1941.
- Sobre o método axiomático. *Gazeta de Matemática*, n.º **26**, 1945.
- O que é uma axiomática? *Gazeta de Matemática*, n.º **54**, 1953.
- Introdução à lógica simbólica e aos fundamentos da matemática. Revista *Palestra*, n.º 6, 1959, Lisboa.

O primeiro destes trabalhos foi redigido tendo em mente e exemplificando principalmente alguns aspectos lógicos e metodológicos do ensino da Geometria no então 3.º ciclo, concluindo no final:

> «(…) Uma conclusão, porém, se impõe, entre todas: a dificuldade dum estudo criterioso dos métodos gerais da Matemática, e duma justa compreensão do encadeamento das proposições no raciocínio matemático, sem recorrer à Lógica simbólica, e sem uma cuidada preparação que desenvolva no aluno hábitos de rigorismo lógico, libertando-o progressivamente dos processos intuitivos.[2]
>
> «(…) Por outro lado, a Aritmética, com a simplicidade dos seus conceitos e das suas propriedades, constitui, mais do que a Geometria, um campo privilegiado para a aplicação da Lógica matemática.» (in *Textos Didácticos III,* p. 222)

Lamentavelmente, JSS nunca chegou a escrever a parte de Aritmética que pretendia para o curso liceal, mas entre as novas matérias que preconizou para os ensinos nas reformas que liderou nos anos 60 estiveram sempre presentes a lógica, a teoria dos conjuntos, as álgebras de Boole com aplicações a computadores, a teoria das relações, a par de outros tópicos inovadores, como a álgebra vectorial, a estatística e as transformações geométricas. Mas JSS era realista e atento aos resultados da experiência, e sempre criticou e combateu os excessos de formalismo e abstracção por si mesmos. No último dos trabalhos acima citados, escreve:

> «Compete hoje portanto aos professores de matemática ensinar lógica nos liceus, de maneira explícita ou implícita (e melhor fora explícita). Por outras palavras: compete, por definição, a esses professores, ensinar os alunos a pensar correctamente, o que é muito diferente, e por vezes o oposto, de ensinar a resolver pontos-modelo para os exames.» (in *Textos Didácticos III,* p. 544)

3. Tertúlias romanas

JSS partiu para Roma em 1943, para preparar o doutoramento no Instituto Nazionale di Alta Matematica sob a orientação do geómetra (geometria algébrica e transformações), lógico, historiador e filósofo da ciência Federigo Enriques (1871-1946). Aí conviveu também com matemáticos e filósofos como Francesco Severi, Luigi Fantappié, Guido Castelnuovo e sua filha Emma, e Mauro Picone, entre outros.

Não sabemos ao certo porquê, mas entre 1943 e 1944 JSS elaborou uma pretensa tese intitulada "Para uma teoria geral dos homomorfismos", de que publicou uma parte em 1945 nos anais da Academia Pontifícia, relativa a automorfismos, traduzida por mim e publicada em 1985 na revista *History and Philosophy of Logic*. Segundo Andrade Gui-

[2] Esta passagem não deve ser entendida como reprovação do uso da intuição na matemática, coisa que nunca advogou, mas apenas como complemento ao que umas linhas atrás escrevera sobre o uso de figuras: «(…) Não pretendemos, com isto, insinuar que se deva pôr completamente de parte a figura: pelo contrário, há grande vantagem no seu uso (devidamente acautelado), como poderoso auxiliar da intuição. Não deixaremos, contudo, de aconselhar, como óptimo exercício para combater os hábitos de raciocínio provenientes do uso imoderado das figuras, fazer a demonstração de alguns teoremas, sem recorrer à imagem geométrica intuitiva.» (in *Textos Didácticos III,* p. 210)

marães *1972* (p. 15), a referida "tese" não terá sido submetida para provas de doutoramento em Portugal por indicação de Enriques, por dificuldade em encontrar quem a compreenda em Portugal, presumivelmente também, digo eu, por dificuldade em encontrar quem a compreenda em Itália e atendendo à idade avançada do orientador (Enriques faleceu em Junho do ano seguinte). Pela leitura que fiz dela em 1985, por ocasião da publicação do primeiro volume das *Obras*, a "tese" não foi revista e finalizada por JSS para publicação ou submissão a doutoramento, e nunca mais foi tocada.

Os desenvolvimentos que estes trabalhos tiveram recentemente serão reportados mais adiante. De momento quero apenas comentar o seu pioneirismo e posicionamento relativamente à investigação *mainstream* em Lógica Matemática na primeira metade do séc. XX. O próprio título da "tese" e do artigo dela extraído são bastante sugestivos a este respeito. Trata-se de investigações sobre *sistemas matemáticos (*ou *estruturas matemáticas) arbitrários*, seus homomorfismos e automorfismos e relação com noções de definibilidade.

Lembremos que nas primeiras décadas do séc. XX as investigações lógicas e de fundamentos rondavam a assimilação/digestão dos sistemas lógico-fundacionais à la Frege, Peano e Russell, onde se constata o crescente papel das linguagens e teorias formais, das infames críticas de Poincaré aos formalismos hilbertianos, da famosa polémica Hilbert-Brouwer e da formulação do famoso programa de conservatividade e consistência de Hilbert nos anos 20 e os estudos primaciais da computabilidade por Turing, Church, Kleene e outros. O problema da completude semântica foi formulado por Hilbert e Ackermann em 1928 e resolvido por Gödel em 1930, a que se seguiram pouco depois os famosos metateoremas de incompletude (1931). Ora, JSS conhecia estes desenvolvimentos, como é patente na lista bibliográfica no final do artigo de 1945, partes I e II:

I. Sobre os fundamentos da matemática em geral

Bernays, P. *1935a.* 'Sur le platonisme dans les mathématiques', *Ens. Math.*, **34**, 52-69.

—— *1935b.* 'Quelques points essentiels de la métamathématique', *Ens. Math.*, **34**, 70-96.

Hilbert, D. and Ackermann, W. *1928. Grundzüge der theoretischen Logik,* Berlin (Springer).

Hilbert, D. and Bernays, P. *1934. Grundlagen der Mathematik,* vol. I, Berlin (Springer).

Lewis, C. I. and Langford, C. H. *1932. Symbolic Logic,* New York (The Century Co.)

Lukasiewicz, J. and Tarski, A. *1940.* 'Untersuchungen übcr den Aussagenkalkül', *C. R. Soe. des Sci. et Lettres de Varsovie.* Cl. III, 30-50.

Peano, G., *1895-1908. Formulario matematico,* 5 vols., Turin.

—— *1934. Amer. Math. Soc.*, **44**, 224-232.

Whitehead, A. N. and Russell, B. *1910-1913. Principa Mathematica,* 3 vols., Cambridge (Cambridge University Press): 2nd edition 1925-1927.

II. Sobre processos de definição lógica

Ackermann, W. *1928.* 'Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen', *Math. Ann.*, **99**, 118-135.

Borel, E. *1928. Leçons sur la théorie des fonctions,* 3rd edition, Paris (Gauthiers-Villars).

Church, A. *1938.* 'The constructive second number class', *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**, 224-232.

Church, A. and Kleene, S. C. *1937.* 'Formal definitions in the theory of ordinal numbers', *Fund. Math.*, **28**, 11-21.

Hilbert, D. *1925*. ‘Über das Unendliche’, *Math*. Ann., **95**, 161-190.
—— *1900*. ‘Über den Zahlbegriff, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*., **8**, 180-194.
Kleene, S. C. *1936*. ‘General recursive functions of natural numbers’, *Math. Ann.,* **112**, 727- 742.
—— *1937*. ‘On definability and recursiveness’, *Duke Mathematical Journal,* **2**, 153-163.
Lebesgue, H. *1905*. ‘Sur les fonctions représentables analytiquement’, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* (6)**1**, 139-216.
Lusin, N. *1930*. *Leçons sur les ensembles analytiques*. Paris (Gauthiers-Villars).
von Neumann, J. *1928*. ́Über die Definition durch transfinite Induktion’, *Math. Ann.,* **99**, 373-391.
Peter. R. *1934*. ́Über den Zusamimenhang der verschiedene Begriffe der rekursiven Funktionen’, *Math Ann.*, **110**, 612-632.
—— *1935*. ‘Konstruktion nicht rekursiver Funktionen’, *Math. Ann.,* **111**, 43-60.
Turing, A. M. *1936-1937*. ‘Computabilily and λ-definability’, *Jour. Symbolic Logic,* **2**, 153-163.

Mas JSS encetou outro caminho, que descreve sucintamente no *Sumário* do mesmo artigo (mais adiante falaremos do conteúdo da “tese”):

> «Depois de definir as noções gerais referentes a sistemas matemáticos e seus automorfismos, o autor obtém conclusões que se estendem à doutrina máxima exposta no ‘Programa de Erlangen’ de Felix Klein no campo da teoria de Galois generalizada. Além disso, estas conclusões não apenas ajudam a organizar e clarificar muitas questões em todas as partes da matemática, como também se mostram úteis em questões na análise funcional. Os resultados aqui enunciados serão demonstrados noutro trabalho.»

Na minha *Introdução* à tradução publicada em 1985 escrevi (com adaptação):

> « As operações lógicas primitivas são conjunção, negação, quantificação universal, o operador de descrição ι e a substituição de variáveis (livres). São introduzidos dois conceitos de definibilidade ou expressibilidade lógica. O primeiro destes (definibilidade no sentido *normal*) corresponde à definibilidade no sentido usual, ou seja, num número finito de etapas, ou por meio de uma fórmula finita, construída a partir de primitivos, lógicos e não lógicos. O segundo conceito, no sentido *lato* ou *amplo*, é tal que
>
> l) definibilidade no sentido normal implica definibilidade no sentido lato;
>
> 2) se cada solução de um predicado α é definível no sentido lato a partir de primitivos então α também é assim definível;
>
> 3) a definibilidade no sentido lato é transitiva.
>
> «O autor salienta que esta condição 2) é bem distinta da primeira noção de definibilidade e pergunta se as duas noções são na verdade equivalentes. Parece-me que esta segunda noção de definibilidade não é estabelecida tão precisamente como poderia ter sido, ou poderia ser, para fins comparativos ou outros. Uma maneira de olhar para ela é como uma forma de definibilidade *implícita*, mas então uma análise detalhada só é possível dentro de uma linguagem precisa e formal, como feito por Beth em 1953 para linguagens de primeira ordem; mas também podemos olhar para ela como envolvendo possivelmente linguagens infinitárias e outras extensões das linguagens de primeira ordem, e isso pode bem requerer técnicas de lógica abstracta.

«O corpo principal do artigo é dedicado a sistemas matemáticos (estruturas), seus automorfismos e sua relação com a definibilidade. Como disse o Autor no seu resumo, o objectivo é generalizar para sistemas matemáticos arbitrários as principais proposições da teoria de Galois, e a terminologia adoptada (predicados irredutíveis, grupo de Galois de um conjunto, etc.) reflecte este objetivo. Ao descrever esta teoria de Galois metamatemática, devemos observar que, para Silva, um sistema matemático $[U;\mathfrak{P}]$, onde U é um conjunto e $\mathfrak{P}$ uma lista de primitivos (predicados ou relações, elementos e operações em U) é definido a menos de interdefinibilidade, no sentido de que $[U;\mathfrak{P}_1] = [U;\mathfrak{P}_2]$ se e somente se cada primitivo de um sistema é definível em termos dos primitivos do outro. Isto não é a noção habitual de [sistema ou] estrutura na teoria dos modelos, mas não é assim tão rara em matemática, por exemplo, onde uma estrutura topológica pode ser dada num número de maneiras alternativas interdefiníveis (família de conjuntos abertos, operador de fecho, etc.). Ele pode então afirmar, como consequência do Segundo Teorema Fundamental (secção 18), que dois sistemas são idênticos se e só se têm o mesmo grupo de automorfismos. Outra tal consequência é que o fecho lógico de um subconjunto A do universo U de um sistema (i. e. o conjunto dos elementos de U logicamente definíveis a partir dos predicados primitivos e parâmetros em A) é o conjunto de elementos de U que permanecem fixos por cada automorfismo do sistema que deixa invariantes os elementos de A.

«Os teoremas fundamentais das secções 17 e 18 são a base do seu *método metamatemático*, que ele aplicou com sucesso pelo menos três vezes na sua obra posterior na análise funcional e na teoria de distribuições. A primeira destas aplicações é na tese de doutoramento *(1950,* 40), a segunda em *1958,* 107 e a terceira em *1960,* 5. Os detalhes destas aplicações são demasiado técnicos para serem descritos aqui, mas o problema geral nos três casos foi o de *determinar a expressão geral para as aplicações lineares contínuas de um espaço funcional noutro*.»

Um programa semelhante mas de menor âmbito tinha sido proposto independentemente por M. Krasner em 1938 (ver adiante). Em todo o caso, interessa assinalar o pioneirismo da incursão de JSS em assuntos de lógica matemática importantes mas ainda por explorar, e com ligações evidentes a um dos mais revolucionários programas de renovação das concepções matemáticas em muitas áreas, o Programa de Erlangen de Felix Klein. Mas não deixa de ser extraordinário o facto de JSS ter tido o ensejo de aplicar pelo menos três vezes *um* (o seu) *método metamatemático* em questões de matemática até quase vinte anos depois da invenção do método. Isto sugere um forte enraizamento da lógica matemática no seu espírito matemático, presente durante toda a sua produção científica.

4. Frutos serôdios

No *Sumário* do seu artigo de 2007 "Definability and Invariance", Newton e Rodrigues escrevem:

«Na sua tese *Para Uma Teoria Geral dos Homomorfismos* (1944) , o matemático Português José Sebastião e Silva construiu uma teoria de Galois abstracta ou generalizada, que está intimamente ligada ao Programa de *Erlangen* de F. Klein e que prenuncia algumas noções e resultados da teoria dos modelos hodierna; uma teoria análoga foi trabalhada de modo independente, por M. Krasner em 1938. Mas o trabalho de Silva sobre o assunto não é nem totalmente claro nem suficientemente rigoroso.[3] Neste artigo apresentamos uma versão rigorosa da teoria, corrigindo as deficiências da exposição de Silva e estendendo alguns dos seus principais resultados.»

Na *Introdução* desenvolvem estas observações:

«Neste artigo apresentamos as idéias básicas e os resultados de uma tese cujo autor foi o matemático Português José Sebastião e Silva (1914-1972). A tese foi escrita em Português em torno de 1944, quando Silva estava na Itália com uma bolsa de estudos do Instituto para a Alta Cultura, Lisboa, para concluir uma tese para o doutoramento em Portugal; ele desenvolveu as suas pesquisas no Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, entrando em contacto com vários matemáticos italianos, como F. Enriques, F. Severi e L. Fantappié. A tese nunca foi publicada durante a vida de Silva nem submetida para o grau de doutor; na verdade, ele escreveu outra dissertação, inspirado pelo trabalho de Fantappié na análise funcional. A tese apareceu apenas em 1985, no primeiro volume de *Obras de José Sebastião e Silva* (1985). No entanto, ele publicou uma nota em italiano em *1945*, resumindo o seu trabalho. Uma versão em Inglês desta nota apareceu em *1985* (a introdução, por A. J. Franco de Oliveira, fornece um esboço da vida e realizações de Silva).»

«A tese de Silva é realmente importante, não só pela sua originalidade, mas também porque prenuncia vários conceitos e resultados da teoria de modelos de ordem superior (ver *1985*). Além disso, em outros trabalhos Silva fez aplicações da sua teoria, hoje chamada teoria de Galois generalizada, à análise funcional e à teoria das distribuições.

«No entanto, a exposição de Silva, na sua tese, bem como na sua nota de 1945, não é nem rigorosa nem suficientemente precisa. Um dos nossos objectivos é corrigir as suas deficiências; outro é o de contribuir para fazer justiça histórica a um assunto de extrema relevância, embora não seja bem conhecido; finalmente, o terceiro é o de apresentar uma obra de referência sobre a teoria Galois generalizada, o que certamente irá interessar a um vasto leque de especialistas, por exemplo nas áreas de lógica, geometria, álgebra e análise funcional.

«Deve-se observar que, independentemente de Silva, o algebrista russo-francês Mark Krasner desenvolveu uma teoria análoga (cf., por exemplo, Krasner *1938* e *1968-69*). Em certo sentido, a teoria de Krasner pode ser reduzida à de Silva.

«Um dos objetivos básicos da teoria é o estudo de certas conexões entre duas noções lógico-matemáticas centrais: a de invariância sob um grupo de transformações e de definibilidade numa linguagem (abstracta) apropriada. A partir deste ponto de vista, a teoria de Galois generalizada está relacionada com o Programa de Erlangen de Klein, e constitui uma das suas possíveis extensões. Sobre estas noções e sua importância escreve Hodges que,

> "Aos 23 anos de idade Felix Klein, no seu famoso *Erlanger Programm* (1872) propôs a classificação das geometrias por meio dos seus automorfismos. Ele tocou em algo fundamental aqui: em certo sentido, *estrutura é o que quer que seja preservado por automorfismos*. Uma consequência — se os slogans podem ter consequências — é que uma estrutura modelo-teórica traz consigo implicitamente todas as características que são definíveis pelos processos conjuntistas em termos dela, visto que estas propriedades são preservadas por todos os automorfismos da estrutura.

[3] Algumas observações críticas no mesmo sentido foram formuladas por A. Marques Fernandes *1990*.

“Há um slogan modelo-teórico rival: *estrutura é tudo o que é definível*. Surpreendentemente, este slogan aponta na mesma direcção que o anterior. Por exemplo, se temos um corpo $\boldsymbol{K}$, podemos definir o plano projectivo sobre $\boldsymbol{K}$. Mas, precisamente porque o plano projectivo é definível a partir de $\boldsymbol{K}$, qualquer automorfismo de $\boldsymbol{K}$ irá induzir um automorfismo do plano também. De qualquer maneira, o plano é fornecido com o corpo; em algum sentido abstracto ele é o corpo, mas observado de um ponto de vista pouco usual.” (Hodges *1997*, p. 93)

Desenvolvimentos adicionais encontram-se no artigo mais recente de Newton da Costa e Otávio Bueno *2011*, de que transcrevemos o respectivo *Sumário*:

«Este artigo é um companheiro histórico de um artigo anterior, em que foi estudada a chamada teoria de Galois abstracta, tal como foi formulada pelo matemático português José Sebastião e Silva (ver da Costa e Rodrigues *2007*). O nosso propósito agora é apresentar algumas aplicações da teoria de Galois abstrata à teoria de modelos de ordem superior, discutir a noção de [Sebastião e] Silva de expressibilidade e delinear uma teoria de Galois clássica que pode ser obtida dentro das duas versões da teoria abstracta, aquelas de Mark Krasner e de Silva. São feitas algumas observações sobre a teoria universal de estruturas (conjuntistas).

São também elucidativos os seguintes trechos da *Introdução*:

«Em da Costa e Rodrigues *2007* foi apresentada a chamada teoria de Galois abstracta ou generalizada, especialmente de acordo com as opiniões de José Sebastião e Silva. Observou-se que existe uma outra versão da teoria — a de Mark Krasner — intrinsecamente ligada à de Silva. No presente trabalho, continuamos o estudo destas teorias. Em particular, os nossos objetivos principais são os seguintes:

«Consideramos algumas aplicações da teoria de Galois generalizada à teoria dos modelos de ordem superior e à teoria das espécies de estruturas (sistemas matemáticos ou axiomáticos).

«Vamos analisar, de uma perspectiva conjuntista, a noção de definibilidade, no sentido amplo da expressibilidade, uma noção que é fundamental para a teoria de Silva.

«Esboçamos as interligações entre as teorias de Silva e de Krasner, mostrando em linhas gerais como a teoria de Galois clássica pode ser derivada de ambas as formulações da teoria abstrata.

«Este artigo é de natureza histórica, oferecendo um resumo das ideias de Silva e de Krasner e seu significado. É interessante notar que os análogos da teoria de Galois foram desenvolvidos em muitas áreas da matemática (mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em: Krasner (1976), Erne *et al.* (1993), Mac Lane (1998), Davey, Priestley (2002), Gierz *et al.* (2002), Deneke *et al.* (2004), Picado (2005) e Galatos et al (2007)). Estas abordagens interligam-se com a nossa teoria de Galois generalizada, que é parte de uma teoria universal de estruturas. No entanto, esta teoria universal requer uma teoria de conjuntos estendida com universos, tais como a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (ZFC) juntamente com universos e mais um postulado no sentido de que cada conjunto está contido num universo. Afinal de contas, várias questões numa teoria universal de estruturas não podem ser acomodadas em ZFC sem universos, tais como o produto cartesiano de famílias arbitrárias de estruturas. Assim, todas as nossas construções e resultados serão estabelecidas em ZFC com universos (ver Zakharov *et al.* (2006), Bunina, Zakharov (2006), da Costa (1972) e Brignole e da Costa (1971)).»

Por tudo o que precede, e sem receio de exagerar, podemos dizer que a ligação de JSS à lógica no início da sua carreira científica foi, afinal, uma perene relação com muitos frutos serôdios de que só agora começamos a disfrutar. Para todos os efeitos, JSS foi, além de grande matemático, um mais que promissor grande lógico do séc. XX.

5. Bibliografia

Bennett, A.A. *1949* [Review of Silva *1945*], *J. Symb. Logic,* **14**, 127.

Beth, E. *1953*. 'On Padoa's method in the theory of definilion', *Indag. Math.,* **15**, 330-339. *Ver também* Tarski and Beth.

Bourbaki, N. *1968*. *Theory of Sets,* London-Ontario: Hermann, Addison Wesley.

Castelnuovo, E., *A obra didáctica de José Sebastião e Silva*. 1982, SPM.

Chang, C. C. and Kreisler, H. *1977. Model Theory,* 2nd ed., Amsterdam (North-Holland).

Curado, J. M. *2001*. 'Lógica em Portugal no séc. XX', Vol. V, tomo II (O Século XX) da *História do Pensamento Filosófico Português*, editado por Pedro Calafate. Lisboa: Caminho, 327-419.

Curvelo, E. C. *2005*. *Cartas de Edmundo Curvelo a Joaquim de Carvalho (1947-1953) e outros inéditos,* Edição e introdução por A. Franco de Oliveira, Cadernos de Filosofia das Ciências 1, Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa.

da Costa, N. C. A. and Chuaqui, R. *1988*. 'On Suppes set-theoretical predicates', *Erkenntnis,* **29,** 95-112.

da Costa, Newton C. A., e Bueno, Otavio. *2011.* 'Remarks on abstract Galois theory', *Manuscrito — Rev. Int. Fil.,* Campinas, **34**, n. 1, 151-183.

da Costa, N. C. A., Rodrigues, A. A. M. *2007.* 'Definability and invariance', *Studia Logica,* **86**, 1-30.

Fernandes, António Marques. *1990,* 'Sobre a obra lógica de José Sebastião e Silva', *Gazeta de Matemática,* n.º 137.

Guimarães, A. Andrade. *1972. Vida e obra do Prof. Sebastião e Silva*. Não publicado. Disponível online em http://www.esss.edu.pt/images/stories/downloads/Jose_Sebastiao_e_Silva.pdf

Hodges, W. *1997. A Shorter Model Theory,* Cambridge: Cambridge University Press.

Köthe, G. *1973.* J. Sebastião e Silva et l'analyse fonctionelle', *Anais Fac. Cienc. Porto,* **56**, 339-349.

Krasner, Mark. *1938*. 'Une généralisation de la notion de corps', *Journal de Math. Pures et Appl.,* **17,** 367-385.

— *1968-69*. 'Endothéorie de Galois abstraite', *Seminaire Dubreil-Pisot, Alg. et Theorie des Nombres 22,* **6,** 19pp.

Marshall, M. V. and Chuaqui, R. *1991*. 'Sentences of type theory: the only sentences preserved under isomorphisms', *Journal of Symb. Logic,* **56,** 932-948.

Peano, G. *1889*. *Arithmetices Principia...,* Turin (Bocca); repr. in *Opere scelte,* vol. 2, 20-55.

Reyes, G. *1970*. 'Local definability theory', *Ann. Math. Logic,* **1**, 95-137.

Rodríguez-Consuegra, F. A. *2003*. 'Mathematical logic and logicism from Peano to Quine, 1890-1940', in Grattan-Guiness, Ian (Editor), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,* Vol. 1, Part 5 (Logic, Set Theories and the Foundations of Mathematics), Routledge, 2003, 617-628.

Silva, Jaime Carvalho e. O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva — uma primeira abordagem —, in http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html

Silva, J. Sebastião e. *1945*. ‘Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque’, *Comm. Pontif. Acad. Sci.,* **9,** 327-357.

— *1950.* ‘As funções analíticas e a análise funcional’, *Portug.Math.,* **9**, 1-130.

— *1958.* ‘Sur 1’espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite’, *Portug. Math.,* **17**, 105-132.

— *1960.* ‘Sur la définition et la structure des distributions vectorielles’, *Portug. Math.,* **19**, 1-80.

— *1985*. ‘On automorphisms of arbitrary mathematical systems’, Trad. Port, e edição por A. J. Franco de Oliveira, *History and Philosophy of Logic,* **6,** 91-116.

— *1985*. ‘Para Uma Teoria Geral Dos Homomorfismos’, in J. C. Ferreira, J. C. Santos Guerreiro and Silva Oliveira, *Obras de José Sebastião e Silva,* Vol. 1, , 135-339.

— *1982-1985*. *Obras de José Sebastião e Silva*. 3 vols. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica, Imprensa Nacional-Casa da Moeda.

— *1999, Textos Didácticos I, II, III,* Fundação Calouste Gulbenkian.

Tarski, A. *1983*. *Logic, Semantics, Metamathematics,* Indianapolis: Hackett.

Tarski, A. and Beth, E. *1956*. ‘Equilaterality as the only primitive of Euclidean gcometry’, *Indag. Math.,* **18**,462-467.

Tarski, A. and Lindebaum, A. *1934*. ‘Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien’, *Ergeb. Math. Kolloq.,* no. 7, 15-22. English trans. in Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics,* 1st ed. (ed. Woodger, J. H.: 1956, Oxford, Clarendon Press), 384-392; 2nd ed. (ed. Corcoran, J.: 1983, Philadelphia, Hackelt), 384-392.