

J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

1.º volume

1.º tomo

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

1. **Sinais e expressões.** Toda a língua, falada ou escrita, consiste em agrupamentos de *sinais elementares* que podem ser *sonoros* (linguagem falada) ou *gráficos* (linguagem escrita).

Há duas espécies principais de escritas: *fonéticas* e *ideográficas*. Nas escritas fonéticas os sinais elementares (*letras*) correspondem mais ou menos aos sons indecomponíveis que pronunciamos. Nas escritas ideográficas os sinais ideográficos (*ideogramas*) representam directamente ideias, como sucede, por exemplo, na escrita chinesa e japonesa.

A escrita simbólica da matemática pode considerar-se de tipo ideográfico. Assim, quando se escreve 'três mais dois é igual a cinco', a escrita é fonética; quando se escreve ' $3 + 2 = 5$ ', a escrita é ideográfica.

Entre todos os possíveis agrupamentos de sinais elementares numa língua, uns têm *significado*, outros não. Assim, a sucessão de letras AMRO não tem significado na língua portuguesa; mas têm-no, por exemplo, os agrupamentos ROMA, AMOR, ARMO, MORA, MORAR, etc. Analogamente, o agrupamento de símbolos $X -) 2 (5 \sqrt{\quad}$ não tem significado em matemática, mas tem-no por exemplo o agrupamento $\sqrt{5 - (2 - 5)}$.

É natural chamar sinais compostos aos agrupamentos de sinais elementares (que não se reduzam a um sinal isolado). A todos os sinais, elementares ou compostos, poderemos ainda chamar *expressões*, conquanto este termo seja usado, de preferência, para sinais compostos.

Os sinais ideográficos da matemática são também chamados símbolos, donde a designação 'escrita simbólica'.

2. Termos e proposições. Quando uma criança está aprendendo a falar, começa por dizer os *nomes* de coisas, pessoas, etc. e só depois tenta construir *frases*. Nomes e frases constituem as duas espécies principais de expressões numa língua:

$$\text{Expressões com significado} \left\{ \begin{array}{l} \text{termos, nomes ou designações} \\ \text{frases ou proposições} \end{array} \right.$$

São termos, na língua portuguesa, as expressões:

Lisboa, copo, Luís de Camões, alegria, etc.

São termos matemáticos as expressões:

$$3, 3 + 2, \sqrt{2}, \pi, \frac{2}{3}, 3,2, 10^7, \text{ etc.}$$

Assim, os termos *nomeiam* ou *designam entes* (coisas, pessoas, números, etc.). Dum modo geral, chama-se *ente* (*ser* ou *entidade*) a tudo aquilo que se considera como existente e a que, por isso, se pode aplicar uma designação. Certos entes são considerados *concretos* (objectos materiais, plantas, animais, pessoas, etc.), outros são considerados *abstractos* (qualidades, estados, grandezas, números, etc.). Em gramática, os termos são chamados *substantivos* ou *expressões substantivas*, conforme os casos.

São proposições (ou frases) em português, por exemplo:

'Lisboa é uma cidade', 'Vasco da Gama descobriu o Brasil', etc.

sendo *verdadeira* a primeira e *falsa* a segunda.

São proposições simbólicas em matemática, por exemplo, as fórmulas:

$$2 + 3 = 7 \quad , \quad \sqrt{8} < 3 \quad , \quad \text{etc.}$$

falsa a primeira, *verdadeira* a segunda.

Assim, as proposições são aquelas expressões a respeito das quais faz sentido dizer que são verdadeiras ou falsas. As proposições transmitem pensamentos, isto é, *afirmam factos* ou *exprimem juízos* que formamos a respeito de entes.

3. Distinção entre a designação e o designado. Quando se pretende designar uma expressão, é costume escrevê-la entre aspas, para evitar confusões. Considerem-se, por exemplo, as duas seguintes frases:

Lisboa é a capital de Portugal

'Lisboa' é um substantivo

Claro é que a segunda se refere à palavra 'Lisboa' (designação), enquanto a primeira se refere à cidade com esse nome (ente designado). Se a designação fosse o mesmo que o designado, poderíamos concluir que:

A capital de Portugal é um substantivo,

o que é, evidentemente, absurdo. Daí a necessidade do uso de aspas.

Estas considerações estendem-se à linguagem simbólica da matemática. Quando, por exemplo, escrevemos:

'5' é um algarismo árabe

5 é um número ímpar

estamos a referir-nos, no primeiro caso, a um símbolo (designação) e, no segundo caso, ao número designado por esse símbolo, número esse que também pode ser designado pelos símbolos 'V', '2 + 3', etc., ou pela palavra 'cinco'.

Assim, em toda a língua (escrita ou falada) há que distinguir os termos, que escrevemos ou pronunciamos, dos entes que esses termos designam.

Note-se que para designar uma proposição também se deve escrevê-la entre aspas. Exemplo:

A proposição 'O Sol é uma estrela' é verdadeira.

Muitas vezes, porém, quando não houver perigo de confusão, evitaremos o uso das aspas, para simplificar a escrita.

4. Relação lógica de identidade. Para indicar que dois termos designam o mesmo ente, escreve-se entre ambos o sinal =. Assim, quando escrevemos

$$3 + 2 = 5$$

estamos a indicar que os termos '3 + 2' e '5' designam o mesmo ente.

Analogamente poderíamos escrever:

Lisboa = capital de Portugal

25 = quadrado de 5

Estes exemplos mostram que o sinal $=$ substitui as expressões 'é o' ou 'é a' da língua portuguesa. Assim, este sinal, que se lê usualmente 'é igual a', deveria antes ler-se 'é o mesmo que' ou 'é idêntico a' (a palavra 'idêntico' vem do pronome latino 'idem', que significa 'o mesmo'). Daqui o chamar-se *relação de identidade* à relação expressa pelo sinal $=$.

Mas esta relação refere-se aos entes designados pelos dois termos e não aos próprios termos, que em geral não são idênticos. Por exemplo, é falso que ' $3 + 2$ ' $=$ ' 5 '; apenas poderemos escrever: ' 5 ' $=$ ' 5 ', ' $3 + 2$ ' $=$ ' $3 + 2$ ', etc.

Dois termos dizem-se *equivalentes* ou *sinónimos*, quando designam o mesmo ente. Por exemplo, 'Lisboa' é equivalente a 'capital de Portugal', ' $3 + 2$ ' é equivalente a ' 5 ' e a 'cinco', etc.

Para indicar que dois termos não designam o mesmo ente, escreve-se entre ambos o sinal ' $\neq$ ' (ler 'distinto de' ou 'diferente de'). Por exemplo:

$$2 \times 3 \neq 7, \quad '2 + 3' \neq '5', \quad \text{etc.}$$

Assim, os sinais $=$ e $\neq$ exprimem duas relações lógicas, contrárias uma da outra, correspondentes aos pronomes 'o mesmo' e 'outro':

Todo o ente é idêntico a si mesmo.

Todo o ente é distinto de outro ente.

A primeira destas proposições é um axioma da lógica, chamado PRINCÍPIO DA IDENTIDADE, que pode ser expresso simbolicamente escrevendo:

$$a = a, \text{ qualquer que seja o ente } a.$$

5. Indivíduos e classes; relação de pertença. Em gramática é feita a distinção dos substantivos em *próprios* e *comuns*. Um substan-

tivo é próprio quando se aplica a um só *indivíduo*; é comum quando se aplica indistintamente a todos os indivíduos de uma mesma *classe*. Por exemplo, 'Sol' é um substantivo próprio, 'estrela' um substantivo comum. A proposição

O Sol é uma estrela

afirma que o Sol é um indivíduo da classe das estrelas ou que *pertence* à classe das estrelas.

Os conceitos de 'indivíduo' e de 'classe' são indefiníveis, pois que, como se vê, estão na base da própria linguagem e, portanto, do pensamento. Para indicar que um indivíduo *a* pertence a uma classe *C* escreve-se simbolicamente:

$$a \in C \quad (\text{ler 'a pertence a C'})$$

Por exemplo, se designarmos por *E* a classe das estrelas, podemos exprimir a proposição anterior sob a forma:

$$\text{Sol} \in E$$

Analogamente, se designarmos por *Pr* a classe dos números primos, a frase '5 é um número primo', pode exprimir-se simbolicamente por:

$$5 \in \text{Pr} \quad (\text{ler '5 pertence a Pr'})$$

Deste modo, o símbolo ' $\in$ ' exprime uma relação lógica — chamada *relação de pertença* — inteiramente distinta da relação lógica de identidade.

Para indicar que um indivíduo *a* não pertence a uma classe *C* escreve-se:

$$a \notin C \quad (\text{ler 'a não pertence a C'})$$

Por exemplo, com as notações anteriores:

$$\text{Lua} \notin E, \quad 9 \notin \text{Pr}, \quad \text{etc.}$$

OBSERVAÇÃO — Recordámos atrás que um substantivo comum se aplica indistintamente a qualquer indivíduo duma mesma classe: não é, portanto, uma designação dessa classe. Por exemplo, 'estrela' não é sinónimo de 'classe das estrelas'. Deste modo, a expressão 'classe das estrelas' comporta-se como um substantivo próprio, visto que designa um único ente. *Na verdade, uma classe, embora formada de vários indivíduos, é considerada como um todo, isto é, como um indivíduo de novo tipo.* Este conceito será desenvolvido no número seguinte.

6. Relatividade dos conceitos de indivíduo (ou elemento) e de classe (ou conjunto). Universo lógico e tipos lógicos. Em matemática, as palavras 'elemento' e 'conjunto' são geralmente usadas como sinónimos de 'indivíduo' e 'classe', respectivamente. Assim, podemos dizer 'O Sol é um elemento do conjunto das estrelas', '5 é um elemento do conjunto dos números primos'.

Até aqui temos usado as palavras 'indivíduo' e 'classe', como se tivessem um significado *absoluto*. Ora, a verdade é que estas palavras têm muitas vezes um significado *relativo* e até *convencional*, isto é: um mesmo ente pode ser indivíduo (ou elemento) *em relação* a certos entes, e classe (ou conjunto) *em relação* a outros entes. Por exemplo, uma turma dum liceu é um *conjunto* de alunos, mas também é um *elemento* do conjunto das turmas do liceu; analogamente, uma recta é um *conjunto* de pontos, mas é também um *elemento* do conjunto de todas as rectas, etc.

Por isso, quando se quiser tratar um assunto qualquer com o rigor da matemática, é necessário, primeiro que tudo, precisar quais são os entes considerados nesse assunto como *indivíduos*. Chama-se *universo lógico*, *universo do discurso* ou simplesmente *universo* duma teoria o conjunto de todos os entes que são sempre considerados

como indivíduos nessa teoria (1). Por exemplo, em aritmética elementar, o universo é o conjunto de todos os números naturais (1, 2, 3, ...); em geometria o universo é o conjunto de todos os pontos (ou seja o espaço), etc.

É claro que, partindo de um dado universo, os conjuntos de indivíduos podem ser tomados como elementos de novos conjuntos (chamados conjuntos de *tipo 2*), estes por sua vez como elementos de outros conjuntos (chamados conjuntos de *tipo 3*) e assim sucessivamente. Por exemplo, suponhamos que o universo é o conjunto dos pontos, em geometria elementar, e seja a um ponto, C uma recta que passa por a e $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as rectas. Lembremos que *uma recta é um conjunto de pontos*; então, dizer que a recta C passa pelo ponto a significa que *a é um ponto do conjunto C* . Por sua vez, *C é um elemento do conjunto de todas as rectas*. Assim, teremos:

$$a \in C \quad \text{e} \quad C \in \mathcal{R}$$

Neste caso a é um indivíduo, C um conjunto e $\mathcal{R}$ um conjunto de conjuntos (ou conjunto de tipo 2). Também podemos dizer que C é um *conjunto de tipo 1* ou um *indivíduo de tipo 2*. Esta *noção de tipo lógico* foi introduzida por Bertrand Russell.

7. Dar ou definir um conjunto. Comecemos por alguns exemplos. Suponhamos que o universo é o conjunto dos números naturais e seja Pr o conjunto dos números primos. Como se sabe, diz-se que um número natural n é primo, quando é diferente de 1 e só é divisível por si mesmo e por 1. Com esta definição, dado um número natural n , *qualquer que ele seja*, estamos sempre habilitados a saber se n é ou não é primo, isto é, *se pertence ou não ao*

(1) O universo lógico também é, por vezes, chamado *domínio dos indivíduos ou conjunto fundamental da teoria*.

conjunto Pr ⁽¹⁾. Exprime-se este facto, dizendo que o conjunto Pr está *definido* (ou *dado*).

Suponhamos, agora, que o universo é o conjunto dos seres vivos e seja P o conjunto das plantas. Como se sabe, há seres vivos a respeito dos quais se hesita em dizer se são plantas ou animais. A verdade é que não existe uma *definição rigorosa* de 'planta'; por outras palavras: *o conjunto das plantas não está definido*. O mesmo aliás, se pode dizer a respeito do *conjunto dos animais*, do *conjunto das árvores*, do *conjunto das pessoas loiras*, do *conjunto dos homens calvos*, etc., etc. Vendo bem, desde que saímos do âmbito da matemática, a maior parte dos conjuntos de que falamos não estão definidos, mas apenas imperfeitamente delimitados.

Em resumo, diz-se que um conjunto A é *dado* ou *definido* num universo, quando se conhece uma definição que permita sempre, a respeito de qualquer indivíduo c, saber se $c \in A$ ou se $c \notin A$ (devendo verificar-se uma e uma só destas hipóteses).

Note-se que, em matemática, *definir* e *definir rigorosamente* são uma e a mesma coisa: o advérbio 'rigorosamente' torna-se neste caso um pleonasmo.

8. Conjuntos finitos e conjuntos infinitos. Não vamos aqui definir 'conjunto finito' nem 'conjunto infinito', mas apenas procurar esclarecer, por meio de alguns exemplos, o significado destas expressões.

Consideremos de novo o conjunto Pr (dos números primos). Nós podemos indicar vários números naturais que são primos (por exemplo, 2, 7, 13, 37, ...), mas não podemos mencioná-los *todos* porque o conjunto Pr é *infinito*. Outros exemplos de conjuntos infinitos: o próprio conjunto dos números naturais, o conjunto dos números

(¹) Se o número n é excessivamente grande, pode ser muito difícil, ou até praticamente impossível, mesmo com os actuais recursos da ciência (computadores electrónicos, etc.), acabar por saber se n é ou não primo.

pares, o conjunto dos quadrados perfeitos, o conjunto dos números primos maiores que 10^6 , etc., etc.

Pelo contrário, o conjunto dos números primos menores que 10^6 é *finito*. Outros exemplos: o conjunto dos cidadãos portugueses numa dada época, o conjunto dos grãos de trigo contidos num depósito, o conjunto dos átomos de hidrogénio contidos num balão, etc., etc.

Quando um conjunto é infinito, é impossível defini-lo indicando quais são os seus elementos. Logo, se um conjunto pode ser definido pela indicação dos seus elementos, esse conjunto não é infinito: é *finito*.

Mas há conjuntos finitos que, no estado actual da ciência, não podemos definir fazendo uma lista dos seus elementos: tal é, por exemplo, o caso do conjunto dos números primos menores que 10^{1000} .

Em escrita simbólica, é costume designar um conjunto finito (quando possível) pelas designações dos seus elementos, escritas entre chavetas e separadas por vírgulas. Assim, as expressões

$$\{\text{Sol, Terra, Lua}\} \quad , \quad \{1, 5, 40, 327\}$$

designam, respectivamente, o conjunto cujos elementos são o Sol, a Terra e a Lua, e o conjunto cujos elementos são os números 1, 5, 40 e 327. Se designarmos o primeiro conjunto por A e o segundo por B, teremos portanto:

$$\text{Sol} \in A \quad , \quad \text{Sirius} \notin A \quad , \quad 5 \in B \quad , \quad 2 \notin B \quad , \quad \text{etc.}$$

9. Valores lógicos das proposições. Dizemos que são *verdadeiras*, por exemplo, as proposições: 'A Terra é um planeta', 'Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil', ' $3 + 2 = 5$ ', etc., etc. Dizemos que são *falsas*, por exemplo, as proposições: 'A Lua é uma estrela', 'Dante escreveu a Odisseia', '9 é um número primo', etc.

Mas não é raro surgir uma proposição, a respeito da qual se diz que é ao mesmo tempo verdadeira e falsa ou então que é parcial-

mente verdadeira ou aproximadamente verdadeira ou duvidosa ou desprovida de sentido. Pode acontecer isto, por exemplo, a respeito de frases tais como 'A música de Strawinski é bela', 'Évora é uma cidade' ⁽¹⁾, 'Ava Gardner é uma estrela', 'Os satélites artificiais são astros', '25 é um número pequeno', 'A água é um líquido incolor', 'O calor dilata os corpos', 'Amanhã chove', etc., etc.

A dúvida suscitada por tais proposições provém geralmente, ou da nossa *ignorância* sobre o assunto, ou (o que por vezes é equivalente) da *imprecisão de linguagem*, resultante do uso de termos não definidos ou ambíguos, bem como da ausência de termos necessários para completar o sentido da frase. Ora, a matemática aspira ao rigor absoluto de linguagem, procurando evitar *termos imprecisos e frases incompletas*.

Nestas condições, a lógica matemática adopta como regras fundamentais do pensamento, os dois seguintes princípios (ou axiomas):

PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO. *Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.*

PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO. *Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro).*

Diz-se que o valor duma proposição é a *verdade* ou a *falsidade*, conforme essa proposição é verdadeira ou falsa. Os valores lógicos verdade e falsidade podem ser designados abreviadamente pelas letras V e F ou pelos símbolos 1 e 0, respectivamente. Assim, o que os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam é que:

Toda a proposição tem um, e um só, dos valores V, F.

Diz-se que duas proposições são *equivalentes* quando têm o mesmo valor lógico, isto é, quando são ambas verdadeiras ou

(1) Existe uma povoação na Beira com este nome.

ambas falsas. Para indicar que duas proposições são equivalentes, escreve-se entre ambas o sinal $=$. Exemplos:

7 é primo $=$ 2 é par

Lisboa é uma aldeia $=$ Marte é uma estrela

Assim, o sinal $=$ exprime apenas identidade entre os valores lógicos das proposições: não se refere propriamente ao significado das mesmas. Poderíamos dizer que uma proposição *representa* um dos valores V, F, embora não seja designação.

10. Operações lógicas sobre proposições. Quando pensamos, efectuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas operações lógicas. Estas estão submetidas a regras dum cálculo (chamado *cálculo proposicional*) semelhante ao da aritmética sobre números. Vamos estudar as operações lógicas fundamentais:

a) *Negação.* A mais simples operação lógica é a negação, que consiste em converter uma dada proposição numa outra, que é verdadeira se a primeira é falsa, e falsa se esta é verdadeira. A proposição assim obtida também se diz negação da primeira.

Na linguagem comum, a negação efectua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio 'não' ao verbo da proposição dada. Assim, por exemplo, a negação de 'O Sol é um planeta' é 'O Sol não é um planeta'. Mas já a negação de 'Todos os homens são inteligentes' é 'Nem todos os homens são inteligentes' e a de 'Nenhum homem é inteligente' é 'Algum homem é inteligente'.

Em lógica simbólica a negação é indicada antepondo um determinado sinal à proposição a negar. Para esse fim, usaremos o sinal ' $\sim$ ' que se pode ler 'não é verdade que'. Assim, a negação de '*Todos os homens são inteligentes*' escreve-se:

$\sim$ *Todos os homens são inteligentes*

o que se pode ler: '*Não é verdade que todos os homens são inteligentes*'. Analogamente, a negação da proposição ' $7 > 3$ ' (verdadeira) é a proposição (falsa):

$$\sim (7 > 3)$$

que se lê: '*Não é verdade que 7 é maior que 3*' ou simplesmente '*7 não é maior que 3*'.

b) *Conjunção*. Consideremos as duas seguintes proposições:

'O Sol é uma estrela' , 'A Lua é um satélite da Terra'.

Ambas são verdadeiras e é, portanto, verdadeira a proposição:

'O Sol é uma estrela e a Lua é um satélite da Terra'

que se obtém ligando as duas primeiras pela conjunção copulativa 'e'. Mas já é falsa a proposição:

'Vénus é uma estrela e a Lua é um planeta'

por não serem verdadeiras ambas as proposições ligadas pela palavra 'e' (embora seja verdadeira a segunda).

A palavra 'e' funciona pois aqui como sinal de uma operação lógica que, aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que será verdadeira se as proposições dadas forem ambas verdadeiras (e só nesse caso). A esta operação lógica dá-se o nome de *conjunção*; diz-se também que a proposição obtida é a conjunção das duas primeiras.

Em lógica simbólica, indicaremos a conjunção com o sinal ' $\wedge$ ' que se lê 'e'. Assim, poderemos escrever:

O Sol é uma estrela $\wedge$ a Lua é um satélite da Terra.

Analogamente, são verdadeiras, como é fácil ver, as proposições:

$$2 + 3 = 5 \wedge \sqrt{9} = 3 \quad , \quad \sqrt{8} \neq 3 \wedge \pi < 3,15$$

e falsas as proposições:

$$2 + 3 = 5 \wedge \pi > 4 \quad , \quad 3 < 1 \wedge \sqrt{-4} = -2$$

c) *Disjunção*. Consideremos as duas seguintes proposições (1):

‘Carlos é médico ou professor, ou ambas as coisas’.

‘Vamos ao teatro ou vamos dar um passeio, mas não as duas coisas’.

No primeiro caso está-se a indicar que uma, pelo menos, das proposições ‘Carlos é médico’, ‘Carlos é professor’, é verdadeira, podendo sê-lo ambas. No segundo caso está-se a precisar que uma e só uma das proposições ‘Vamos ao teatro’, ‘Vamos dar um passeio’ é verdadeira.

De um modo geral, quando, a respeito de duas proposições, se indica que uma delas, pelo menos, é verdadeira, forma-se uma nova proposição, que se chama *disjunção inclusiva* das primeiras. Quando se indica que uma, e só uma, das proposições consideradas é verdadeira, forma-se uma nova proposição, denominada *disjunção exclusiva* das primeiras. Também se dá o nome de *disjunção* (inclusiva ou exclusiva) à operação lógica que consiste em passar das proposições dadas para a sua disjunção (respectivamente inclusiva ou exclusiva).

Assim, a primeira proposição do exemplo anterior é a disjunção inclusiva das proposições ‘Carlos é médico’, ‘Carlos é professor’, enquanto a segunda é a disjunção exclusiva das proposições ‘Vamos ao teatro,’ ‘Vamos dar um passeio’.

Como se vê, a palavra ‘ou’ (que em gramática se chama conjunção disjuntiva) não permite, só por si, distinguir a disjunção inclusiva da exclusiva. Em latim, a palavra ‘vel’ tem aproximadamente o signi-

(1) Presume-se que estas frases são ditas em circunstâncias particulares, em que assumem um significado preciso e, portanto, um valor determinado.

ficado do 'ou' inclusivo; daí o adoptar-se, em lógica matemática, para a disjunção inclusiva, o sinal ' $\vee$ ' que, por comodidade, se lê simplesmente 'ou'. Assim, a primeira proposição do exemplo anterior pode escrever-se, agora, sem perigo de confusão:

Carlos é médico $\vee$ Carlos é professor.

Segundo esta convenção, serão verdadeiras, como é fácil ver, as proposições:

$$3 < 5 \vee 3 + 2 = 5 \quad , \quad \pi = 4 \vee \pi < 4$$

e falsas as proposições:

$$5 < 3 \vee 3 + 2 = 7 \quad , \quad \sqrt{-4} = -2 \vee \sqrt{10} = 3$$

Para a disjunção exclusiva usaremos o sinal ' $\dot{\vee}$ '.

Normalmente, quando se diz apenas 'disjunção' subentende-se que se trata da disjunção inclusiva.

11. As operações lógicas, consideradas como operações sobre valores lógicos. Já atrás se disse que designamos por 'V' o valor verdade e por 'F' o valor falsidade. Para determinar o valor lógico da negação, da conjunção e da disjunção, a partir dos valores lógicos das proposições dadas, podem utilizar-se as seguintes tabelas, habitualmente chamadas *tabelas de verdade*:

		$p \wedge q$		$p \vee q$	
p	$\sim p$	$p \backslash q$	q	$p \backslash q$	q
V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F

As duas últimas são tabelas de duas entradas, semelhantes à tábua pitagórica da multiplicação: por elas se vê imediatamente que o valor da conjunção é V, quando ambos os dados têm o valor V (e só nesse caso); e que o valor da disjunção é V, quando um pelo menos dos dados tem o valor V (e só nesse caso).

Estas tabelas induzem-nos a considerar a negação, a conjunção e a disjunção, não propriamente como operações sobre proposições, mas sim como operações sobre valores lógicos. Assim, o resultado da negação sobre os valores lógicos V e F será, respectivamente, F e V, ou seja, em símbolos:

$$\sim V = F \quad , \quad \sim F = V.$$

Analogamente, ter-se-á:

$$\begin{aligned} V \wedge V &= V & , & & V \wedge F &= F \wedge V = F & , & & F \wedge F &= F \\ V \vee V &= V & , & & V \vee F &= F \vee V = V & , & & F \vee F &= F \end{aligned}$$

Trata-se agora, muito simplesmente, de operações definidas num conjunto formado apenas por dois elementos (o valor V e o valor F), conjunto que podemos designar abreviadamente pela notação $\{V, F\}$.

Tais operações são definidas pelas anteriores tabelas, tabuadas dessas operações.

Este novo ponto de vista simplifica consideravelmente o estudo da lógica, como teremos ocasião de verificar.

12. As operações lógicas e as máquinas de calcular.

O funcionamento dos modernos computadores electrónicos baseia-se em grande parte na lógica matemática. Vamos apresentar os esquemas de circuitos eléctricos que efectuem as operações de conjunção, disjunção e negação, em máquinas de tipo simples, com base em electroímanes (nas máquinas electrónicas, muito mais rápidas, a ideia é essencialmente a mesma, sendo os electroímanes substituídos por válvulas electrónicas).

O *circuito de conjunção* (ou *circuito 'e'*) é esquematizado na fig. 1; o *circuito de disjunção* (ou *circuito 'ou'*) na fig. 2 e o circuito de negação (ou *circuito 'não'*) na fig. 3.

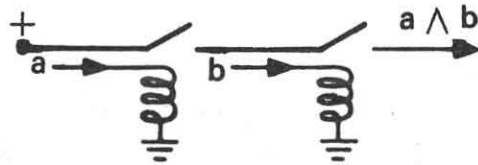


Fig. 1

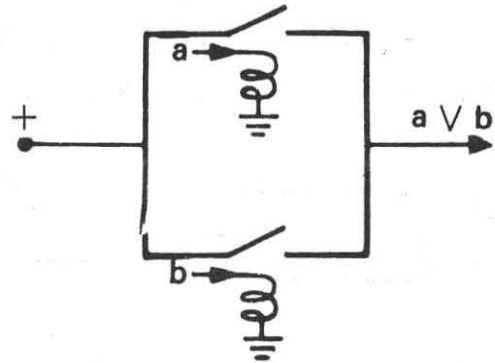


Fig. 2

O valor lógico V traduz-se, neste caso, por *passagem da corrente* e o valor F por *ausência de corrente*.

No primeiro esquema os interruptores estão postos *em série* e, portanto, só haverá corrente no circuito quando se lançar corrente nas duas bobinas *ao mesmo tempo*, fechando os dois interruptores que, de outro modo, se mantêm abertos por meio de molas. Assim, o resultado será V, quando, e só quando, *ambos* os dados *a* e *b* forem V: trata-se, pois, da conjunção.

No segundo esquema os interruptores estão postos *em paralelo* e, portanto, passará corrente no circuito quando (e só quando) se lançar corrente numa, pelo menos, das bobinas: trata-se, pois, da disjunção.

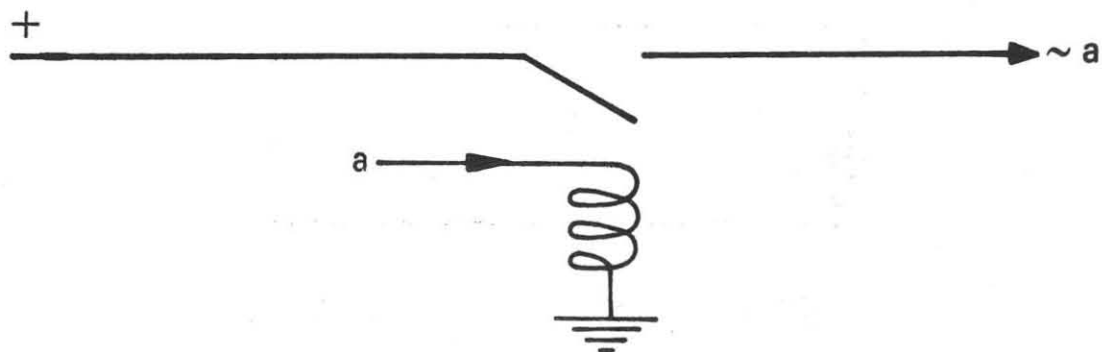
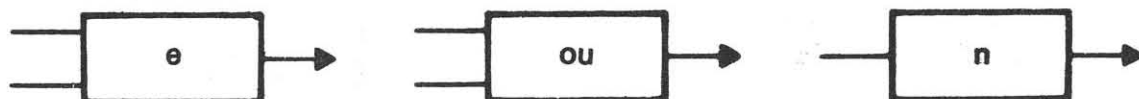


Fig. 3

Finalmente, no terceiro esquema o lançamento de corrente na bobina produz interrupção no circuito e existe uma mola que fecha automaticamente o interruptor quando não há corrente na bobina: trata-se pois da negação.

A partir destes três tipos de circuitos elementares, que podemos indicar respectivamente pelos símbolos:



é fácil construir vários circuitos que efectuem outras operações lógicas, mais ou menos complicadas, visto que todas, em última análise, se podem definir a partir daquelas três.

Por exemplo, a disjunção exclusiva, dada pela tabela junta, pode ser definida a partir da conjunção, da disjunção e da negação, por meio da fórmula:

$$a \dot{\vee} b$$

		b	
a \	b	V	F
	V	F	V
	F	V	F

$$a \dot{\vee} b = (a \wedge \sim b) \vee (b \wedge \sim a)$$

(isto é, verifica-se $a \dot{\vee} b$, quando se verifica só a ou só b).

De acordo com esta fórmula, apresentamos na fig. 4 o esquema de um circuito que efectua a *disjunção exclusiva*.

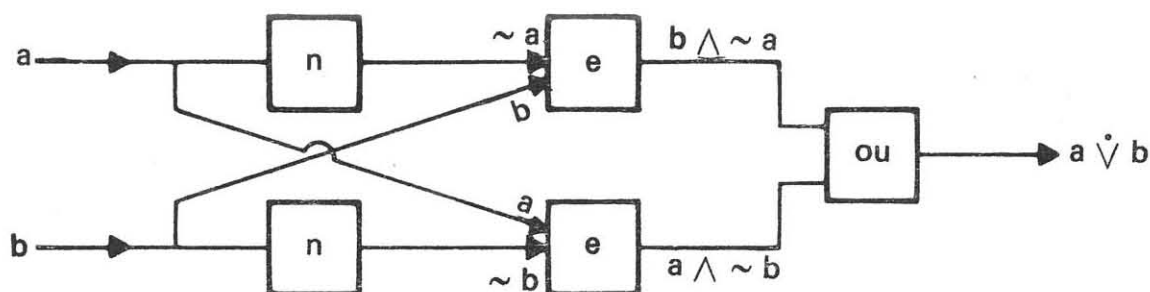


Fig. 4

Ainda se podem imaginar outros circuitos para efectuar esta operação, pois podemos defini-la de outros modos a partir das operações fundamentais, por exemplo segundo a fórmula:

$$a \dot{\vee} b = (a \vee b) \wedge \sim (a \wedge b)$$

(isto é, *verifica-se* $a \dot{\vee} b$, *quando se verifica* a *ou* b *mas não* a *e* b *ao mesmo tempo*).

Um dos tipos de problemas de lógica matemática postos pelos cérebros electrónicos, que exigem cada vez mais o concurso de especialistas na matéria, é o seguinte:

Dada uma expressão de cálculo proposicional, reduzi-la a uma expressão mínima, isto é, a uma expressão equivalente que requeira o mínimo de circuitos elementares ('e', 'ou' e 'não') e portanto o mínimo de consumo energético do cérebro.

Consegue-se isto, aplicando as propriedades das operações lógicas, que vamos estudar, e cuja utilidade fundamental é: ECONOMIA DE TEMPO, ECONOMIA DE PENSAMENTO, ECONOMIA DE ESFORÇO.

A título de exemplo observe-se que, das duas fórmulas anteriores para definir $a \dot{\vee} b$, a segunda é a mais económica, visto que poupa um circuito 'não'.

13. Propriedades da conjunção e da disjunção. Consideremos a seguinte proposição:

'Carlos estuda e Pedro ouve música ou lê'.

É óbvio que esta proposição equivale à seguinte:

'Carlos estuda e Pedro ouve música, ou Carlos estuda e Pedro lê'.

Usando as letras a , b , c , respectivamente, como abreviaturas das proposições *'Carlos estuda'*, *'Pedro ouve música'*, *'Pedro lê'*, a referida equivalência é traduzida pela fórmula:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

É evidente que esta fórmula é verdadeira, *quaisquer que sejam as proposições nos lugares das letras*. Exprime-se este facto, dizendo que *a conjunção é distributiva a respeito da disjunção*. Esta maneira de dizer foi adoptada por analogia com o que sucede a respeito dos números; neste caso *a multiplicação é distributiva a respeito da adição*, isto é, tem-se:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

sendo a , b , c números quaisquer.

Muitas vezes, para comodidade de linguagem, a conjunção também é chamada *produto lógico*, escrevendo-se então $p \cdot q$ (ler ' p vezes q '), em vez de $p \wedge q$. Por seu turno, a disjunção é chamada *soma lógica*, escrevendo-se $p + q$ (ler ' p mais q ') em vez de $p \vee q$. Neste caso, os valores lógicos V e F costumam ser designados pelos símbolos 1 e 0 . Então o produto lógico coincide com o produto usual no conjunto $\{0, 1\}$, mas o mesmo não sucede com a soma lógica, visto que $V \vee V = V$ ou seja $1 + 1 = 1$.

Note-se que *a disjunção também é distributiva a respeito da conjunção*:

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Por exemplo, a proposição

'Ou chove ou faz vento e frio'

equivale a afirmar as duas proposições:

'Chove ou faz vento' e 'Chove ou faz frio'.

Pelo contrário, no caso dos números, a adição não é distributiva a respeito da multiplicação, isto é, não se tem geralmente

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

Por exemplo, $3 + (2 \cdot 5) \neq (3 + 2) \cdot (3 + 5)$.

Notemos, desde já, o partido que se pode tirar destas propriedades da conjunção e da disjunção nos cérebros electrónicos. Por exemplo, traduzida à letra, a expressão $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ conduz ao esquema da fig. 5, enquanto a expressão equivalente $a \wedge (b \vee c)$ conduz ao esquema da fig. 6: *esta é pois mais económica, poupando um circuito 'e'.*

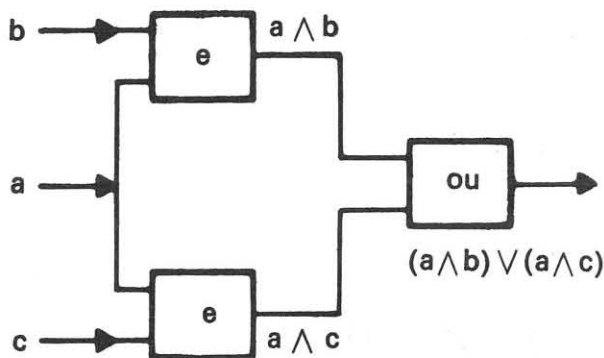


Fig. 5

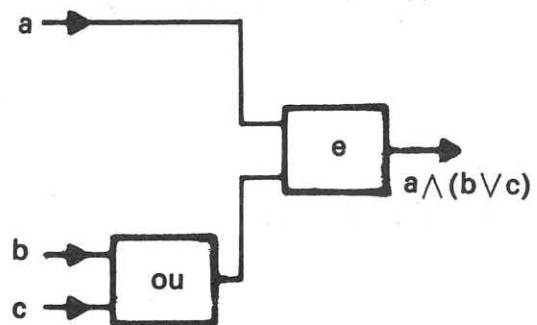


Fig. 6

Mas há outras propriedades da adição e da multiplicação sobre números que se estendem à disjunção e à conjunção (sobre proposições ou sobre valores lógicos). Para fazer uma lista das propriedades da conjunção e da disjunção, vamos supor que as letras, a, b, c designam qualquer dos valores lógicos V, F.

A) *Propriedades da conjunção*

1. A conjunção é *comutativa*, isto é, tem-se sempre:

$$a \wedge b = b \wedge a$$

2. A conjunção é *associativa*, isto é, tem-se sempre:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

3. O elemento V é tal que:

$$a \wedge V = a, \text{ qualquer que seja } a \text{ (V ou F)}$$

4. O elemento F é tal que:

$$a \wedge F = F, \text{ qualquer que seja } a$$

B) *Propriedades da disjunção*

- 1'. A disjunção é *comutativa*:

$$a \vee b = b \vee a$$

- 2'. A disjunção é *associativa*:

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

- 3'. O elemento F é tal que:

$$a \vee F = a, \text{ qualquer que seja } a$$

- 4'. O elemento V é tal que:

$$a \vee V = V, \text{ qualquer que seja } a$$

C) *Propriedades mistas (da conjunção e da disjunção)*

5. A conjunção é *distributiva a respeito da disjunção*:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

5'. A disjunção é *distributiva a respeito da conjunção*:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

A demonstração destas propriedades pode reduzir-se a uma simples verificação, utilizando as tabuadas da conjunção e da disjunção, e considerando todas as substituições possíveis das letras a , b , c por valores lógicos. Com efeito, como cada letra só pode ter dois valores (V e F), tais *substituições são em número finito*. Assim, por exemplo, a propriedade comutativa da conjunção resulta da respectiva tabuada, notando que:

- 1) se $a = V$ e $b = V$, vem $a \wedge b = b \wedge a = V$;
- 2) se $a = V$ e $b = F$, vem $a \wedge b = b \wedge a = F$;
- 3) se $a = F$ e $b = V$, vem $a \wedge b = b \wedge a = F$;
- 4) se $a = F$ e $b = F$, vem $a \wedge b = b \wedge a = F$.

Analogamente, para a propriedade associativa:

$$\begin{aligned} &1) \text{ se } a = V, b = V \text{ e } c = V, \text{ vem} \\ (a \wedge b) \wedge c &= (V \wedge V) \wedge V = V \text{ e } a \wedge (b \wedge c) = V \wedge (V \wedge V) = V, \\ &\text{portanto } (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2) \text{ se } a = V, b = F \text{ e } c = V, \text{ vem} \\ (a \wedge b) \wedge c &= (V \wedge F) \wedge V = F \text{ e } a \wedge (b \wedge c) = V \wedge (F \wedge V) = F, \\ &\text{portanto } (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c); \end{aligned}$$

e assim por diante (neste caso o número de substituições possíveis é 8).

Deste modo, adquirimos a *certeza* de que todas as referidas propriedades são válidas.

Note-se que, usando as notações $a \cdot b$, $a + b$, 1 e 0 (em vez das notações $a \wedge b$, $a \vee b$, V e F) as propriedades 3, 4, 3', 4', relativas a V e F tomam respectivamente a forma:

$$a \cdot 1 = a \quad , \quad a \cdot 0 = 0 \quad , \quad a + 0 = a \quad , \quad a + 1 = 1,$$

sendo a qualquer dos valores lógicos. Destas propriedades, só a última não é verificada no caso da adição e da multiplicação usuais sobre números.

As propriedades 3, 4, 3' e 4' exprimem-se respectivamente dizendo: V é *elemento neutro* da conjunção, F é *elemento absorvente* da conjunção, F é *elemento neutro da disjunção*, V é *elemento absorvente da disjunção*.

As propriedades da conjunção e da disjunção revelam a harmonia das leis do pensamento. Olhando para a lista anterior, um facto chama logo a atenção:

As propriedades da conjunção e da disjunção são formalmente idênticas, isto é, passa-se duma para as outras apenas mudando ' $\wedge$ ' em ' $\vee$ ' e ' $\vee$ ' em ' $\wedge$ '.

Neste facto e em outros que serão oportunamente apontados (que não se verificam no caso das operações sobre números) consiste o PRINCÍPIO DA DUALIDADE LÓGICA.

14. Propriedades da negação; suas relações com a conjunção e a disjunção. A propriedade mais simples da negação é a PROPRIEDADE DA DUPLA NEGAÇÃO:

$$\sim \sim a = a \quad , \quad \text{qualquer que seja } a$$

(isto é, a dupla negação equivale à afirmação).

Notemos, agora, que a negação pode ser definida por meio da seguinte propriedade da conjunção e da disjunção:

Qualquer que seja o valor lógico a existe sempre um valor lógico x , e um só, tal que

$$a \wedge x = F \text{ e } a \vee x = V$$

É claro que este valor x é precisamente o *contrário* de a ou seja $\sim a$, igual a F se $a = V$, igual a V se $a = F$. Teremos pois:

$$a \wedge \sim a = F, \quad a \vee \sim a = V, \quad \text{qualquer que seja } a.$$

Estas fórmulas, aplicadas a proposições, traduzem sob nova forma os princípios da lógica bivalente:

PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO. *Dizer que uma proposição é verdadeira e falsa ao mesmo tempo é sempre falso.*

PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO. *Dizer que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.*

Finalmente, é fácil deduzir das tabelas de verdade as duas seguintes propriedades:

$$\sim (a \wedge b) = \sim a \vee \sim b, \quad \sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$$

Supondo que nos lugares de a e b estão proposições, estas fórmulas exprimem as duas seguintes leis do pensamento, chamadas *primeiras leis de DE MORGAN*:

I. *Negar que duas dadas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que uma, pelo menos, é falsa.*

II. *Negar que uma, pelo menos, de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.*

Por exemplo, a negação de 'É inteligente e estuda' equivale a 'Não é inteligente *ou* não estuda'; a negação de 'É médico ou professor' equivale a 'Não é médico e não é professor'.

Estas propriedades podem exprimir-se ainda dizendo que *a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção*. Assim, as leis de De Morgan explicam o já referido PRINCÍPIO DE DUALIDADE LÓGICA e mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação:

$$a \vee b = \sim (\sim a \wedge \sim b) \quad , \quad a \wedge b = \sim (\sim a \vee \sim b)$$

Quer isto dizer que um cérebro electrónico poderia funcionar apenas com dois tipos de circuitos elementares: circuitos de conjunção e de negação, ou circuitos de disjunção e de negação.

15. Implicação material e dedução. Consideremos, por exemplo, a frase:

'Se Carlos não telefona, vem à hora marcada'.

Trata-se aqui duma proposição (1) que relaciona os valores lógicos (ainda não conhecidos) das duas proposições:

- a) 'Carlos não telefona';
- b) 'Carlos vem à hora marcada'

de tal modo, que, se a primeira for verdadeira a segunda também

(1) Supõe-se, como nos exemplos anteriores, que esta frase é dita em condições particulares que lhe conferem um significado preciso.

será verdadeira, mas, se a primeira for falsa, a segunda pode ser verdadeira ou falsa (está subentendido: 'se Carlos telefona, pode vir ou não à hora marcada'). Exprime-se este facto dizendo que a proposição a) *implica* a proposição b) e escrevendo:

Carlos não telefona $\Rightarrow$ Carlos vem à hora marcada.

Dum modo geral, se no lugar das letras p, q estiverem duas proposições, escreveremos

$$p \Rightarrow q \quad (\text{ler 'p implica q'}),$$

quando, e só quando, se der um dos seguintes casos: 1) a primeira é verdadeira e a segunda também; 2) a primeira é falsa e a segunda é verdadeira; 3) a primeira é falsa e a segunda é falsa. Na fórmula $p \Rightarrow q$ a primeira proposição diz-se *antecedente* e a segunda *consequente*.

Deste modo, o sinal $\Rightarrow$ traduz uma *relação* entre os valores lógicos, tendo-se por definição:

$$V \Rightarrow V, \quad F \Rightarrow V, \quad F \Rightarrow F$$

mas não $V \Rightarrow F$. Por outros termos: as fórmulas $V \Rightarrow V$, $F \Rightarrow V$ e $F \Rightarrow F$ são proposições verdadeiras, enquanto a fórmula $V \Rightarrow F$ é uma proposição falsa; isto é:

$$(V \Rightarrow V) = V, \quad (F \Rightarrow V) = V$$

$$(F \Rightarrow F) = V, \quad (V \Rightarrow F) = F$$

Mas é claro que, nestas condições, também se pode dizer que

o sinal $\Rightarrow$ representa uma operação sobre valores lógicos (ou sobre proposições), a qual é definida pela seguinte tabuada:

$$a \Rightarrow b$$

a \ b	b	
	V	F
V	V	F
F	V	V

Em qualquer dos casos, a relação ou operação lógica assim definida é chamada *implicação*. Mas convém, desde já, notar que este significado da palavra 'implicação' se afasta, muitas vezes, do significado usual. Por exemplo, nós podemos dizer que a proposição '7 é ímpar' implica a proposição 'Lisboa é uma cidade', e escrever:

$$7 \text{ é ímpar} \Rightarrow \text{Lisboa é uma cidade}$$

visto que ambas as proposições são verdadeiras e $V \Rightarrow V$ por definição. Analogamente, podemos escrever:

$$2 + 3 = 7 \Rightarrow \text{Pedro Nunes descobriu o Brasil}$$

visto que $F \Rightarrow F$, por definição. Mas isto não significa, de modo nenhum, que o facto de Lisboa ser uma cidade *se deduz* do facto de 7 ser ímpar, ou que a proposição 'Pedro Nunes descobriu o Brasil' (falsa) é uma consequência da proposição ' $2 + 3 = 7$ ' (igualmente

falsa). O que se afirma unicamente é uma relação entre os valores lógicos das proposições, de acordo com a tabela anterior.

Para evitar confusões com o significado usual das palavras 'implica' e 'implicação', a referida relação lógica é muitas vezes chamada '*implicação material*' e o sinal ' $\Rightarrow$ ' é traduzido por '*implica materialmente*'.

Todavia, a implicação material só tem geralmente interesse quando se aplica a proposições cujo valor lógico ainda não é conhecido. Ora, neste caso, corresponde exactamente ao conceito usual de implicação.

É isto o que sucede, por exemplo, com a frase anterior 'Se Carlos não telefona, vem à hora marcada'. Entende-se que os valores lógicos das proposições 'Carlos não telefona' e 'Carlos vem à hora marcada' ainda são ignorados: sabe-se apenas que a primeira implica materialmente a segunda.

Vejamos outro exemplo. Consideremos a proposição:

'Se existem plantas em Marte, existem seres vivos em Marte'. Esta é evidentemente verdadeira ⁽¹⁾, embora não conheçamos os valores lógicos das proposições 'Existem plantas em Marte', 'Existem seres vivos em Marte'; o que sabemos apenas é que a primeira implica materialmente a segunda:

Existem plantas em Marte $\Rightarrow$ Existem seres vivos em Marte

Mas, precisamente porque se desconhecem os valores das duas referidas proposições, a implicação material corresponde à ideia normal da implicação.

Seja agora a proposição:

'Se Marte tem atmosfera, existem seres vivos em Marte'.

(1) Admite-se evidentemente que a classe das plantas e a classe dos seres vivos estão definidas mesmo fora da terra. Em caso contrário as proposições não teriam sentido.

Está-se, pois, a afirmar o seguinte:

'Marte tem atmosfera $\Rightarrow$ Existem seres vivos em Marte'.

Mas, agora, não sabemos sequer se a implicação é verdadeira ou falsa: será falsa se Marte *tem* atmosfera e *não* existem seres vivos em Marte; será verdadeira, na hipótese contrária.

Outro exemplo ainda. É bem fácil determinar directamente o valor lógico de cada uma das proposições:

' $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6', ' $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3'.

Porém, mesmo antes de o saber, já podemos afirmar que a primeira implica materialmente a segunda, isto é:

$2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6 $\Rightarrow$ $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3

visto que, como se prova em aritmética, *todo o múltiplo de 6 é múltiplo de 3*. Assim, mais uma vez, a implicação material concorda com a implicação no sentido usual, em virtude das razões atrás apontadas.

Nestes casos, o sinal $\Rightarrow$, que geralmente se lê 'implica', substitui com propriedade a palavra 'se' (conjunção condicional), anteposta à proposição antecedente. Algumas vezes, para salientar a implicação, em linguagem comum, antepõe-se a palavra 'se' à proposição antecedente e a palavra 'então' à proposição consequente. Assim:

Se $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6, *então* $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3.

Ainda a propósito deste exemplo, note-se que, se efectuarmos os cálculos, vemos que a proposição antecedente é afinal verdadeira. *Conclui-se então, sem necessidade de mais cálculos, que a proposição consequente também é verdadeira.*

De um modo geral, quando, dadas duas proposições A e B, se consegue averiguar, por um lado, que $A \Rightarrow B$ e, por outro lado, que A é verdadeira, conclui-se imediatamente que B também é ver-

dadeira. Nisto mesmo consiste a *dedução lógica* ou *raciocínio dedutivo*, numa das suas formas mais simples e mais frequentes, tanto em matemática como na vida corrente.

O esquema do raciocínio é o seguinte:

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow B & (\text{premissa maior}) \\ A & (\text{premissa menor}) \\ \hline \therefore B & (\text{conclusão}) \end{array}$$

Aqui, o sinal $\therefore$ lê-se 'logo' e indica que a proposição B se *deduz logicamente* das duas anteriores. Estas são chamadas *premissas* do raciocínio (respectivamente *premissa maior* e *premissa menor*), enquanto a última é chamada *conclusão*. Na lógica tradicional um raciocínio deste tipo é denominado *silogismo condicional*, *regra de dedução* ou *modus ponens*. Algumas vezes, a premissa menor é precedida da palavra 'ora', outras vezes é escrita simplesmente. Exemplos:

{ Se $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6, $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3.
 { Ora $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6.
 { Logo $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3.

{ Se este animal é um peixe, tem guelras.
 { Ora este animal é um peixe.
 { Logo este animal tem guelras.

{ Se este livro tem uma folha dobrada, pertence-me.
 { Este livro tem uma folha dobrada.
 { Logo este livro pertence-me.

Note-se que uma dedução pode estar certa sem que as premissas sejam necessariamente verdadeiras. É óbvio que o facto de uma dedução ser correcta não garante a verdade da conclusão.

Mas também pode haver deduções erradas. As deduções erradas de tipo elementar são chamadas *paralogismos*. Um tipo de paralogismo bastante frequente é o que se indica no seguinte esquema:

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

Exemplo: 'Se este animal é um peixe, tem guelras. Ora este animal tem guelras. Logo é um peixe'.

Recordemos que, muitas vezes, para saber se uma conta está certa, recorremos à prova dos nove. Na realidade, estamos a seguir um paralogismo, pois a prova pode dar certa, estando a conta errada: o mais que podemos dizer é que, se a conta está certa, a prova tem de dar certa, e que, se a prova dá certa, é *muito provável* que a conta não esteja errada.

15a. Propriedades da implicação; relações desta com as outras operações lógicas. Novos tipos de silogismo. Sejam a , b , c valores lógicos quaisquer. Então é fácil verificar, usando a tabuada da implicação, que:

$$\text{Se } a \Rightarrow b \text{ e } b \Rightarrow c, \text{ então } a \Rightarrow c$$

ou seja, usando símbolos:

$$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$$

Exprime-se este facto, dizendo que a implicação é uma *relação transitiva*.

Esta propriedade, aplicada a proposições, conduz a um novo tipo de silogismo, descrito pelo seguinte esquema:

$$\left. \begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \end{array} \right\} \text{premissas}$$

$$\therefore A \Rightarrow C \quad (\text{conclusão})$$

Exemplo: 'Se estudares, terás boas notas. Se tiveres boas notas, darás alegria a teus pais. Portanto, se estudares, darás alegria a teus pais'.

Usando as tabuadas da implicação, da disjunção e da negação, que em seguida reproduzimos:

$a \Rightarrow b$			$a \vee b$				
a \ b	b		a \ b	b		a	$\sim a$
	V	F		V	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V

é fácil verificar que se tem sempre:

$$(a \Rightarrow b) = b \vee \sim a$$

Como se vê, esta propriedade permite exprimir a implicação na disjunção e na negação (o que facilmente permite traduzi-la num esquema de circuitos). Aplicada a proposições, a fórmula anterior pode traduzir-se do seguinte modo:

Dizer que uma proposição implica outra proposição equivale a dizer que ou a segunda é verdadeira ou a primeira é falsa.

Por exemplo, dizer:

'Se este animal é um peixe, tem guelras'

equivale a dizer:

'Ou este animal tem guelras ou não é peixe' (1).

Reciprocamente, a disjunção pode exprimir-se na implicação e na negação, como é fácil verificar:

$$a \vee b = \sim a \Rightarrow b.$$

Assim, afirmar que uma, pelo menos, de duas proposições é verdadeira, equivale a afirmar que, se uma delas é falsa, a outra é verdadeira.

Esta propriedade dá lugar a um novo tipo de raciocínio dedutivo, chamado *silogismo disjuntivo*, que é descrito pelo esquema:

$$\left. \begin{array}{l} A \vee B \\ \sim A \end{array} \right\} \text{premissas}$$

$$\therefore B \quad (\text{conclusão})$$

Exemplo: 'Ou ele é mentiroso ou foi enganado. Ora ele não é mentiroso. Logo foi enganado'.

Aliás, podemos dizer a respeito da disjunção o que já tínhamos dito a respeito da implicação material: *só tem geralmente interesse, quando se desconhece o valor das proposições às quais se aplica* (estas dizem-se então *hipóteses*). Quando por exemplo escrevemos $3 \leq \pi$, estamos a afirmar que $3 < \pi$ ou $3 = \pi$, o que é verdade; mas, como

(1) Lembramos que há peixes (dipnóicos) que respiram por guelras e pulmões.

já sabemos que $3 < \pi$, parece inútil a disjunção. Analogamente no caso em que se escreve $3 \leq 3$, etc.

As propriedades anteriores conduzem a esta outra:

Dizer que uma proposição implica outra equivale a dizer que, se a segunda é falsa, a primeira também é falsa.

Isto é, simbolicamente:

$$(A \Rightarrow B) = (\sim B \Rightarrow \sim A)$$

Nesta propriedade (que pode também ser verificada directamente), baseia-se o tipo de silogismo chamado *regra de conversão* ou *modus tollens*:

$$\begin{array}{rcl} A \Rightarrow B & \left. \vphantom{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \sim B \end{array}} \right\} & \text{premissas} \\ \sim B & & \\ \hline \therefore \sim A & & \text{(conclusão)} \end{array}$$

Exemplo: 'Se este animal é um peixe, tem guelras. Ora este animal não tem guelras. Logo não é um peixe'.

Por sua vez, da fórmula $(A \Rightarrow B) = (B \vee \sim A)$ e das leis de De Morgan, deduz-se:

$$\sim (A \Rightarrow B) = A \wedge \sim B$$

isto é: *dizer que A não implica B equivale a dizer que A é verdadeira e B é falsa.*

Mas há ainda outras propriedades que relacionam a implicação com a conjunção e com a disjunção. Assim, é fácil ver que:

1. $A \wedge B \Rightarrow A$ 1'. $A \Rightarrow A \vee B$
2. Se $P \Rightarrow A$ e $P \Rightarrow B$, então $P \Rightarrow A \wedge B$
- 2'. Se $A \Rightarrow P$ e $B \Rightarrow P$, então $A \vee B \Rightarrow P$

As propriedades 1 e 1' dão lugar a *silogismos com uma só premissa*, como por exemplo este: ' π é menor que 4; logo π é menor ou igual a 4'.

As propriedades 2 e 2' dão lugar a silogismos tais como:

'Se estudares, darás alegria a teus pais. Se estudares, serás recompensado. Logo, se estudares, darás alegria a teus pais e serás recompensado'.

'Se o ladrão sai pela porta, é apanhado. Se foge para o telhado, é apanhado. Logo, se sai pela porta *ou* foge para o telhado, é apanhado'.

16. Equivalência material. Em vez de escrever $A \Rightarrow B$, podemos também escrever, com o mesmo significado, $B \Leftarrow A$. O sinal $\Leftarrow$, que representa a *relação inversa da implicação*, pode ler-se 'é implicado por', 'se', 'desde que', 'contanto que', etc. Assim, a frase:

'Vem, se não telefona'

pode escrever-se

'Vem $\Leftarrow$ não telefona'.

Suponhamos que se tem ao mesmo tempo

$$A \Rightarrow B \text{ e } A \Leftarrow B,$$

estando as letras a indicar proposições quaisquer. Então é claro que as proposições são *equivalentes*, isto é, são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Para exprimir este facto, temos escrito até aqui $A = B$, em que o sinal $=$ está a exprimir identidade entre os valores lógicos das proposições. Porém, neste caso particular, a relação de identidade chama-se *equivalência material* e convém muitas vezes representá-la

pelo sinal $\Leftrightarrow$, que se lê 'equivale a'. Tal como a implicação, a equivalência material é ao mesmo tempo uma relação e uma operação. Tem-se, com efeito:

$$(V \Leftrightarrow V) = V, \quad (F \Leftrightarrow F) = V$$

$$(V \Leftrightarrow F) = F, \quad (F \Leftrightarrow V) = F$$

donde, a tabuada:

$$x \Leftrightarrow y$$

		y	
		V	F
x	V	V	F
	F	F	V

Desde logo se vê que, ao contrário do que sucede com a implicação, a equivalência é *simétrica* (ou *comutativa*), isto é:

$$(x \Leftrightarrow y) = (y \Leftrightarrow x).$$

Esta operação reduz-se às anteriores, de acordo com qualquer das fórmulas:

$$(a \Leftrightarrow b) = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$$

$$(a \Leftrightarrow b) = (a \wedge b) \vee (\sim a \wedge \sim b)$$

Esta última fórmula mostra que a equivalência é o contrário da disjunção exclusiva, visto que:

$$\sim (a \Leftrightarrow b) = \sim (a \wedge b) \wedge (a \vee b) = a \dot{\vee} b$$

É fácil assim imaginar uma associação de circuitos elementares que efectue esta operação.

Tal como a implicação, a equivalência material de duas proposições só tem geralmente interesse enquanto se aplica a proposições cujo valor lógico é ignorado. Neste caso, o sinal $\Leftrightarrow$ pode traduzir-se pela expressão 'se e só se'. Por exemplo, a proposição 'Este animal é um peixe, se e só se tem guelras e escamas' exprime equivalência entre duas proposições, das quais se ignora ainda o valor lógico. Poderíamos também escrever:

'Este animal é um peixe $\Leftrightarrow$ tem guelras e escamas'

Dizem-se *bicondicionais* as proposições de equivalência como a anterior.

CONVENÇÃO. Como abreviatura da expressão 'se e só se' escreveremos 'sse'.

Vimos atrás que se tem sempre $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$. Para a equivalência virá então:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\sim A \Leftrightarrow \sim B)$$

isto é: *a equivalência de duas proposições equivale sempre à equivalência das suas negações.*

Assim, a equivalência $A \Leftrightarrow B$ fornece quatro formas correctas de silogismo: podemos deduzir B de A, A de B, $\sim A$ de $\sim B$ e $\sim B$ de $\sim A$:

$\frac{A \Leftrightarrow B}{A} \quad \quad \quad \frac{A \Leftrightarrow B}{B}$	$\frac{A \Leftrightarrow B}{\sim A} \quad \quad \quad \frac{A \Leftrightarrow B}{\sim B}$
B	A

Exemplos:

'Este triângulo tem os lados iguais, sse tem os ângulos iguais. Ora este triângulo tem os lados iguais. Logo tem os ângulos iguais'.

'Este animal é um peixe, sse tem escamas e guelras. Ora este animal não é peixe. Logo não tem escamas ou não tem guelras'.

17. Polissilogismos. Dedução e indução. Teorias dedutivas. Consideremos as seguintes proposições:

- 1) Se o ladrão saiu pela porta da rua, foi apanhado.
- 2) Se o ladrão saiu pela varanda do quintal, foi apanhado.
- 3) Logo, se o ladrão saiu pela porta da rua ou pela varanda do quintal, foi apanhado.
- 4) Mas, se o ladrão foi apanhado, está preso.
- 5) Ora o ladrão não está preso.
- 6) Logo não foi apanhado.
- 7) Logo não saiu pela porta da rua nem pela varanda do quintal.
- 8) Mas, se o ladrão não saiu pela porta da rua nem pela varanda do quintal, está escondido.
- 9) Logo o ladrão está escondido.

Estas proposições formam uma *cadeia de silogismos* (ou um *polissilogismo*), isto é, uma sucessão de silogismos, em que as conclusões de uns servem de premissas a outros. Assim, o primeiro silogismo tem 1) e 2) por premissas e 3) por conclusão; o segundo tem 4) e 5) por premissas e 6) por conclusão; o terceiro tem 3) e 6) por premissas e 7) por conclusão; o quarto e último tem 7) e 8) por premissas e 9) por conclusão.

Poderíamos também dizer que silogismo é *dedução imediata*, enquanto polissilogismo é *dedução mediata*.

Dum modo geral, a dedução (ou *raciocínio dedutivo*) constitui o método característico da matemática, para a obtenção de novos

conhecimentos. Este método assemelha-se um pouco ao que é usado pelos detectives para descobrir a verdade num dado acontecimento envolvido em mistério.

À *dedução* contrapõe-se a *indução*, que constitui o método fundamental usado pelas ciências de observação e de experiência, para o estabelecimento de *leis*, isto é, de factos científicos. Por exemplo, a lei:

'Todo o peixe tem vértebras'

não é demonstrada como um teorema de matemática: *foi estabelecida por indução*. Quer isto dizer o seguinte: como *todos os peixes observados têm vértebras*, conclui-se que será sempre assim em *todos os peixes que vierem a aparecer*. A indução é também chamada *raciocínio indutivo*, mas é evidente que não tem a segurança do raciocínio dedutivo; na realidade assemelha-se a um paralogismo: *conclui-se do particular para o geral, o que, segundo a lógica dedutiva, não é lícito*. Daí o carácter *contingente* das referidas leis, em contraste com o carácter de *certeza absoluta* que se atribui às deduções da matemática.

Se, porventura, aparecer um peixe sem vértebras, dir-se-á que este caso é uma *anomalia*, uma *monstruosidade* que não conta e então a lei anterior será corrigida, dizendo 'Todo o peixe normal tem vértebras' ou 'Em condições normais, todo o peixe tem vértebras'. O carácter contingente das leis assim estabelecidas é bem expresso pelo aforismo popular: *não há regra sem excepção*.

Nas ciências físico-químicas encontramos a cada passo exemplos análogos. Por exemplo, a lei:

'O volume dum gás diminui com a pressão e aumenta com a temperatura',

foi estabelecida por indução, a partir dum grande número de casos em que se verificou. Mas quem nos garante que, em casos ou circuns-

tâncias muito especiais, não deixe de verificar-se? Aliás, trata-se apenas duma *lei qualitativa*, pouco precisa. Em experiências de maior precisão, Mariotte e Gay-Lussac chegaram à *lei quantitativa* que tem o seu nome e se estuda em física. Porém, é sabido que *nenhum* gás segue rigorosamente essa lei, também conhecida por *lei dos gases perfeitos*, porque se convencionou chamar *gás perfeito* a um *gás ideal* que a seguisse rigorosamente. Assim, não existem gases perfeitos, mas apenas gases que se aproximam mais ou menos desse caso ideal,

Tornando ao raciocínio dedutivo, observemos que, quando um facto é estabelecido por dedução, é deduzido de outro ou de outros anteriormente estabelecidos. Estes, por sua vez, podem ter sido deduzidos de factos precedentes. Mas é evidente que tal processo há-de ter um princípio, isto é, tem de haver *premissas iniciais*, que não são deduzidas de outros factos. E, *se não deduzidas*, são necessariamente estabelecidas *por outro método*:

- ou por *informação directa*
- ou por *indução*
- ou por *intuição*
- ou por *conjectura*.

A intuição é uma espécie de visão mental que nos faculta o conhecimento directo dos factos. Na realidade, trata-se muitas vezes duma indução efectuada de maneira mais ou menos inconsciente, a partir de um grande número de experiências quotidianas. Tal é o caso da *intuição geométrica*, que nos faz ver, por exemplo, que *duas rectas dum plano perpendiculares a uma terceira são sempre paralelas entre si*.

A conjectura é um método muito usado em física, principalmente em física atómica: os factos observados levam a imaginar certas *hipóteses*, que os expliquem. Essas hipóteses não são directamente verificáveis pela experiência, mas apenas indirectamente, por factos que delas possam ser deduzidas. Mais uma vez estamos perante uma espécie de paralogismo: as conclusões podem estar certas, mas as premissas erradas.

Seja porém como for, as premissas iniciais só podem ser estabelecidas por qualquer dos processos indicados e têm, portanto, carácter contingente. Diz-se então que o método usado é empírico, por oposição ao método dedutivo, também denominado racional (1).

Uma *teoria dedutiva* consiste precisamente num sistema de proposições que se deduzem, por cadeias de silogismos, a partir de proposições de origem empírica. Estas são chamadas *axiomas* ou *postulados*, enquanto as proposições que delas se deduzem são chamadas *teoremas*.

Nos axiomas figuram termos cujo significado não é definido logicamente, mas apenas dado empiricamente (*termos primitivos*). A partir desses, outros vão sendo introduzidos por definições (*termos derivados*). Por exemplo, na geometria de Euclides, os termos 'ponto', 'recta', etc., são geralmente tomados como termos primitivos. Os termos 'circunferência', 'polígono', etc., são termos derivados.

Cada teorema é demonstrado (isto é, deduzido), a partir de axiomas, de definições ou de outros teoremas já demonstrados. Mas o *rigor matemático* diz respeito à maneira como se define ou se demonstra e não àquilo que se demonstra. O mais que se pode dizer é que os *teoremas são implicados pelos axiomas e que, portanto, são verdadeiros na medida em que o são os axiomas*.

Por exemplo, no caso da geometria, os axiomas só *aproximadamente* são verificados pelos entes a que, na prática, chamemos pontos, rectas, etc. Falando com mais propriedade: não existem na realidade *pontos, rectas, circunferências, etc.*, do mesmo modo que não existem *gases perfeitos, água pura, pessoas normais, cor verde, etc.* — mas unicamente certos entes que se aproximam mais ou menos dessas idealizações do nosso espírito.

Consideremos ainda como exemplo o TEOREMA DE PITÁGORAS. Desenhando com o máximo rigor possível muitos triângulos rectân-

(1) 'Racional' vem de 'razão' e dá-se o nome de 'razão' à nossa faculdade de raciocinar.

gulos e medindo os respectivos lados, poderia concluir-se por indução (como talvez tenha acontecido no tempo dos antigos Egípcios), que *o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*. O mesmo facto pode ser demonstrado, com rigor absoluto, a partir dos axiomas. Porém, estes, embora mais simples, têm o carácter contingente e aproximado das leis da física e, portanto, o mesmo carácter se vai reflectir no teorema de Pitágoras.

18. Expressões com variáveis. Não se pense de modo nenhum que a lista dos silogismos ficou esgotada com os tipos atrás indicados. Na verdade, os mais importantes raciocínios dedutivos que intervêm nas demonstrações matemáticas fazem intervir o uso de expressões com variáveis.

Já na linguagem corrente se apresentam, por vezes, variáveis de maneira mais ou menos disfarçada. Consideremos, por exemplo, a expressão '*Pedro é advogado*'. Se é dita em circunstâncias especiais, em que se saiba qual é a pessoa designada por '*Pedro*', aquela expressão é uma proposição, portanto verdadeira ou falsa. De contrário, a palavra '*Pedro*' não chega a ser uma designação, mas sim uma *variável* cujo *domínio de variação* é o conjunto de todos os indivíduos com esse nome. Então não podemos dizer que a expressão '*Pedro é advogado*' é verdadeira ou falsa: não é, pois, propriamente uma proposição.

Se considerarmos agora, por exemplo, a expressão '*Fulano é daltónico*', torna-se ainda mais evidente que o sujeito da oração é indeterminado, como se diz em gramática, ou uma variável, como diremos em lógica; variável essa que tem agora por domínio o conjunto de todos os seres humanos ⁽¹⁾. Seria até mais cómodo usar,

⁽¹⁾ Um dos inconvenientes da linguagem comum em lógica é a distinção das palavras em géneros. Neste exemplo, como em muitos outros, supõe-se que não é feita distinção de sexos embora as palavras estejam no masculino.

neste caso, a expressão 'X é daltónico', que permite formular factos gerais, como por exemplo o seguinte:

'Se X é daltónico, X não pode conduzir automóvel'.

Agora a variável já é uma letra, tal como na linguagem simbólica da matemática, e escusado será dizer que, para o efeito, tanto se pode usar a letra X como qualquer outra.

Outro exemplo ainda. Seja a definição matemática:

'Diz-se que um número inteiro é divisível por outro, quando existe um terceiro que multiplicado pelo segundo dá o primeiro'.

É visível que, neste enunciado, as expressões, 'um número inteiro', 'outro', 'um terceiro', 'o segundo', 'o primeiro' funcionam, de maneira irregular e imprecisa, como variáveis que têm, por domínio, o conjunto dos números inteiros. Veja-se agora como o uso das letras, no papel de variáveis, aumenta consideravelmente a clareza e a precisão da linguagem:

'Sendo a e b números inteiros, diz-se que a é divisível por b se (e só se) existe um número inteiro c tal que $a = bc$ '.

E o progresso será bem maior ainda, se substituirmos totalmente a linguagem comum pelos símbolos da lógica matemática, como faremos mais adiante.

De um modo geral, em matemática e em lógica simbólica, chamam-se variáveis certos símbolos, geralmente letras (ou ainda letras munidas de índices, plicas, asteriscos, barras, etc.), que desempenham o papel de designações, sem serem propriamente designações: cada variável pode ter como valor qualquer elemento de um conjunto denominado o *domínio dessa variável*. Por oposição, dá-se o nome de *constantes* às designações propriamente ditas, isto é, aos símbolos

ou expressões que têm um único valor (o designado). Por exemplo, na fórmula

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

que dá o volume (V) de um cone de revolução conhecidos o raio (r) da base e a altura (h) do cone, as letras V, h, r são variáveis, que têm por campo de variação o conjunto dos números reais positivos, enquanto os símbolos π , $\frac{1}{3}$ e 2 são constantes.

As variáveis assemelham-se, de certo modo, a espaços em branco de um impresso a preencher, mas com a diferença de que o seu uso é estritamente regulado pelas duas seguintes normas, relativas à substituição de variáveis por constantes:

I. *Se uma variável figura em mais de um lugar na mesma expressão, só podemos atribuir-lhe de cada vez um mesmo valor, em todos os lugares em que a variável figura na expressão.*

II. *A variáveis diferentes é lícito atribuir um mesmo valor, desde que as variáveis tenham o mesmo domínio.*

Aqui, a expressão 'atribuir um valor a uma variável' significa concretamente: 'substituir a variável por uma constante que tenha esse valor'.

Por exemplo, na expressão ' $x^2 + x \cdot y - y^2$ ' podemos substituir 'x' por '3' (nos dois lugares onde figura) e 'y' por 7 (nos dois lugares onde figura), o que dá a expressão ' $3^2 + 3 \cdot 7 - 7^2$ '; mas também podemos substituir ambas as variáveis por uma mesma constante, etc.

NOTA SOBRE O USO DAS ASPAS. Como já se esclareceu atrás, as aspas são usadas para designar expressões. Todavia, na prática, para não sobrecarregar as notações, pode-se dispensar o uso das aspas, desde que não haja perigo de confusão. Assim, podemos

escrever 'substituir x por 3', em vez de 'substituir 'x' por '3', depois de explicado o que isso quer dizer.

19. Tipos de expressões com variáveis. Às duas espécies principais de expressões consideradas no n.º 2 (designações e proposições) correspondem, naturalmente, duas espécies de expressões com variáveis:

I) *expressões designatórias* — que se transformam em designações, quando as variáveis são substituídas por constantes;

II) *expressões proposicionais* — também chamadas *funções proposicionais* — que se transformam em proposições, ao substituir as variáveis por constantes.

Considere-se, por exemplo, a expressão 'triplo de x', sendo x uma variável numérica. Visto que x é uma variável e não uma designação, também 'triplo de x' não é uma designação mas sim uma variável — *variável dependente* de x. Esta, porém, converte-se numa designação, todas as vezes que substituirmos x por constantes; assim, substituindo x por 5, obtém-se a designação 'triplo de 5' equivalente a '15', etc. Portanto, a expressão 'triplo de x' (em símbolos ' $3x$ ') é uma expressão designatória com a variável x. Analogamente, a expressão 'soma de a com b' (em símbolos ' $a + b$ ') é uma expressão designatória com as variáveis a e b; 'pai de X' é uma expressão designatória com a variável X, etc. São ainda expressões designatórias com variáveis as seguintes:

$$3x^2 - y, \quad \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{m. d. c. (m, n), etc.}$$

Consideremos, agora, a expressão 'x é menor que y' (em símbolos ' $x < y$ '), sendo x e y variáveis numéricas reais. Esta expressão converte-se numa proposição, verdadeira ou falsa, todas as vezes

que substituímos as variáveis por constantes; assim, substituindo x por 3 e y por 7 obtém-se a proposição verdadeira $3 < 7$, etc. Trata-se, pois, de uma expressão proposicional ou função proposicional. São, ainda, funções proposicionais as seguintes expressões:

A é filho de B , p é divisor de q , $x^2 - 4y^2 \leq 0$, etc.

Em matemática, as equações e as inequações fornecem inúmeros exemplos de expressões proposicionais. Mas, note-se que o conceito de expressão proposicional é muito mais amplo que o de equação ou inequação; assim, as expressões ' a divide b ', ' a é primo com b ', ' x é filho de y ', etc., etc., são funções proposicionais, sem serem equações nem inequações.

Como se vê, as expressões proposicionais com variáveis não são afirmações, mas apenas fórmulas convertíveis em proposições. Expressam geralmente perguntas, problemas ou condições; assim, a fórmula ' $x^2 = 5$ ' traduz o problema 'Qual é o número cujo quadrado é 5?', a fórmula ' $x^2 = 4y^2 \leq 0$ ' traduz uma condição imposta aos valores de x e y , etc. Em matemática, é habitual chamar fórmulas às expressões proposicionais, e expressões (simplesmente) às expressões designatórias.

Também podemos dizer que as expressões proposicionais exprimem *propriedades*. Por exemplo, a expressão ' x divide 15' exprime a propriedade de *dividir* 15, etc.

20. **Condições universais e condições impossíveis.** Quando nada se diz sobre o domínio duma variável, subentende-se que esse domínio é o universo lógico. Em muitos dos exemplos que vamos dar o universo é umas vezes o conjunto dos números naturais (1, 2, 3, ...), outras vezes o conjunto dos números reais (2, 3/5, $\sqrt{5}$, π , -5, -2/3, ...). Designa-se o primeiro por $\mathbb{N}$ e o segundo por $\mathbb{R}$. Designemos ainda por $\mathcal{H}$ o universo dos seres humanos.

Consideremos em $\mathcal{H}$ as expressões:

x é mortal , x é imortal

A primeira dá sempre origem a uma proposição *verdadeira*, qualquer que seja a pessoa x mencionada. A segunda dá *sempre* origem a uma proposição *falsa*, qualquer que seja a pessoa x mencionada. Diremos então que a primeira exprime uma *condição universal* (ou uma *propriedade universal*) e que a segunda exprime uma *condição impossível* (ou uma *propriedade impossível*).

Analogamente, no universo $|R$, as condições:

$x + 1 > x$, $x + 1 = x$

são universal a primeira (visto ser verificada por *todos* os valores de x) e impossível a segunda (visto não ser verificada por *nenhum* valor de x).

É claro que o contrário de 'impossível' é 'possível' e não 'universal'. Por exemplo, no universo $|R$ a condição $4x^2 - 1 = 0$ é *possível*, visto ser verificada pelos números $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$; mas não é universal. Pelo contrário, no universo $|N$ a mesma condição $4x^2 - 1 = 0$ é impossível: não existe nenhum número natural x que verifique tal condição. Por sua vez a condição $2x > 1$ é universal em $|N$ (o dobro dum número natural é *sempre* maior que 1), mas não é universal em $|R$ (não é verificada para $x = \frac{1}{2}$ ou para $x < \frac{1}{2}$).

Analogamente, a propriedade 'x respira por guelras' é universal no conjunto dos peixes, mas impossível no conjunto dos mamíferos.

Assim, como se vê, a aplicação dos adjectivos 'universal' e 'possível' depende geralmente do universo adoptado. *Note-se*, porém, que a condição $x = x$ é *universal*, e portanto a condição $x \neq x$ é *impossível*, qualquer que seja o universo considerado (em virtude do AXIOMA LÓGICO DA IDENTIDADE).

Estas considerações estendem-se obviamente a expressões com mais de uma variável. Assim, a condição $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ é universal em $\mathbb{R}$ (ou em $\mathbb{N}$); a condição $2x + y = 1$ é possível em $\mathbb{R}$, mas impossível em $\mathbb{N}$, etc.

Portanto, dum modo geral, uma condição diz-se *universal* ou diz-se *impossível*, conforme dá sempre origem a uma proposição verdadeira ou dá sempre origem a uma proposição falsa, quando as variáveis são substituídas por constantes. Diz-se *possível*, quando não é impossível.

21. **Equivalência formal. Princípios lógicos de equivalência.** Consideremos em $\mathcal{H}$ as duas expressões designatórias:

pai da mãe de x , avô materno de x

Pela própria *definição* do termo 'avô materno', estas expressões fornecem designações equivalentes, todas as vezes que a *variável* x é substituída por uma *constante*, isto é, pelo nome duma pessoa qualquer. Exprime-se este facto, dizendo que as expressões são *formalmente equivalentes* e escrevendo entre ambas o sinal $\equiv$, que se pode ler 'é sempre igual a' ou 'é o mesmo que'.

Assim:

pai da mãe de $x \equiv$ avô materno de x

Analogamente, é sabido que as expressões $(x + y)^2$ e $x^2 + 2xy + y^2$ no universo $\mathbb{R}$, tomam sempre o mesmo valor, quaisquer que sejam os valores atribuídos a x e y . Por outras palavras, a expressão:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

é uma condição universal. Diremos, por isso, que as expressões

$(x + y)^2$ e $x^2 + 2xy + y^2$ são formalmente equivalentes e, para o indicar, escreveremos:

$$(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$$

Mas, note-se que esta fórmula é uma *proposição*, isto é, uma afirmação (verdadeira), ao contrário da anterior que é uma *condição*, embora universal.

Consideremos agora em $\mathcal{U}$ as expressões proposicionais:

x é filho ou filha de y , y é pai ou mãe de x

É óbvio que, quaisquer que sejam as pessoas x e y , estas expressões dão sempre lugar a proposições equivalentes, isto é, ambas verdadeiras ou ambas falsas. Exprime-se este facto, dizendo que as duas condições são *formalmente equivalentes* e escrevendo entre ambas o sinal $\Leftrightarrow$ que se lê 'equivale formalmente a'. Assim:

x é filho ou filha de $y \Leftrightarrow y$ é pai ou mãe de x

Portanto, duas condições dizem-se *formalmente equivalentes*, num dado universo, quando tomam o mesmo valor lógico, em toda a concretização das variáveis.

Outros exemplos:

I. No universo $\mathbb{N}$:

x é múltiplo de 15 $\Leftrightarrow x$ é múltiplo de 3 e de 5

II. No universo $\mathbb{R}$:

$2x < y \Leftrightarrow 2x - y < 0$

III. No universo dos triângulos:

X é isósceles $\Leftrightarrow X$ tem dois ângulos iguais

IV. No universo $\mathcal{H}$:

A é daltónico $\Leftrightarrow$ A não distingue as cores

Muitas vezes, quando não houver perigo de confusão, diremos apenas 'equivalente' em vez de 'formalmente equivalente' quer se trate de expressões designatórias, quer se trate de expressões proposicionais. Nas mesmas circunstâncias, podemos usar os sinais $=$ e $\Leftrightarrow$, em vez dos sinais $\equiv$ e $\Leftrightarrow$. Aliás, a equivalência material pode considerar-se como caso particular da equivalência formal.

Observemos ainda que a equivalência de equações e inequações é também um caso particular da equivalência formal.

São do uso corrente os seguintes princípios lógicos de equivalência (*regras de substituição*):

1.º PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA. *Quando numa expressão, composta de várias expressões, substituirmos uma destas por outra equivalente, obtemos ainda uma expressão equivalente à primeira.*

Este princípio, aliás evidente, aplica-se tanto a expressões designatórias como a expressões proposicionais, com ou sem variáveis. Por exemplo, se na proposição:

'O Sena atravessa Paris'

substituirmos 'Paris' pela expressão equivalente 'a capital de França', obtemos uma proposição equivalente; se na inequação $x^2 - 1 < 0$ substituirmos a expressão $x^2 - 1$ pela expressão equivalente $(x - 1)(x + 1)$ obtemos uma inequação equivalente, etc., etc.

2.º PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA. *Quando, em duas expressões equivalentes entre si, substituirmos uma variável por qualquer outra expressão designatória, obtemos ainda duas expressões equivalentes entre si.*

Entende-se, é claro, que a substituição é lícita no universo con-

siderado e que a expressão designatória pode em particular ser uma constante. Por exemplo, tem-se:

$$a = b + c \Leftrightarrow a - c = b$$

Substituindo sucessivamente as variáveis a , b e c pelas expressões $5x$, 2 e $3x$, vem:

$$5x = 2 + 3x \Leftrightarrow 5x - 3x = 2$$

22. Cálculo proposicional com variáveis. As operações lógicas que definimos para proposições (ou para valores lógicos) estendem-se naturalmente a expressões proposicionais com variáveis.

a) *Conjunção.* Por exemplo, se ligarmos as duas expressões 'X é médico' e 'X é professor' pelo sinal $\wedge$ (que se lê 'e'), obtemos uma nova expressão proposicional:

$$X \text{ é médico} \wedge X \text{ é professor}$$

que é verificada por todos os indivíduos que verificam ao mesmo tempo as *duas* condições dadas, e só por esses indivíduos. É natural chamar à condição assim obtida *conjunção* das duas primeiras.

Analogamente, a condição $x > 3 \wedge x < 7$ é a conjunção das condições $x > 3$ e $x < 7$. Assim, fazendo $x = 5$, $x = \pi$, $x = 3$, $x = -1$, $x = 7,35$, etc., virá sucessivamente:

x	$x > 3$	$x < 7$	$x > 3 \wedge x < 7$
5	V	V	V
π	V	V	V
3	F	V	F
-1	F	V	F
7,35	V	F	F
...	...	...	...

Note-se que a conjunção $x > 3 \wedge x < 7$ costuma escrever-se $3 < x < 7$. Mais geralmente, sendo a, b números reais quaisquer, tem-se por definição:

$$a < x < b \Leftrightarrow x > a \wedge x < b$$

Outros exemplos:

I. Em $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 3 \text{ divide } x \wedge 5 \text{ divide } x &\Leftrightarrow 15 \text{ divide } x \\ x \text{ divide } y \wedge y \text{ divide } x &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

II. Em $\mathbb{R}$:

$$x + 2y = 5 \wedge 2x - 5y = 1 \Leftrightarrow x = 3 \wedge y = 1$$

o que também se pode escrever:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

III. No universo das figuras geométricas:

$$X \text{ é um rectângulo} \wedge X \text{ é um losango} \Leftrightarrow X \text{ é um quadrado}$$

b) *Disjunção*. Se ligarmos agora as condições 'X é médico' e 'X é professor' pelo sinal $\vee$ (que se lê 'ou'), obtemos a nova condição:

$$X \text{ é médico} \vee X \text{ é professor,}$$

que é verificada por todo o indivíduo X que verifique *uma pelo menos* das condições dadas e só por esses indivíduos. É natural chamar à nova condição assim obtida *disjunção* das duas primeiras.

Analogamente, a condição $x < 3 \vee x > 7$, é a disjunção das condições $x < 3$ e $x > 7$. Assim, para $x = 0; -1; 3; 5; \pi; 7,35, \dots$ virá sucessivamente:

x	$x < 3$	$x > 7$	$x < 3 \vee x > 7$
0	V	F	V
-1	V	F	V
2	V	F	V
5	F	F	F
π	F	F	F
7,35	F	V	V

Outros exemplos:

I. Em $\mathbb{N}$:

$$x \text{ divide } 6 \vee x \text{ divide } 10 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$$

II. Em $\mathbb{R}$:

$$x = 3 \vee x = -5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = 3 \vee x < 3 \Leftrightarrow x \leq 3$$

Dum modo geral, dados dois números reais x, y , escreve-se, *por definição*:

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$$

Também se escreve, por definição:

$$x \leq y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq z$$

$$\text{ou seja } x \leq y \leq z \Leftrightarrow (x < y \vee x = y) \wedge (y < z \vee y = z)$$

Análogos significados para $x \leq y < z$, $x < y \leq z$, $x > y \leq z$, etc.

c) *Negação*. Se antepusermos à condição 'X tem menos de 18 anos' o sinal $\sim$ (que se lê 'não é verdade que') obtém-se a nova condição:

$$\sim X \text{ tem menos de 18 anos}$$

que é natural chamar *negação* da primeira, pois é verificada precisamente pelos indivíduos que *não* verificam aquela. É claro que a negação de 'X tem menos de 18 anos' é equivalente à condição:

$$'X \text{ tem 18 anos} \vee X \text{ tem mais de 18 anos}'$$

ou, abreviadamente: 'X tem idade igual ou superior a 18 anos'.

Outros exemplos:

I. Em $\mathbb{N}$: $\sim X \text{ é par} \Leftrightarrow X \text{ é ímpar}$

II. Em $\mathbb{R}$: $\sim (x < y) \Leftrightarrow x \geq y$, ou seja

$$\sim x < y \Leftrightarrow x = y \vee x \geq y$$

Por sua vez: $\sim x = y \Leftrightarrow x < y \vee x > y$

III. Em qualquer universo: $\sim (x = y) \Leftrightarrow x \neq y$

A negação de uma condição (ou propriedade) também se diz *contrária* ou *complementar* dessa propriedade.

Duas condições dizem-se *incompatíveis* se a sua conjunção é impossível; dizem-se *compatíveis*, no caso contrário. É claro que duas condições contrárias são incompatíveis, mas duas condições podem ser incompatíveis sem serem contrárias. Por exemplo, as condições 'casado' e 'solteiro' são incompatíveis mas não contrárias, visto que o contrário de 'casado' é 'solteiro, viúvo ou divorciado'. Duas condições serão contrárias (ou complementares) se são incompatíveis e se, além disso, a sua disjunção é condição universal.

Note-se ainda que:

A negação de uma condição universal é uma condição impossível e a negação de uma condição impossível é uma condição universal.

Por exemplo, a negação da condição $x = x$ (universal) é a condição $x \neq x$ (impossível). No entanto, como já observámos, o contrário de 'impossível' é 'possível' e não 'universal'; com efeito, *negar que uma condição é impossível* não é o mesmo que *negar essa condição*: equivale a *afirmar que a condição é possível*.

23. Propriedades das operações lógicas sobre condições.

É fácil ver que as propriedades das operações sobre valores lógicos se transmitem automaticamente às operações sobre condições. Assim, a conjunção e disjunção continuam a ser *comutativas* e *associativas*, e cada uma delas *distributiva* em relação à outra. Mantém-se a *propriedade da dupla negação*, assim como *as primeiras leis de De Morgan*.

Quanto às propriedades:

$$a \wedge V = a, \quad a \wedge F = F, \quad a \vee V = V, \quad a \vee F = a,$$

válidas quando $a = V$ ou $a = F$, assumem agora novo aspecto. Assim:

I. *A conjunção de uma condição qualquer com uma condição universal é equivalente à primeira.*

II. *A conjunção de uma condição qualquer com uma condição impossível é ainda impossível.*

Destas deduzem-se mais duas propriedades por DUALIDADE LÓGICA, substituindo 'conjunção' por 'disjunção', 'universal' por 'impossível' e 'impossível' por 'universal'.

Consideremos, por exemplo, em $\mathbb{R}$ os sistemas:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 1 > x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x + 1 = x \end{cases}$$

que se podem escrever, respectivamente:

$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 > x, \quad 2x - 1 > 3 \wedge x + 1 = x$$

Como a condição $x + 1 > x$ é universal e a condição $x + 1 = x$ é impossível, virá:

$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 > x \Leftrightarrow 2x - 1 > 3$$

$$2x - 1 > 3 \wedge x + 1 = x \Leftrightarrow x + 1 = x \text{ (impossível)}$$

Analogamente:

$$2x - 1 > 3 \vee x + 1 > x \Leftrightarrow x + 1 > x \text{ (universal)}$$

$$2x - 1 > 3 \vee x + 1 = x \Leftrightarrow 2x - 1 > 3$$

CONVENÇÃO. Dadas várias condições $c_1, c_2, c_3, \dots$, escreveremos $c_1 \wedge c_2 \wedge c_3$, em vez de $(c_1 \wedge c_2) \wedge c_3$, $c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge c_4$ em vez de $(c_1 \wedge c_2 \wedge c_3) \wedge c_4$, etc. e analogamente para a disjunção.

24. Quantificadores. Além das operações lógicas atrás consideradas, apresentam-se ainda duas operações de importância capital, que se aplicam unicamente a expressões proposicionais com variáveis. Estas duas operações desempenham um papel correspondente ao dos pronomes 'todo' e 'algum' da linguagem corrente.

a) *Quantificador universal.* Consideremos a condição 'x é mortal', que já sabemos ser *universal* em $\mathcal{H}$. Em linguagem comum exprime-se este facto dizendo 'Todo o homem é mortal'. Pois bem, no

simbolismo da lógica matemática indica-se que uma condição em x é universal, escrevendo antes da condição o símbolo $\forall x$, seguido duma vírgula, ou de dois pontos; este símbolo lê-se '*qualquer que seja* x '. Por exemplo, a expressão

$$\forall x, x \text{ é mortal}$$

lê-se '*Qualquer que seja* x , x é mortal', o que é uma proposição verdadeira no universo $\mathcal{H}$ ou, mais geralmente, no universo dos seres vivos.

Se a variável da expressão for uma outra, em vez da letra x , escreve-se o mesmo símbolo $\forall$ seguido dessa variável. Assim, a expressão:

$$\forall \text{ Fulano, Fulano é mortal}$$

lê-se '*Qualquer que seja* Fulano, Fulano é mortal', o que significa *exactamente o mesmo* que a proposição anterior. Analogamente, as expressões:

$$\forall x, 2x > x \quad (\text{Qualquer que seja } x, 2x > x)$$

$$\forall a, 2a > a \quad (\text{Qualquer que seja } a, 2a > a)$$

exprimem ambas o mesmo facto: '*O dobro dum número é sempre maior que esse número*', o que é verdadeiro em $\mathbb{N}$, mas falso em $\mathbb{R}$ (p. ex. $2 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot (-3) < -3$, etc.).

Deste modo, dada uma condição numa variável, o símbolo $\forall$ referido a essa variável representa uma operação lógica que transforma a *condição* numa *proposição*, verdadeira ou falsa, conforme a condição é universal ou não. A esta operação dá-se o nome de *quantificação universal* e ao respectivo símbolo o de *quantificador universal*.

Muitas vezes (quando não há perigo de confusão), o quantificador é escrito depois e não antes da expressão quantificada. Por exemplo, tem-se em $\mathbb{R}$:

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1), \forall a$$

Aqui o símbolo $\forall a$ pode ler-se 'qualquer que seja a' ou 'para todo o valor de a' ou simplesmente 'para todo o a'.

Quando se apresenta uma condição com mais de uma variável e se quer afirmar que essa condição é universal, usa-se o mesmo símbolo $\forall$ seguido dessas variáveis (usando vírgulas a separar). Assim, a expressão:

$$(a + b)^2 > a^2 + b^2, \quad \forall a, b$$

lê-se: ' $(a + b)^2 > a^2 + b^2$, quaisquer que sejam a, b', o que é verdadeiro em $\mathbb{N}$ e falso em $\mathbb{R}$. Analogamente:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad \forall x, y$$

o que é verdadeiro em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{R}$. Algumas vezes, para evitar confusões, o domínio das variáveis é devidamente especificado. Assim:

$$(m + n)^2 > m^2 + n^2, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$(x + 1)^2 > x^2 + 1, \quad \forall x > 0$$

Aqui ' $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ' lê-se 'quaisquer que sejam m, n pertencentes a $\mathbb{N}$ ' e ' $\forall x > 0$ ' lê-se 'qualquer que seja $x > 0$ ' ou ainda 'para todo o $x > 0$ '.

Outras vezes ainda, para condensar a escrita, escrevem-se as variáveis em índice do símbolo $\forall$. Exemplo:

$$\forall_{x>0} 0 < 2x < x^2 \quad (\text{'Para todo o } x > 0, \text{ tem-se } 0 < 2x < x^2)$$

b) *Quantificador de existência.* Para indicar que uma condição numa variável é possível, escreve-se antes da condição o símbolo $\exists$ seguido da variável e de uma vírgula ou dois pontos (ou com essa variável em índice). Suponhamos que a variável é a letra x; então

o símbolo $\exists x$ lê-se 'existe pelo menos um x tal que' (e analogamente para outras variáveis). Por exemplo, a expressão:

$$\exists X, X \text{ vive na Lua}$$

lê-se 'Existe pelo menos um X tal que X vive na Lua' e é uma proposição falsa em $\mathcal{W}$, que também se pode traduzir por 'Algum ser vive na Lua'. Analogamente a expressão:

$$\exists a, a > a^2$$

lê-se 'Existe pelo menos um a tal que $a > a^2$, e é uma proposição verdadeira em $\mathbb{R}$ ('Algum número é superior ao seu quadrado'), mas falsa em $\mathbb{N}$ ('Nenhum número é superior ao seu quadrado').

Deste modo, dada uma condição sobre uma variável, o símbolo $\exists$ (referido a essa variável) representa uma operação lógica que transforma a *condição* numa *proposição*, que é verdadeira ou falsa, conforme a condição é possível ou impossível. Essa operação é chamada *quantificação existencial* e o respectivo símbolo, *quantificador de existência*.

Para este símbolo, adoptam-se ainda convenções análogas às que indicámos para o quantificador universal, com esta única diferença. Nunca poderá ser escrito após a condição quantificada. Exemplos:

$$\exists A, B, A \text{ é mais novo que } B \wedge B \text{ é aluno de } A$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 3 \wedge x^2 = 9$$

25. Propriedades dos quantificadores. Novos tipos de silogismo. Vimos como os quantificadores transformam condições em *proposições*. Quando há um quantificador a incidir sobre uma variável, esta diz-se *aparente* ou *muda*; caso contrário, a variável diz-se *livre*.

Por exemplo, a letra x é variável livre nas condições:

$$2x = 3 \text{ (equação)}, x + 1 > x \text{ (inequação)}$$

mas é variável aparente nas proposições:

$$\exists x, 2x = 3 \quad , \quad \forall x, x + 1 > x$$

É muito frequente em matemática o uso da seguinte regra: **PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO DAS VARIÁVEIS APARENTES.** *Sempre que uma variável aparente é substituída, em todos os lugares que ocupa numa expressão, por outra variável que não figura na mesma expressão, obtém-se uma expressão equivalente.*

Por exemplo, as proposições:

$$' \forall \text{ Fulano, Fulano é mortal} ' \quad , \quad ' \forall x, x \text{ é mortal} '$$

significam exactamente a mesma coisa. O mesmo para as proposições ' $\exists x, y \quad x < y$ ' e ' $\exists a, b \quad a < b$ '.

Por outro lado, é evidente que uma condição universal dá sempre lugar a uma condição universal ou a uma proposição verdadeira, quando se substituem as suas variáveis, no todo *ou em parte*, por outras variáveis, ou por constantes ⁽¹⁾. Daqui resultam vários tipos de silogismo, com uma só premissa, de que vamos dar alguns exemplos:

$$\text{I. } \forall a, (\sqrt{a})^2 = a. \quad \text{Logo } (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\text{II. } \forall x, y \quad x^2 - y^2 = (x - y)(x + y). \quad \text{Logo } \forall t \quad t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$$

$$\text{III. } \forall a, b \in \mathbb{N}, a + b > a. \quad \text{Logo } \forall a, b \in \mathbb{N}, b + a > a$$

⁽¹⁾ O 2.º princípio de equivalência (n.º 21) é apenas um caso particular deste facto.

Também a definição do quantificador $\exists$ dá lugar a silogismos, tais como:

$$\text{IV. } 0,85^2 < 0,85. \text{ Logo } \exists x, x^2 < x$$

$$\text{V. } 3^2 = 9 \wedge (-3)^2 = 9 \wedge 3 \neq -3$$

$$\therefore \exists_{x,y} x^2 = 9 \wedge y^2 = 9 \wedge x \neq y$$

26. Segundas leis de De Morgan. É claro que os quantificadores podem ser precedidos do símbolo de negação. Por exemplo, no universo $\mathcal{H}$, as expressões:

$$\forall x \text{ } x \text{ fala inglês}, \quad \sim \forall x \text{ } x \text{ fala inglês}$$

$$\exists x \text{ } x \text{ foi à Lua}, \quad \sim \exists x \text{ } x \text{ foi à Lua}$$

são proposições que, em linguagem comum, se podem enunciar, respectivamente: 'Toda a pessoa fala inglês', 'Nem toda a pessoa fala inglês', 'Alguém foi à Lua', 'Ninguém foi à Lua'.

São ainda evidentes as equivalências:

$$\sim \forall x \text{ } x \text{ fala inglês} \Leftrightarrow \exists x \sim x \text{ fala inglês}$$

$$\sim \exists x \text{ } x \text{ foi à Lua} \Leftrightarrow \forall x \sim x \text{ foi à Lua}$$

É claro que estas são *independentes* das condições consideradas, isto é:

A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial (seguido de negação) e vice-versa; ou ainda em símbolos:

$$\sim \forall x = \exists x \sim, \quad \sim \exists x = \forall x \sim$$

Estas duas propriedades são conhecidas por *segundas leis de De Morgan*. Outros exemplos:

A negação de 'Todo o aluno desta turma é bem comportado' equivale a 'Existe pelo menos um aluno desta turma que não é bem comportado'; a negação de 'Existe pelo menos um aluno desta turma que ficará reprovado' equivale a 'Qualquer que seja o aluno desta turma, ele não ficará reprovado'.

OBSERVAÇÃO. As segundas leis de De Morgan implicam um prolongamento do PRINCÍPIO DA DUALIDADE LÓGICA, revelando uma importante analogia entre os quantificadores e as operações de conjunção e disjunção. Para compreender melhor esta analogia, basta notar que, num universo finito, o quantificador universal equivale a conjunções sucessivas e o quantificador existencial a disjunções sucessivas. Por exemplo, no universo $\{3, 5, 7\}$, a proposição ' $\forall x$ x é primo' equivale a ' 3 é primo $\wedge$ 5 é primo $\wedge$ 7 é primo'. Por sua vez, no universo $\{\text{Marte, Venus, Sirius}\}$, a proposição ' $\exists x$ x é uma estrela' equivale a ' $\text{Marte é uma estrela} \vee \text{Venus é uma estrela} \vee \text{Sirius é uma estrela}$ '. Esta circunstância leva alguns autores a adotarem os símbolos $\bigwedge_x$ e $\bigvee_x$, respectivamente, como quantificadores universal e existencial, o que têm ainda a vantagem de sugerir melhor a dualidade lógica:

$$\sim \bigwedge_x = \bigvee_x \sim, \quad \sim \bigvee_x = \bigwedge_x \sim$$

27. Quantificação parcial e quantificação múltipla. Consideremos, por exemplo, a expressão:

$$\exists x \text{ } x \text{ é filho de } y$$

Esta expressão, que se pode ler 'Existe pelo menos um indivíduo x que é filho de y ', não é uma proposição, visto que o seu valor lógico, embora não dependa de x (*variável aparente*), depende ainda

de y (*variável livre*). É, pois, uma *condição* em y , que também se pode exprimir escrevendo: ' y tem pelo menos um filho', isto é:

$$\exists x \text{ } x \text{ é filho de } y \Leftrightarrow y \text{ tem pelo menos um filho}$$

Analogamente, no universo $\mathbb{N}$, a expressão:

$$\exists x \text{ } ax = b$$

é uma condição em a e b , equivalente a dizer ' a divide b '. É esta, aliás, a definição usual do termo 'divide':

$$a \text{ divide } b \Leftrightarrow \exists x \text{ } ax = b$$

Assim, em geral, dada uma condição com mais de uma variável, a aplicação dum quantificador referido a uma dessas variáveis, transforma a *condição* dada numa outra *condição com menos uma variável livre*.

Consideremos agora a condição ' $\exists y \text{ } y \text{ é pai de } x$ '. Supondo que esta condição é universal (em $\mathcal{H}$), podemos escrever ⁽¹⁾:

$$\forall x \text{ } \exists y \text{ } y \text{ é pai de } x,$$

o que também poderia escrever-se:

$$\forall \text{ Fulano, } \exists \text{ Beltrano: Beltrano é pai de Fulano}$$

Outro exemplo ainda:

$$\forall x \text{ } \exists y \text{ } \forall z \text{ } z \text{ é pai de } x \vee z \neq y$$

(¹) Aqui 'existe' é tomado em sentido intemporal, incluindo, portanto, as pessoas existentes no passado.

isto é:

$\forall$ Fulano, $\exists$ Beltrano, $\forall$ Sicrano:

Sicrano é pai de Fulano $\vee$ Sicrano não é Beltrano

Analogamente, no universo $\mathbb{N}$:

$$\forall x \exists y y > x, \quad \exists x \forall y y \geq x, \text{ etc.}$$

Por sua vez, tem-se em $\mathbb{R}$,

$$\forall x \forall y (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

mas, em vez de $\forall x \forall y$, pode escrever-se simplesmente $\forall_{x,y}$, como se indicou atrás.

Assim, a aplicação sucessiva de quantificadores acaba por transformar uma *condição com mais de uma variável* numa *proposição*.

Note-se que, em matemática, se apresentam a cada passo proposições em que intervêm vários tipos de quantificadores. Por exemplo, em geometria:

Quaisquer que sejam a recta r e o ponto P , existe pelo menos uma recta s que passa por P e é perpendicular a r .

No universo $\mathbb{R}$: $\forall x \exists y y^3 = x$, etc.

Note-se, ainda, o polissilogismo em $\mathbb{R}$:

$$\forall x x^2 \neq -1. \quad \text{Logo } \sim \exists x x^2 = -1.$$

$$\text{Logo } \exists y \sim \exists x x^2 = y. \quad \text{Logo } \sim \forall y \exists x x^2 = y$$

Foram aplicadas aqui duas vezes as leis de De Morgan.

Outro exemplo: negar a proposição 'Para todo o aluno desta turma existe pelo menos uma disciplina em que terá nota inferior a 12' equivale a afirmar 'Existe pelo menos um aluno desta turma que em toda a disciplina terá nota igual ou superior a 12'.

28. Implicação formal. Consideremos, no universo das povoações portuguesas, as duas seguintes condições:

x é cidade , x tem câmara municipal

Ligando-as pelo sinal de *implicação material*, obtém-se a nova condição em x :

x é cidade $\Rightarrow$ x tem câmara municipal

Mas, desde logo se vê que esta condição é universal. Por exemplo, exprimindo as duas condições dadas, respectivamente, pelos símbolos $p(x)$ e $q(x)$, tem-se:

x	$p(x)$	$q(x)$	$p(x) \Rightarrow q(x)$
Lisboa	V	V	V
Bragança	V	V	V
Moura	F	V	V
Sintra	F	V	V
Carcavelos	F	F	V
Luso	F	F	V

E assim por diante: *qualquer que seja a povoação x , a condição $p(x) \Rightarrow q(x)$ dá origem a uma proposição verdadeira*. Podemos, portanto, escrever:

$$\forall x \, p(x) \Rightarrow q(x)$$

Para simplificar a escrita, em casos como este, indica-se o quantificador universal, escrevendo simplesmente a variável x sob o sinal de implicação:

$$p(x) \Rightarrow_x q(x)$$

O sinal composto $\Rightarrow_x$ lê-se 'implica, qualquer que seja x'. É claro que estas convenções se aplicam independentemente das condições que estejam nos lugares de p(x) e q(x) e da variável utilizada. Assim, as expressões:

$\forall A: A \text{ nasceu em Portugal} \Rightarrow A \text{ é português}$

$X \text{ é daltónico} \Rightarrow_x X \text{ não pode conduzir automóvel}$

$y \text{ é peixe} \Rightarrow_y y \text{ respira por guelras}$

são proposições que se podem ler, respectivamente: 'Qualquer que seja A, se A nasceu em Portugal, A é português' (ou ainda: 'Todo o que nasceu em Portugal é português'), 'Se X é daltónico, X não pode conduzir automóvel, qualquer que seja X', 'Se y é peixe, então, qualquer que seja y, y respira por guelras'.

Outros exemplos:

I. Em $\mathbb{N}$:

$n \text{ é múltiplo de } 10 \Rightarrow_n n \text{ é múltiplo de } 5$

II. Em $\mathbb{R}$: $x > 7 \Rightarrow_x x > 3$

$x - 2 = 0 \Rightarrow_x x^2 - 3x + 2 = 0$

III. No universo das figuras geométricas:

$F \text{ é um quadrado} \Rightarrow_F F \text{ é um rectângulo.}$

Consideremos, agora, a expressão (em $\mathbb{R}$):

$x > a \Rightarrow_x x > b$

É verdadeira ou falsa? É claro que isso depende dos valores de a e

de b : é verdadeira, se $a \geq b$, falsa se $a < b$. Trata-se pois de uma condição em a e b , equivalente à condição $a \geq b$, isto é:

$$x > a \Rightarrow_x x > b \quad \text{se e só se} \quad a \geq b$$

Seja agora em $\mathcal{H}$ a condição:

$$x \text{ é filho de } y \wedge y \text{ é irmão de } z \Rightarrow x \text{ é sobrinho de } z$$

Pela própria definição de 'sobrinho', esta é uma condição universal, o que se pode exprimir antepondo o símbolo $\forall_{x,y,z}$ a essa condição. Porém, tal como no caso duma só variável, podemos agora indicar a quantificação universal, escrevendo as variáveis sob o sinal de implicação:

$$x \text{ é filho de } y \wedge y \text{ é irmão de } z \Rightarrow_{x,y,z} x \text{ é sobrinho de } z$$

Neste caso, como nos primeiros (excepto o anterior), todas as variáveis que intervêm nas expressões figuram sob o sinal de implicação. Para simplificar ainda mais a escrita, em casos tais, substituiremos as variáveis por um ponto, sob o sinal $\Rightarrow$, e diremos que a condição à esquerda do sinal *implica formalmente* a condição à direita. Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. Diz-se que uma condição *implica formalmente* outra, quando toda a substituição das variáveis que verifica a primeira verifica igualmente a segunda. A primeira condição diz-se *antecedente* e a segunda *consequente*.

O sinal $\Rightarrow$ (de implicação formal) pode ler-se 'implica formalmente', 'implica necessariamente' ou ainda 'Se ... então necessariamente'. Por exemplo, a implicação formal:

$$X \text{ é homem} \Rightarrow X \text{ é mortal}$$

pode ler-se: 'Se X é homem, então necessariamente X é mortal'. Analogamente para a implicação:

$$x \text{ divide } y \wedge y \text{ divide } z \Rightarrow x \text{ divide } z$$

Em geral, quando se diz que uma dada condição implica outra, subentende-se que a implicação é formal. Assim, omitiremos o ponto sob o sinal $\Rightarrow$, quando estiver subentendido que se trata duma afirmação e portanto duma implicação formal. Neste caso, o sinal $\Rightarrow$ poderá ler-se 'implica' ou 'se ... então' ou simplesmente 'se' antes da condição antecedente.

Aliás, é de notar que a implicação formal corresponde sempre à ideia usual de implicação, o que está de acordo com o que já foi dito para a implicação material, *pois tudo se passa como se ignorássemos os valores lógicos das condições*: as variáveis também podem ser consideradas como *incógnitas*, isto é, como designação de algo que ainda não é conhecido.

Note-se porém que a implicação *não é formal*, quando alguma, mas não todas as variáveis que intervêm nas condições, aparece sob o sinal $\Rightarrow$. É o que se observa, por exemplo, na expressão, atrás considerada, $x > a \Rightarrow_x x > b$.

29. Propriedades da implicação formal. Novos tipos de silogismo. É fácil ver que várias propriedades de implicação material se transmitem automaticamente à implicação formal. Entre essas, indicaremos a *transitividade* e a *lei de conversão*:

$$\text{Se } A \Rightarrow B \text{ e } B \Rightarrow C, \text{ então } A \Rightarrow C$$

$$\text{Se } A \Rightarrow B, \text{ então } \sim B \Rightarrow \sim A$$

Por exemplo, a implicação formal:

$$x \text{ é uma criança} \Rightarrow x \text{ não conduz automóvel}$$

equivale à seguinte:

$$x \text{ conduz automóvel} \Rightarrow x \text{ não é uma criança}$$

Analogamente, partindo da proposição em $\mathbb{R}$:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0,$$

(que se pode enunciar 'Se o produto de dois números é zero, um pelo menos dos números é zero'), podemos concluir, pela lei de conversão e pelas primeiras leis de De Morgan:

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$$

Por sua vez, a transitividade de implicação formal, tal como a da implicação material dá origem a um tipo muito frequente do silogismo. Exemplo:

'Se X confunde o azul com o verde, X é daltónico'.

'Se X é daltónico, X não pode conduzir automóvel. Logo, se X confunde o azul com o verde, X não pode conduzir automóvel'.

Da própria definição de implicação formal, resulta um dos tipos mais frequentes de silogismo, a que podemos chamar *silogismo condicional com variáveis*. Exemplo: 'Se x é um planeta, x não emite luz. Ora Marte é um planeta. Logo Marte não emite luz'.

Por outro lado, recordando como a implicação material se exprime em termos de disjunção e negação, é fácil ver que:

$$p(x) \Rightarrow q(x) \text{ equivale a } \forall x \, q(x) \vee \sim p(x)$$

Por exemplo, a proposição 'x é peixe $\Rightarrow$ x tem guelras' equivale a dizer ' $\forall x$, ou x tem guelras ou x não é peixe'.

O facto anterior e as leis de De Morgan mostram-nos ainda que negar a implicação formal $p(x) \Rightarrow q(x)$ equivale a afirmar:

$$\exists x \, p(x) \wedge \sim q(x)$$

Por exemplo, negar 'x é português $\Rightarrow$ x nasceu em Portugal' equivale a afirmar:

$$\exists x, x \text{ é português} \wedge x \text{ não nasceu em Portugal.}$$

É fácil ainda reconhecer que:

- I. *Uma condição impossível implica qualquer condição.*
- II. *Qualquer condição implica uma condição universal.*
- III. *Se uma condição implica outra, a segunda é possível se a primeira o for e a primeira é impossível se a segunda o for.*

Por exemplo, no universo $\mathbb{R}$, a condição $x^2 = -1$ é impossível e portanto implica qualquer outra, por exemplo a condição $x^6 = -1$ (impossível), a condição $x + 1 = x$ (impossível), etc. Mas havemos de ver que, no universo dos números chamados *complexos*, a condição $x^2 = -1$ já é possível e implica ainda $x^6 = -1$, donde o silogismo:

$$\begin{array}{l} x^2 = -1 \Rightarrow x^6 = -1 \\ \exists x, x^2 = -1 \\ \hline \therefore \exists x, x^6 = -1 \end{array}$$

Mas, note-se que, no novo universo, a condição $x^2 = -1$ (possível) já não implica $x + 1 = x$ (impossível).

Outro exemplo, *na geometria de Euclides*:

'Todo o triângulo birrectângulo tem dois lados paralelos.

Mas não existem triângulos com dois lados paralelos.

Logo não existem triângulos birrectângulos'.

30. Equivalência formal; 'condição necessária' e 'condição suficiente'. Definições lógicas. Quando uma condição implica formalmente outra, também se diz que a primeira é *condição suficiente* para que se verifique a segunda ou ainda que a segunda é *condição necessária* para que se verifique a primeira. Por exemplo, a implicação formal:

'Se x é peixe , x tem guelras'

pode exprimir-se dizendo 'Ser peixe é condição suficiente para ter guelras' ou 'Ter guelras é condição necessária para ser peixe'. Mas não é verdade que:

'Se x tem guelras , x é peixe'

isto é: 'Ter guelras não é condição suficiente para ser peixe' ou 'Ser peixe não é condição necessária para ter guelras'.

Dadas duas condições A e B, pode acontecer que se tenha ao mesmo tempo $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$. É claro que então (e só então) A e B são formalmente equivalentes, isto é:

$$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A \text{ sse } A \Leftrightarrow B$$

Neste caso, podemos dizer que A é uma *condição necessária e suficiente* para que se verifique B. Por exemplo, no universo dos triângulos:

$X \text{ tem os lados iguais} \Leftrightarrow X \text{ tem os ângulos iguais}$

isto é: 'Ter os lados iguais é condição necessária e suficiente para ter os ângulos iguais'.

Note-se que muitas proposições da matemática (axiomas ou teoremas), assim como muitas leis das ciências físico-naturais, se apresentam sob a forma duma implicação formal, $H \Rightarrow T$. Neste

caso, a condição antecedente, H , é chamada *hipótese*, enquanto a consequente, T , é chamada *tese*. Mas é claro que, segundo a regra de conversão, o *mesmo facto* pode ser expresso pela proposição equivalente $\sim T \Rightarrow \sim H$ (chamada *conversa* da primeira), em que a hipótese é $\sim T$ e a tese é $\sim H$.

Por exemplo, já vimos que o teorema em $\mathbb{R}$:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

se pode traduzir no *converso*:

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$$

Pode ainda acontecer que a proposição $T \Rightarrow B$ (chamada *recíproca* da proposição $H \Rightarrow T$) seja também verdadeira. Então é verdadeira a conjunção das duas $H \Leftrightarrow T$. É isto precisamente o que sucede no exemplo anterior:

'O produto de dois números é zero, sse um pelo menos dos números é zero'.

Ou ainda: 'O produto de dois números é diferente de zero, sse ambos os números são diferentes de zero'.

Numa teoria dedutiva as *definições de termos derivados a partir de termos primitivos* apresentam-se muitas vezes sob a forma de equivalência formal. Assim, as equivalências:

$$a \text{ divide } b \Leftrightarrow \exists x \, ax = b$$

$$n \text{ é primo} \Leftrightarrow n \neq 1 \wedge (x \text{ divide } n \Rightarrow_x x = 1 \vee x = n)$$

definem os termos 'divide' e 'primo', respectivamente, a partir da noção de 'produto' e do termo 'divide' (no universo $\mathbb{N}$).

Analogamente, no universo $\mathcal{H}$, usando as expressões 'fil', 'irm', 'sobr', respectivamente como abreviaturas de 'é filho ou filha de', 'é irmão ou irmã de' e 'é sobrinho ou sobrinha de', as equivalências:

$$x \text{ irm } y \Leftrightarrow \exists z \, x \text{ fil } z \wedge y \text{ fil } z \wedge x \neq y$$

$$x \text{ sobr } y \Leftrightarrow \exists z \, x \text{ fil } z \wedge z \text{ irm } y$$

definem, respectivamente, o termo 'irm' a partir de 'fil' e o termo 'sobr' a partir de 'fil' e 'irm' (portanto, em última análise, a partir de 'fil').

31. Existência e unicidade. Consideremos em $\mathbb{R}$ a condição $x^2 = 9$. Visto que $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$ e $3 \neq -3$, podemos concluir:

$$\exists_{x,y} x^2 = 9 \wedge y^2 = 9 \wedge x \neq y$$

Pelo contrário, para a condição $x^3 = 8$ teremos em $\mathbb{R}$ as duas proposições:

$$\exists_x x^3 = 8, \quad x^3 = 8 \wedge y^3 = 8 \Rightarrow x = y$$

A primeira diz que *existe pelo menos um* x tal que $x^3 = 8$ ($x = 2$): é uma afirmação de *existência*.

A segunda diz que não pode existir *mais de um* x tal que $x^3 = 8$: é uma afirmação de *unicidade*.

A conjunção das duas diz que *existe um x e um só tal que* $x^3 = 8$. Para indicar este facto, escreveremos:

$$\exists^1 x, x^3 = 8$$

em que o símbolo $\exists^1 x$ se lê 'Existe um e um só x tal que'.

Muitas proposições da matemática encerram afirmações de existência e unicidade. Assim, no universo $\mathbb{R}$:

$$a \neq 0 \Rightarrow \forall b, \exists^1 x : ax = b.$$

Índice

	<i>Págs.</i>
NOTA DE APRESENTAÇÃO	7
Capítulo I. INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA	
1. Sinais e expressões	11
2. Termos e proposições.....	12
3. Distinção entre a designação e o designado	13
4. Relação lógica de identidade	14
5. Indivíduos e classes; relação de pertença	15
6. Relatividade dos conceitos de indivíduo (ou elemento) e de classe (ou conjunto). Universo lógico e tipos lógicos	17
7. Dar ou definir um conjunto	18
8. Conjuntos finitos e conjuntos infinitos.....	19
9. Valores lógicos das proposições	20
10. Operações lógicas sobre proposições	22
11. As operações lógicas, consideradas como operações sobre valores lógicos.....	25
12. As operações lógicas e as máquinas de calcular	26
13. Propriedades da conjunção e da disjunção.....	30
14. Propriedades da negação; suas relações com a conjunção e a disjunção.....	34
15. Implicação material e dedução	36
15a. Propriedades da implicação; relações desta com as outras operações lógicas. Novos tipos de silogismo	42
16. Equivalência material	46
17. Polisilogismos. Dedução e indução. Teorias dedutivas	49
18. Expressões com variáveis.....	53
19. Tipos de expressões com variáveis.....	56
20. Condições universais e condições impossíveis.....	57
21. Equivalência formal. Princípios lógicos de equivalência	59
22. Cálculo proposicional com variáveis.....	62

	<i>Págs.</i>
23. Propriedades das operações lógicas sobre condições	66
24. Quantificadores	67
25. Propriedades dos quantificadores. Novos tipos de silogismos ..	70
26. Segundas leis de De Morgan	72
27. Quantificação parcial e quantificação múltipla	73
28. Implicação formal	76
29. Propriedades da implicação formal. Novos tipos de silogismo ..	79
30. Equivalência formal; 'condição necessária' e 'condição suficiente'. Definições lógicas	82
31. Existência e unicidade	84
 Capítulo II. A LÓGICA EM TERMOS DE CONJUNTOS	
1. Conjuntos definidos por condições	85
2. Conjuntos com um só elemento e conjunto vazio	87
3. Relação de inclusão	89
4. Subconjuntos dum conjunto finito	92
5. Intervalos limitados em $\mathbb{R}$	93
6. Intervalos ilimitados em $\mathbb{R}$	95
7. Propriedades da relação de inclusão	96
8. Intersecção de dois conjuntos	99
9. Reunião de dois conjuntos	102
10. Complementar dum conjunto	104
11. Propriedades das operações lógicas sobre conjuntos	106
12. Compreensão e extensão	109
13. Intersecção ou reunião dos conjuntos duma dada família	111
14. Pares ordenados	113
15. Produto cartesiano de dois conjuntos. Conceito de relação binária	116
16. Produto cartesiano de três conjuntos; relações ternárias	118
17. Sequências. Conceitos gerais de produto cartesiano e de relação	120
18. Generalidades sobre relações binárias	122
19. Restrições duma relação	124
20. Relações reflexivas e relações anti-reflexivas	125
21. Relação inversa. Relações simétricas e relações anti-simétricas	127
22. Relações transitivas. Relações de equivalência	129
 Capítulo III. NÚMEROS INTEIROS E CÁLCULO COMBINATÓRIO	
1. Número de elementos dum conjunto	133
2. Reunião de dois conjuntos disjuntos e soma de dois números	137

	<i>Págs.</i>
3. Comutatividade e associatividade da adição. Adição iterada. . . .	140
4. Relação de grandeza entre números.	142
5. Relação de grandeza lata	145
6. Adição e relação de grandeza.	146
7. Subtracção.	149
8. Multiplicação.	150
9. Divisão exacta.	152
10. Multiplicação em N_0	154
11. Números infinitos	154
12. Objecto do cálculo combinatório. Número de elementos da reunião de dois ou mais conjuntos	157
13. Número de elementos do produto cartesiano de dois ou mais conjuntos	159
14. Número de subconjuntos dum conjunto finito	164
15. Arranjos e permutações	166
16. Combinações.	170
Capítulo IV. FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL	
1. Primeiros exemplos.	171
2. Conceito geral de aplicação (ou função de uma variável)	174
3. Domínio de existência dum expressão	176
4. Maneiras de definir uma função. Identidade de funções	178
5. Extensão e restrição dum aplicação	182
6. Contradomínio dum aplicação. Aplicações sobrejectivas	183
7. Aplicações biunívocas.	186
8. Aplicação inversa dum aplicação biunívoca	189
9. Aplicação identidade.	192
10. Produto de duas aplicações	193
11. Produto dum aplicação pela identidade	198
12. Produto de duas aplicações inversas uma da outra.	199
13. Aplicação inversa dum produto.	201
14. Equipotência de dois conjuntos	204
15. Produto de três ou mais aplicações. Potências de aplicações . .	204
17. Associatividade da multiplicação de operadores	207
18. Funções reais de variável real.	209
19. Operações sobre funções de variável real	210
20. Operador lógico de explicitação	211
21. Funções definidas implicitamente; relações funcionais e funções	212
22. Funções plurívocas.	217

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Dezembro de 1974

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA