J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

1.º volume

1.º tomo

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

CAPÍTULO II

A LÓGICA EM TERMOS DE CONJUNTOS

1. **Conjuntos definidos por condições.** Já atrás nos ocupámos da noção de conjunto e vimos que só em casos especiais (conjuntos finitos pouco numerosos) um conjunto pode ser definido pela indicação dos elementos que o constituem. Exceptuados esses casos, um conjunto é geralmente definido por meio de uma *condição* (ou *propriedade*), que é verificada por todos os elementos do conjunto *e só por esses.* Tal condição pode sempre ser expressa sob a forma duma expressão proposicional com uma variável livre. Consideremos, por exemplo, *no universo* $\mathbb{N}$, a expressão proposicional:

$$x \text{ é múltiplo de } 3 \wedge x \text{ é múltiplo de } 5$$

Ela exprime a propriedade de um número x *ser ao mesmo tempo múltiplo de* 3 *e de* 5. Verificam esta condição os números 15, 30, 45, ...; não a verificam os números 3, 6, 12, 17, 20, ... Porém, o conjunto de todos os números naturais que verificam tal condição é *infinito.* Designemos esse conjunto por 'A'. Para indicar que A é o conjunto definido pela referida condição, escreve-se simbolicamente:

$$A = \{x : x \text{ é múltiplo de } 3 \wedge x \text{ é múltiplo de } 5\}$$

o que se lê: 'A é o conjunto dos elementos x tais que: x é múltiplo de 3 $\wedge$ x é múltiplo de 5'. É claro que o mesmo conjunto pode ser definido por *qualquer condição equivalente à primeira,* por exemplo a seguinte:

x é múltiplo de 15,

visto que os números que verificam uma são exactamente os mesmos que verificam a outra. Será, portanto, também:

$$A = \{ x: x \text{ é múltiplo de } 15 \},$$

em que o símbolo { x: } se lê ainda 'conjunto dos elementos x tais que'. É claro que neste caso a letra x é uma *variável aparente,* tal como no caso dos quantificadores.

Assim:

Duas condições equivalentes definem o mesmo conjunto. Duas condições não equivalentes definem conjuntos distintos.

Por outras palavras: *a equivalência de condições traduz-se na identidade de conjuntos.*

Outros exemplos:

I. No universo $\mathbb{R}$, as inequações $2t - 1 > 0$ e $t > 1/2$ são *equivalentes,* isto é, *têm o mesmo conjunto de soluções.* Assim, a equivalência:

$$2t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{2}$$

traduz-se na identidade de conjuntos:

$$\{ t : 2t - 1 > 0 \} = \{ t : t > \frac{1}{2} \}$$

II. Analogamente, tem-se:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4$$

e, portanto:

$$\{x : x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{x : (x-1)^2 = 4\} = \{-1, 3\}$$

III. As condições $x(x-2) = 0$ e $x(x+2) = 0$ não são equivalentes; definem, pois, conjuntos distintos:

$$\{x : x(x-2) = 0\} = \{0, 2\}, \{x : x(x+2) = 0\} = \{0, -2\}$$

IV. No universo das figuras geométricas a propriedade de ser *triângulo equilátero* equivale à propriedade de ser *triângulo equiângulo*. Quer isto dizer, portanto, que as duas propriedades definem o *mesmo conjunto de figuras*.

2. **Conjuntos com um só elemento e conjunto vazio.** Consideremos no universo $\mathbb{R}$ a condição $x + 1 > x$. Trata-se, é claro, duma *condição universal*, equivalente às condições $x = x$, $x^2 \geqslant 0$, etc. O conjunto que lhe corresponde é, portanto, o próprio universo $\mathbb{R}$, isto é:

$$\mathbb{R} = \{x : x + 1 > x\} = \{x : x = x\} = \ldots$$

Assim, o conjunto definido por uma condição universal é o universo.

Consideremos, agora, em $\mathbb{R}$ a equação $2x + 3 = x$. É fácil ver que *existe um número real* x *e um só* que verifica esta condição: o número -3. Somos, assim, levados a escrever:

$$\{x : 2x + 3 = x\} = \{-3\}$$

e a dizer que o conjunto das soluções da equação $2x + 3 = x$ tem um único elemento ou que é um *conjunto singular*. Note-se que, na linguagem comum, a palavra 'conjunto' implica a ideia de pluralidade, isto é, um conjunto tem, por natureza, mais de um elemento.

Mas, como é sabido, a matemática necessita de uma linguagem própria, ao mesmo tempo cómoda e rigorosa, que se afasta muitas vezes da linguagem comum. É necessário, também, notar o seguinte:

Em matemática, uma coisa é um conjunto singular e outra coisa é o elemento que forma esse conjunto.

Por exemplo, uma coisa é o conjunto $\{-3\}$ e outra coisa é o número -3. Assim, poderemos escrever:

$$-3 \in \{-3\} \quad , \quad \text{mas não} \quad -3 = \{-3\}$$

Consideremos, agora, em $\mathbb{R}$ a condição $x + 1 = x$. Trata-se, como se vê, duma *condição impossível:* não existe nenhum número que a verifique, como não existe nenhum número que verifique a condição $x \neq x$, etc. Pois bem, por comodidade de linguagem, convenciona-se dizer que *o conjunto de elementos que verificam uma condição impossível é o conjunto vazio (ou o conjunto com nenhum elemento).* Trata-se, como se vê, de mais uma convenção matemática que alarga o significado usual da palavra 'conjunto'. Por exemplo, em vez de dizer que não há fósforos numa caixa, pode dizer-se que a caixa está vazia ou ainda que *o conjunto dos fósforos na caixa é vazio.*

O conjunto vazio num determinado universo costuma ser designado pelo símbolo $\varnothing$. Assim, no universo $\mathbb{R}$,

$$\{ x : x + 1 = x \} = \varnothing$$

o que significa o mesmo que: $\sim \exists_x \; x + 1 = x$

Analogamente: $\varnothing = \{ x : x \neq x \} = \{ x : x^2 < 0 \} = \ldots$

Assim, num dado universo, a toda a condição numa variável vem a corresponder um conjunto: o conjunto dos elementos que verifi-

cam essa condição. Em particular, às condições universais corresponde o universo e às condições impossíveis corresponde o conjunto vazio.

Note-se que, reciprocamente, a todo o conjunto A corresponde, pelo menos, uma condição: a condição $x \in A$.

Convém ainda notar que um conjunto definido pela indicação dos seus elementos é, na realidade, definido por uma condição disjuntiva. Por exemplo:

$$\{3, 5, 9\} = \{x : x = 3 \vee x = 5 \vee x = 9\}$$

OBSERVAÇÃO. Na linguagem comum, o universo e o conjunto vazio são designados, respectivamente, pelas palavras *tudo* (= *todas as coisas*) e *nada* (= *nenhuma coisa*). Mas, é claro, que estas palavras têm *significado relativo,* isto é, dependente do universo considerado. Assim também, na linguagem matemática, o significado de 'conjunto vazio' depende do universo de que se trata; por exemplo, uma coisa é o *conjunto vazio de números* ('nenhum número'), outra o *conjunto vazio de pessoas* ('nenhuma pessoa' ou 'ninguém'), etc.

3. **Relação de inclusão.** Consideremos a proposição:

$$x \text{ é } \textit{mamífero} \;\underset{\bullet}{\Rightarrow}\; x \text{ é } \textit{vertebrado}$$

que se traduz em linguagem comum por:

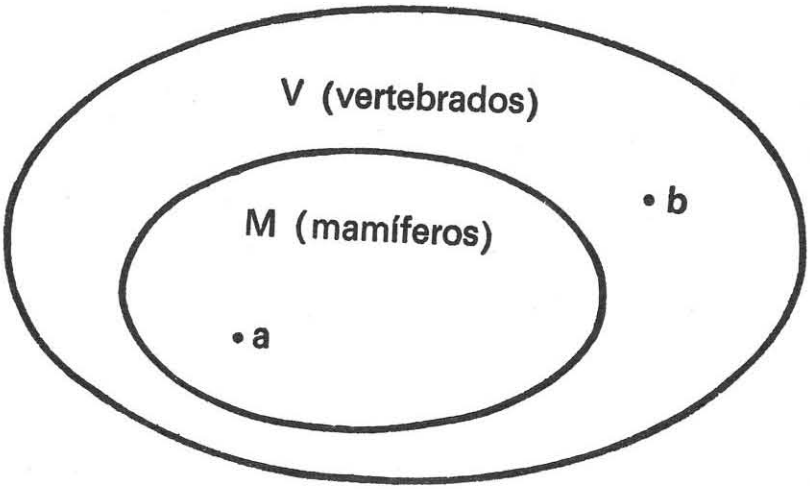
Todo o mamífero é vertebrado.

À condição 'x é mamífero' corresponde o *conjunto dos mamíferos* e à condição 'x é vertebrado' corresponde o *conjunto dos vertebrados.* Designemos, respectivamente, por M e V estes dois conjuntos (que supomos definidos). Deste modo, a anterior proposição pode escrever-se:

$$x \in M \underset{\bullet}{\Rightarrow} x \in V$$

isto é: *todo o indivíduo que pertence a M pertence também a* V. Exprime-se este facto dizendo que o conjunto M está *contido* no conjunto V e escrevendo M $\subset$ V.

Esta situação pode ser figurada por meio do diagrama junto, em que se representam o conjunto M e o conjunto V. O ponto *a* indica um elemento de M (portanto de V) e o ponto *b* indica um elemento de V que não pertence a M (na verdade existem vertebrados que não são mamíferos).



Dum modo geral, diz-se que um conjunto A está *contido* num conjunto B, quando todo o elemento de A também é elemento de B. Indica-se este facto escrevendo A $\subset$ B. Assim, tem-se por definição:

$$A \subset B \quad \text{se e só se} \quad x \in A \underset{\bullet}{\Rightarrow} x \in B$$

A relação assim definida entre conjuntos é chamada *inclusão*. Como se vê, *a inclusão entre conjuntos traduz a implicação (formal) entre condições*.

Em vez de dizer 'A está contido em B', também se pode dizer 'A é um *subconjunto* de B', ou 'A é uma *parte* de B'.

Dados dois conjuntos A e B, pode acontecer que se tenha ao mesmo tempo $A \subset B$ e $B \subset A$. Neste caso, todo o elemento de A é elemento de B e vice-versa; por outras palavras: A e B são *formados pelos mesmos elementos;* são, pois, o mesmo conjunto, o que se exprime escrevendo $A = B$. Assim, tem-se:

$$A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$$

Por exemplo, todo o triângulo equilátero é um tirângulo equiângulo e vice-versa. Logo, se designarmos por T_{el} o conjunto dos triângulos equiláteros e por T_{ea} o conjunto dos triângulos equiângulos, teremos, em geometria euclidiana:

$$T_{el} \subset T_{ea} \quad \text{e} \quad T_{ea} \subset T_{el}, \quad \text{portanto} \quad T_{el} = T_{ea}$$

Aliás, já tínhamos visto atrás que a identidade entre conjuntos traduz a equivalência entre condições, isto é, tem-se:

$$A = B \text{ se e só se } x \in A \underset{x}{\Leftrightarrow} x \in B$$

Se A está contido em B, mas B *não* está contido em A, diz-se que A está *contido estritamente* em B, ou ainda que é um *subconjunto estrito* ou uma *parte estrita* de B. Neste caso, escreveremos: $A \subset B \wedge A \neq B$.

Por exemplo, o conjunto dos mamíferos está contido estritamente no conjunto dos vertebrados, visto que existem vertebrados que não são mamíferos. Podemos, pois, escrever:

$$M \subset V \wedge M \neq V$$

Outro exemplo: é sabido que todo o múltiplo de 6 (p. ex. 6, 12, 18, ...) é também múltiplo de 3, mas que há múltiplos de 3 que não são múltiplos de 6 (p. ex. 3, 9, 15, ...). Portanto, se designarmos por M_6 o conjunto dos múltiplos de 6 e por M_3 o conjunto dos múltiplos de 3, teremos:

$$M_6 \subset M_3 \wedge M_6 \neq M_3$$

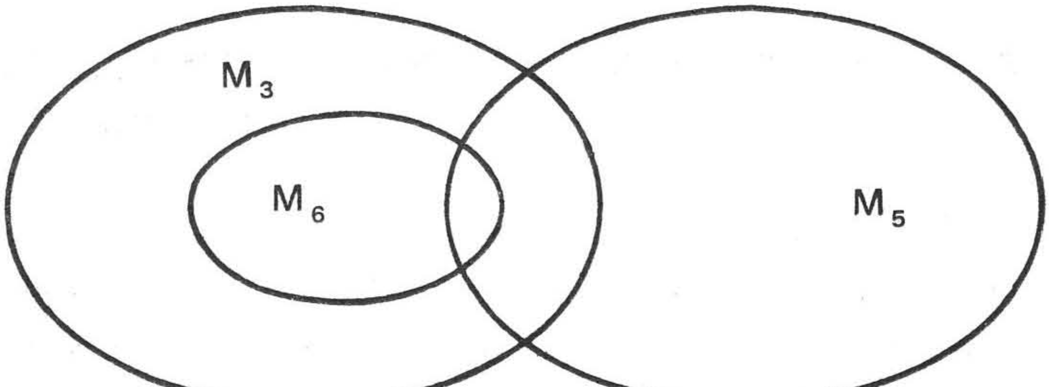
Diz-se que A contém B, quando B está contido em A. Para indicar que A contém B escreve-se $A \supset B$. Assim tem-se, por definição:

$$A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$$

Por exemplo, $M_3 \supset M_6$, $T_{el} \supset T_{ea}$, etc.

Pode acontecer que, dados dois conjuntos A *e* B, *nenhum deles esteja contido no outro.* Por exemplo, se designarmos por M_5 o conjunto dos múltiplos de 5, não podemos escrever $M_5 \subset M_3$ nem $M_5 \supset M_3$, porque há múltiplos de 5 que não são múltiplos de 3 (p. ex. 5) e múltiplos de 3 que não são múltiplos de 5 (p. ex. 3).

Esta situação está figurada no diagrama junto.



4. **Subconjuntos dum conjunto finito.** Quando é dado um conjunto finito, não muito numeroso, é possível indicar todos os seus subconjuntos (ou partes). Para isso, podemos, p. ex., começar pelo

conjunto vazio, considerar depois os conjuntos com um só elemento, em seguida os conjuntos com dois elementos, e assim sucessivamente, até ao conjunto total (que podemos tomar como universo). Por exemplo, é fácil reconhecer que o conjunto de números $\{1, 2, 3, 4\}$ tem ao todo 16 subconjuntos, que são os seguintes:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$$
$$\{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}.$$

Tem-se, por exemplo: $\{1, 4\} \subset \{1, 3, 4\}$, mas não $\{1, 4\} \subset \{1, 2, 3\}$, nem $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 4\}$.

5. **Intervalos limitados em $\mathbb{R}$.** Consideremos dois números reais quaisquer, por exemplo 2 e 5. São usadas em matemática as seguintes convenções:

$$[2, 5] = \{x : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$$
$$]2, 5[= \{x : 2 < x < 5\} \quad \text{(sendo } \mathbb{R} \text{ o universo)}$$
$$[2, 5[= \{x : 2 \leqslant x < 5\}$$
$$]2, 5] = \{x : 2 < x \leqslant 5\}$$

Portanto, segundo a convenção do n.º 2, $[2, 5]$ é o conjunto de todos os números reais x tais que $2 \leqslant x \leqslant 5$; e, analogamente, nos outros casos. Por exemplo, tem-se:

$$2 \in [2, 5] \ , \ 5 \in [2, 5] \ , \ 3 \in [2, 5],$$
$$3{,}27 \in [2, 5] \ , \ \pi \in [2, 5] \ , \ 4 \in]2, 5[\ , \ 3{,}27 \in [2, 5[\ , \ \text{etc.}$$

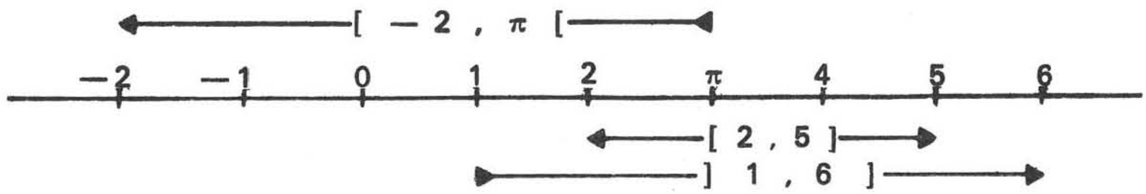
mas

$$2 \notin]2, 5[\ , \ 5 \notin]2, 5[\ , \ 1 \notin [2, 5] \ , \ 1{,}99 \notin [2, 5],$$
$$0 \notin [2, 5] \ , \ -3 \notin [2, 5] \ , \ 5{,}001 \notin [2, 5] \ , \ \text{etc.}$$

Os conjuntos $[2, 5]$, $]2, 5[$, $[2, 5[$, $]2, 5]$ são chamados *intervalos de extremos* 2 e 5, sendo $[2, 5]$ *fechado* (porque lhe pertencem os extremos), $]2, 5[$ *aberto* (porque não lhe pertencem os extremos), $[2, 5[$ *aberto à direita* (porque não lhe pertence o extremo direito) e $]2, 5]$ *aberto à esquerda* (porque não lhe pertence o extremo esquerdo). *Todos estes conjuntos são, evidentemente, infinitos, isto é, têm uma infinidade de elementos.*

O que se acaba de dizer para os números 2 e 5, estende-se a qualquer par de números reais *a* e *b* tais que $a < b$. Por exemplo, $[-2, \pi[$ é o *intervalo de extremos* -2 e π *aberto à direita* ou seja o *conjunto de todos os números reais* x *tais que* $-2 \leqslant x < \pi$.

Já se sabe dos anos anteriores como os números reais podem ser representados por pontos duma recta (aliás, este assunto será revisto mais adiante em termos de maior rigor).



Nestas condições, é fácil ver que o intervalo $[2, 5]$ é representado pelo *segmento de recta* de extremos correspondentes a 2 e 5; por sua vez o intervalo $[-2, \pi[$ é representado pelo segmento de extremos correspondentes a -2 e π, *mas excluindo o segundo extremo;* etc.

Notem-se as seguintes inclusões (estritas):

$$[2, 5] \subset \,]1, 6] \quad , \quad]2, 5] \subset [2, 5]$$
$$]2, 5[\, \subset \,]2, 5] \quad , \quad]2, 5[\, \subset [2, 5[, \text{ etc.}$$

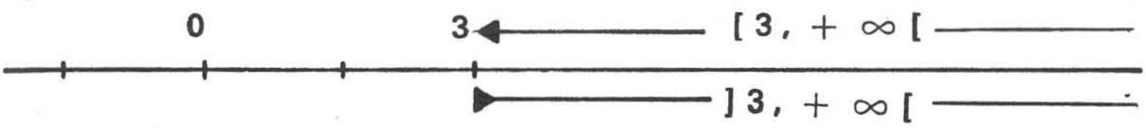
Mas, *não* é verdade que:

$$[-2, \pi[\, \subset [2, 5] \quad , \quad [2, 5] \subset [-2, \pi]$$
$$[2, 5] \subset \,]2, 5] \quad , \quad \text{etc.}$$

6. **Intervalos ilimitados em IR.** Consideremos um número real qualquer, por exemplo 3. São adoptadas, em matemática, as seguintes definições:

$$\left.\begin{array}{l}[3, +\infty[\ = \{x : x \geqslant 3\} \\ ]3, +\infty[\ = \{x : x > 3\}\end{array}\right\} \text{(universo IR)}$$

Os conjuntos $[3, +\infty[$ e $]3, +\infty[$ são chamados *intervalos de extremos* 3 *e* $+\infty$ (ler 'mais infinito') sendo o primeiro *fechado à esquerda* e o segundo *aberto à esquerda*. Representando os números reais por pontos duma recta, como é costume:



O intervalo $[3, +\infty[$ é representado pela semi-recta de origem correspondente a 3, situada à direita deste ponto; por sua vez o intervalo $]3, +\infty[$ é representado pela mesma semi-recta *menos a origem*. Como se vê, estes intervalos são *ilimitados à direita,* isto é, não existe nenhum número real que seja maior do que *todos* os elementos do intervalo. *Deste modo, o símbolo* $+\infty$ *não designa nenhum número real e não é representado por nenhum ponto da recta: está apenas a indicar que os referidos intervalos são ilimitados à direita.*

Analogamente, põe-se:

$$]-\infty, 3] = \{x : x \leqslant 3\}, \quad]-\infty, 3[\ = \{x : x < 3\}$$

e diz-se que $]-\infty, 3]$ e $]-\infty, 3[$ são intervalos de extremos $-\infty$ (ler 'menos infinito') e 3, sendo o primeiro *fechado à direita* e o *segundo aberto à direita*. O símbolo $-\infty$ não designa nenhum número real; está apenas a indicar que os intervalos são *ilimitados à esquerda*. A representação geométrica é análoga à do caso anterior.

Naturalmente, o que se acaba de dizer para o número 3, estende-se a todo o número real.

Finalmente é costume também designar por $]-\infty, +\infty[$ o conjunto $\mathbb{R}$ (de *todos* os números reais) e chamar-lhe *intervalo de extremos* $-\infty$ e $+\infty$ (isto é, *ilimitado à direita e à esquerda)*. A sua representação geométrica é a recta inteira.

7. **Propriedades da relação de inclusão.** Quando dizemos apenas 'inclusão' referimo-nos sempre a *inclusão lata*. Pelo que vimos no número 3, tem-se:

1) $A \subset A$, qualquer que seja o conjunto A
2) $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$

Exprime-se 1), dizendo que a inclusão é *reflexiva*.

Exprime-se 2), dizendo que a inclusão é *anti-simétrica* (em sentido lato).

Mas tem-se ainda a propriedade:

3) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Com efeito, as fórmulas $A \subset B$ e $B \subset C$ significam respectivamente:

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{e} \quad x \in B \Rightarrow x \in C$$

Logo, pela propriedade transitiva da implicação, tem-se:

$$x \in A \Rightarrow x \in C \quad , \quad \text{o que significa que } A \subset C$$

Por exemplo, designemos por M, V e A, respectivamente, o conjunto dos mamíferos, o conjunto dos vertebrados e o conjunto dos animais. Então:

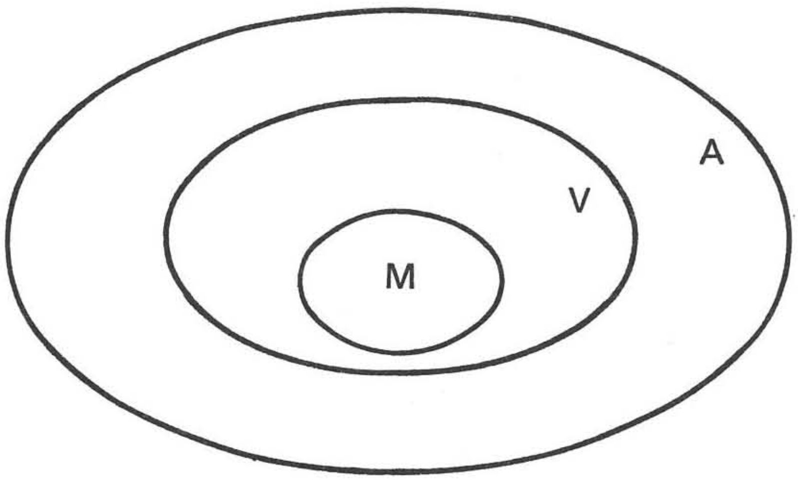
I. $M \subset V$ (todo o mamífero é um vertebrado)

II. $V \subset A$ (todo o vertebrado é um animal)

Logo

III. $M \subset A$ (todo o mamífero é um animal).

Esta situação está figurada no diagrama junto.



Assim, a transitividade da inclusão não é mais do que a tradução fiel da transitividade da implicação. Em particular, a dedução de III a partir de I e II é um *silogismo,* em que as *premissas* são I e II (respectivamente *premissa menor* e *premissa maior)* e a *conclusão* é III.

Quando, dados três conjuntos A, B, C, se tem $A \subset B$ e $B \subset C$, pode-se escrever, para indicar esse facto:

$$A \subset B \subset C$$

Analogamente para mais de três conjuntos.

É também de notar que a relação de pertença (representada por '$\in$') não tem nenhuma das referidas propriedades. Por exemplo, seja P um ponto, r uma recta que passe por P e $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as rectas do espaço. Teremos, então:

$$P \in r \wedge r \in \mathcal{R}$$

(isto é: 'P é um ponto de r e r é uma recta'); mas é claro que não podemos concluir daqui que:

$$P \in \mathcal{R} \text{ (isto é que 'P é uma recta')}$$

Isto mostra como é necessário distinguir a relação de pertença da de inclusão; de contrário poderíamos incorrer em paralogismos do tipo dos seguintes:

'Esta bola é azul; o azul é uma cor; logo esta bola é uma cor'.

'Pedro e Paulo são Apóstolos; os Apóstolos são doze; logo Pedro e Paulo são doze.

Estes mesmos exemplos evidenciam a necessidade de distinguir os tipos lógicos. Assim, a bola é um *indivíduo,* o azul é uma propriedade definidora de um *conjunto* de objectos e, portanto, o conjunto das cores pode considerar-se um *conjunto de tipo* 2.

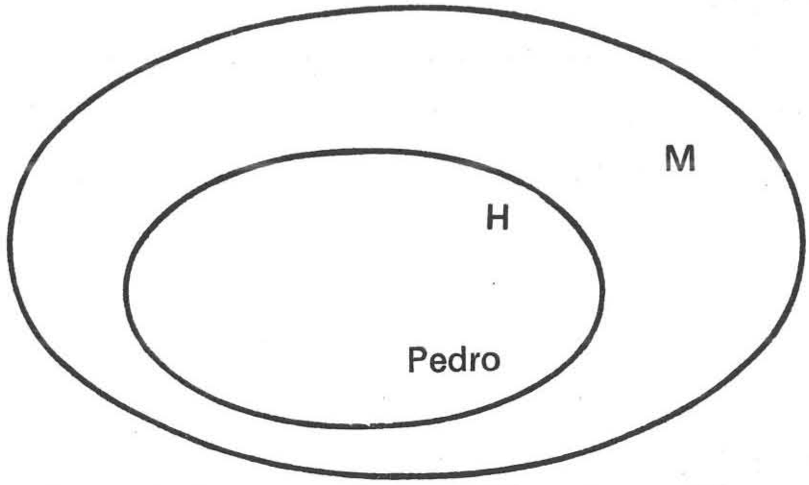
Todavia, dados dois conjuntos A e B quaisquer e um elemento *a*, tem-se pela própria definição da relação $\subset$:

$$a \in A \wedge A \subset B \Rightarrow a \in B$$

Este facto dá origem a um novo tipo de silogismo, diferente do anterior. Por exemplo, seja H o conjunto dos homens e M o conjunto dos seres mortais (conjunto que supomos definido). Podemos então formar o silogismo (Cap. 1, n.º 29):

$\text{Pedro} \in H,\ H \subset M \therefore \text{Pedro} \in M$ ou seja, em linguagem comum:

'Pedro é homem, todos os homens são mortais; logo Pedro é mortal.



É de registar ainda a propriedade (Cap. I, n.º 29, propr. I e II): *Qualquer que seja o conjunto A num universo U tem-se:*

$$\emptyset \subset A \subset U$$

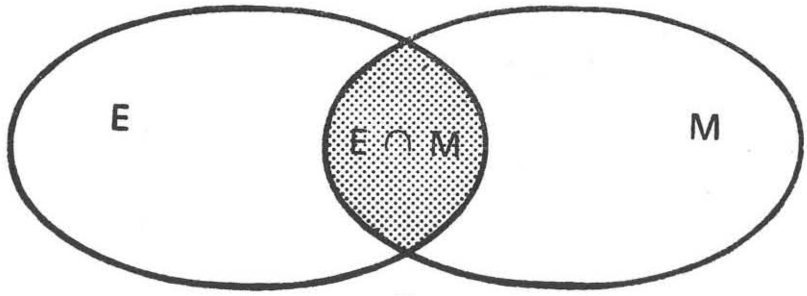
8. **Intersecção de dois conjuntos.** Consideremos as duas condições:

x *é estudante* x *é menor de* 18 *anos*

À primeira corresponde o *conjunto dos estudantes* que vamos designar por E e à segunda o *conjunto dos menores de* 18 *anos* que vamos designar por M. Consideremos, agora, a conjunção das condições dadas:

x *é estudante* $\wedge$ x *é menor de* 18 *anos*

É claro que lhe corresponde o *conjunto dos estudantes menores de* 18 *anos,* isto é, dos indivíduos que pertencem ao mesmo tempo a E e a M. Diremos que este conjunto é a *intersecção de* E *com* M e designá-lo-emos por $E \cap M$.



Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A *e* B, *chama-se intersecção de* A *com* B *(e representa-se por* A ∩ B*) o conjunto de todos os entes que pertencem ao mesmo tempo a* A *e a* B; isto é, em escrita simbólica:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

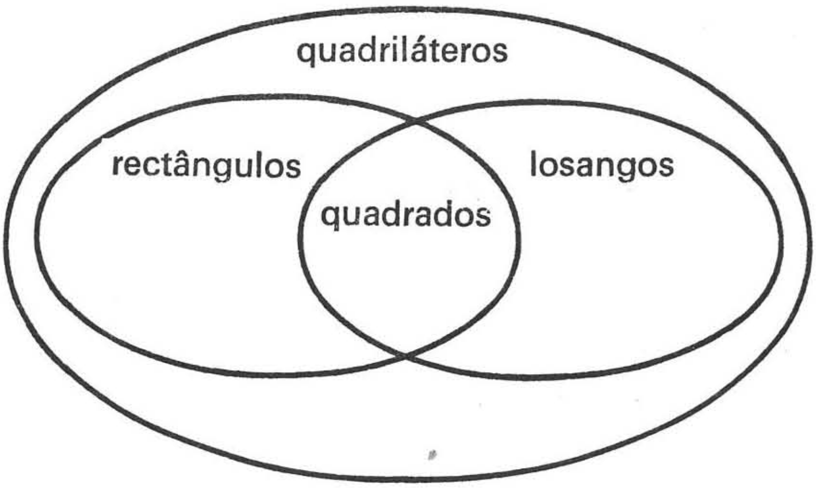
Também se chama *intersecção* à própria operação que, aplicada aos conjuntos A e B, dá como resultado A ∩ B. Como se vê, esta operação traduz, em linguagem de conjuntos, a *operação lógica de conjunção*; assim, a intersecção é também uma *operação lógica*.

Outros exemplos:

I. Designemos respectivamente por $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{Q}$ o conjunto dos rectângulos, o conjunto dos losangos e o conjunto dos quadrados. É fácil ver então que [1]:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$$

o que significa que os *quadrados são os rectângulos que também são losangos*.

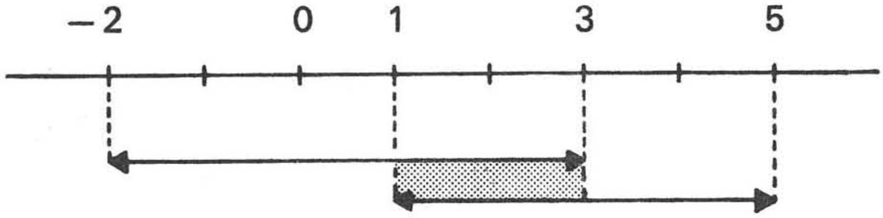


---

[1] Não esqueçamos que sendo cada uma destas figuras um conjunto de pontos, os conjuntos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{Q}$ são conjuntos de tipo 2.

II. Consideremos os intervalos $[-2, 3]$ e $[1, 5]$.
É fácil ver então que:

$$[-2, 3] \cap [1, 5] = [1, 3]$$



Analogamente: $]-2, 3] \cap]1, 5] =]1, 3]$, etc.

III. Sejam, agora, os intervalos $[-2, 1]$ e $[3, 5]$. É claro que não há nenhum número que pertença ao mesmo tempo aos dois, isto é, nenhum número x tal que:

$$-2 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 3 \leqslant x \leqslant 5$$

Por conseguinte a intersecção dos dois intervalos é o *conjunto vazio,* isto é $[-2, 1] \cap [3, 5] = \varnothing$. Analogamente, tem-se $[-2, 1] \cap]1, 3] = \varnothing$, etc.

IV. Vê-se imediatamente que:

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{2, 3\},$$
$$\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing, \text{ etc.}$$

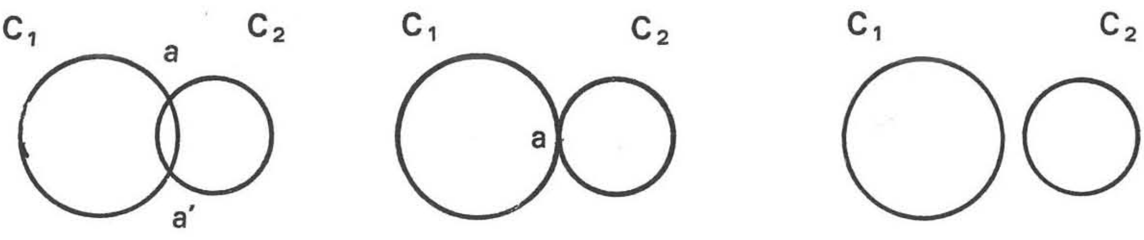
V. Designemos em geral por M_n o conjunto dos múltiplos dum número natural n. Tem-se, então:

$$M_3 \cap M_5 = M_{15}$$

isto é: *a intersecção do conjunto dos múltiplos de 3 com o conjunto dos múltiplos de 5 é o conjunto dos múltiplos de 15.*

VI. A intersecção de duas circunferências contidas num mesmo plano é formada por dois pontos, por um só ponto ou por nenhum (conjunto vazio), conforme a distância entre os seus centros é inferior, igual ou superior à soma dos raios:

1.º caso — 2.º caso — 3.º caso



$C_1 \cap C_2 = \{a, a'\}$ $\quad$ $C_1 \cap C_2 = \{a\}$ $\quad$ $C_1 \cap C_2 = \varnothing$

(Note-se que estas figuras não são simples diagramas: pretendem ser aproximadamente circunferências).

Em III, V e VI apresentam-se pares de conjuntos sem elementos comuns e cuja intersecção é, por isso, vazia. Pois bem:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que dois conjuntos A e B são disjuntos, quando não têm nenhum elemento comum, ou seja, quando* $A \cap B = \varnothing$.

Assim, o conceito de 'conjuntos disjuntos' traduz o conceito de 'condições incompatíveis'.

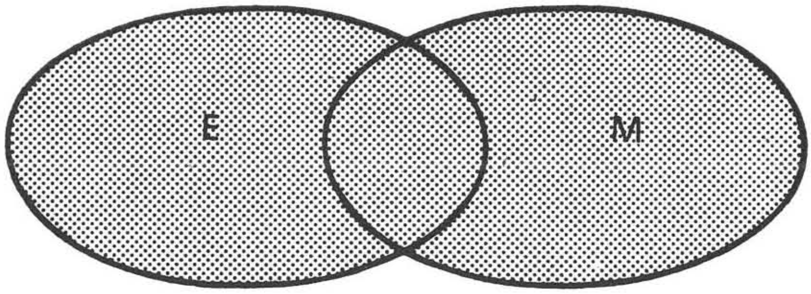
9. **Reunião de dois conjuntos.** Consideremos, novamente, as condições:

x *é estudante,* $\qquad$ x *é menor de 18 anos*

a que correspondem os conjuntos E e M, e passemos, agora, a considerar a disjunção:

x *é estudante* $\vee$ x *é menor de 18 anos.*

É claro que a esta condição corresponde o conjunto dos indivíduos que *ou são estudantes ou são menores de 18 anos, ou são ambas* *as coisas,* isto é, que pertencem a um pelo menos dos conjuntos E e M. Este conjunto é chamado *reunião de* E *com* M e designado por E ∪ M. Dum modo geral:



E ∪ M

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A *e* B, *chama-se reunião de* A *com* B, *e representa-se por* A ∪ B, *o conjunto de todos os entes que satisfazem à condição de pertencer a um, pelo menos, dos conjuntos* A, B. Simbolicamente:

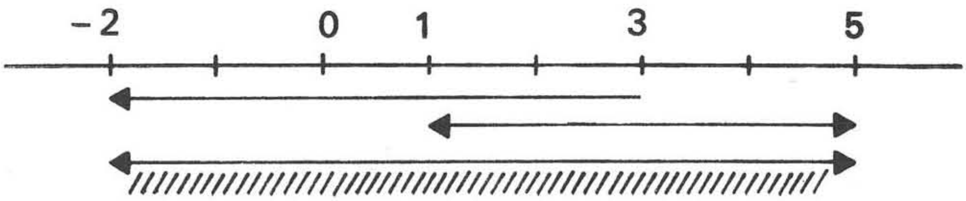
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Outros exemplos:

I. Sejam novamente $\mathcal{R}$ o conjunto dos rectângulos e $\mathcal{L}$ o conjunto dos losangos. Então é fácil ver que $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$ é o conjunto dos paralelogramas que têm os lados ou ângulos iguais (ou ambas as coisas).

II. É claro que:

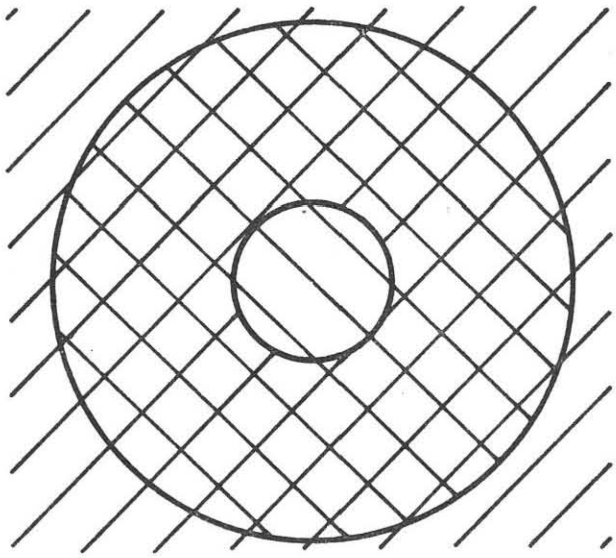
$$[-2, 3] \cup [1, 5] = [-2, 5]$$
$$[-2, 3] \cup]3, 5] = [-2, 5], \text{ etc.}$$



III. Vê-se, imediatamente, que:

$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{5\} \cup \{2, 7\} = \{2, 5, 7\}$, etc.

IV. Seja C o conjunto dos pontos dum plano cuja distância a um ponto p é inferior ou igual a 3 cm e seja D o conjunto dos pontos do mesmo plano cuja distância a p é igual ou superior a 1 cm. Então $C \cup D$ é o plano, enquanto $C \cap D$ é uma coroa circular.

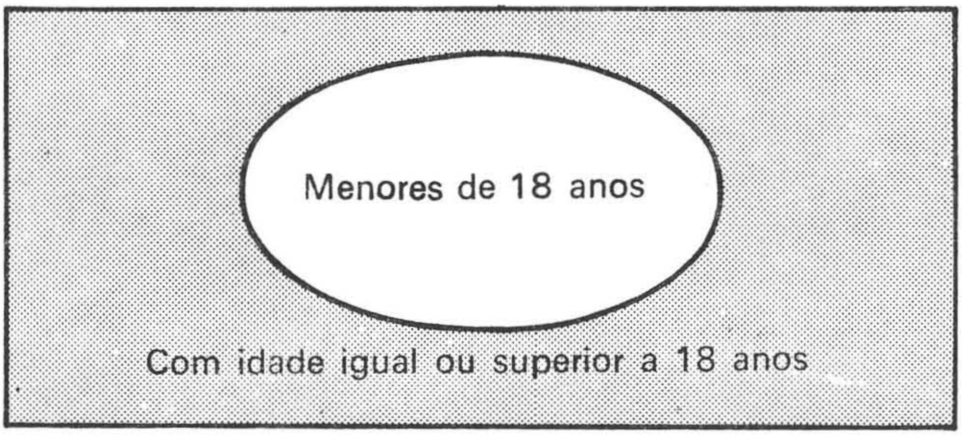


10. **Complementar dum conjunto.** Consideremos, no universo das pessoas, a propriedade 'x é menor de 18 anos', à qual corresponde o *conjunto dos indivíduos menores de 18 anos,* que designamos por M. À propriedade contrária ('x não é menor de 18 anos') corresponde o *conjunto dos indivíduos com idade igual ou superior a 18 anos.* Pois bem, este último conjunto é chamado o *complementar de* M e designado simbolicamente por $\complement M$.

Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Num dado universo* U, *chama-se complementar dum conjunto* A, *e representa-se por* $\complement A$, *o conjunto de todos os* *indivíduos (elemento de* U*), que não pertencem a* A. Simbolicamente:

$$\complement A = \{x : \sim x \in A\}$$



Assim, a passagem de um conjunto ao seu complementar é uma *operação lógica sobre conjuntos,* que traduz a operação lógica de negação. Mas é evidente que o resultado desta operação depende do universo fixado.

Exemplos:

I. No universo dos quadriláteros, o complementar do conjunto $\mathcal{Q}$ (dos quadrados) é o conjunto dos quadriláteros que ou não são rectângulos ou não são losangos (ou nem uma nem outra coisa). No universo das figuras geométricas, o complementar de $\mathcal{Q}$ é o conjunto de todas as figuras que não são quadrados.

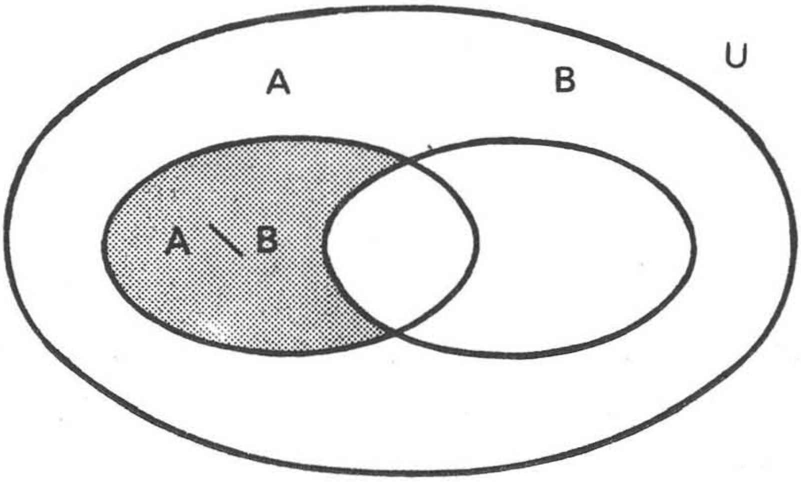
II. No universo dos números naturais ($\mathbb{N}$), o complementar do conjunto dos números pares é o conjunto dos números ímpares. No universo dos números reais ($\mathbb{R}$), o complementar do conjunto dos números pares é o conjunto de todos os números reais que ou não pertencem a $\mathbb{N}$ ou são ímpares.

III. Em $\mathbb{N}$ o complementar de $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto dos números maiores que 3. Em $\mathbb{R}$ o complementar de $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto:

$$]-\infty, 1[\,\cup\,]1, 2[\,\cup\,]2, 3[\,\cup\,]3, +\infty[$$

A noção do conjunto complementar pode ser generalizada do seguinte modo:

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A *e* B, *chama-se complementar de* B *em* A *ao conjunto dos elementos de* A *que não pertencem a* B. *Designa-se este conjunto por* $A \setminus B$.



É claro que $A \setminus B = A \cap \sim B$ e $\complement A = U \setminus A$, sendo U o universo.

Por exemplo, se for A o conjunto dos portugueses e B o conjunto das pessoas que sabem ler, será $A \setminus B$ *o conjunto dos portugueses que não sabem ler.*

11. **Propriedades das operações lógicas sobre conjuntos.** As propriedades das operações lógicas sobre conjuntos são uma tradução imediata das propriedades das operações correspondentes sobre proposições ou sobre condições. Assim, representando por A, B, C, ... conjuntos quaisquer num universo U, teremos sempre:

1. $$A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A$$

isto é, a intersecção e a reunião são operações *comutativas.*

2. $$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad , \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

isto é, a intersecção e a reunião são operações *associativas.*

3. $A \cap U = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cup \varnothing = A$,

isto é, U é o *elemento neutro* da intersecção e *elemento absorvente* da reunião, enquanto $\varnothing$ é *elemento neutro* da reunião e *elemento absorvente* da intersecção.

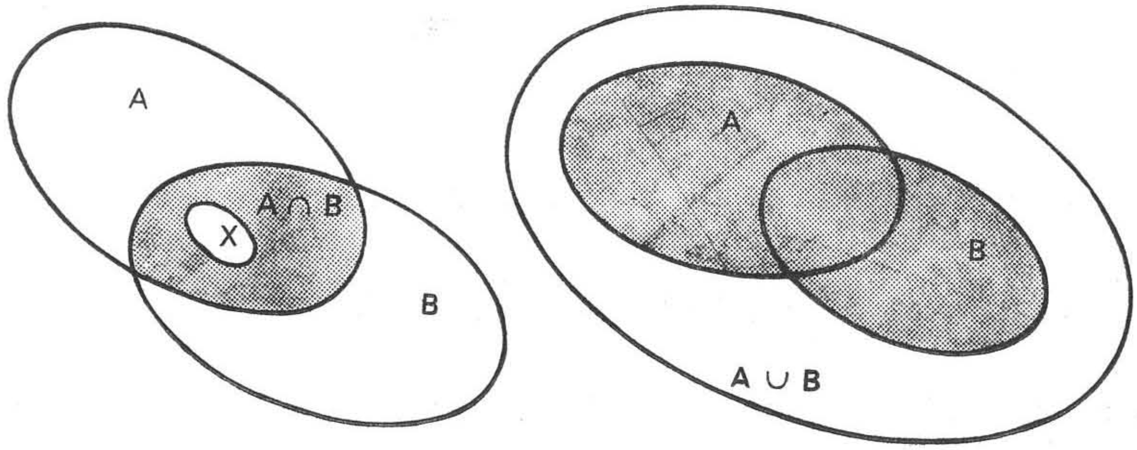
4. $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

isto é, a intersecção é *distributiva a respeito da reunião* e a reunião é *distributiva a respeito da intersecção.*

A reunião $A \cup B$ também é chamada *soma lógica* (ou apenas *soma*) de A com B e designada por $A + B$. A intersecção $A \cap B$ também é chamada *produto lógico* (ou apenas *produto*) de A por B, e designado por $A\ B$.

Há ainda propriedades que relacionam a relação de inclusão com a intersecção e a reunião, e que reflectem propriedades correspondentes da implicação com a conjunção e a disjunção. Essas propriedades equivalem a dizer que $A \cap B$ *é o máximo conjunto contido ao mesmo tempo em* A *e em* B *e que* $A \cup B$ *é o mínimo conjunto que contém ao mesmo tempo* A *e* B.



5. $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$

6. $X \subset A \wedge X \subset B \Rightarrow X \subset A \cap B$

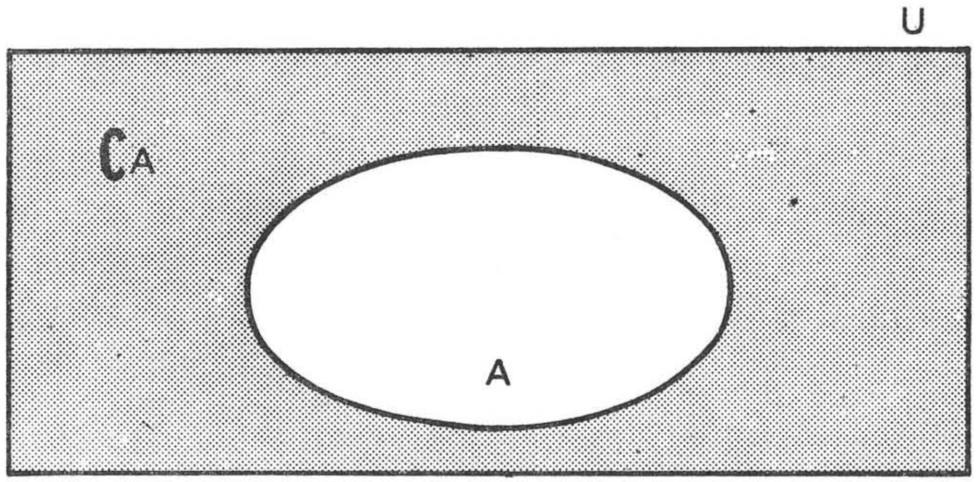
5'. $A \cup B \supset A \quad , \quad A \cup B \supset B$

6'. $X \supset A \wedge X \supset B \Rightarrow X \supset A \cup B$

Finalmente, apresentam-se as propriedades que relacionam a reunião, a intersecção e a inclusão com a passagem ao complementar. Assim, temos, qualquer que seja o conjunto A no universo U:

6. $A \cap \complement A = \varnothing$ e $A \cup \complement A = U$

Esta propriedade, que resulta imediatamente da definição de $\complement A$, podia, por sua vez, ser tomada como definição de $\complement A$: *é o conjunto disjunto de* A *cuja reunião com* A *é o universo.*



As primeiras leis de De Morgan assumem agora o aspecto:

7. $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B, \quad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

isto é: *a complementação transforma a intersecção na reunião dos complementares e a reunião na intersecção dos complementares.*

Por exemplo, o complementar do conjunto dos estudantes menores de 18 anos é a reunião do conjunto dos não estudantes com o conjunto dos não menores de 18 anos.

Por sua vez, tem-se:

8. $A \subset B \Leftrightarrow \complement A \supset \complement B$

isto é: *a complementação transforma a relação* $\subset$ *na relação* $\supset$.

Daqui resulta o PRINCIPIO DA DUALIDADE LÓGICA em termos de conjuntos:

Toda a proposição sobre conjuntos em que intervenham, no todo ou em parte, as operações $\cap$, $\cup$ *e as relações* $\subset$, $\supset$ *é equivalente à proposição que se obtém, mudando* $\cap$ *em* $\cup$, $\cup$ *em* $\cap$, $\subset$ *em* $\supset$ *e* $\supset$ *em* $\subset$.

12. **Compreensão e extensão.** As considerações anteriores mostram como a lógica das proposições se traduz na lógica dos conjuntos, em virtude da correspondência estabelecida entre condições (numa variável) e conjuntos. A própria linguagem corrente reflecte estes dois pontos de vista da lógica: *o ponto de vista da compreensão,* relativo a proposições e a propriedades (ou condições), e o *ponto de vista da extensão,* relativo a conjuntos (ou classes). Esta dualidade de pontos de vista dá origem a dois tipos de linguagem que por vezes se contradizem, pelo menos na aparência, podendo dar origem a equívocos.

Por exemplo, diz-se que a condição de ser homem *implica* a condição de ser mortal; por outras palavras: a propriedade de ser mortal *está contida* na de ser homem (ou ainda, é *uma* das propriedades que caracterizam a espécie humana). Por isso se usou, durante muito tempo, o sinal '$\supset$' em vez de '$\Rightarrow$' para exprimir a implicação. Assim, escrevia-se:

$$\text{ser homem} \supset \text{ser mortal}$$

Porém, passando de ponto de vista da compreensão ao da extensão (isto é, passando da linguagem das propriedades à dos conjuntos), tem-se:

conjunto dos homens $\subset$ conjunto dos mortais

Esta dualidade de linguagem estende-se às operações lógicas. Por exemplo, *juntando* várias propriedades, obtém-se geralmente uma propriedade *mais complexa* que as primeiras e que, por isso mesmo, é verificada por um *menor* conjunto de indivíduos. Por exemplo, o conjunto dos corpos *azuis e redondos* é menor que o conjunto dos corpos azuis e que o conjunto dos corpos redondos (é a sua intersecção). Exprime-se este facto na filosofia tradicional, dizendo que a *extensão (isto é, o número dos indivíduos) diminui, quando a compreensão (isto é, o número das propriedades) aumenta, e vice-versa*.

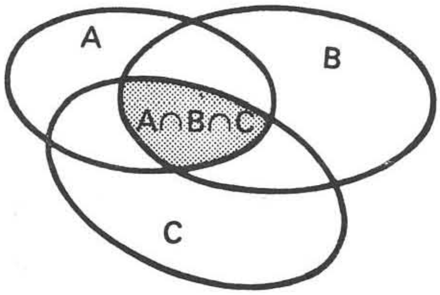
Por outro lado, observe-se que:

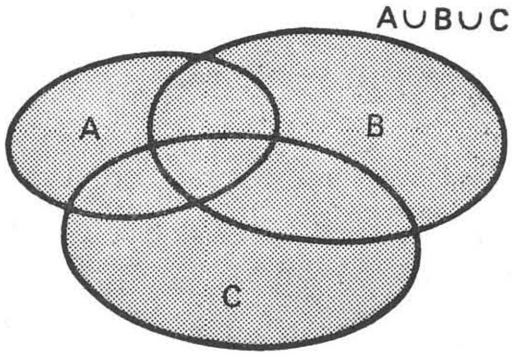
conjunto dos corpos *azuis ou redondos* = conjunto *dos corpos azuis e dos corpos redondos*.

Dum modo geral, na linguagem comum, os adjectivos exprimem propriedades, enquanto os substantivos comuns se referem a indivíduos dum conjunto. A palavra 'substantivo' vem de 'substância': a substância seria aquilo que *sub-está,* isto é, o suporte das propriedades — ou ainda o *indivíduo,* sem o qual não se manifestariam as propriedades que nele residem.

Considerações deste tipo conduzem a um ramo da filosofia, chamado *metafísica,* em que é preciso muito cuidado para não se cair em jogos estéreis de palavras e em becos sem saída. Para evitar estes riscos, a lógica matemática procura construir uma linguagem mais precisa e menos sujeita a equívocos, do que a linguagem comum. Neste sentido, para obter maior clareza e objectividade, adopta-se de preferência o ponto de vista da extensão.

13. Intersecção ou reunião dos conjuntos duma dada família. Os conceitos de intersecção e de reunião estendem-se, naturalmente, a mais de dois conjuntos. Assim, a intersecção de três conjuntos A, B e C, que se representa por $A \cap B \cap C$, será o conjunto de todos os elementos comuns aos três conjuntos, enquanto a reunião de A, B e C, que se representa por $A \cup B \cup C$, será o conjunto de todos os elementos que satisfazem à condição de pertencer a um, pelo menos, dos conjuntos A, B e C.

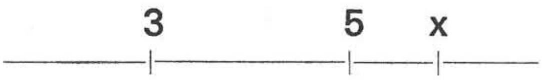




É claro que se tem:

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B, \text{ etc.}$$

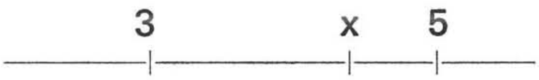
Os dois conceitos podem, analogamente, estender-se a um número finito qualquer de conjuntos ou mesmo a uma *infinidade* de conjuntos. Consideremos, por exemplo, os intervalos $[3, x]$, tais que $x > 5$.



É evidente que a intersecção de *todos* estes intervalos (isto é, o conjunto dos pontos comuns a todos eles) é o próprio intervalo $[3, 5]$. Indica-se este facto, escrevendo:

$$\bigcap_{x > 5} [3, x] = [3, 5]$$

Analogamente, a reunião de *todos* os intervalos [3, x] tais que $3 < x < 5$



é o intervalo [3, 5[, o que se exprime escrevendo:

$$\bigcup_{3<x<5} [3, x] = [3, 5[$$

Outros exemplos:

I. As rectas são conjuntos de pontos. A reunião de todas as rectas r que passam por um ponto P e são paralelas a um plano α é o plano que passa por P e é paralelo a α. A intersecção das mesmas rectas é $\{ P \}$.

II. A reunião de todas as rectas que são perpendiculares a um plano e o cortam em pontos duma circunferência é uma superfície cilíndrica de revolução. A intersecção das mesmas rectas é o conjunto vazio.

III. A reunião de todos os quadrados dum plano é o próprio plano. A intersecção desses quadrados é o conjunto vazio.

Em cada um destes exemplos é considerado um conjunto infinito de conjuntos (conjunto de intervalos, conjunto de rectas, etc.). Muitas vezes, para evitar a repetição da palavra 'conjunto', diz-se 'classe de conjuntos' ou 'família de conjuntos'.

Mas, note-se bem:

Uma coisa é uma família de conjuntos, outra coisa é a reunião desses conjuntos.

Por exemplo, os conjuntos:

$$\{2, 3\} \quad , \quad \{5, 7, 10\} \quad \text{e} \quad \{3, 8, 9\}$$

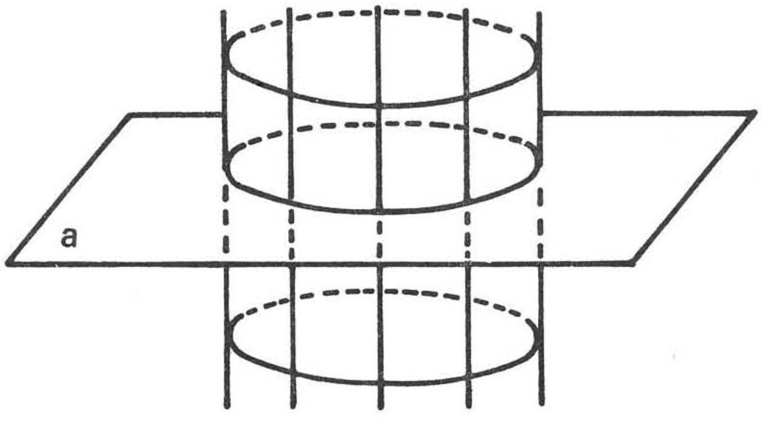
podem ser tomados como elementos dum novo conjunto (de tipo 2), que se designa por:

$$\Big\{\{2, 3\} \quad , \quad \{5, 7, 10\} \quad , \quad \{3, 8, 9\}\Big\}$$

Mas a reunião daqueles conjuntos é o conjunto de tipo 1:

$$\{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

Analogamente, a família das rectas perpendiculares a um plano α e que cortam α em pontos duma circunferência, é um conjunto de tipo 2 (os seus elementos são rectas, portanto conjuntos de pontos). Mas, a reunião dessas rectas é uma superfície cilíndrica S (conjunto de pontos), que também é a reunião de todas as circunferências em que S é cortada por planos paralelos a α, etc.



14. **Pares ordenados.** Vimos como toda a condição com uma variável determina um conjunto. Consideremos agora condições com *duas* variáveis. Seja a condição:

$$x \text{ é múltiplo de } y,$$

no universo $\mathbb{N}$. Esta condição é verificada, por exemplo, quando $x = 6$ e $y = 3$, mas não quando $x = 3$ e $y = 6$. Exprime-se este facto dizendo que a condição é verificada pelo *par ordenado* (6, 3), mas não pelo *par ordenado* (3, 6). A mesma condição é verificada quando $x = 3$ e $y = 3$; diremos ainda que é verificada pelo *par ordenado* (3, 3). Exemplos de outros pares ordenados que verificam a referida condição:

$$(1, 1), (2, 2), (6, 2), (15, 3), \text{etc.}$$

Exemplos de pares ordenados que não a verificam:

$$(2, 6), (3, 15), (2, 7), (7, 9), \text{etc.}$$

Seja agora, no universo $\mathbb{R}$, a condição:

$$x < 2y$$

Verificam esta condição os pares ordenados:

$$(1, 1), (1, 2/3), (-3, -1), \text{etc.}$$

Não a verificam os pares ordenados:

$$(1, 1/2), (-3, -3), (5, 1), \text{etc.}$$

Seja ainda em $\mathbb{R}$ a condição:

$$x + y = 4 \wedge x - y = 2$$

Facilmente se reconhece que esta condição é verificada por um único par ordenado de números: o par (3, 1), pois é esta a solução única do sistema de equações $x + y = 4$, $x - y = 2$.

Até aqui temos considerado apenas pares ordenados de números. Seja agora a condição:

x é a capital de y,

em que a variável x tem por domínio o *conjunto das cidades* e a variável y tem por domínio o *conjunto dos países* (conjuntos que supomos definidos). Verificam tal condição os pares ordenados:

(Lisboa, Portugal), (Paris, França), etc.

Não a verificam os pares ordenados:

(Beja, Portugal), (Lisboa, Itália), etc.

O que se entende então, dum modo geral, por um par ordenado?

Geralmente, quando se nos apresenta uma condição com duas variáveis, uma destas é considerada a *primeira variável* e a outra a *segunda variável* (por ordem alfabética, por ordem de índices ou por outro qualquer critério). Assim, cada vez que substituímos as variáveis por constantes, indicamos dois entes *a, b,* por uma ordem determinada, e é isto que se chama *dar um par ordenado,* o qual é designado pela notação (a, b). Diz-se que o par ordenado (a, b) verifica a condição, quando esta se transforma numa proposição verdadeira, ao fazer a referida substituição. Em particular, pode ser $a = b$ e então tem-se $(a, b) = (b, a) = (a, a)$. Mas, se $a \neq b$, será sempre $(a, b) \neq (b, a)$.

Portanto, um *par ordenado* (a, b) não é um conjunto $\{a, b\}$, visto que este, ao contrário do primeiro, é dado pelos seus elementos *independentemente da ordem e sem repetição,* isto é, tem-se então:

$$\{a, b\} = \{b, a\} \quad \text{e} \quad a \neq b$$

15. **Produto cartesiano de dois conjuntos. Conceito de relação binária.** Consideremos, num dado liceu, a condição:

$$x \textit{ é um aluno } \wedge \ y \textit{ é uma turma}$$

Se designarmos por A o conjunto dos alunos e por T o conjunto das turmas desse liceu, a referida condição será verificada por todos os pares ordenados (a, b), tais que a $\in$ A e b $\in$ T. Pois bem, o conjunto de *todos* esses pares é chamado o *produto cartesiano* de A por T e designado simbolicamente por A × T.

Consideremos, agora, a condição:

$$x \textit{ é um aluno da turma } y$$

Esta será verificada por *certos,* mas não por *todos* os pares ordenados pertencentes a A × T. Tal condição determina, por conseguinte, um *conjunto* contido em A × T. Esse conjunto de pares ordenados é chamado a relação definida pela condição 'x *é um aluno da turma* y'.

Vejamos um outro exemplo. Suponhamos que as letras P, E, I, L, M, R designem, respectivamente, *Portugal, Espanha, Itália, Lisboa, Madrid, Roma* e consideremos os conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{P, E, I\}, \quad \mathcal{B} = \{L, M, R\}$$

Neste caso, a condição:

$$X \in \mathcal{A} \wedge Y \in \mathcal{B}$$

é verificada por todos os pares ordenados (P, L), (P, M), (P, R), (E, L), (E, M), (E, R), (I, L), (I, M) e (I, R). O conjunto destes pares é chamado *produto cartesiano* de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$ e designado opr $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Consideremos, agora, a condição:

$$\textit{A capital de } X \textit{ é } Y$$

quando X varia em $\mathcal{A}$ e Y varia em $\mathcal{B}$. Esta condição define uma *relação*, que é precisamente o conjunto de pares ordenados (P, L), (E, M), (I, R) que a verificam (subconjunto de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$).

Assim, dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Dados dois conjuntos* A, B *quaisquer, chama-se produto cartesiano de* A *por* B, *e representa-se por* A × B, *o conjunto de todos os pares ordenados que se podem formar, indicando primeiro um elemento de* A *e depois um elemento de* B. Simbolicamente:

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A \wedge y \in B \}$$

Cada subconjunto de A × B é chamado *relação entre* A *e* B. Esta pode ser definida por uma condição com duas variáveis que tenham por domínio, respectivamente, A e B.

Em particular, pode ter-se A = B. Então A × B pode ser designado por A^2 e chamado *quadrado cartesiano* do conjunto A. Neste caso, cada subconjunto de A^2 é chamado *relação binária definida em* A.

Por exemplo, a condição:

m *e* n *são números naturais,*

que se pode escrever abreviadamente:

$$m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N},$$

é verificada *por todos os pares ordenados de números naturais,* isto é, determina o conjunto $\mathbb{N}^2$. Por sua vez, a condição:

$$m < n$$

define em $\mathbb{N}$ uma *relação binária,* constituída pelos pares de números naturais, tais como (1, 2), (1, 3), (5, 9), etc., que verificam tal condição. É claro que a mesma relação é definida por qualquer condição equivalente à primeira em $\mathbb{N}$, por exemplo: $n - m \geqslant 1$.

Analogamente, o *quadrado cartesiano do conjunto* $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto:

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Por sua vez, a condição $m < n$ no universo $\{1, 2, 3\}$ define a relação:

$$\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

subconjunto de $\{1, 2, 3\}^2$.

16. **Produto cartesiano de três conjuntos; relações ternárias.** As considerações anteriores estendem-se obviamente ao caso de condições em mais de duas variáveis. Seja no universo $\mathbb{N}$ a condição:

x *é divisor comum de* y *e* z

Esta é verificada, por exemplo, quando $x = 3$, $y = 6$ e $z = 15$, mas não quando $x = 3$, $y = 6$ e $z = 8$. Exprimiremos estes factos dizendo que a condição é verificada pelo *terno ordenado* (3, 6, 15), mas não pelo *terno ordenado* (3, 6, 8). Exemplos de outros ternos ordenados que verificam a condição:

(5, 10, 15), (6, 12, 18), (3, 3, 6), (3, 3, 3), etc.

Exemplos de outros ternos ordenados que não a verificam:

(10, 5, 15), (6, 3, 6), etc.

Analogamente, em $\mathbb{R}$, a condição

$$x < y - z$$

é verificada pelos ternos ordenados

$$(2, 7, 3), \quad (-2, 3, 3), \quad (0, \pi, 3), \quad \text{etc.}$$

mas não pelos ternos ordenados

$$(2, 3, 7), \quad (3, -2, 3), \quad (\pi, 0, 3), \quad \text{etc.}$$

Dum modo geral, dados três conjuntos A, B, C quaisquer, chama-se *produto cartesiano de* A, B e C, e designa-se por $A \times B \times C$, o conjunto de todos os termos ordenados (x, y, z) tais que $x \in A$, $y \in B$ e $z \in C$; isto é, simbolicamente:

$$A \times B \times C = \{ (x, y, z) : x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C \}$$

Cada subconjunto de $A \times B \times C$ será chamado uma *relação ternária*. Em particular, pode ter-se $A = B = C$; neste caso, o produto $A \times B \times C$ chama-se *cubo cartesiano de* A e representa-se por A^3, e cada subconjunto de A^3 diz-se uma *relação ternária definida em* A.

Por exemplo, o cubo cartesiano de $\{ V, F \}$ é:

$$\{ V, F \}^3 = \{ (V, V, V), (F, F, F), (V, V, F), (V, F, V), (F, V, V), (F, F, V), (F, V, F), (V, F, F)\}$$

Neste caso, a condição $x \wedge y \Rightarrow z$ (em que o sinal $\Rightarrow$ exprime a *relação* de implicação material) define uma relação ternária em $\{ V, F \}$, constituída pelos ternos ordenados (V, V, V), (F, F, F), (V, F, V), (F, V, V), (F, F, V), (F, V, F), (V, F, F). É claro que a *mesma* relação pode ser definida pela condição:

$$\sim z \Rightarrow \sim x \vee \sim y,$$

equivalente à primeira. Por sua vez, a *relação contrária*, definida pela condição $\sim(x \wedge y \Rightarrow z)$, reduz-se ao subconjunto singular $\{(V, V, F)\}$ do referido cubo cartesiano.

17. **Sequências. Conceitos gerais de produto cartesiano e de relação.** Seja *n* um número natural qualquer. Todas as vezes que, a cada um dos números 1, 2, ..., n, se faz corresponder um determinado elemento (de qualquer conjunto), diremos que é dada (ou definida) uma *sequência de* n *elementos*. Se for a_1 o elemento que corresponde a 1, a_2 o elemento que corresponde a 2, ..., a_n o elemento que corresponde a *n*, a sequência assim definida será designada pela notação:

$$(a_1, a_2, ..., a_n),$$

ou simplesmente pela notação:

$$a_1 \, a_2 \, ... \, a_n$$

se não houver perigo de confusão. Neste caso a_1 é o *primeiro elemento* da sequência, a_2 o *segundo elemento* da sequência, ..., a_n *o último elemento* da sequência.

Em particular, quando n = 2, 3, 4, 5, ... a sequência chama-se, respectivamente, um *par ordenado*, um *terno ordenado*, um *quaterno ordenado*, etc. Mas também pode ser n = 1; então a sequência reduz-se ao seu *primeiro e último elemento*, a_1. Posto isto:

DEFINIÇÃO. *Dados* n *conjuntos* A_1, ..., A_n, *chama-se produto cartesiano destes conjuntos, pela ordem em que estão escritos o conjunto de todas as sequências* $(x_1, ..., x_n)$ *de* n *elementos, tais que* $x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n$.

O *produto cartesiano* [1] dos *n* conjuntos A_1, ... A_n é designado pela notação $A_1 \times ... \times A_n$ ou, abreviadamente, pela notação:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i$$

---

[1] Também chamado 'produto directo' ou simplesmente 'produto' por alguns autores.

Em particular pode ter-se n = 1 e, então, o produto cartesiano reduz-se ao próprio conjunto A_1.

Também pode acontecer que os símbolos $A_1, \ldots, A_n$ designem todos um mesmo conjunto A, isto é, que:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$$

Neste caso, o produto cartesiano:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i$$

chama-se *potência cartesiana* n de A e designa-se por A^n.

Por exemplo, se $A = \{0,1\}$, tem-se:

$A^4 = \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$

Tal como os conceitos de elemento e de conjunto, o conceito de sequência faz parte da própria estrutura da linguagem e, portanto, do pensamento. Toda a palavra, toda a frase, todo o discurso são constituídos por uma sequência de sons elementares (no tempo) ou de letras (no espaço). Com as vinte e poucas letras do alfabeto têm sido compostas as mais belas obras de literatura e muitas das mais importantes obras da ciência. Com um limitado sistema de símbolos musicais, têm sido construídas as mais prodigiosas sequências de sons ou de conjuntos de sons, desde as polifonias da Idade Média às grandes sinfonias da música romântica ou moderna. E apenas com base nos dois valores lógicos os computadores electrónicos elaboram extensíssimas sequências, que traduzem os mais complicados cálculos e raciocínios da ciência contemporânea, de acordo com programas preestabelecidos.

18. **Generalidades sobre relações binárias.** Já dissemos que se chama *relação binária* qualquer conjunto R de pares ordenados (não confundir R com $\mathbb{R}$). Em vez de dizer que um dado par (x, y) pertence ao conjunto R, diz-se geralmente que o par (x, y) *verifica* a relação R e escreve-se

$$x \, R \, y$$

Para indicar que (x, y) *não verifica* R, escreve-se

$$x \not R \, y$$

Assim, o símbolo $\not R$ designa a relação *contrária* (ou *complementar*) de R:

$$x \not R \, y \iff \sim (x \, R \, y)$$

Já vimos exemplos desta convenção nos símbolos $\neq$, $\notin$, etc.

Geralmente uma relação binária R é definida por uma condição com duas variáveis; então, duas condições definem a *mesma relação*, sse são *equivalentes*. Os domínios das duas variáveis podem ser dois conjuntos U e V distintos ou um mesmo conjunto U; neste caso, a relação R é uma subconjunto de U^2 e diz-se que R é *definida* em U.

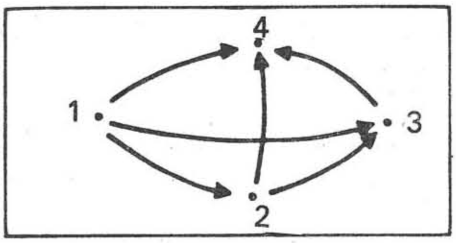
Se a relação R se reduz a um conjunto finito (e não muito numeroso) de pares ordenados, podemos definir R pela simples indicação dos pares que a verificam. Por exemplo, a relação definida pela condição $x < y$ no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é o conjunto de pares ordenados:

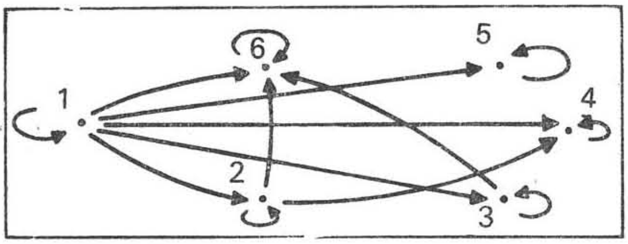
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Analogamente a relação definida pela condição 'x *divide* y' no conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o conjunto de pares ordenados:

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Um modo sugestivo de definir uma relação em tais casos é representar os elementos por pontos (dispostos de qualquer modo), e indicar os pares ordenados por meio de setas, que se dirigem do primeiro elemento para o segundo elemento de cada par. Assim, para as relações R e S dos dois exemplos anteriores, temos, respectivamente, os dois seguintes diagramas:





Um outro processo ainda a utilizar nestes casos é o das tabelas de duas entradas, usando por exemplo o valor lógico V para os pares ordenados que verificam a relação e o valor F para os pares ordenados que não a verificam. Assim, para as referidas relações R e S temos respectivamente as tabelas:

x R y

x \ y	1	2	3	4
1	F	V	V	V
2	F	F	V	V
3	F	F	F	V
4	F	F	F	F

x S y

x \ y	1	2	3	4	5	6
1	V	V	V	V	V	V
2	F	V	F	V	F	V
3	F	F	V	F	F	V
4	F	F	F	V	F	F
5	F	F	F	F	V	F
6	F	F	F	F	F	V

No caso particular em que os elementos dados são os próprios valores lógicos a relação é ao mesmo tempo uma operação lógica, como já se viu no Cap. I (o conceito geral de operação será estudado num capítulo posterior). Aliás, estas tabelas tornam-se mais simples e sugestivas, se usarmos simplesmente um ponto para o valor V e um espaço em branco para o valor F.

Já vimos que, na linguagem comum, a distinção entre indivíduos (ou elementos) e classes (ou conjuntos) é acusada pela divisão dos substantivos em *próprios* e *comuns*. Há, porém, substantivos comuns que não se referem exactamente a classes mas sim a relações: poderíamos chamar-lhes por isso *substantivos relativos*. Tais são, por exemplo, os substantivos 'filho', 'irmão', 'colega', etc. Assim, a palavra 'filho' não se aplica propriamente a indivíduos *duma determinada classe,* mas sim aos pares ordenados de indivíduos que verificam a *relação* definida pela condição:

'x *é filho de* y'

e analogamente nos outros casos. Mas, na linguagem comum, as relações binárias não são expressas unicamente por meio de substantivos relativos: também por meio de *adjectivos,* nos graus positivo ou comparativo (p. ex. 'múltiplo', 'paralelo', 'perpendicular', 'maior', 'menor', 'mais alto', 'mais denso', etc.) ou por meio de proposições ('acima', 'abaixo', 'antes', 'depois', 'ao norte', etc.) ou ainda por meio de *verbos transitivos* ('divide', 'intersecta', etc.).

19. **Restrições duma relação.** Dados um conjunto U e uma relação binária R definida em U, chama-se *restrição de* R *a um subconjunto* V de U a relação R' assim definida em V:

$$x\ R'\ y \Leftrightarrow x\ R\ y, \quad \forall\ x, y \in V$$

isto é:

$$R' = R \cap V^2$$

Também se diz neste caso que R é uma *extensão* (ou um *prolongamento)* de R' a U.

Por exemplo, a relação R atrás definida no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é a *restrição da relação* $<$ (definida em $\mathbb{R}$) ao subconjunto A de $\mathbb{R}$; por sua vez, a restrição dessa relação R ao conjunto $A' = \{1, 2, 3\}$ é a relação $R' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Muitas vezes, quando não há perigo de confusão, designam-se pelo mesmo símbolo a relação e a sua restrição. Por exemplo: o sinal $<$ designa indiferentemente a relação de grandeza definida em $\mathbb{R}$, a sua restrição a $\mathbb{N}$, etc.

20. **Relações reflexivas e relações anti-reflexivas.** Vimos que a relação *divide*, restringida ao conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, é verificada pelos pares (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), visto que *todo o número* x *se divide a si próprio,* isto é:

$$x \text{ divide } x, \ \forall\, x \in B$$

Este facto é traduzido no diagrama anterior por *lacetes* em todos os elementos, isto é, por setas que se dirigem de *cada* elemento para o *próprio* elemento; e na tabela de duas entradas pela presença do valor V em todos os lugares da 1.ª diagonal. Exprime-se este facto, dizendo que a relação é *reflexiva.* Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R *definida num conjunto* U *é reflexiva, sse:*

$$x \, R \, x, \ \forall\, x \in U$$

Esta propriedade também se pode exprimir simbolicamente, escrevendo:

$$x = y \Rightarrow x \, R \, y \quad (\forall\, x, y \in U)$$

Por outro lado:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R *definida em* U *é anti-reflexiva, sse:*

$$x \, R \, y \Rightarrow x \neq y \quad (\forall x, y \in U)$$

Assim, a relação *divide* no universo $\mathbb{N}$ é reflexiva, ao passo que a relação $<$ em $\mathbb{N}$ (ou mesmo em $\mathbb{R}$) é anti-reflexiva, visto que $x < y \Rightarrow x \neq y$. A relação $\subset$ entre conjuntos, é reflexiva, mas a relação *contido estritamente* é anti-reflexiva ([1]).

Outros exemplos: Sendo r, s duas rectas, escreve-se $r \parallel s$, para indicar que r *é paralela a* s, e $r \perp s$, para indicar que r *é perpendicular a* s; é claro que se tem, nestes casos:

$$r \parallel r, \forall r$$

$$r \perp s \Rightarrow r \neq s$$

Assim, a relação $\parallel$ (de paralelismo) é reflexiva: *toda a recta é paralela a si própria* (por definição). Pelo contrário a relação $\perp$ (de perpendicularidade) é anti-reflexiva: *nenhuma recta é perpendicular a si própria* (em geometria euclidiana).

A relação *semelhante* entre figuras geométricas é reflexiva: *toda a figura é semelhante a si própria*. Mas já as relações *filho* (entre pessoas), *mais denso* (entre substâncias), etc. são anti-reflexivas.

Note-se que uma relação pode não ser reflexiva nem anti-reflexiva. Por exemplo, a relação definida em $\mathbb{R}$ pela condição:

$$x < 2y$$

não é reflexiva (não se tem $x < 2x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$) nem

---

([1]) Não esquecer que, neste caso, a relação é definida no *conjunto* de todos os subconjuntos dum conjunto dado.

anti-reflexiva, como é fácil ver; no entanto, a restrição desta relação a $\mathbb{N}$ é reflexiva: *todo o número natural é menor que o seu dobro.*

21. **Relação inversa. Relações simétricas e relações anti--simétricas.** Dada uma relação binária R num conjunto U, chama-se *relação inversa,* de R e designa-se por R^{-1} a relação assim definida:

$$x \; R^{-1} \; y \;\Leftrightarrow\; y \; R \; x$$

Por exemplo, tem-se:

x *é múltiplo de* y $\Leftrightarrow$ y *divide* x

Assim, a relação *é múltiplo de* (ou, abreviadamente, a relação *múltiplo*) é inversa da relação *divide.* Analogamente, a relação $>$ é inversa da relação $<$, a relação $\supset$ inversa de $\subset$, a relação *pai ou mãe,* inversa da relação *filho ou filha,* etc.

Mas já a inversa da relação $=$ é a relação $=$, a inversa de $\parallel$ é $\parallel$, a inversa de $\perp$ é $\perp$, a inversa de *semelhante* é *semelhante,* a inversa de *irmão ou irmã* é *irmão ou irmã*, etc. Quando uma relação coincide com a sua inversa, diz-se que é *simétrica,* isto é:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R *definida num conjunto* U *é simétrica, sse:*

$$x \; R \; y \;\Rightarrow\; y \; R \; x \quad (\forall \; x, y \in U)$$

Nesta hipótese tem-se, pelo princípio de substituição das variáveis aparentes, $y \, R \, x \Rightarrow x \, R \, y$, e portanto $x \, R \, y \Leftrightarrow y \, R \, x$, o que significa precisamente que $R = R^{-1}$.

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R, *definida num conjunto* U, *é anti-simétrica, sse:*

$$x \; R \; y \;\Rightarrow\; y \; \not R \; x \quad (\forall \; x, y \in U)$$

Por exemplo, a relação $<$ no universo $\mathbb{R}$ é anti-simétrica, visto que $x < y \Rightarrow y \nless x$. Também as relações *contido estritamente, filho,* etc., são anti-simétricas. Mas já as relações $\subset$, $\leqslant$, *divide,* etc. não são simétricas, nem anti-simétricas, segundo as anteriores definições. Porém:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação binária* R, *definida num conjunto* U, *é anti-simétrica em sentido lato, sse:*

$$x \, R \, y \wedge y \, R \, x \;\Rightarrow\; x = y \quad (\forall \, x, y \in U)$$

Por exemplo, já vimos que a relação $\subset$ é anti-simétrica em sentido lato. Analogamente, é fácil ver que as relações $\leqslant$, *divide* (em $\mathbb{N}$), etc., são anti-simétricas em sentido lato.

Como exercício, interessa ver como se reconhece se uma relação é simétrica ou anti-simétrica ou anti-simétrica em sentido lato, quando definida por um diagrama ou por uma tabela.

Também interessa muito conhecer uma particularidade das designações de relações simétricas na linguagem comum. Por exemplo, diz-se indiferentemente:

'X é irmão de Y' ou 'X e Y são irmãos'

'X é colega de Y' ou 'X e Y são colegas'

'*r* é paralela a *s*' ou '*r* e *s* são paralelas'

'*r* é perpendicular a s' ou '*r* e *s* são perpendiculares'

'A é disjunto de B' ou 'A e B são disjuntos'.

Mas já a expressão 'X é filho de Y' não é de modo nenhum equivalente a 'X e Y são filhos'; a expressão 'x é menor que y' não é equivalente a 'x e y são menores', etc. É claro que no primeiro caso se trata de relações simétricas, e no segundo de relações não simétricas.

Como se vê, quando uma relação simétrica é indicada, na linguagem comum, por um substantivo ou adjectivo, este pode figurar, no singular, entre os dois termos do par ordenado (além do verbo e duma preposição) ou no plural, após os dois termos do par ordenado (mas já sem preposição). Esta segunda forma linguística implica sempre que a relação é simétrica.

Algumas vezes para evitar possível equívoco, acrescenta-se a expressão 'entre si' à segunda forma. Por exemplo, pode dizer-se indiferentemente, a respeito de dois números naturais m e n:

'm *é primo com* n' ou 'm e n *são primos entre si*'

mas não 'm *e* n *são primos*'. Com efeito, o adjectivo 'primo' tem duas acepções em aritmética, sendo umas vezes *absoluto* (isto é, aplicável a uma classe de números) e outras vezes *relativo* (isto é, aplicável a uma relação entre números). Assim, é verdade que 14 *e* 15 *são primos entre si* (isto é, 14 *é primo com* 15), mas é falso que 14 *e* 15 *são primos.*

22. **Relações transitivas. Relações de equivalência.** Já atrás se nos apresentaram exemplos de relações transitivas: tais são as relações $\Rightarrow$, $\subset$, etc. O conceito geral é assim definido:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma relação* R, *definida num conjunto* U, *é transitiva, sse:*

$$x\,R\,y \wedge y\,R\,z \;\Rightarrow\; x\,R\,z \quad (\forall\, x, y, z \in U)$$

Se a relação é dada por um diagrama, isto quer dizer que, sempre que haja duas setas seguidas, dum elemento *a* para um elemento *b* e de *b* para um elemento *c*, deve haver também uma seta, directamente de *a* para *c*. Estão neste caso os diagramas do n.º 18; na verdade as relações $<$ e *divide* são transitivas, mesmo no universo $\mathbb{N}$.

Mas não são transitivas as relações $\perp$, *filho, irmão,* etc., como é fácil ver. Por exemplo, pode haver três indivíduos x, y e z tais que x *é irmão de* y $\wedge$ y *é irmão de* z, sem que seja x *irmão de* z. A relação *sucessor,* no universo $\mathbb{N}$, também não é transitiva (diz-se que um número natural x é sucessor de outro número natural y, quando x = y + 1); esta relação, restringida por exemplo ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, conduz ao diagrama:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4,$$

que patenteia a não transitividade da relação.

DEFINIÇÃO. *Chamam-se relações de equivalência as relações binárias que são ao mesmo tempo reflexivas, simétricas e transitivas.*

A mais simples de todas as relações de equivalência é a *relação lógica de identidade,* num universo qualquer. Tem-se, com efeito:

1. $a = a, \ \forall a$
2. $a = b \Rightarrow b = a$
3. $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

A propriedade 1 é o PRINCÍPIO DA IDENTIDADE (pág. 15). As propriedades 2 e 3 resultam de 1, pelos princípios lógicos de substituição.

Note-se que o diagrama desta relação num universo finito se reduz a lacetes, para todos os elementos. Assim, no universo $\{1, 2, 3, 4\}$:

São ainda relações de equivalência as relações de paralelismo e de semelhança, a relação *compatriota* (aplicada a pessoas), etc. Não são relações de equivalência as relações *irmão ou irmã* e *perpendicular,* porque não são reflexivas nem transitivas (apenas simétricas).

Uma relação de equivalência muito importante em geometria é a *relação de igualdade geométrica*. Sabemos (ou julgamos saber) o que em geometria significa *'uma figura ser igual a outra'*. Esta noção obedece às seguintes propriedades:

1. *Uma figura* F *é sempre igual a si própria.*

2. *Se* F *é igual a* G, *então* G *é igual a* F.

3. *Se* F *é igual a* G *e* G *é igual a* H, *então* F *é igual a* H.

Trata-se, pois, duma relação reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja duma relação de equivalência. Mas não convém indicar esta relação com o sinal =, que, como já sabemos, está reservado para a relação lógica de identidade. Ora a igualdade geométrica não é identidade: *duas figuras podem ser iguais sem serem a mesma figura* (entendendo aqui por 'figura' um conjunto qualquer de pontos, p. ex. um segmento de recta).

Para indicar a igualdade geométrica, usaremos o sinal $\cong$ (que se lê *'é geometricamente igual a'*) entre as designações das figuras.

Tornaremos, mais adiante, ao estudo geral das relações de equivalência.

Índice

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Dezembro de 1974

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA