J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

1.º volume

1.º tomo

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

CAPITULO IV

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

1. **Primeiros exemplos.** Já vimos que as expressões com variáveis se classificam em *designatórias* e *proposicionais* (pág. 56). Também vimos (Cap. II) que as expressões proposicionais definem conjuntos e, mais geralmente, relações (conjuntos de sequências). Vejamos, agora, o que se passa com as expressões designatórias.

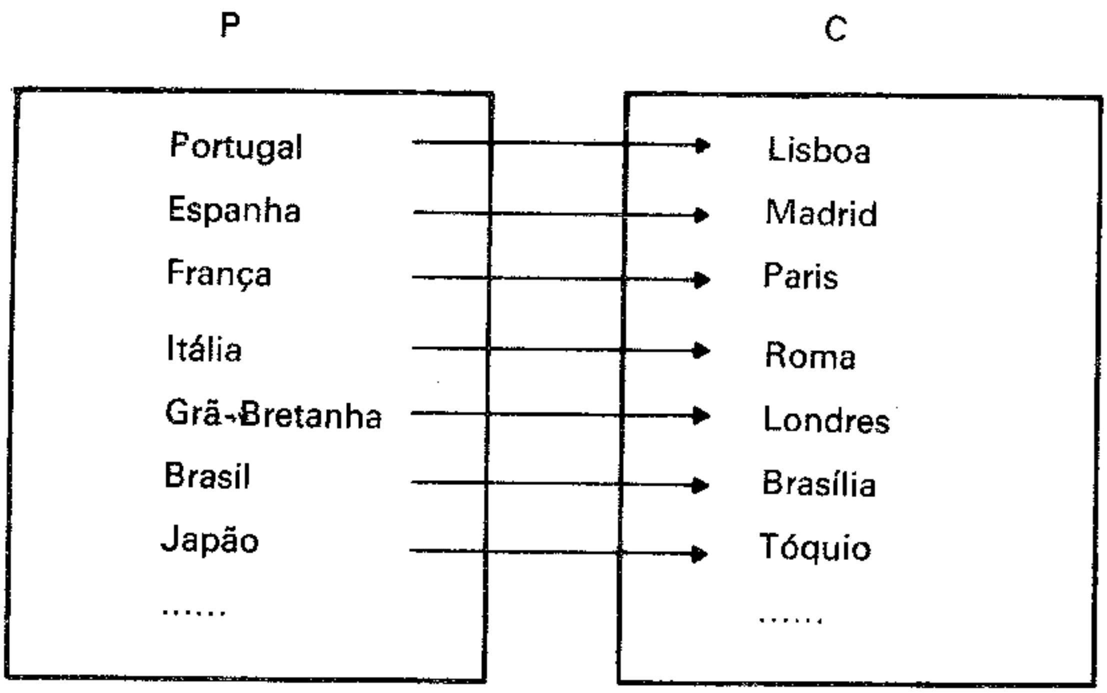
Consideremos, por exemplo, a expressão

capital de x,

sendo o domínio da variável x o *conjunto dos países do mundo.* Vamos supor este conjunto definido e designá-lo por P. Por outro lado, designemos por C o *conjunto das cidades do mundo,* que supomos igualmente definido. Nestas condições, a referida expressão é, manifestamente, uma expressão designatória, pois converte-se na designação duma cidade todas as vezes que a variável é substituída pela designação dum país. Assim, por exemplo:

x	capital de x
Portugal	capital de Portugal (= Lisboa)
Espanha	capital de Espanha (= Madrid)
França	capital de França (= Paris)
Itália	capital de Itália (= Roma)

Deste modo, a expressão 'capital de', anteposta à designação dum país, *transforma* esta na designação duma cidade. Podemos assim dizer que representa uma *transformação* (uma *operação* ou um *operador*) que, aplicada a qualquer país, dá como resultado uma certa cidade desse país. É claro que essa operação consiste afinal numa *correspondência unívoca* entre o conjunto P e o conjunto C, como se indica no seguinte diagrama:



Com efeito, por este processo, a cada elemento de P, fica a corresponder *um e um só elemento de* C (ver Cap. III, n.º 1)[1].

Como sinónimo dos termos 'operação', 'transformação', etc., nestes e noutros casos análogos, usa-se ainda, com maior frequência, o termo 'função'. Mas este aparece quase sempre relacionado com variáveis e, por isso, o seu uso requer cuidados especiais, como vamos ver.

---

(1) Nada impede que um dado país esteja contido num outro: p. ex. a Inglaterra e a Escócia fazem parte da Grã-Bretanha.

Tornemos à expressão 'capital de x'. Visto que contém uma variável, a própria expressão pode ser considerada como uma variável: isto é, *variável dependente de* x. Também se diz que representa uma *função de* x. Mas não quer isto dizer que *função* seja o mesmo que *variável dependente*. Por exemplo, as expressões $(x + 1)^2$ e $x^2 + 2x + 1$ são diferentes; são, pois, duas variáveis dependentes distintas; mas tem-se

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, as duas expressões fazem *corresponder* a cada número real (valor de x) um *mesmo* número real (valor das expressões), isto é, definem a mesma *correspondência* e, por isso, se diz que representam a *mesma função de* x. Deste modo, o termo 'função' aparece como sinónimo de 'correspondência' ou 'operação'.

Vejamos outros exemplos. A tabela da página seguinte define 10 funções no conjunto das províncias de Portugal continental. As letras x, c, c', a, δ, d, d', r, r', m, m' são abreviaturas das expressões 'província', 'capital de x', 'número de habitantes de c', 'área de x em km^2', 'densidade de população de x por km^2', 'distância de x a Lisboa em km, por estrada', 'idem por comboio', 'rio mais importante de x', 'comprimento de r em km', 'monte mais alto de x', 'altura de m em metros'. Diz-se que a letra x é aqui *variável independente* e que as letras c, c', a, δ, d, d', r, r', m, m' são *variáveis dependentes de* x ou ainda (por comodidade de linguagem) que são *funções de* x. Mas as *funções* a que essas letras se referem são, na realidade, as correspondências indicadas pela tabela. Diz-se ainda, por exemplo, que o consumo de gasolina dum automóvel por quilómetro é função da velocidade, que o perímetro e a área dum círculo são funções do raio, etc., etc., mas as funções em todos estes casos são determinadas correspondências.

Para evitar possíveis confusões, usa-se muitas vezes, em matemática moderna, o termo 'aplicação' em vez de 'função', com o mesmo significado.

x	c c'	a δ	d d'	r r'	m m'
Minho	Braga 41 023	4 839 180,7	387 403	Minho 236	Gerês 1 507
Trás-os-Montes e Alto Douro	Vila Real 10 498	11 848 54,8	437 372	Douro 640	Larouco 1 535
Douro Litoral	Porto 303 424	3 285 42,4	328 346	Douro 640	Marão 1 415
Beira Alta	Viseu 16 961	9 094 73,2	293 259	Douro 640	Caramulo 1 075
Beira Baixa	Castelo Branco 14 467	7 505 46,5	248 229	Tejo 810	Estrela 1 991
Beira Litoral	Coimbra 45 508	7 598 133,2	204 220	Mondego 220	Lousã 1 024
Estremadura	Lisboa 802 230	5 333 338,6	0 0	Tejo 810	Montejunto 666
Ribatejo	Santarém 16 445	7 236 65,7	72 81	Tejo 810	Aire 679
Alto Alentejo	Évora 24 144	15 072 76,2	154 117	Tejo 810	S. Mamede 1 025
Baixo Alentejo	Beja 15 702	12 621 28,7	178 154	Guadiana 700	Cercal 346
Algarve	Faro 19 393	5 076 62,0	298 288	Guadiana 700	Monchique 902

2. **Conceito geral de aplicação (ou função de uma variável).** Vamos precisar melhor o emprego destes termos.

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se *aplicação de* A *em* B toda a correspondência unívoca entre A e B ([1]). Em vez de

(1) O termo 'correspondência' é aqui usado com o significado que lhe foi atribuído no capítulo anterior. Veremos mais adiante que uma aplicação pode também ser interpretada como relação de tipo especial, isto é, como o *conjunto* de pares ordenados (x, y), em que y é o elemento de B correspondente a cada elemento de A.

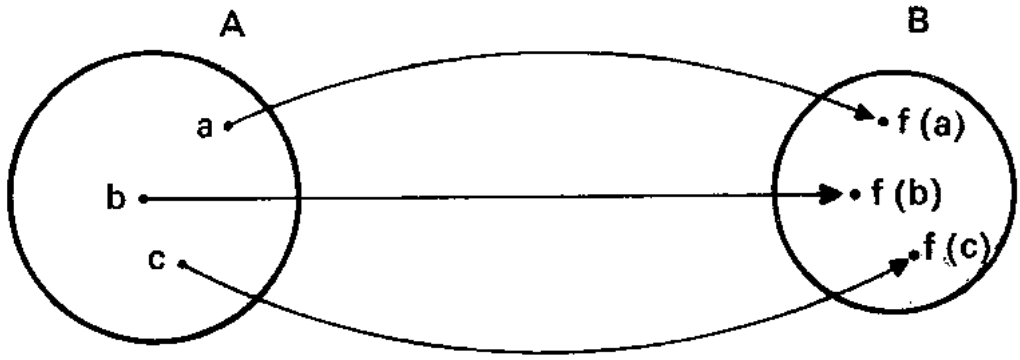
'aplicação de A *em* B' também se pode dizer *'função definida em* A *com valores em* B'.

Assim, *definir uma função* f *em* A *com valores em* B (ou *uma aplicação de* A *em* B) *é dar um processo qualquer pelo qual, a cada elemento x de A, fique a corresponder um e um só elemento y de B.* Este é chamado *valor da função* f *em* x ou ainda *imagem* (ou *transformado*) de x por f, e pode ser designado por qualquer dos símbolos fx ou f(x):

$$y = fx \quad \text{ou} \quad y = f(x)$$

Também se diz neste caso que f *aplica* (ou *transforma)* x *em* y. O conjunto A é chamado *domínio de* f.

Dum modo geral, designaremos por D_f o domínio duma função f.



Tornemos ao primeiro exemplo apresentado no número anterior. Nesse caso trata-se de uma aplicação do conjunto P (dos países) no conjunto C (das cidades), aplicação que é representada pela expressão 'capital de'. O conjunto P é, pois, o domínio da aplicação. Se designarmos esta aplicação por f será:

f (Portugal) = Lisboa, f (França) = Paris, etc.

isto é, a aplicação f aplica Portugal em Lisboa, etc.

Designemos, agora, por Π o conjunto das províncias de Portugal continental e por C, R e M, respectivamente, os conjuntos das cidades, dos rios e dos montes de Portugal (conjuntos que supomos definidos). A última tabela do número anterior dá-nos exemplos de várias aplicações de Π em C, em $\mathbb{N}$, em R e em M. Todas essas funções têm, portanto, o mesmo domínio (Π), mas são todas distintas. Por exemplo, as funções representadas pelas letras d, d' só seriam idênticas (isto é, a *mesma* função), se as distâncias por estrada fossem *todas* iguais às respectivas distâncias por comboio, o que não acontece. Designemos as 4 primeiras funções por f, φ, g, ψ, isto é, ponhamos:

$$c = f(x),\ c' = \varphi(x),\ a = g(x),\ \delta = \psi(x),\ \forall x \in \Pi$$

Então será: $D_f = D_\varphi = D_g = D_\psi = \Pi$ e, por exemplo:

$$f(\text{Minho}) = \text{Braga}, \quad \varphi(\text{Algarve}) = 19\,393$$

$$g(\text{Estremadura}) = 5333, \quad \psi(\text{Ribatejo}) = 65{,}7.$$

Estas expressões são abreviaturas, respectivamente, das seguintes: 'a capital do Minho é Braga', 'o número de habitantes da capital do Algarve é 19 393', etc.

Seja agora A o conjunto dos alunos duma certa turma. Sendo x variável em A, as expressões:

idade de x, *pai de* x, *lugar de nascimento de* x, *província de* x, *altura de* x, *peso de* x, *carteira onde se senta* x, etc.

são expressões designatórias que definem aplicações de A em vários conjuntos. Quais conjuntos?

3. **Domínio de existência de uma expressão.** Chama-se *domínio de existência (domínio de definição* ou simplesmente *domínio)*

duma dada expressão designatória com uma variável, ao conjunto dos valores da variável para os quais a expressão tem sentido no universo considerado. Assim, o domínio da existência duma expressão depende do universo lógico. Por exemplo, a expressão $\sqrt{x}$ no universo |N tem por domínio o conjunto dos quadrados perfeitos, no universo |R o conjunto dos números não negativos, etc.

Quando uma função (ou aplicação) é definida por meio de uma expressão designatória, sem mais indicações, subentende-se que o domínio da função é o domínio de existência da expressão no universo adoptado.

Por exemplo, no universo |N, as expressões:

dobro de x, *triplo de* x, *quadrado de* x,
triplo do quadrado de x, 1 *mais quadrado de* x, etc.

cujas abreviaturas simbólicas são, respectivamente,

$$2x,\ 3x,\ x^2,\ 3x^2,\ 1 + x^2,\ \text{etc.}$$

são expressões designatórias que definem aplicações do conjunto |N no próprio conjunto |N (ou, como também se diz, *aplicações do conjunto* |N *em si mesmo*). Mas já, no mesmo universo, as expressões

metade de x, *raiz quadrada de* x, x *menos* 3, etc.

ou seja, simbolicamente: $x/2$, $\sqrt{x}$, $x\text{-}3$, etc. são expressões designatórias que têm por domínios de existência subconjuntos estritos de |N (respectivamente o conjunto dos *números pares*, o conjunto dos *quadrados perfeitos*, o conjunto dos *números maiores* que 3, etc.), representando, pois, aplicações desses conjuntos em |N.

Se tomarmos agora para universo o conjunto |R em vez de |N, é claro que os domínios das referidas expressões (e, portanto, os das aplicações que representam) são ampliados, passando a ser $\mathbb{R}$, excepto no caso da expressão $\sqrt{x}$.

OUTROS EXEMPLOS. Seja no universo $\mathbb{R}$:

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x-3}}, \quad g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

No primeiro caso, a expressão só é definida quando $x - 3 \geqslant 0$ e $\sqrt{x-3} \neq 0$ (Porquê?). Ora, estas condições são equivalentes às seguintes: $x \geqslant 3$ e $x \neq 3$. Logo:

$$D_f = \{x: x \geqslant 3 \wedge x \neq 3\} = \{x: x > 3\} =]3, +\infty[$$

No segundo caso a expressão só tem valor quando $x \geqslant 0$ e $\sqrt{x} - 1 \neq 0$. Daqui se conclui que

$$D_g = \{x: x \geqslant 0 \wedge x \neq 1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

EXERCICIOS. Determinar em $\mathbb{R}$ os domínios das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\sqrt{x^2-4}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{x(x-2)}}$$

4. **Maneiras de definir uma função. Identidade de funções.** Pelo que ficou dito no número 2, *definir* (ou *dar*) uma aplicação f significa dar, por um lado, o domínio de f e, por outro lado, um *processo qualquer* que permita determinar, para *todo* o elemento x de D_f, o elemento f(x), que a aplicação f faz corresponder a x(1).

(1) O papel do conjunto B onde se situam os valores da função f(x) pode ser desempenhado por *qualquer* conjunto a que pertençam esses valores.

Se o domínio D_f é *finito*, e não excessivamente numeroso, a aplicação f pode ser definida por meio de uma tabela, como já se viu em exemplos no número 1. Em particular, quando o número de elementos o permite, costuma-se indicar numa linha todos os elementos do domínio e, noutra linha, por baixo de cada um desses, o elemento que lhe corresponde segundo f; a expressão formada pelas duas linhas escritas entre parênteses é então tomada como designação de f. Por exemplo, o símbolo:

$$\begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

designa a aplicação f cujo domínio é $\{\text{Lisboa, Porto, Coimbra}\}$ e tal que

$$f(\text{Lisboa}) = \text{Tejo} \ , \quad f(\text{Porto}) = \text{Douro} \ , \quad f(\text{Coimbra}) = \text{Mondego}$$

Analogamente, se pusermos

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

φ e ψ serão duas aplicações do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ em si mesmo:

$$D_\varphi = D_\psi = \{1, 2, 3, 4\}$$

Mas, tem-se:

$$\varphi \neq \psi, \text{ visto ser } \varphi(4) \neq \psi(4).$$

EXERCICIO. *Sendo* A *e* B *dois conjuntos finitos, respectivamente com* p *e* n *elementos, determine o número total de aplicações de* A *em* B *que é possível definir* (Sugestão: comece pelo caso particular em que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, formando as respectivas aplicações).

Se o domínio da aplicação é *infinito* (p. ex. $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$), é claro que não podemos defini-la por meio de uma tabela. Nos casos mais simples, a aplicação é definida por uma expressão designatória, em que intervêm operações elementares da aritmética. Por exemplo, a expressão $3x^2$ define, efectivamente, uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$), pois que, dado um número x, *qualquer que ele seja,* nós sabemos sempre, com mais ou menos trabalho, calcular o quadrado de x e multiplicar o resultado por 3. Mas, como teremos ocasião de ver, há casos em que a função não se reduz a uma ou mais operações elementares indicadas por uma expressão; podem, então, apresentar-se os mais diversos e imprevistos processos de definição.

Também pode acontecer (e sucede geralmente) que uma mesma função possa ser definida por vários processos diferentes. Por exemplo, as expressões $x^2 - 1$ e $(x+1)(x-1)$ definem a mesma função em $\mathbb{R}$: indicam dois processos de cálculo diferentes para a mesma função. Para designar a função definida pela expressão $x^2 - 1$ num dado universo (p. ex. $\mathbb{R}$) usa-se a notação

$$x \mapsto x^2 - 1$$

e, analogamente, para qualquer outra expressão designatória. Assim, a letra x passa a ser uma *variável aparente,* pois que a função não depende de x. Tem-se, por exemplo:

$$(x \mapsto 3x) = (t \mapsto 3t) = \text{multiplicação por } 3$$

$$(x \mapsto x^2) = (s \mapsto s^2) = \text{elevação ao quadrado}$$

$$(x \mapsto x^2 - 1) = [a \mapsto (a+1)(a-1)], \text{ etc.}$$

Mas já a função $x \mapsto x^2 - 1$ é distinta da função $x \mapsto (x-1)^2$. (Porquê?)

Muitas vezes, para comodidade de linguagem, diz-se simplesmente 'a função $x^2 - 1$', 'a função $3x^2$', etc., em vez de 'a função '$x \curvearrowright x^2 - 1$', 'a função $x \curvearrowright 3x^2$', etc., desde que não resulte daí confusão.

Repare-se, ainda, nas funções definidas em $\mathbb{R}$:

$$x \curvearrowright 1 \quad , \quad x \curvearrowright 0{,}53 \quad , \quad x \curvearrowright -\frac{2}{3} \quad , \quad x \curvearrowright \pi \text{ , etc.}$$

Nestes casos, em que as expressões designatórias se reduzem a constantes (designações), também se diz que as funções são *constantes,* visto tomarem o mesmo valor para todo o valor de x.

De tudo o que fica dito, convém salientar o seguinte:

Para definir uma função não basta, em geral, indicar o processo pelo qual se estabelece a correspondência; é indispensável dar o domínio da função. Porém, quando a função é dada por uma expressão, sem mais indicações, subentende-se que o domínio da função é o domínio de existência da expressão no universo adoptado.

Por último, convém deixar bem claro o que se entende por 'funções idênticas' e por 'funções distintas':

Dadas duas aplicações f, g, *a aplicação* f *é a mesma que* g *(isto é, tem-se* $f = g$*), se e só se forem verificadas as duas seguintes condições:*

1) f, g *têm o mesmo domínio, isto é,* $D_f = D_g$

2) $f(x) = g(x), \quad \forall x \in D_f$

Simbolicamente:

$$f = g \Leftrightarrow D_f = D_g \wedge f(x) \equiv g(x)$$

Portanto, basta que uma destas condições se não verifique $[D_f \neq D_g$ ou $\exists x,\ f(x) \neq g(x)]$ *para que seja* $f \neq g$, *isto é,* f *distinta de* g.

5. **Extensão e restrição duma aplicação.** Consideremos os seguintes conjuntos:

A = { Lisboa, Porto, Coimbra }

A' = { Lisboa, Porto, Coimbra, Santarém }

B = conjunto dos rios de Portugal,

e as seguintes aplicações:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} & \text{Santarém} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} \end{pmatrix}$$

É claro que f é uma aplicação de A em B e g uma aplicação de A' em B. Mas tem-se $A \subset A'$ e

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in A$$

Exprime-se este facto dizendo que g é *uma extensão* (ou *um prolongamento)* da aplicação f ao conjunto A' ou que f é *a restrição* de g ao conjunto A.

Dum modo geral, dados dois conjuntos A e A', respectivamente, diz-se que g é *uma extensão* de f a A', quando

$$A \subset A' \text{ e } f(x) = g(x), \forall x \in A;$$

Na mesma hipótese se diz que f é *a restrição de* g *a* A.

Note-se que, no primeiro caso, se usa o artigo indefinido 'uma' e, no segundo caso, o artigo definido 'a'. A razão está em que, se A é uma parte estrita de A' existe *mais de uma* extensão de f a A', ao passo que *existe uma única* restrição de g a A. Por outros termos: a operação de restrição é *unívoca*, a operação de extensão é *plurívoca*.

Sejam, por exemplo, as aplicações:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

É fácil ver que T e U são *duas extensões distintas* da aplicação S ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Mas T e U têm uma restrição única no conjunto $\{1, 2, 3\}$, que é S; uma restrição única no conjunto $\{1, 3\}$, que é a aplicação $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, etc.

6. **Contradomínio duma aplicação. Aplicações sobrejectivas.** Consideremos, de novo, os conjuntos:

A = { Lisboa, Porto, Coimbra }

B = conjunto dos rios de Portugal

e a aplicação:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

Desde logo se observa que só os elementos Tejo, Douro e Mondego do conjunto B intervêm na definição de f, pois são essas as imagens dos elementos de A por f. Exprime-se este facto dizendo que o conjunto { Tejo, Douro, Mondego }, contido em B, é o *contradomínio* da aplicação f, do mesmo modo que A é o domínio de f.

Analogamente, as aplicações

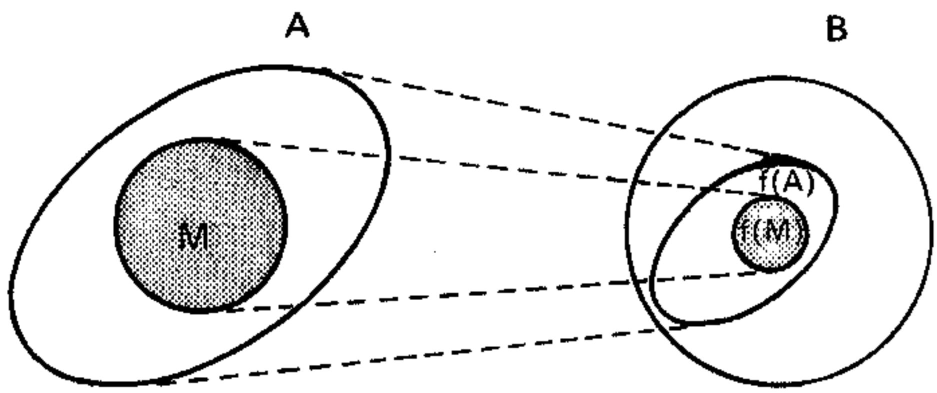
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

têm por contradomínios, respectivamente, os conjuntos

$$\{1, 4, 9\}, \quad \{1, -1\}, \quad \{0\} \quad \text{(função constante).}$$

Dum modo geral, sejam A e B conjuntos *quaisquer*, e f uma aplicação de A em B. Dado um subconjunto M de A, chama-se *imagem* (ou *transformado*) *de* M *por* f, e representa-se por f(M), o conjunto de todos os elementos de B que são imagens de elementos de M por f. Simbolicamente, f(M) pode assim definir-se:

$$f(M) = \{y: \; y = f(x) \;\; \wedge \;\; x \in M\}$$



Em particular, pode ser M = A. Chama-se *contradomínio* da aplicação f, e representa-se por D'_f, precisamente o conjunto f(A), isto é, a imagem do domínio de f pela aplicação f.

Tornemos ao exemplo da aplicação f do conjunto P dos países no conjunto C das cidades, definida pela expressão 'capital de'. Então, se M = { Portugal, França, Inglaterra }, será:

f(M) = { Lisboa, Paris, Londres }.

Se M = { França, Espanha, Itália, Brasil, Japão }, será:

f(M) = { Madrid, Roma, Paris, Tóquio, Brasília }, etc.

O contradomínio desta aplicação f é, evidentemente, o *conjunto de todas as cidades que são capitais de algum país*. Designemos por C′ este conjunto. Então será verdadeira a proposição:

(1) $\forall y \in C', \quad \exists x \in P: \quad y = \text{capital de } x$

mas falsa a proposição:

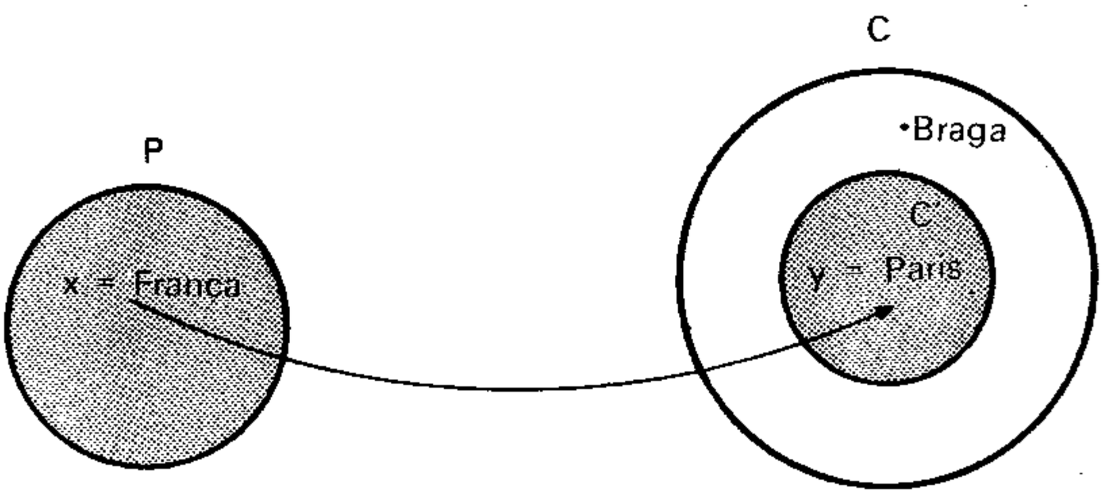
(2) $\forall y \in C, \quad \exists x \in P: \quad y = \text{capital de } x$

que se pode ler: *'Para toda a cidade* y *existe, pelo menos, um país* x *tal que* y *é a capital de* x*'*.

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma aplicação f dum conjunto A num conjunto B é uma aplicação de A sobre B, sse B é o contradomínio de f, isto é, sse B = f(A); também se diz, neste caso, que a aplicação f é sobrejectiva em relação a B (ou simplesmente sobrejectiva, se o conjunto B estiver subentendido)*.

Simbolicamente, o facto de f ser uma aplicação de A *sobre* B pode ser expresso de seguinte modo:

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A: \quad y = f(x)$$



Tornando ao exemplo anterior, vê-se logo que a aplicação *capital de* não é sobrejectiva em relação a C, visto ser falsa a proposição (2), isto é, existem cidades (elementos de C), que não são capitais de nenhum país. Mas a proposição (1) é verdadeira, quer dizer, a aplicação considerada é sobrejectiva em relação ao conjunto C'. Por outras palavras: C' é o contradomínio desta aplicação.

Outros exemplos:

I. No universo $\mathbb{N}$ a expressão 'dobro de' designa uma aplicação do conjunto $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}$ *em si mesmo*), mas não uma aplicação de $\mathbb{N}$ *sobre* $\mathbb{N}$, porque há números naturais (os ímpares) que não são o dobro de nenhum número natural. Porém, a mesma expressão designa uma aplicação do conjunto $\mathbb{N}$ sobre o conjunto dos números pares. Por sua vez, no universo $\mathbb{R}$, a referida expressão designa uma aplicação do conjunto $\mathbb{R}$ *sobre si mesmo.*

II. Como exercício, investigue o que se passa nos universos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ relativamente à expressão 'quadrado de'. Designando por $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números positivos (números reais maiores que zero), estenda esse estudo ao conjunto $\mathbb{R}^+$, tomado como universo.

7. **Aplicações biunívocas.** Consideremos, novamente, os seguintes conjuntos:

A = { Lisboa, Porto, Coimbra }

A' = { Lisboa, Porto, Coimbra, Santarém }

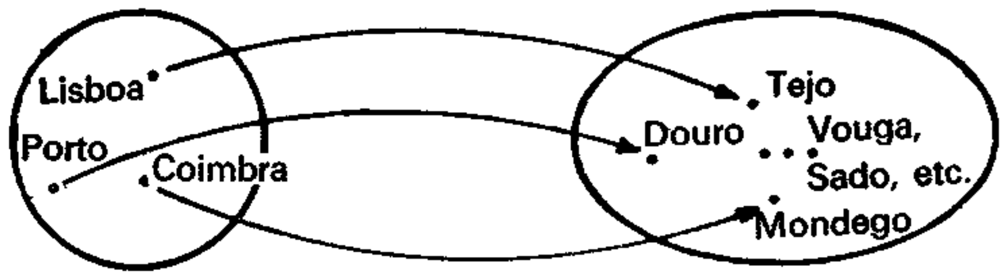
B = conjunto dos rios de Portugal,

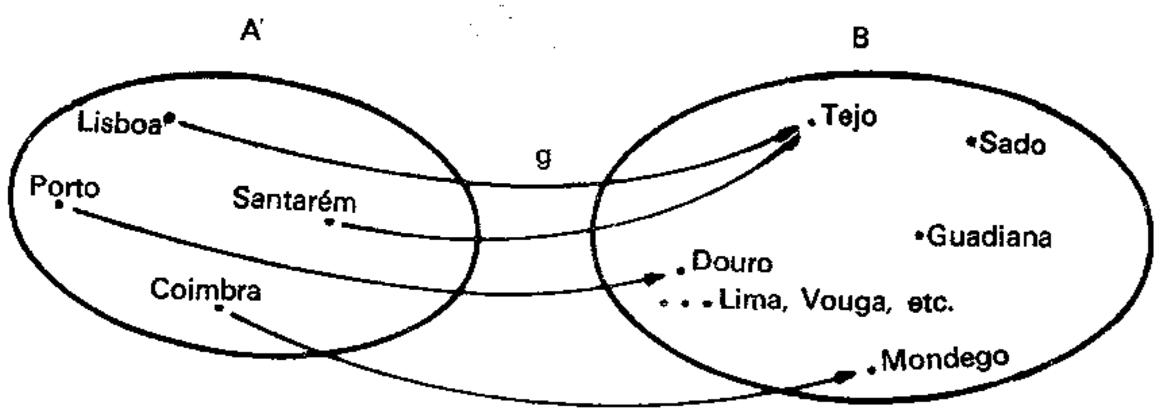
e as seguintes aplicações:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} & \text{Santarém} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} \end{pmatrix}$$

que podemos representar, mais sugestivamente, pelos diagramas seguintes:





É claro que f $\neq$ g, porque o conjunto A (domínio de f) é distinto do conjunto A' (domínio de g). Mas já vimos que g é uma extensão de f.

Que diferença importante se nota entre estas duas aplicações? A aplicação g aplica dois elementos *distintos* num *mesmo* elemento:

$$g\ (\text{Lisboa}) = g\ (\text{Santarém}) = \textbf{Tejo}$$

Este facto é traduzido no diagrama anterior pela existência de duas setas que partem de elementos *distintos* e terminam num *mesmo* elemento. Tal não sucede, porém, com a aplicação f:

A aplicação f aplica elementos *distintos* em elementos *distintos;* isto é, simbolicamente:

$$x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x'), \quad \forall\ x, x' \in A$$

Exprime-se este facto dizendo que a aplicação f é *biunívoca*. Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que uma aplicação f dum conjunto A num conjunto B é biunívoca, sse aplica elementos distintos de A em elementos distintos de B, isto é, sse*

$$x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x'), \quad \forall x, x' \in A$$

É claro que, pela REGRA DE CONVERSÃO, esta última propriedade também pode ser formulada simbolicamente, escrevendo:

$$(fx) = f(x') \Leftrightarrow x = x', \quad \forall x, x' \in A$$

ou ainda:

$$\forall y \in B: \ f(x) = y \wedge f(x') = y \Rightarrow x = x' \quad (\forall x, x' \in A)$$

Quer isto dizer, segundo o que observámos na pág. 84:

Para cada elemento y *de* B *não pode existir mais de um elemento* x *de* A *tal que* f(x) = y.

Em particular, f pode ser uma aplicação de A *sobre* B, isto é, simbolicamente (n.º 5):

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A: \ f(x) = y$$

Por conseguinte:

Dizer que f é uma aplicação *biunívoca de* A *sobre* B equivale a dizer que, para cada elemento y de B, existe *um e um só elemento* x de A tal que f(x) = y, isto é, simbolicamente:

$$\forall y \in B, \ \exists^1 x \in A: \ f(x) = y$$

Como se vê, a expressão *'aplicação biunívoca de* A *sobre* B' é equivalente à expressão *'correspondência biunívoca* A *e* B', no sentido em que esta foi usada no capítulo anterior.

OUTRAS MANEIRAS DE DIZER. Modernamente, em vez de dizer que uma aplicação f de A em B é *biunívoca*, também se diz que f é *injectiva*, e em vez de dizer que f é uma aplicação *biunívoca de* A *sobre* B também se diz que f é *bijectiva*. Assim, f será bijectiva, se for injectiva *e* sobrejectiva (em relação a B).

8. **Aplicação inversa duma aplicação biunívoca.** Seja f uma aplicação biunívoca dum conjunto A num conjunto B e seja B' o contradomínio de f, isto é, B' = f(A). Então, a cada elemento x de B' corresponde *um e um só* elemento y de A tal que f(y) = x. Pois bem, a correspondência unívoca $x \curvearrowright y$ assim estabelecida entre o conjunto B' e o conjunto A é chamada *aplicação inversa de* f.

A aplicação inversa de f é representada pela notação f^{-1}. Deste modo, segundo a definição anterior, f^{-1} *é a aplicação que tem por domínio o contradomínio de* f *e tal que*

$$(1) \qquad y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \quad (\forall\ x \in B',\ y \in A)$$

Desta definição decorre imediatamente que, se f *é biunívoca,* f^{-1} *também é biunívoca e a inversa de* f^{-1} *é* f, isto é:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Por exemplo, se f é a aplicação atrás considerada:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$

já vimos que f é uma aplicação biunívoca do conjunto A das referidas cidades no conjunto B dos rios de Portugal. Então a inversa de f é:

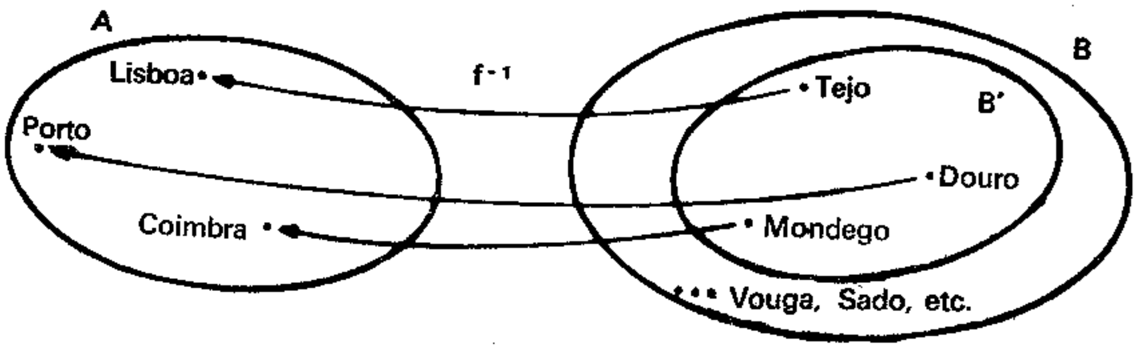
$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \\ \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \end{pmatrix}$$

cujo domínio é $B' = \{\text{Tejo, Douro, Mondego}\} = f(A)$.

A mesma aplicação pode ser definida pelo diagrama junto, que resulta do anterior, simplesmente, *invertendo o sentido das setas.*

Com respeito ao mesmo exemplo, vemos que:

$$(f^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Tejo} & \text{Douro} & \text{Mondego} \end{pmatrix}$$



NOTA. Neste exemplo, o símbolo f é uma abreviatura da expressão '*rio que banha*' (aplicada a elementos de A), enquanto o símbolo f^{-1} é uma abreviatura da expressão '*cidade banhada pelo rio*' (aplicada a elementos de B').

EXERCICIOS:

I. Verifique quais das seguintes aplicações são biunívocas e indique as inversas das que o são:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}$$

Quais são as que coincidem com as respectivas inversas?

II. Considere a aplicação *dobro de* no universo $\mathbb{N}$. É esta uma aplicação biunívoca de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$? No caso afirmativo indique a sua inversa e o respectivo domínio. Idem para o universo $\mathbb{R}$.

III. Problemas análogos aos anteriores com as aplicações *quadrado de* e *cubo de*.

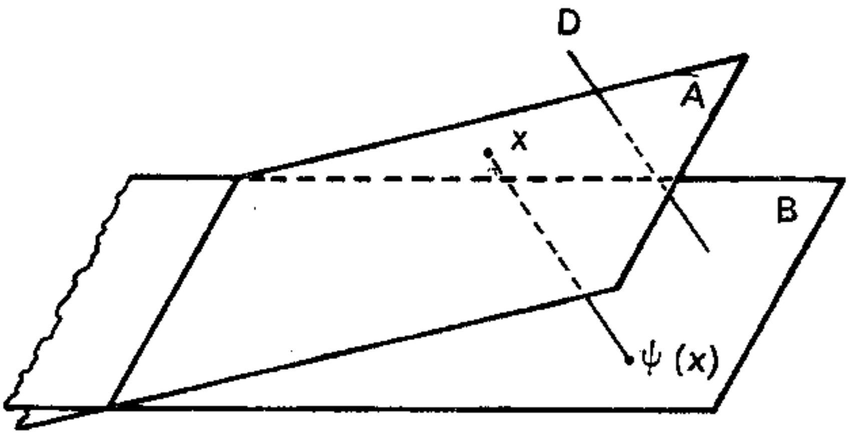
IV. Idem para funções definidas pelas seguintes expressões:

$$x^2 - 1, \quad 2x^3, \quad 2 - \frac{1}{5}x^3, \quad \frac{x}{3x+2}, \quad \frac{x}{x^2-1} \quad (\text{só em } \mathbb{R})$$

V. Seja P o conjunto dos países e C o conjunto das cidades. É biunívoca a aplicação de P em C definida pela expressão 'capital de'? No caso afirmativo, como se exprime a aplicação inversa?

VI. Seja E o espaço usual com 3 dimensões e seja A um plano qualquer. Designemos por φ a aplicação que faz corresponder, a cada ponto x de E, a projecção ortogonal de x sobre A. É φ biunívoca?

VII. Considere dois planos A, e uma recta D não paralela a qualquer destes planos. Seja ψ a aplicação que faz corresponder a cada ponto x de A a projecção de x sobre B paralelamente a D (isto é, o ponto de intersecção com B da recta que passa por x e é paralela a D). É ψ biunívoca? No caso afirmativo, qual é a sua inversa?



VIII. Sejam A e B dois conjuntos finitos e $\# A = m$, $\# B = n$. Determinar o número total de aplicações biunívocas de A em B que se podem definir. (Distinga os casos $m \leqslant n$, $m > n$).

9. **Aplicação identidade.** Seja A = { Lisboa, Porto, Coimbra }. Qual é a mais simples aplicação biunívoca de A sobre A? É evidentemente a que faz corresponder a cada elemento de A esse *mesmo* elemento de A. Dá-se-lhe o nome de *aplicação identidade em* A e representa-se por I_A. Será, pois:

$$I_A = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \\ \text{Lisboa} & \text{Porto} & \text{Coimbra} \end{pmatrix}$$

ou seja: $$I_A(x) = x, \ \forall x \in A$$

É claro que se trata aqui dum conceito geral: dado um conjunto A *qualquer*, chama-se *aplicação identidade em* A, e representa-se por I_A, a aplicação assim definida:

$$I_A(x) = x, \ \forall x \in A$$

Vê-se logo que I_A é uma aplicação biunívoca do conjunto A sobre si mesmo e que $\overset{-1}{I_A} = I_A$.

Quando o domínio A estiver subentendido, bastará dizer 'aplicação identidade' (ou apenas 'identidade') e usar o símbolo I, para designar esta aplicação.

10. **Produto de duas aplicações.** Seja:

A = { Lisboa, Santarém, Coimbra, Setúbal }

B = { Tejo, Douro, Mondego, Sado, Guadiana }

C = conjunto dos países da Europa.

A expressão *'rio que banha'* dá-nos a seguinte aplicação de A em B:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Santarém} & \text{Coimbra} & \text{Setúbal} \\ \text{Tejo} & \text{Tejo} & \text{Mondego} & \text{Sado} \end{pmatrix}$$

Por sua vez, a expressão *'país onde nasce'* dá-nos a seguinte aplicação de B em C:

$$g = \begin{pmatrix} \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} & \text{Sado} & \text{Guadiana} \\ \text{Espanha} & \text{Portugal} & \text{Espanha} & \text{Portugal} & \text{Espanha} \end{pmatrix}$$

Ora, destas duas resulta a aplicação de A em C definida pela expressão *'país onde nasce o rio que banha'*. É natural designar esta aplicação pelo símbolo gf e chamar-lhe *produto de* g *por* f. Será, pois:

$$gf = \begin{pmatrix} \text{Lisboa} & \text{Coimbra} & \text{Setúbal} & \text{Santarém} \\ \text{Espanha} & \text{Portugal} & \text{Portugal} & \text{Espanha} \end{pmatrix}$$

Como se vê, gf é a aplicação de A em C que resulta de efectuar f sobre cada elemento x de A e, em seguida, g sobre o elemento f(x) de B, o que dá g(f(x)). Isto é, simbolicamente:

$$(gf)\ (x) = g(f(x)), \quad \forall\ x\ \in A$$

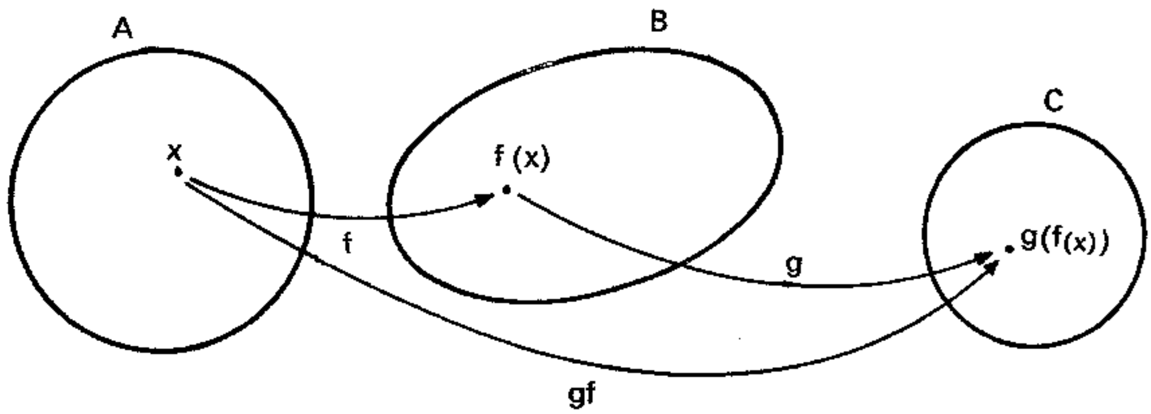
Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer, f uma aplicação de A em B e g uma aplicação de B em C. Chama-se produto de g por f e representa-se por gf a aplicação de A em C que faz corresponder a cada elemento x de A o elemento g(f(x)) de C.*

Será, pois, por definição:

$$(gf)\ (x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A$$

Este conceito é traduzido pelo diagrama que se segue:



Muitas vezes, em vez de *'produto de* f *por* g' diz-se *'aplicação composta de* f *com* g' e designa-se esta notação fog. No primeiro caso, a operação que definimos chama-se *multiplicação* (de aplicações) e, no segundo caso, *composição.*

Vejamos um outro exemplo. Já vimos que a expressão *'capital de'* representa uma aplicação do conjunto P (dos países) no conjunto C (das cidades). Por sua vez, a expressão *'número de habitantes de'* define uma aplicação de C em $\mathbb{N}$. Logo, a expressão *'número de habitantes da capital de'* define uma aplicação de P em $\mathbb{N}$, produto da segunda pela primeira. Aliás, na última tabela do n.º 1 podem reconhecer-se vários exemplos análogos.

Consideremos, agora:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Neste caso f, g são aplicações do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ sobre si mesmo. Para calcular gf ou fg basta utilizar a definição anterior. Temos, por exemplo:

$$(gf)\ (1) = g(f(1)) = g\ (2) = 4$$

$$(gf)\ (2) = g(f(2)) = g\ (3) = 1, \text{ etc.}$$

Assim, virá:

$$g\,f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f\,g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tem-se neste caso f g = g f, *mas nem sempre assim acontece,* como veremos mais adiante. Duas aplicações f, g dizem-se *permutáveis* (ou *comutáveis*) quando f g = g f.

Sejam, agora, os operadores ([1])

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Neste caso, o contradomínio de T, que é $\{2, 4, 6, 8\}$, não está contido no domínio de S, que é $\{1, 2, 3, 4\}$. Mas ainda podemos definir ST mediante a seguinte fórmula:

$$(ST)\ (x) = S(T(x)),$$

para todo x tal que $x \in D_T$ e $T(x) \in D_S$. Assim, virá:

$$(ST)\ (1) = S(T(1)) = S(2) = 4$$
$$(ST)\ (2) = S(T(2)) = S(4) = 16$$

Quanto a $(S\,T)\ (3)$ e $(S\,T)\ (4)$ *não existem,* porque $T(3)$ e $T(4)$ são os elementos 6 e 8 que não pertencem a D_S. Será, portanto:

$$S\ T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Analogamente se vê que $\quad T\,S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Dum modo geral, dadas duas aplicações f, g de domínios quaisquer, chama-se *produto de* f *por* g, e designa-se por fg a aplicação definida pela fórmula

$$((fg)\ (x) = f(g(x))$$

([1]) Já atrás se disse que 'operador' é sinónimo de 'aplicação'.

para todos os valores de x, para os quais o segundo membro tem valor, isto é, tais que

$$x \in D_g \quad \wedge \quad g(x) \in D_f$$

O domínio de fg será, pois, constituído por esses valores de x, isto é: $D_{fg} = \{x\colon x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$.

Pode acontecer, em particular, que o conjunto D_{fg} obtido segundo esta fórmula seja vazio. Diremos, neste caso, que fg é a *aplicação vazia*. Por exemplo, o produto das aplicações

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

é a aplicação vazia.

EXERCICIOS:

I. Sejam p, m, i, as aplicações definidas respectivamente pelas expressões 'pai de', 'mãe de', 'idade de', num conjunto de pessoas. Qual é então o significado dos símbolos pm, mp, ip, im, pi, mi? As aplicações m, p são permutáveis?

II. Dadas as aplicações

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

indique os respectivos domínios e contradomínios, e calcule PQ, QP, PR, RP, QR e RQ. Em que casos há permutabilidade?

III. Idem para as aplicações

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

IV. As expressões 'dobro', 'triplo', 'metade', 'terço', 'quadrado', 'cubo', 'raiz quadrada', 'raiz cúbica' (1), representam operadores correspondentes às expressões designatórias $2x$, $3x$, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, e cujos domínios dependem do universo considerado. Indique, em linguagem comum, os produtos desses operadores dois a dois, bem como as respectivas expressões designatórias simbólicas e os domínios de existência em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{R}$. Em que casos há permutabilidade?

V. Sendo f, g, h, i, k, as funções definidas respectivamente por $x+3$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, x, x^2, sendo $\mathbb{R}$ o universo, determine **f i**, **i g**, h i, f g, g f, f h, h f, g h, h g, g k, k g, h(gf), (hg)f, bem como os respectivos domínios (2). Quais são, nestes casos, os pares de aplicações permutáveis?

VI. O produto do operador *dois terços* pelo operador *quatro quintos* é o operador *dois terços de quatro quintos*. Escreva, por extenso, uma designação mais simples equivalente a '*dois terços de quatro quintos*', e indique a equivalência dessas duas expressões, traduzida por símbolos numéricos.

11. **Produto duma aplicação pela identidade.** Seja, por exemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e f o operador *dobro* restringida a A. Então, será:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad I_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad I_B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

---

(1) Para simplificar, escrevemos 'dobro' em vez de 'dobro de', 'metade' em vez de 'metade de', etc.

(2) No caso de funções em $\mathbb{R}$ prefere-se, como veremos adiante, a notação '$f \circ g$' à notação '$f\ g$'. Só por curiosidade usamos a segunda.

e facilmente se reconhece que

$$f\ I_A = f, \quad I_B f = f$$

Ora, trata-se aqui dum facto geral, isto é:

Quaisquer que sejam os conjuntos A, B *e a aplicação* f *de* A *em* B *tem-se* $f\ I_A = I_B f = f$.

(Demonstre este facto).

Porém, tornando ao exemplo inicial, vê-se que

$$f I_B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad I_A f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e portanto $f\ I_B \neq f, \quad I_A f \neq f$

12. **Produto de duas aplicações inversas uma da outra.** Pense, um pouco, nas seguintes perguntas:

1) Qual é a capital do país cuja capital é Paris?

2) Qual é o país cuja capital é a capital da Itália?

3) Qual é a metade do dobro dum número?

4) Qual é o dobro da metade dum número?

5) Qual é a raiz quadrada do quadrado dum número?

6) Qual é o quadrado da raiz quadrada dum número?

7) Qual é a raiz cúbica do cubo dum número?

8) Qual é a cidade banhada pelo rio que banha Lisboa?

Note-se que a última questão é imprecisa. Porquê? O mesmo acontece com a questão 6) no universo $\mathbb{R}$, mas não em $\mathbb{N}$. Porquê? Será correcto dizer, por exemplo, 'a raiz quadrada de 25' no universo (Q?

Considere, agora, as aplicações

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, no conjunto $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Imediatamente se reconhece que $g = f^{-1}$. Por outro lado

$$f^{-1}f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I_A$$

$$f\,f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = I_B$$

Este exemplo e os anteriores fazem pensar que seja verdadeira a seguinte proposição:

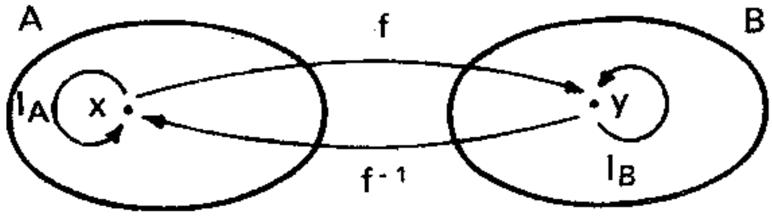
Quaisquer que sejam os conjuntos A *e* B, *se* f *é uma aplicação biunívoca de* A *em* B, *tem-se:*

$$f^{-1}\,f = I_A, \quad f\,f^{-1} = I_B$$

Veja se é capaz de demonstrar este facto: basta, para isso, aplicar as definições de produto de duas aplicações, de aplicação inversa e de aplicação identidade. Recorde que se tem, por definição, neste caso:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad \forall x \in A, \quad y \in B$$

O diagrama junto, só por si, torna o facto intuitivo.



EXERCICIOS:

I. Seja $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 9\}$ e f a restrição da aplicação $x \curvearrowright x^2$ a A. Defina directamente esta aplicação e determine uma aplicação g tal que $f\,g = I_B$ (inverso à direita de f). Quantos inversos à direita tem f? Questões análogas para a aplicação $x \curvearrowright x^2$ em $\mathbb{N}$, e em $\mathbb{R}$.

II. Seja $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e f a restrição de $x \curvearrowright x^2$ a A. Determine uma aplicação g de B em A tal que $g\,f = I_A$. Quantas aplicações g existem nestas condições?

III. Prove o seguinte: Toda a aplicação injectiva dum conjunto finito em si mesmo é sobrejectiva, e vice-versa.

13. **Aplicação inversa dum produto.** Considere os operadores *dobro* e *cubo* no universo $\mathbb{R}$; ambos são aplicações biunívocas do conjunto $\mathbb{R}$ sobre si mesmo, cujas aplicações inversas são, respectivamente, os operadores *metade* e *raiz cúbica*. O produto do primeiro pelo segundo é o operador *dobro do cubo*, correspondente à expressão $2x^3$. O produto do segundo pelo primeiro é o operador *cubo do dobro*, que corresponde à expressão $(2x^3)$ equivalente a

$8x^3$. Ora, é fácil ver que ambos os produtos são ainda aplicações biunívocas de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Qual é o inverso do operador *dobro do cubo*? Para achar o dobro do cubo dum número x, eleva-se x ao cubo e multiplica-se o resultado por 2; o número y assim obtido será, pois:

$$y = 2x^3$$

Se quisermos, inversamente, calcular x a partir de y, devemos *primeiro* dividir y por 2 e *depois* extrair a raiz cúbica a $\frac{y}{2}$, isto é:

$$x = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}$$

Vemos, assim, que o inverso do operador *dobro do cubo* é o operador *raiz cúbica de metade*. Analogamente se reconhece que o inverso de *cubo do dobro* é *metade da raiz cúbica*, o inverso de *dobro do terço* é *triplo da metade* (isto é, o inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$), etc., etc.

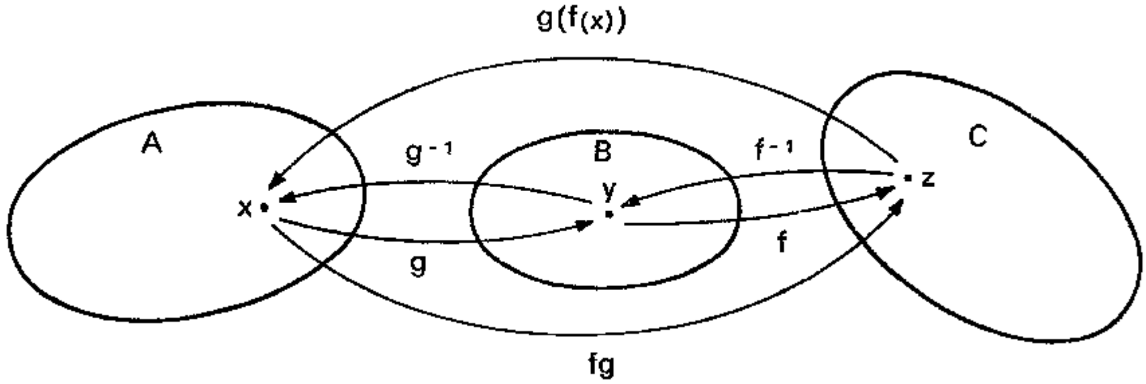
Estes exemplos levam-nos a admitir o seguinte facto geral:

O produto f g *de duas aplicações biunívocas é ainda uma aplicação biunívoca e o inverso do produto é o produto das aplicações inversas em ordem inversa; isto é:*

$$(f\ g)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$$

Será isto verdade? Consideremos três conjuntos A, B, C quaisquer, uma aplicação biunívoca g de A sobre B e uma aplicação biunívoca f de B sobre C. Queremos provar que f g é uma aplicação biunívoca de A em C e que $(f\ g)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

O seguinte diagrama dá-nos intuitivamente a ideia da demonstração:



Demonstração.

Seja z um elemento qualquer de C e ponhamos

(1) $$y = f^{-1}(z), \quad x = g^{-1}(y)$$

Então, será $z = f(y)$, $y = g(x)$ e, portanto:

(2) $$z = (fg)\,(x)$$

Por outro lado, de (1) vem:

(3) $$x = (g^{-1}f^{-1})\,(z)$$

Seja agora x′ um elemento qualquer de A distinto de x. Então, como f, g são biunívocas, será $g(x) \neq g(x')$, donde:

$$f(g(x)) \neq f(g(x')) \quad \text{ou seja} \quad (fg)\,(x) \neq (fg)\,(x')$$

Assim, para todo o elemento z de C existe um e um só elemento x de A que verifica (2), o que significa que fg é biunívoca de A sobre B. Finalmente as fórmulas (2) e (3) mostram que $(fg)^{-1} = g^{-1}\,f^{-1}$.

14. **Equipotência de dois conjuntos.** Segundo o que vimos no Cap. III, n.º 2, dados dois conjuntos A, B não vazios, diz-se que A é *equipotente* a B, quando pode ser definida uma aplicação biunívoca de A sobre B. Admitimos então, intuitivamente, que a relação *equipotente,* assim definida entre conjuntos, é uma relação de equivalência, isto é, uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. Podemos, agora, demonstrar este facto:

1.º A relação é *reflexiva*, isto é: *todo o conjunto* A *não vazio é equipotente a si mesmo*. Com efeito, qualquer que seja o conjunto A não vazio, existe uma aplicação biunívoca de A sobre A: a identidade I_A.

2.º A relação é *simétrica,* isto é, *se* A *é equipotente a* B, B *é equipotente a* A. Com efeito, se existe uma aplicação biunívoca f de A sobre B, a aplicação inversa f^{-1} é uma aplicação biunívoca de B sobre A.

3.º A relação é *transitiva,* isto é, *se* A *é equipotente a* B *e* B *é equipotente a* C, *então* A *é equipotente a* C. Com efeito, se existe uma aplicação biunívoca f de A sobre B e uma aplicação biunívoca g de B sobre C, o produto g f é, como vimos no número anterior, uma aplicação biunívoca de A sobre C.

Outros factos que admitimos intuitivamente no Cap. III podem agora ser demonstrados, como exercícios, por exemplo, a transitividade da relação $<$ (pág. 144).

15. **Produto de três ou mais aplicações. Potências de aplicações.** Consideremos três aplicações f, g, h, de domínios quaisquer. Chama-se *produto* das aplicações f, g, h, por esta ordem, e designa-se por f g h, a aplicação definida pela fórmula:

$$(f\ g\ h)\ (x) = f(g(h(x)))$$

para todos os valores de x tais que

$$x \in D_h \quad \wedge \quad h(x) \in D_g \quad \wedge \quad g(h(x)) \in D_f$$

Portanto, D_{fgh} será o conjunto de todos os valores de x que verificam esta condição.

EXEMPLOS:

I. Seja:

$$f = \begin{pmatrix} \text{Portugal} & \text{Espanha} & \text{França} \\ \text{Lisboa} & \text{Madrid} & \text{Paris} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \text{Lima} & \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} & \text{Sado} \\ \text{Portugal} & \text{Espanha} & \text{Portugal} & \text{Espanha} & \text{Portugal} \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} \text{Porto} & \text{Coimbra} & \text{Lisboa} & \text{Setúbal} \\ \text{Douro} & \text{Mondego} & \text{Tejo} & \text{Sado} \end{pmatrix}$$

Estas aplicações também podem ser definidas nos respectivos domínios pelas expressões 'capital de', 'país onde nasce' e 'rio que banha'. Então é fácil ver que se tem:

$$fgh = \begin{pmatrix} \text{Porto} & \text{Coimbra} & \text{Lisboa} & \text{Setúbal} \\ \text{Madrid} & \text{Lisboa} & \text{Madrid} & \text{Lisboa} \end{pmatrix}$$

aplicação esta definida pela expressão *'capital do país onde nasce o rio que banha'* no conjunto $D_{fgh} = D_f$.

II. Seja:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tem-se, neste caso:

$$f\,g\,h = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D_{fgh} = \{1,\ 3\}$$

III. Seja $f(x) \equiv 1/x$, $g(x) \equiv 2 - x$, $h(x) \equiv \sqrt{x}$ no universo $\mathbb{R}$. Então, será:

$$(f\,g\,h)\,(x) \equiv \frac{1}{2 - \sqrt{x}}, \quad D_{fgh} = \{x\colon x \geqslant 0 \ \wedge \ x \neq 4\}$$

Analogamente se define o produto de 4 aplicações, de 5 aplicações, etc. Por sua vez, do conceito de produto de duas ou mais aplicações deriva o conceito de *potência de expoente natural duma aplicação*. Assim:

$$f^1 = f,\ f^2 = f\,f,\ f^3 = f\,f\,f,\ f^4 = f\,f\,f\,f, \text{ etc.}$$

Por exemplo:

$$\text{Se } f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ vem } f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I$$

$$\text{Se } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ vem } \varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \varphi^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e}$$

φ^4 é a aplicação vazia.

Sejam agora m, p. i, respectivamente, os operadores definidos pelas expressões 'mãe', 'pai', 'idade', num conjunto A de seres humanos. Neste caso, os símbolos i m p, i p^2, etc. designam os operadores definidos pelas expressões 'idade da avó paterna', 'idade do avô paterno', etc., em certos subconjuntos de A (exemplifique com um dado conjunto A). Por sua vez os símbolos p m p, m p m, p^3, etc. designam operadores facilmente reconhecíveis, definidos em subconjuntos de A. Observem-se os seguintes factos interessantes:

$$p\,m\,p = p(m\,p) = (p\,m)\,p,$$

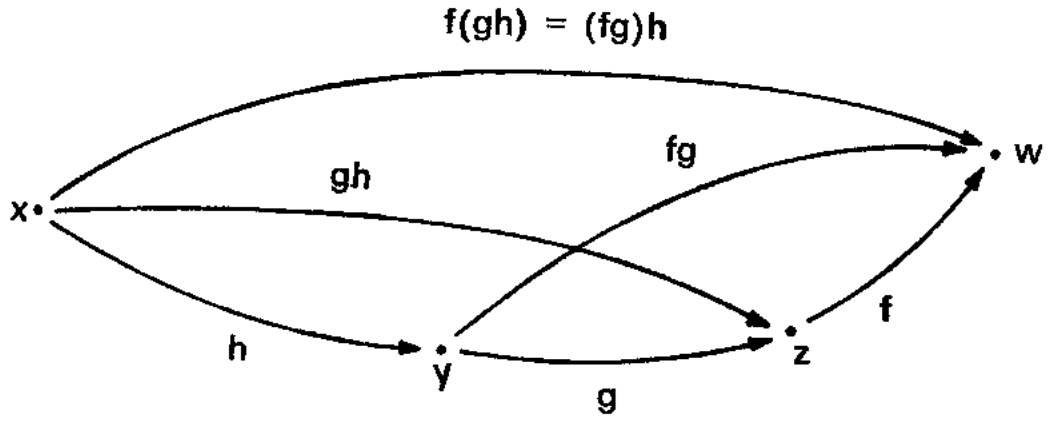
$$m\,p\,m = m\,(p\,m) = (m\,p)\,m,$$

$$p^3 = pp^2 = p^2p, \text{ etc.}$$

A primeira fórmula lê-se, em linguagem corrente:

pai da mãe do pai = *pai da avó paterna* =
= *avô materno do pai,* etc.

Isto dá a ideia de que a multiplicação de operadores, embora não seja comutativa como já temos observado, é no entanto *associativa.* Será sempre assim, na verdade? O facto torna-se intuitivo com o seguinte diagrama:



A demonstração rigorosa é dada no número seguinte.

17. **Associatividade da multiplicação de operadores.** Consideremos três aplicações quaisquer, f, g, h. Trata-se de provar que

$f(gh) = (fg)h$. Ora temos, pela definição de produto de *duas* aplicações:

$$\begin{cases} (gh)(x) = g(h(x)), & \forall x \in D_{hg} \\ x \in D_{gh} \Leftrightarrow x \in D_h & \wedge \; h(x) \in D_g \end{cases}$$

e ainda, *pela mesma definição* [1]:

$$\begin{cases} [f(gh)](x) = f[(gh)(x)], & \forall x \in D_{f(gh)} \\ x \in D_{f(gh)} \Leftrightarrow x \in D_{gh} \wedge (gh)(x) \in D_f \end{cases}$$

Logo, substituindo aqui as expressões $(gh)(x)$ e $x \in D_{gh}$ pelas anteriores expressões equivalentes, virá:

$$\begin{cases} [f(gh)](x) = f[g(h(x))], & \forall x \in D_{f(gh)} \\ x \in D_{f(gh)} \Leftrightarrow x \in D_h \wedge h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f \end{cases}$$

Mas isto mostra que $D_{f(gh)} = D_{fgh}$ e que

$$f(g\,h) = f\,g\,h$$

Analogamente, temos:

$$\begin{cases} (fg)(u) = f(g(u)), & \forall u \in D_{fg} \\ u \in D_{fg} \Leftrightarrow u \in D_g \wedge g(u) \in D_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} [(fg)h](x) = (fg)[h(x)], & \forall x \in D_{(fg)h} \\ x \in D_{(fg)h} \Leftrightarrow x \in D_h \wedge h(x) \in D_{fg} \end{cases}$$

donde, aplicando os dois PRINCIPIOS LÓGICOS DE EQUIVALÊNCIA:

$$[(fg)h](x) = f(g(h(x))), \quad \forall x \in D_{(fg)h}$$

$$x \in D_{(fg)h} \Leftrightarrow x \in D_h \wedge h(x) \in D_g \wedge g(h(x)) \in D_f$$

---

(1) Usamos, em seguida, parêntesis rectos a fim de tornar a escrita menos confusa.

Mas isto mostra que $D_{(fg)h} = D_{fgh}$ e que

$$(fg)h = fgh$$

$$\boxed{(fg)\,h = f(gh) = fgh}$$

o que se exprime dizendo que *a multiplicação de aplicações é associativa.* É claro que esta fórmula permite definir o conceito de produto de 3 aplicações, a partir do conceito do produto de 2 aplicações. Mais geralmente, o produto de *n* aplicações $f_1, \ldots, f_n$, que se representa por $f_1 f_2 \ldots f_n$ ou por $\prod_{k=1}^{n} f_k$ (com n inteiro > 1) pode ser definido a partir do conceito do produto de duas aplicações, como no caso dos números, e vale para esse produto a *propriedade associativa generalizada.*

18. **Funções reais de variável real.** Como já foi dito no número 4, quando uma função é definida por uma expressão designatória, sem mais indicações, o domínio da função é o domínio de existência da expressão no universo considerado. Se o universo é IR, tanto o domínio como o contradomínio da função estão contidos em IR: exprime-se este facto dizendo que a função é *real de variável real.* Se o universo fosse IN, diríamos, '*função natural de variável natural*'. Mais geralmente, podemos considerar *funções reais de variável natural, funções naturais de variável real,* etc.

Sobre este ponto, convém ler o § 1.º do Cap. IV do *Compêndio de Álgebra* (1), 6.º ano, e resolver os respectivos exercícios.

Convém ainda ler o § 3.º do mesmo capítulo e resolver os respectivos exercícios. Quanto à classificação de funções (§ 4.º), bastará tratar da classificação em racionais e irracionais, racionais inteiras e racionais fraccionárias.

---

(1) Ver nota da pág. 170.

19. **Operações sobre funções de variável real.** Sejam f, g duas funções reais de variável real. É costume chamar *soma, diferença, produto* e *quociente* das funções f, g (por esta ordem), as funções f+g, f − g, fg, f/g definidas pelas seguintes fórmulas:

$$(f+g)(x) \equiv f(x)+g(x), \quad (f-g)(x) \equiv f(x)-g(x)$$

$$(f\,g)(x) \equiv f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)}$$

Subentende-se que os domínios de f + g, f - g e fg são a intersecção de D_f com D. Por exemplo, o domínio da função $\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$ é o intervalo $[-1, 1]$, intersecção do intervalo $[-1, +\infty[$, (domínio da função $\sqrt{x+1}$) com o intervalo $]-\infty, 1]$ (domínio da função $\sqrt{1-x}$). Por sua vez, o domínio de f/g é o conjunto dos valores de x que pertencem a $D_f \cap D_g$ e *tais que* $g(x) \neq 0$.

Analogamente, sendo *n* um número natural, a expressão designatória $\sqrt[n]{f(x)}$ define uma função chamada *raiz de índice* n *de* f.

Visto que o produto fg de duas funções reais de variável real é definido pela fórmula anterior, o produto de f por g segundo a definição do n.º 10 deve agora ser chamado '*composta de* f *com* g' representado pelo símbolo fog, para evitar confusões. Seja, por exemplo:

$$f(x) \equiv x+1, \quad g(x) \equiv x^2$$

Neste caso, f é a operação que consiste em *somar* 1 e g a operação que consiste em *elevar ao quadrado*. É claro que se tem:

$$(f \circ g)(x) \equiv x^2+1, \quad (g \circ f)(x) \equiv (x+1)^2$$

Deste modo se vê que f, g (isto é, as operações de somar 1 e de elevar ao quadrado) não são permutáveis. Mas tem-se:

$$(f\,g)(x) \equiv (g\,f)(x) \equiv x^2(x+1)$$

20. **Operador lógico de explicitação.** Consideremos, por exemplo, a condição $3 < x < 5$. No universo IN esta condição é verificada por um único elemento, isto é:

$$\exists^1 x \in \mathbb{N}: \quad 3 < x < 5$$

Para designar esse elemento pode usar-se a expressão

$$\iota_x \quad (3 < x < 5)$$

que se lê 'o elemento x tal que $3 < x < 5$'. É claro que nesta expressão a letra x é uma variável *muda*, que pode ser substituída por qualquer outra variável, sendo a expressão obtida equivalente à primeira (ao contrário do que acontece com a condição $3 < x < 5$, em que a variável x é *livre*). Assim, em IN

$$\iota_x \, (3 < x < 5) \; = \; \iota_n \, (3 < n < 5) \; = \; 4$$

Porém, no universo IR há uma infinidade de elementos que verificam a condição $3 < x < 5$ e, por isso, a expressão $\iota_x \, (3 < x < 5)$ deixa de ter aí sentido; o que podemos escrever neste caso é:

$$\{ x : 3 < x < 5 \} \; = \;]3, \; 5[$$

ou então

$$\iota_x \; (3 < x < 5 \; \wedge \; x \in \mathbb{N}) \; = \; 4$$

Analogamente, em IN ou em $\mathbb{R}^+$, a equação $x^2 = 9$ tem uma única solução (que é 3) e assim podemos escrever:

$$\iota_x \; (x^2 \; = \; 9) \; = \; 3$$

em que o símbolo ι_x se lêa 'o aind elemento x tal que'. Mas em IR esta expressão deixa de ter sentido, visto haver mais de um elemento que verifica a condição $x^2 = 9$. Podemos só escrever:

$$\{x: x^2 = 9\} = \{3, -3\}$$

ou então

$$\iota_x (x^2 = 9 \wedge x > 0) = 3$$

Analogamente, em $\mathbb{R}$:

$$\iota_x (x^2 = 3 \wedge x > 0) = \sqrt{3}$$

$$\iota_t (t^2 = 3 \wedge t < 0) = -\sqrt{3}, \text{ etc.}$$

O símbolo ι é uma letra grega chamada 'iota'. Dum modo geral, se uma dada condição com uma variável, é verificada por um único elemento, este pode ser designado pela expressão que se obtém, antepondo à condição dada o símbolo ι tendo como índice a variável da condição. O operador lógico representado pelo símbolo ι munido dum índice é chamado *operador de explicitação.*

21. **Funções definidas implicitamente; relações funcionais e funções.** Consideremos, por exemplo, a condição $x = y + 2$ em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{R}$. Antepondo a esta condição o símbolo ι_y, obtemos uma expressão designatória, em que y passou a ser variável muda, ficando apenas x como variável livre. É fácil ver que se tem nesse caso

$$\iota_y (x = y + 2) \equiv x - 2$$

isto é: *o elemento* y *tal que* $y + 2 = x$ *é* $x - 2$. O domínio dessa expressão designatória em x é o conjunto dos números > 2 ou o conjunto $\mathbb{R}$, conforme o universo é $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. Analogamente, ter-se-á em $\mathbb{R}$:

$$\iota_y\ (x = 2y) \equiv \frac{x}{2} \quad (\text{domínio: } \mathbb{R})$$

$$\iota_y\ (x = y^2 \wedge y > 0) \equiv \sqrt{x} \quad (\text{domínio: } [0, +\infty[\,)$$

$$\iota_y\ (x^2 + y^2 = 9 \wedge y > 0) \equiv \sqrt{9 - x^2} \quad (\text{domínio: } [-3, 3])$$

Diz-se então, por exemplo, que a condição

$$x^2 + y^2 = 9 \wedge y > 0$$

define *implicitamente* a variável y como função de x no conjunto $[-3, 3]$, visto que, para cada $x \in [-3, 3]$, *existe um e um só* y que verifica essa condição.

Dum modo geral, dada uma relação binária R, a expressão $\iota_y\ (x\ R\ y)$ é uma expressão designatória que tem por domínio de existência o conjunto A dos valores de x tais que existe um e um só y que verifica $x\ R\ y$, isto é, o conjunto

$$A = \{x: \exists^1 y,\ x\ R\ y\}$$

Diz-se então que a condição $x\ R\ y$ define *implicitamente* y como função de x no conjunto A; e que a expressão designatória $\iota_y\ (x\ R\ y)$ define essa função *explicitamente*. Também se diz neste caso que a condição $x\ R\ y$ (ou a condição R) é *funcional* relativamente à segunda variável, no conjunto A. Note-se que, por exemplo, a condição

$$x + y^2 = 3 \wedge y > 0$$

é funcional em relação a y no conjunto $]-\infty, 3]$ (corresponde-lhe a função $\sqrt{3 - x}$) e funcional em relação a x no conjunto $\mathbb{R}$ (corresponde-lhe a função *inversa* $3 - y^2$).

Quando se diz que uma relação é funcional, subentende-se geralmente que é funcional relativamente à segunda variável. No diagrama duma relação, reconhecemos que esta é funcional, *quando de cada elemento parta uma única seta*. É isto, aliás, o que temos visto nos diagramas de funções.

Assim, a cada relação funcional R, *corresponde uma e uma só função, que é definida explicitamente pela expressão* $\iota_y (x \, R \, y)$. *Reciprocamente, a cada função* f *corresponde uma e uma só relação* R *assim definida*:

$$x \; R \; y \Leftrightarrow f(x) = y$$

NOTA. Esta correspondência biunívoca que se estabelece entre relações funcionais e funções leva muitos autores modernos a identificar as relações funcionais com as funções correspondentes. Todavia esta identificação conduz muitas vezes na prática a situações confusas. Por exemplo, a relação *é pai de* não é funcional, segundo este critério (quer dizer, a condição 'x *é pai de* y' não é funcional com respeito a y), mas já a relação *tem por pai*, inversa da primeira, é funcional; corresponde-lhe a função (ou aplicação) *pai de*, que não convém confundir com essa relação. Analogamente, a relação de identidade em qualquer universo U, é uma relação funcional, à qual corresponde a aplicação I; mas não convém confundir esta aplicação com a relação =; pois que então deveríamos escrever I = =, o que não parece razoável.

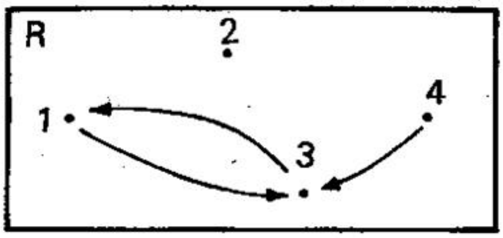
OUTROS EXEMPLOS:

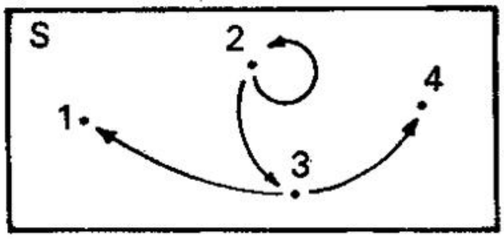
I. Sejam as relações R e S assim definidas

y \ x	1	2	3	4
1			•	
2				
3	•			•
4				

y \ x	1	2	3	4
1			•	
2		•		
3		•		
4			•	

que também podem ser definidas pelos seguintes diagramas:





A primeira é funcional no conjunto $\{1, 3, 4\}$. Corresponde-lhe a função $f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

A segunda não é funcional no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Mas já a sua inversa, S^{-1}, é funcional neste conjunto, correspondendo-lhe a função $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

II. Seja F a relação *é filho ou filha de* e seja M o conjunto dos indivíduos de sexo masculino (no universo H dos seres humanos). A relação F não é funcional, mas se pusermos

$$xRy \Leftrightarrow xFy \wedge y \in M$$

a relação R assim definida já é funcional: corresponde-lhe a função ***pai de***, que podemos designar abreviadamente por p. Assim:

$$p(x) \equiv \iota_y \ (xFy \wedge y \in M)$$

III. Façamos corresponder a cada número real x o número real y tal que

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 2x-1 & \text{se} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Fica, assim, definida uma função real de domínio $\mathbb{R}$, que também pode ser definida pela expressão designatória

$$\iota_y \left[(y = x^2 \Leftarrow x < 1) \wedge (y = 2x-1 \Leftarrow x \geqslant 1)\right]$$

IV. Costuma designar-se por Z o conjunto dos números inteiros relativos $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$. Posto isto, consideremos a expressão designatória:

$$\iota_n \,(n \in Z \ \wedge \ n \leqslant x < n+1)$$

que se pode ler '*o maior número inteiro igual ou inferior a* x'.

Fica, assim, definida em $\mathbb{R}$ uma função de x também chamada '***característica de*** x' ou '***parte inteira de*** x' e que se representa pelo símbolo C(x). Teremos, por exemplo:

$$C(2,65) = 2, \quad C(2) = 2, \quad C(4,001) = 4$$

$$C(\pi) = 3, \quad C(-0,35) = -1, \quad C(-2) = -2, \quad \text{etc.}$$

22. **Funções plurívocas.** Consideremos a equação

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = 4$$

Resolvendo-a relativamente a y, é costume apresentar a solução (dependente de x) sob a seguinte forma:

$$(2) \qquad y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \quad \text{para } x \in [-2, 2].$$

Aqui, a bem dizer, há um abuso de escrita. A expressão $\pm\sqrt{4 - x^2}$ não é propriamente uma expressão designatória no intervalo $[-2, 2]$, pois que, para cada valor de x tal que $-2 < x < 2$, a expressão toma dois valores diferentes. Por exemplo, para $x = 1$, obtém-se a expressão ambígua $\pm\sqrt{3}$. A condição (1) não é, portanto, funcional no intervalo $[-2, 2]$. No entanto, é cómodo dizer, neste caso, que a fórmula (2) define explicitamente y como *função plurívoca de* x nesse intervalo — função *com dois valores* para cada $x \in]-2, 2[$.

Dum modo geral, chamaremos *função plurívoca* toda a correspondência não necessariamente unívoca, isto é, toda a correspondência que associa a cada elemento dum conjunto A (domínio da função) *um ou mais* elementos de outro conjunto B. Por oposição, podíamos chamar *função unívoca* toda a correspondência unívoca. Mas, segundo as convenções anteriores, a palavra 'função' (assim como as palavras 'aplicação', 'operador', etc.) significam 'correspondência unívoca'. Assim, a expressão 'função plurívoca' deve considerar-se indecomponível, nos casos em que se aplica.

Razões semelhantes às que aduzimos para as funções, levam-nos a não confundir uma função plurívoca com a relação correspondente ([1]).

([1]) Note-se que, de uma função plurívoca f, podemos sempre passar para uma função (unívoca), associando, a cada elemento x do domínio de f, não os *valores individuais*, mas *o conjunto desses valores*, correspondentes a x.

Estas convenções permitem-nos falar de *inversa de uma função* f, mesmo no caso em que f não é biunívoca (ou injectiva); neste caso a inversa de f é uma função plurívoca. Por exemplo, a inversa da função $x \curvearrowright y = x^2$ é a função plurívoca $y \curvearrowright x = \pm \sqrt{y}$; isto é: a operação de *elevação ao quadrado* tem como inversa, no universo $\mathbb{R}$, a operação plurívoca de *extracção de raiz quadrada*; o contra-domínio da primeira função é o domínio da segunda e vice-versa.

Um dicionário bilíngue — por ex. português-inglês — dá-nos bem a ideia de uma operação plurívoca (a tradução de português para inglês), visto que, a cada vocábulo português, correspondem vários vocábulos ingleses. É claro que, neste caso, a operação inversa é também plurívoca.

A partir deste momento convém resolver os exercícios sobre explicitação e inversão que figuram no Compêndio de Álgebra(1), *e fazer por aí o estudo da representação geométrica das funções, acompanhado dos respectivos exercícios.*

(1) Ver nota da pág. 170.

Índice

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Dezembro de 1974

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA