J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

2.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

ADITAMENTO I

CÁLCULO DE VALORES APROXIMADOS

ADVERTÊNCIA PRÉVIA

Só uma parte do que, é exposto neste aditamento ao § 1, Cap. I, deste volume, deverá ser tratada nas aulas. O objectivo essencial destes apontamentos é o de corresponder a solicitações vindas espontaneamente de professores e alunos, no sentido de estabelecer uma coordenação entre os elementos de cálculo numérico aproximado, como vêm expostos no texto-piloto, e as regras práticas que são aplicadas tradicionalmente nos problemas de física em que intervêm multiplicações, divisões, extracções de raiz, etc.

Desde já se deve salientar que, embora úteis dentro de certos limites, as referidas regras não são rigorosas, e que o seu uso indiscriminado pode conduzir, em certos casos, a conclusões pouco satisfatórias, ou porque são demasiado optimistas ou porque são demasiado pessimistas. Uma das razões pelas quais essas regras não são rigorosas é o facto de se basearem nas fórmulas aproximadas dos desvios relativos, que só poderão ser úteis e seguras quando usadas com certo discernimento, baseado não só na teoria, mas também na experiência e no bom senso.

Desde logo nos parece evidente que a aquisição de uma tal experiência ultrapassa a finalidade do ensino liceal. Mas há um mínimo razoável que os alunos deveriam conhecer sobre o assunto. E esse mínimo, em nosso entender, é mais ou menos o que vem exposto nos n.^{os} 2, 3, 4, 5, 6 e 7, mas sem desenvolvimentos teóricos: *bastará conhecer as regras e sabê-las aplicar na prática com critério.* Tudo o mais pode ser recomendado aos alunos como leitura, para melhor esclarecimento do assunto.

Note-se que as duas últimas regras do n.º 5 são apresentadas como facultativas. O que, entre a matéria desse número, consideramos essencial, é a regra prática inicial e a aplicação das fórmulas aproximadas de majoração dos erros relativos.

Os cálculos logarítmicos a que se faz referência nos n.^{os} 5 e 6, e outros análogos, podem eventualmente ser propostos como exercícios aos alunos em qualquer ocasião, com dupla finalidade: treiná-los nessa técnica de cálculo e levá-los a tomar plena consciência da importância dos problemas relativos ao grau de aproximação dos resultados, o que é sempre muito importante.

Quanto às fórmulas rigorosas de majoração dos erros absolutos, que se estudam previamente no texto-piloto, e quanto aos problemas, directos e inversos, que se resolvem com aplicação dessas fórmulas, a sua finalidade é principalmente pedagógica, como introdução heurística e lógica à teoria dos limites, que, por sua vez, é o fundamento rigoroso do cálculo infinitesimal e da análise numérica.

Aproveitamos a oportunidade para deixar aqui expressos os nossos melhores agradecimentos ao Snr. Dr. Alfredo Osório dos Anjos, que pôs amavelmente à nossa disposição todos os elementos em que se baseou para as suas lições no curso de férias de 1967, o que muito facilitou a nossa tarefa, embora este aditamento se afaste sensivelmente da linha tradicional.

CÁLCULO DE VALORES APROXIMADOS

1. **O sistema da vírgula flutuante no cálculo elementar, no cálculo logarítmico e no cálculo electrónico.** Normalmente, os dados e os resultados numéricos são apresentados na prática sob a forma decimal, isto é, sob a forma de dízimas finitas. Tal como se aprende na escola primária, a multiplicação com dízimas finitas — impropriamente chamadas *números decimais* [1] — é feita em duas fases sucessivas: primeiro, abstrai-se das vírgulas e multiplicam-se os números como se fossem inteiros; depois, coloca-se a vírgula no produto, de acordo com a bem conhecida regra, que se justifica facilmente. Exemplo:

$$
\begin{aligned}
2{,}307 \times 48{,}26 &= (2307 \times 10^{-3}) \times (4826 \times 10^{-2}) \\
&= (2307 \times 4826) \times 10^{-5} \\
&= 11133582 \times 10^{-5} \\
&= 111{,}33582
\end{aligned}
$$

A parte geralmente trabalhosa do cálculo, para a qual se torna útil o emprego de máquinas de calcular, é evidentemente a primeira.

Para a divisão, procede-se de maneira semelhante na essência, embora diversa nos pormenores: começa-se por multiplicar o dividendo e o divisor por potências de 10 convenientes, de modo a obter dois números inteiros tais que o quociente inteiro do primeiro pelo segundo tenha o número de algarismos significativos desejado; depois divide-se o quociente (e eventualmente o resto) pela potência

---

(1) Por abuso cómodo de linguagem, usaremos também aqui a expressão 'número decimal' ou simplesmente 'número' no sentido de 'dízima finita'.

de 10 que corrige a alteração inicial. Suponhamos, por exemplo, que se trata de achar o quociente e o resto de 1,48 por 3,14 com 3 algarismos exactos([1]). Ora, tem-se:

$$1\ 48 = 148000 \times 10^{-5};\ 3{,}14 = 314 \times 10^{-2};$$

$$\begin{array}{r|l} 148000 & \underline{\ 314\ \ } \\ 2240 & 471 \\ 420 & \\ 106 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} 8 & 4 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

ou seja:

$$148000 = 314 \times 471 + 106,$$

donde, dividindo ambos os membros por 10^5:

$$1{,}48 = 3{,}14 \times 0{,}471 + 0{,}00106$$

Assim, obtêm-se o quociente e o resto pedidos

$$0{,}471 \quad \text{e} \quad 0{,}00106,$$

deslocando a vírgula para a esquerda $5 - 2$ casas no quociente inteiro, 471, e 5 casas no resto, 106.

Geralmente, o resto não interessa nestas divisões: basta conhecer

---

([1]) No n.º 2 se dirá, precisamente, o que deve entender-se por 'algarismos significativos' e por 'algarismos exactos'.

o quociente com aproximação até ao último algarismo significativo que se pretende. No exemplo anterior, será:

$$\frac{1,48}{3,14} = 0,471\ldots$$

São conhecidas variantes deste processo, como as que se aprendem na escola primária ([1]).

Assim, dum modo geral, quando se trata de multiplicações ou divisões, a posição da vírgula pode ser alterada conforme as conveniências, fazendo-se depois a devida correcção no resultado. Exprime-se então este facto dizendo que os cálculos são feitos com *vírgula flutuante*.

Note-se que já no cálculo logarítmico e no emprego da régua de cálculo se recorre a tal processo. Assim, no cálculo com logaritmos decimais, tudo se passa como se os números fossem escritos sob a forma do produto de um número do intervalo $[1,10]$ por uma potência de 10; por exemplo:

$$932,58 = 9,3258 \times 10^2$$

$$10,25 = 1,025 \times 10^1$$

$$3,142 = 3,142 \times 10^0$$

$$0,00508 = 5,08 \times 10^{-3}$$

([1]) É de notar o à-vontade com que, entre nós, se impõe a crianças de 7 a 8 anos a aprendizagem de uma técnica que está longe de ser simples, contrariamente ao que possam imaginar as pessoas que se automatizaram há muitos anos nessa técnica. E o método pedagógico dos castigos corporais, ainda hoje usado com frequência no nosso País, para ensinar às crianças esses processos de cálculo, só contribui para levantar barreiras psíquicas insuperáveis e cimentar a já proverbial aversão à matemática.

Então o expoente da potência de 10 que figura no produto é a *característica do logaritmo* do número e o logaritmo do primeiro factor, compreendido entre 1 e 10, é a *mantissa do logaritmo* do número considerado. Nestes exemplos, a vírgula foi deslocada de modo a deixar à esquerda um *só* algarismo significativo, portanto $\geqslant 1$ e $\leqslant 9$; diz-se então que o número (ou, melhor, a dízima) tem a vírgula *normalizada*. Mas, quando se procura a mantissa do logaritmo numa tábua usual, o que se faz na prática é colocar a vírgula (pelo menos mentalmente) de modo a deixar à esquerda exactamente 4 algarismos significativos; assim, os números anteriores são substituídos respectivamente pelos seguintes:

$$9325{,}8 \quad ; \quad 1025$$

$$3142 \quad ; \quad 5080$$

Então, a tábua fornece directamente a mantissa do número representado pelos 4 primeiros algarismos. Quanto aos algarismos seguintes, se os houver, será preciso fazer a correcção correspondente, recorrendo à interpolação pelas *primeiras diferenças* (diferenças tabulares).

Como é sabido, o processo descrito é perfeitamente lícito, uma vez que a mantissa não depende da posição da vírgula, mas apenas dos logaritmos significativos. E a determinação da característica não oferece a mínima dificuldade, segundo a regra usual.

Convém notar que os *computadores electrónicos digitais para cálculo científico,* trabalham normalmente com vírgula flutuante e com um determinado número de algarismos decimais significativos (cerca de nove nos computadores de potência média e de doze nos de grande potência). É necessário, portanto, não perder de vista os erros de *truncatura* ou de *arredondamento* que daqui resultam, visto que, tal como sucede com as tábuas de logaritmos, são omitidos os algarismos significativos que viriam a seguir àqueles que são conservados, em número fixo ([1]).

Não se deve também esquecer o facto de os computadores utilizarem internamente o sistema binário de numeração, exigindo o emprego de mecanismos suplementares para a tradução e a retroversão entre o sistema decimal e o sistema binário.

Seja como for, na utilização de tais computadores, cada número real é representado externamente sob a forma de uma dízima com um número fixo de algarismos significativos, precedido do sinal + ou −, e seguido da indicação de um número inteiro, positivo, negativo ou nulo, que é o expoente da potência de 10 pela qual deve ser multiplicada essa dízima para dar um valor, geralmente aproximado, do número em questão. O referido número inteiro (expoente), também não pode ir além de certo limite (dois algarismos significativos, em computadores de potência média). Mas esta e outras limitações poderão ser rodeadas, em caso de necessidade, por meio de artifícios mais ou menos laboriosos.

Para separar a dízima inicial da indicação do domínio inteiro, que é o expoente da potência de 10 pela qual a primeira deve ser multiplicada, adopta-se um determinado sinal.

Finalmente, é preciso notar que, *em países de língua inglesa,* se usa o ponto com o significado entre nós atribuído à vírgula e vice-versa, na representação decimal de números.

Por exemplo, em tais países, as expressões

0.54; 3.1416; 3,405,243.28

([1]) Há, no entanto, computadores (para cálculo comercial) que trabalham no sistema de vírgula fixa.

significam, respectivamente, o mesmo que entre nós, as expressões

0,54; 3,1416; 3.405.243,28

Seguem-se alguns exemplos de números tais como se apresentam em dados ou resultados de cálculos com os referidos computadores:

$$3.14159265 \circledcirc + 00 = 3{,}14159265$$

$$0.314159265 \circledcirc + 05 = 31415{,}9265$$

$$2.718281828 \circledcirc - 03 = 0{,}0027182818$$

$$-0.314159265 \circledcirc - 25 = -3{,}14159265 \times 10^{-26}$$

Os dois círculos concêntricos são uma imitação do sinal separador usado em certas marcas de computadores.

2. Algarismos significativos e algarismos exactos. Chama-se *algarismo significativo* duma dízima todo o algarismo dessa dízima que é diferente de 0 ou tem à sua esquerda, pelo menos, um algarismo diferente de zero. Os algarismos significativos duma dízima finita formam uma sequência, atendendo à ordem natural por que se apresentam. Por exemplo, a sequência dos alagrismos significativos de 0,0053020 é (5, 3, 0, 2, 0), a sequência dos algarismos significativos de 350 é (3, 5, 0), etc.

Para introduzir a noção de 'algarismo exacto', começaremos por um exemplo. Suponhamos que 5,382 é valor aproximado de outro número α, com erro inferior a 0,01; quer isto dizer que α está entre 5,382 − 0,01 e 5,382 + 0,01, isto é, que

$$5{,}372 < \alpha < 5{,}392$$

Podemos daqui concluir que 5 e 3 são os dois primeiros algarismos significativos da dízima finita ou infinita (normal) que representa α, e podemos exprimir este facto escrevendo:

$$\alpha = 5,3\ldots$$

Quanto ao terceiro algarismo da dízima representativa de α, o máximo que podemos dizer é que pode ser 7, 8 ou 9. Será portanto natural dizer, neste caso, que os dois primeiros algarismos de 5,382, como valor aproximado de α, são *exactos*. Quanto ao terceiro algarismo, podemos dizer também que ele é exacto, se adoptarmos a seguinte

DEFINIÇÃO. Diz-se que um dado valor aproximado x_1 de um número x tem *n algarismos exactos,* sse o erro absoluto, $|x_1-x|$, é inferior a uma unidade decimal do n-ésimo algarismo significativo de x_1.

Por outro lado, diremos que um algarismo exacto de um valor aproximado é *estritamente exacto,* sse coincide com o algarismo correspondente do valor exacto [1]. Assim, no exemplo anterior, os dois primeiros algarismos do valor aproximado 5,382 são estritamente exactos.

Adoptaremos daqui por diante esta terminologia, que é cómoda na prática e evita confusões.

Vejamos outro exemplo. Sabe-se que a população de certo país é de cerca de 38 630 000 habitantes, com erro inferior a 90 000 habitantes. Como $90\,000 < 100\,000$, o erro absoluto, neste caso, é inferior à unidade decimal do 3.º algarismo significativo, 6, do valor

---

(1) Isto é, com o algarismo correspondente da dízima finita ou infinita (normal) que representa o valor exacto.

dado. Este valor tem, pois, 3 algarismos exactos. Mas o valor exacto, x, da população está compreendido entre 38 630 000 – 90 000 e 38 630 000 + 90 000, isto é:

$$38\,540\,000 < x < 38\,720\,000$$

Isto mostra que os 2 primeiros algarismos do valor dado são *estritamente exactos.*

Outros exemplos ainda:

Quando um aluno é classificado com 9,7 numa prova e aparece na pauta com a classificação de 10, os dois algarismos deste valor são exactos, mas nenhum é estritamente exacto. Pelo contrário, o valor aproximado 9 de 9,7 tem um algarismo estritamente exacto, mas esse valor é *menos próximo* do valor exacto.

Quando se diz que a distância de Lisboa ao Porto, pela melhor estrada é de 321 km, quantos algarismos exactos terá este valor?

Na frase 'Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil em 1500', todos os algarismos são estritamente exactos.

Da definição resultam imediatamente os dois seguintes factos:

I. *Quando se diz que um valor aproximado tem* n *algarismos exactos, tal não impede que esse valor possa ter mais de* n *algarismos exactos.* Assim, no exemplo anterior relativo à população dum país não é impossível que o valor dado tenha 4 algarismos exactos (embora isto seja *pouco aprovável,* se apenas se sabe o que é dito no enunciado).

II. *A sequência dos algarismos exactos de um valor aproximado não depende da posição da vírgula (isto é, não muda quando se multiplicam o valor aproximado e o valor exacto pela mesma potência* *de* 10 *de expoente inteiro, positivo ou negativo). E o mesmo quanto a algarismos estritamente exactos.*

Muitas vezes, os algarismos dum valor aproximado que vêm a seguir aos algarismos exactos não têm interesse. Nesse caso, podem ser substituídos por 0 ou simplesmente omitidos, se estão à direita da vírgula. Tornando ao exemplo da população de um país, bastaria dizer que a população é de cerca de 38 600 000 habitantes.

Para indicar medidas das grandezas, em física, é costume escrever apenas os algarismos que são considerados como exactos, e não omitir o zero, se este é, porventura, o último desses algarismos.

Assim, por exemplo, quando se escreve, a respeito de um comprimento *a* ou de uma pressão p,

$$a = 3{,}5 \text{ m} \quad , \quad p = 5{,}28 \text{ kg/cm}^2,$$

pretende-se indicar que todos os algarismos escritos são considerados como exactos, isto é, que o erro da aproximação é inferior a 1 cm, no primeiro caso, e a 10 g/cm^2, no segundo caso. É claro que, nestas convenções, o sinal = perde o significado habitual. Quando, porventura, o último algarismo conservado não é exacto, convém indicar um majorante do erro.

A indicação de algarismos supérfluos pode tornar-se ridícula. É o que sucede por exemplo quando, ao fazer o cálculo da altura de uma torre por trigonometria, se apresenta o resultado

$$h = 23{,}450238 \text{ m};$$

é quase certo que, neste caso, os quatro últimos algarismos não são exactos, nem sequer têm qualquer significado físico.

Nos exemplos anteriores, não se diz se os valores são aproximados por excesso ou por defeito. Mas convém ter presente os seguintes factos:

1) *Se* x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ, *então* $x_1-\delta$ *e* $x_1+\delta$ *são valores aproximados de* x, *respectivamente por defeito e por excesso, ambos com erro inferior a* $2\,\delta$.

2) *Se* x_1 *é valor aproximado de* x, *por defeito, com erro inferior a* δ, *então* $x_1 + \frac{\delta}{2}$ *é valor aproximado de* x *com erro inferior (ou igual) a* $\delta/2$.

NOTAS SOBRE A TERMINOLOGIA:

I. É corrente chamar 'erro' àquilo a que, nestas lições, chamamos 'desvio'. A distinção que fazemos aqui entre 'erro' e 'desvio' é conveniente para comodidade e clareza de exposição.

II. É preciso não confundir *erros de cálculo* com *erros de observação*. Estes últimos são os erros que se cometem na medição de grandezas. A *teoria dos erros de observação* (também chamada, simplesmente, 'teoria dos erros') é subordinada ao *cálculo das probabilidades* e sai inteiramente do âmbito deste programa.

3. **Arredondamento de valores numéricos.** Pode acontecer que se conheça um valor aproximado de um número α com determinado número n de algarismos exactos, mas que seja suficiente, para certos fins, utilizar um valor aproximado de α com um número de algarismos exactos inferior a n. Por exemplo, são hoje conhecidos valores aproximados de π com milhares de algarismos exactos, mas,

na prática, não é preciso geralmente ir além de cinco algarismos exactos; muitas vezes, bastam três ou até menos. Em tais casos, o que se faz é uma *truncatura* do valor aproximado, desprezando os algarismos exactos posteriores aos que são necessários (ou substituindo-os por 0, se estão à esquerda da vírgula) e fazendo o *arredondamento usual,* no caso em que o primeiro algarismo desprezado é igual ou superior a 5, isto é, adicionando nesse caso, ao valor considerado, uma unidade decimal da ordem do último algarismo conservado.

Por exemplo, o valor aproximado de π

$$3{,}1416$$

é um arredondamento do valor 3,14159, que, como é sabido, tem seis algarismos estritamente exactos. Analogamente, o valor aproximado de π arredondado com quatro algarismos exactos é 3,142.

Este processo de arredondamento é também usado, sempre que possível, na medição das grandezas. É claro que, neste caso, o valor fica aproximado a menos de *meia unidade decimal* da ordem do último algarismo registado (por defeito ou por excesso).

O mesmo processo é ainda usado nas classificações de alunos. Quando, p. ex., se diz que a média das classiifcações dum aluno em dado exame foi 10, pretende-se apenas dizer, abreviadamente, que essa média é um número x tal que $9{,}5 \leqslant x < 10{,}5$; então 10 é um valor aproximado de x com erro inferior (ou igual) a 0,5 — e não se diz então se é aproximado por defeito ou por excesso.

4. **Erro relativo e número de algarismos exactos.** Recordemos que, sendo x_1 um valor aproximado de um número x, se chama *desvio relativo* de x_1 ao quociente $\Delta x/x$ do *desvio absoluto*

Δx ($= x_1 - x$) pelo valor exacto x. Convencionámos representar por $\Delta' x$ o desvio relativo (de x_1 em relação a x). O erro relativo de x_1 é, por definição, $|\Delta' x|$ (¹).

O erro relativo que, muitas vezes, se exprime em percentagens, dá uma ideia precisa do *grau de aproximação:* este será tanto maior quanto menor for o erro relativo; além disso, dois valores aproximados têm o mesmo grau de aproximação, se têm erros relativos iguais.

Aliás, o erro relativo está relacionado, como veremos, com o número de algarismos exactos.

O erro relativo não depende da posição da vírgula; mais ainda: não muda quando se multiplicam o valor aproximado x_1 e o valor exacto x, por um mesmo número k (positivo), qualquer que ele seja. Tem-se, com efeito:

$$\frac{|kx_1 - kx|}{kx} = \frac{|x_1 - x|}{x}$$

Para ver como o erro relativo está relacionado com o número de algarismos exactos, convém começar por um exemplo. Suponhamos que 2,345 é valor aproximado dum número α com *três* algarismos exactos; quer isto dizer que o erro absoluto é inferior a 0,01, isto é, que

$$|\Delta \alpha| = |2{,}345 - \alpha| < 0{,}01$$

Como, neste caso, $\alpha > 2{,}345 - 0{,}01 = 2{,}335 > 2$, conclui-se que

$$\frac{|\Delta \alpha|}{\alpha} < \frac{0{,}01}{2} = \frac{1}{200}$$

(¹) Nestas considerações, subentende-se que o valor exacto x e o valor aproximado x_1 são sempre números positivos, o que é suficiente para as aplicações.

Dum modo geral, tem-se a seguinte regra:

TEOREMA 1. *Se* x_1 *é valor aproximado de* x *com* n *algarismos exactos, sendo o primeiro estritamente exacto* [1], *e se este primeiro algarismo é* a, *então o erro relativo de* x_1 *é inferior a*

$$\frac{1}{a \times 10^{n-1}}$$

Demonstração:*

Suponhamos verificada a hipótese. Como o primeiro algarismo significativo de x_1 é estritamente exacto, o primeiro algarismo significativo de x coincide com esse e é da mesma ordem decimal. Então, existe um inteiro p, positivo, negativo ou nulo, tal que os números $y_1 = x_1 \times 10^p$ e $y = x \times 10^p$ têm precisamente *n* algarismos na parte inteira. Como o primeiro algarismo de y é também *a*, tem-se:

$$(1) \qquad y \geqslant a \times 10^{n-1}$$

Por outro lado, y_1 é um valor aproximado de y com *n* algarismos exactos. Portanto

$$(2) \qquad |y_1 - y| < 1$$

---

(1) Pode acontecer que x_1 tenha *n* algarismos exactos e que o primeiro não seja estritamente exacto. Mas, se $n > 1$, isto *só* pode acontecer em dois casos excepcionais: *a*) quando os *n* primeiros algarismos significativos de x_1 são todos iguais a 9; *b*) quando o primeiro algarismo significativo de x_1 é 1 e os $n-1$ seguintes são zeros. No 1.º caso, um majorante de erro relativo será $1/(9 \times 10^{n-1})$. No 2.º caso, o erro relativo será, quando muito, ligeiramente superior a $1/10^n$, mas o excesso é então *insignificante*.

Portanto, *na prática*, pode dispensar-se a restrição de o primeiro algarismo significativo de x_1 ser estritamente exacto.

Assim, atendendo a (1) e a (2), o erro relativo de x_1 será:

$$\frac{|x_1 - x|}{x} = \frac{|y_1 - y|}{y} < \frac{1}{a \times 10^{n-1}}$$

q. e. d.

O *problema inverso* consiste em achar um número de algarismos exactos a partir de um majorante do erro relativo. Esse problema pode ser sempre resolvido, começando por calcular um majorante do erro absoluto, a partir do majorante do erro relativo.

Por definição, tem-se:

$$|\Delta' x| = \frac{|\Delta x|}{x} \qquad \text{donde} \qquad |\Delta x| \leqslant x\,|\Delta' x|$$

Então, se for ε um majorante de $|\Delta' x|$ e $\hat{x}$ um majorante de x, virá:

(3) $$\boxed{|\Delta x| \leqslant \hat{x}\,\varepsilon}$$

É fácil calcular um majorante de valor exacto x, a partir do valor aproximado x_1 e do majorante ε do erro relativo (1). Todavia, na prática, é geralmente conhecido *a priori* um majorante de x; aliás, nos casos mais frequentes, *o primeiro algarismo significativo do valor aproximado*

(1) Suponhamos $\varepsilon < 1$ como normalmente sucede. Então, se $x_1 \leqslant x$, tem-se $(x - x_1)/x < \varepsilon$, donde $x - x_1 < x\varepsilon$ e, portanto, $x < x_1/(1 - \varepsilon)$. Se $x_1 > x$, esta fórmula também é válida, visto que $1 - \varepsilon < 1$ e, portanto, $x_1/(1 - \varepsilon) > x$. A fórmula pode pois ser usada em qualquer caso, com $\varepsilon < 1$ (mas só excepcionalmente, quando não se conhece *a priori* um majorante de x).

é estritamente exacto. Para comodidade, vamos admitir, desde já, que esta condição se verifica nos exemplos seguintes.

I. Sabe-se que 1,628 é valor aproximado de certo número x com erro relativo inferior a 0,005 (0,5 % ou 5 ‰). Calcular um majorante do erro absoluto.

Sendo o primeiro algarismo de 1,628 estritamente exacto, tem-se $x < 2$. Então virá, aplicando (3):

$$|\Delta x| < 2 \times 0{,}005 = 0{,}01$$

Portanto, o valor dado tem *três algarismos exactos.* Mais ainda, vê-se que x está entre 1,618 e 1,638; portanto, o valor dado tem *dois algarismos estritamente exactos.*

II. Sabe-se que a população de certo país é de cerca de 38 630 000 habitantes, com erro relativo inferior a 0,003. Calcular um majorante do erro absoluto deste valor.

Designando por x o número exacto de habitantes do país, tem-se:

$$|x| < 4 \times 10^7 \quad , \quad |\Delta' x| < 0{,}003,$$

donde:

$$|\Delta x| < 4 \times 10^7 \times 0{,}003 = 1{,}2 \times 10^5 < 10^6$$

Neste caso, apenas se pode dizer que o valor dado tem *dois algarismos exactos.* Mas, como o valor exacto está compreendido entre 38 510 000 e 38 750 000, vê-se que os *dois primeiros algarismos são estritamente exactos.*

Para achar directamente um número de algarismos exactos, a partir de um majorante do erro relativo, pode usar-se na prática a seguinte regra:

TEOREMA 2. *Seja* x_1 *um valor aproximado de* x *com erro relativo inferior a*

$$\frac{1}{b \times 10^n} \quad \textit{(sendo } n \in \mathbb{N}_0 \textit{ e } b \textit{ natural menor que } 10\textit{)}$$

e seja a *o primeiro algarismo significativo de* x*. Então, se* $a < b$*, o valor* x_1 *tem* $n+1$ *algarismos exactos. Mas, se* $a \geqslant b$*, só podemos garantir que esse valor tem* $n-1$ *algarismos exactos.*

Demonstração:*

Suponhamos verificada a hipótese. Então $\dfrac{|x - x_1|}{x} < \dfrac{1}{b \times 10^n}$

ou seja:

$$(4) \qquad |x - x_1| < \frac{x}{b \times 10^n}$$

Como o erro relativo e o número de algarismos exactos não dependem da posição da vírgula, podemos supor desde já, sem quebra de generalidade, que x tem precisamente $n+1$ algarismos na parte inteira. Então, se $a < b$, tem-se:

$$x < b \times 10^n,$$

donde, por substituição em (4):

$$|x - x_1| < 1,$$

o que mostra que, neste caso, x_1 tem n+1 algarismos exactos. Se $a \geqslant b$, tem-se:

$$x < b \times 10^{n-1}$$

e, por substituição em (2), vem:

$$|x - x_1| < 10,$$

o que mostra que, neste caso, x_1 tem *n* algarismos exactos.

Como exercício, pode aplicar-se este teorema aos dois exemplos anteriores, notando que

$$0{,}005 = \frac{1}{200} \quad \text{e} \quad 0{,}003 < \frac{1}{300}$$

As conclusões coincidem com as já obtidas, quanto a número de algarismos exactos.

5. **Avaliação do erro do resultado de multiplicações e divisões sucessivas.** Consideremos, por exemplo, a expressão numérica

$$\frac{3{,}27^2 \times 43{,}08}{0{,}258^3 \times 5{,}327^2}$$

e suponhamos que os dados numéricos são valores aproximados em que todos os algarismos escritos são exactos. Como avaliar o número de algarismos exactos do valor numérico desta expressão?

Um método seguro, que se pode sempre seguir, é o *método directo,* que consiste, neste caso, em calcular os valores das expressões

$$\frac{3{,}26^2 \times 43{,}07}{0{,}259^3 \times 5{,}328^2}, \quad \frac{3{,}28^2 \times 43{,}09}{0{,}257^3 \times 5{,}326^2}$$

Estes são, com certeza, valores aproximados por defeito e por excesso do valor exacto, uma vez que os dados têm todos os algarismos exactos. O cálculo dos valores destas expressões por meio de logaritmos não se torna muito laborioso, desde que se tenha o cuidado de achar sucessivamente os logaritmos de 3,26 e 3,28, de 43,07 e 43,09, etc.

Um outro método consiste em calcular, por um lado, o valor da expressão dada e, por outro lado, um majorante do erro relativo desse valor. Da fórmula do desvio do produto

$$\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

deduz-se imediatamente, dividindo por xy, a *fórmula rigorosa do desvio relativo do produto:*

$$\Delta'(xy) = \Delta' x + \Delta' y + \Delta' x \cdot \Delta' y$$

Desta, por sua vez, deduz-se a *fórmula rigorosa de majoração do erro relativo do produto:*

$$(1) \qquad |\Delta'(xy)| \leqslant |\Delta' x| + |\Delta' y| + |\Delta' x| \cdot |\Delta' y|$$

Por outro lado, da fórmula do desvio do quociente, é fácil deduzir a *fórmula rigorosa de majoração do erro relativo do valor inverso:*

$$(2) \qquad \left| \Delta' \frac{1}{x} \right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{\bar{x}} \qquad (\Delta x = x_1 - x),$$

em que $\bar{x}$ é um *minorante de* x_1.

Note-se que o *majorante de* $|\Delta' x|$ *dado pelo teorema* 1 *do número anterior coincide geralmente com um majorante de* $\left|\Delta' \frac{1}{x}\right|$ *dado por esta fórmula.*

A aplicação repetida das fórmulas (1) e (2) permite achar, com inteira segurança, um majorante do erro relativo do resultado, em casos como o anterior.

Porém, na prática, usam-se de preferência as fórmulas aproximadas dos desvios, por serem mais cómodas.

Querendo ter uma primeira ideia, *a priori,* do grau de aproximação do resultado, antes de o calcular, pode também usar-se a seguinte

REGRA PRÁTICA. *Quando, numa expressão numérica, intervêm apenas multiplicações e divisões, o grau de aproximação do resultado é geralmente inferior ao dos dados. Nos casos mais frequentes, se for* n *o número total de factores em numerador e em denominador e* ε *um majorante dos erros relativos desses dados, será* $n\varepsilon$ *um majorante do erro relativo do resultado. Nesta contagem não se atende aos dados que, porventura, sejam valores exactos.*

No exemplo anterior tem-se $n = 8$ e podemos tomar $\varepsilon = 1/200$, o que conduz ao seguinte majorante do erro relativo do resultado:

$$8 \times \frac{1}{200} = 0{,}04 = 4\,\%$$

A regra pode ser usada, com relativa segurança, quando $n < 10$ e $\varepsilon < 0{,}01$. Para maiores valores de n, requerem-se *menores* valores de ε. A razão é simples: a regra baseia-se nas *fórmulas aproximadas dos desvios relativos do produto e do quociente.*

(3) $$\Delta'(x_1 x_2 \cdots x_n) \approx \Delta' x_1 + \Delta' x_2 + \cdots + \Delta' x_n \ (^1)$$

(4) $$\Delta' \frac{x}{y} \approx \Delta' x - \Delta' y$$

Ora, é óbvio que a aplicação destas fórmulas exige precauções. Se $n < 10$, verifica-se, recorrendo às fórmulas rigorosas, que podemos aplicar, com relativa confiança, a fórmula

(5) $$| \Delta'(x_1 x_2 \cdots x_n) | \lesssim | \Delta' x_1 | + | \Delta' x_2 | + \cdots + | \Delta' x_n |,$$

que se deduz de (1). Por outro lado, a fórmula

(6) $$\left| \Delta' \frac{x}{y} \right| \lesssim | \Delta' x | + | \Delta' y |,$$

é já satisfatória na prática, quando os erros relativos dos dados, são inferiores a 0,1: *na pior das hipóteses,* o primeiro membro de (6) será então ligeiramente superior ao segundo, mas o excesso é insignificante na prática ([2]).

([1]) É claro que, neste caso, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representam *valores exactos.* Valores aproximados de $x_1, x_2, \ldots,$ podem representar-se então, por ex., por $x_{11}, x_{21}, \ldots$

([2]) Aliás, convém não esquecer o que se disse atrás a propósito da fórmula (2), que permite, na prática, reduzir a majoração do erro de um quociente à do erro do produto.

As fórmulas (5) e (6) associadas justificam a REGRA PRÁTICA nos casos correntes.

Aplicando directamente estas fórmulas ao exemplo inicial, juntamente com o teorema 1 do número anterior, obtém-se o seguinte majorante do erro relativo:

$$\frac{2}{300}+\frac{1}{4000}+\frac{3}{200}+\frac{2}{5000}<$$

$$< 0{,}007 + 0{,}00025 + 0{,}015 + 0{,}0004 < 2{,}3\,\%$$

Como se vê, esta majoração é bastante melhor do que a primeira (4 %). É claro que os factores 43,08 e 5,327 influem pouco no erro relativo do resultado (menos de 0,1 %), porque têm *quatro* algarismos exactos, enquanto os outros têm *três*.

Dum modo geral, podemos dizer o seguinte:

Quando algum dos factores, em numerador ou denominador, tiver um grau de aproximação bastante superior ao de outro, pode na prática, ser considerado como exacto e, portanto, omitido na avaliação do erro.

Para avaliar o número de algarismos exactos de um produto de *dois* números ou de um quociente, podem usar-se na prática as seguintes regras, que indicamos a *título facultativo,* sem demonstração:

REGRA DO PRODUTO. *Se dois valores aproximados têm* n *algarismos exactos, podemos dizer que o seu produto tem* n−1 *algarismos exactos nos seguintes casos:*

1) *o primeiro algarismo significativo de ambos os factores é diferente de* 1;

2) *o primeiro algarismo significativo de ambos os factores é* 1;

3) *o primeiro algarismo significativo de um dos factores é* 1 *e o primeiro algarismo significativo do produto é menor que* 5.

Quando não se verifica nenhuma destas condições, só podemos dizer que o produto tem n−2 *algarismos exactos.*

REGRA DO QUOCIENTE. *Se dois valores aproximados têm* n *algarismos exactos, o quociente de um pelo outro tem* n−1 *algarismos exactos nos seguintes casos:*

1) *o primeiro algarismo significativo de ambos os termos é diferente de* 1;

2) *o primeiro algarismo significativo de um dos termos ou de ambos é* 1, *e o primeiro algarismo significativo do quociente é menor que* 5.

Fora disto, só podemos dizer que o quociente tem n−2 *algarismos exactos.*

Note-se bem: Estas regras não são rigorosas, porque se baseiam nas fórmulas aproximadas dos desvios relativos do produto e do quociente. Não se pode, portanto, dar propriamente uma demonstração das ditas regras, mas apenas uma *justificação,* de carácter teórico-prático.

Em caso de dúvida, quando seja necessária *uma certeza absoluta,* pode-se sempre recorrer às fórmulas rigorosas de majoração.

Note-se ainda que, *se tivéssemos aplicado estas regras sucessivamente ao exemplo inicial, não poderíamos garantir a existência de um único algarismo exacto. Isto mostra bem o cuidado que é preciso ter na escolha e na aplicação das regras em cálculo numérico.*

6. **Caso da potência.** A majoração do erro relativo da potência é um caso particular da do erro relativo do produto, como se viu aliás concretamente no exemplo anterior. Neste caso, tem-se a fórmula aproximada

$$\Delta'(x^n) \approx n\Delta'x,$$

que exige precauções semelhantes às que foram indicadas para o produto.

Suponhamos, por exemplo, que se trata de calcular π^{10}, utilizando o valor aproximado 3,141 de π. Este, como é sabido, é um valor aproximado *por defeito,* com erro relativo inferior a 1/3000. Neste caso, a fórmula aproximada pode ser usada com segurança e fornece o seguinte majorante do erro relativo da potência:

$$10 \times \frac{1}{3000} = \frac{1}{300}$$

Façamos, agora, o cálculo por logaritmos:

$$\log 3{,}141 = 0{,}49707 \quad , \quad \log 3{,}142 = 0{,}49721$$

$$10 \times \log 3{,}141 = 4{,}9707$$

$$10 \times \log 3{,}142 = 4{,}9721$$

donde:

$$3{,}141^{10} \approx 93470 \quad \text{(por defeito)}$$

$$3{,}142^{10} \approx 93780 \quad \text{(por excesso)}$$

Daqui se conclui que 93470, como valor aproximado de π^{10} tem *dois algarismos estritamente exactos* (não é provável que o terceiro seja exacto). À mesma conclusão se podia chegar, efectuando só metade dos cálculos e utilizando o majorante 1/300 do erro relativo, que fornece o majorante 400 do erro absoluto (o teorema 2 do n.º 4 apenas nos permitia garantir que o valor considerado tem dois algarismos exactos).

7. **Caso da raiz.** A fórmula aproximada do desvio da raiz

$$\Delta' \sqrt[n]{x} \approx \frac{1}{n} \Delta' x$$

pode ser usada com relativa segurança nos casos correntes da prática e mostra, desde logo, que *a radiciação tem a particularidade notável de aumentar o grau de aproximação.*

Suponhamos que se trata de calcular $\sqrt[10]{100\pi}$, utilizando o valor aproximado 314,1 de 100π (valor arpoximado por defeito, com erro relativo inferior a 1/3000). Neste caso, obtém-se o seguinte majorante do erro relativo da raiz:

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3000} = \frac{1}{30000}$$

Façamos o cálculo por logaritmos. Temos, agora:

$$\log 314{,}1 = 2{,}49707 \quad , \quad \log 314{,}2 = 2{,}49721$$

$$\frac{1}{10} \log 314{,}1 = 0{,}24970$$

$$\frac{1}{10} \log 314{,}2 = 0{,}24972$$

donde:

$$\sqrt[10]{314{,}1} \approx 1{,}777 \quad \text{(por defeito)}$$

$$\sqrt[10]{314{,}2} \approx 1{,}778 \quad \text{(por excesso)}$$

Por aqui se vê já que 1,777, como valor aproximado de $\sqrt[10]{100\pi}$, tem *quatro* algarismos exactos. Mas, aplicando o teorema 2, com o majorante 1/30000 do erro relativo, vê-se que o valor de $\sqrt[10]{314{,}1}$ tem, pelo menos, *cinco* algarismos exactos, como valor aproximado de $\sqrt[10]{100\pi}$. O quinto algarismo exacto, calculado por interpolação (que merece confiança neste caso), é 0 e, assim, podemos escrever, segundo a convenção adoptada em física

$$\sqrt[10]{100\pi} = 1{,}7770$$

É de admitir que estes algarismos sejam estritamente exactos.

8. **Caso da adição e da subtracção.** É fácil calcular um bom majorante do erro absoluto de uma soma algébrica de valores aproximados e avaliar assim o número de algarismos exactos do resultado. Mas, desde já, se deve notar que a subtracção é, de todas as operações elementares, a que mais pode diminuir o grau de aproximação. Isto torna-se evidente, sobretudo quando o aditivo e o subtractivo são números muito próximos. Seja, por exemplo, a expressão com valores aproximados

$$(2{,}31 - 2{,}27) \times 0{,}730$$

e suponhamos que todos os algarismos indicados são exactos. A diferença 2,31 − 2,27 dá-nos o valor aproximado 0,04 a menos de 0,02. Deste modo, nem sequer *um* algarismo exacto podemos garantir na diferença e, portanto, no produto indicado.

Uma situação semelhante a esta pode surgir na prática, quando, por exemplo, se trata de calcular a altura h de uma torre por meio da fórmula

$$h = \frac{d \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

Se a diferença entre α e β for relativamente pequena, será preciso medir estes ângulos com uma grande precisão, para obter um valor de h com aproximação razoável.

Situações deste género são frequentes em cálculos astronómicos ou geodésicos.

Convém ainda notar o seguinte:

Quando, numa soma algébrica, um dos termos tem valor menor que o erro absoluto de outro termo, o primeiro pode, em muitos casos, ser desprezado.

Vejamos um exemplo:

Sabe-se que a população de uma cidade, em dado momento, é de cerca de 850 000 habitantes (com dois algarismos exactos) e que, em seguida, teve um acréscimo de cerca de 3 800 habitantes. Podemos, então, continuar a dizer que a população da cidade é de cerca de 850 000 habitantes (provavelmente ainda com dois algarismos exactos). Mas, se depois deste acréscimo houver um outro de cerca de 8 200 habitantes, então já será mais correcto dizer que a população da cidade passou a ser de cerca de 860 000 habitantes.

ADITAMENTO II

NOVA ORIENTAÇÃO NO ESTUDO DO CÁLCULO DE VALORES APROXIMADOS

1. Imediatamente após o estudo do cálculo aproximado da soma e da diferença, deverá passar-se ao estudo dos conceitos de *erro relativo, algarismos exactos* e *algarismos estritamente exactos,* bem como das regras que relacionam esses conceitos, sem obrigatoriedade de demonstrações. Em seguida far-se-á a dedução da FÓRMULA DO DESVIO DO PRODUTO:

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y,$$

da qual resulta imediatamente, dividindo por xy, a FÓRMULA DO DESVIO RELATIVO DO PRODUTO:

$$\Delta'(xy) = \Delta'x + \Delta'y + \Delta'x \,.\, \Delta'y \qquad (\text{com } xy \neq 0)$$

Posto isto, pode-se abordar o estudo de problemas respeitantes a erros relativos de produtos (1).

---

(1) A fórmula (6) apresentada na pág. 30 deixa agora de ser necessária, segundo a nova orientação. Mas convirá, quando seja oportuno, definir «majorante» e «minorante» dum número.

PROBLEMA DIRECTO. Da fórmula anterior deduz-se imediatamente a *fórmula de majoração do erro relativo do produto:*

$$(1) \qquad |\Delta'(xy)| \leqslant |\Delta'x| + |\Delta'y| + |\Delta'x| \, . \, |\Delta'y|$$

Sejam, por exemplo, 3,28 e 0,423 valores aproximados de dois números x e y, com erros relativos inferiores respectivamente a 3% e a 2%. Então

$$|\Delta'x| = 0{,}03 \qquad \text{e} \qquad |\Delta'y| = 0{,}02,$$

donde, aplicando (1):

$$|\Delta'(xy)| < 0{,}0506.$$

Na prática, poderemos escrever

$$|\Delta'(xy)| \lesssim 0{,}05,$$

em que o sinal $\lesssim$ se lê «menor ou aproximadamente igual a». O *mais provável* é que seja mesmo

$$|\Delta'(xy)| < 0{,}05;$$

se isto não se der, a diferença entre $|\Delta'(xy)|$ e 0,05 será inferior a 0,0006, portanto *desprezável na prática*.

Dum modo geral ter-se-á, na prática:

$$|\Delta'(xy)| \lesssim |\Delta'x| + |\Delta'y|$$

Se atendermos aos sinais e não apenas aos módulos, teremos então a *fórmula aproximada do desvio relativo do produto*

$$\Delta'(xy) \approx \Delta'x + \Delta'y,$$

em que se despreza o termo $\Delta'x \cdot \Delta'y$, cujo módulo é geralmente muito pequeno em relação ao de $\Delta'x + \Delta'y$.

Nas mesmas circunstâncias, pode usar-se também a *fórmula aproximada do desvio (absoluto) do produto*

$$\Delta(xy) \approx x\Delta y + y\Delta x,$$

que prepara psicologicamente o aluno para, mais tarde, *ver intuitivamente* as fórmulas da *derivada* e do *diferencial* dum produto, o que é muito importante do ponto de vista pedagógico.

PROBLEMA INVERSO. Sejam x e y números reais diferentes de zero. Pretende-se resolver o seguinte problema:

Dado um número positivo r *qualquer, achar um número* s *tal que, se tomarmos valores aproximados de* x *e* y *com erros relativos menores que* s, *o erro relativo do produto desses valores seja menor que* r.

Trata-se, pois, de achar um número s tal que

$$|\Delta'x| < s \wedge |\Delta'y| < s \Rightarrow |\Delta'(xy)| < r$$

Para isso notemos que, se s for um número positivo qualquer tal que $|\Delta'x| < s$ e $|\Delta'y| < s$, virá da fórmula (1):

$$|\Delta'(xy)| < s + s + s^2 = s(2 + s)$$

Então, para que seja $|\Delta'(xy)| < r$, basta que seja $s(2+s) \leqslant r$ ou, o que é equivalente,

$$(2) \qquad s \leqslant \frac{r}{2+s}$$

Vamos provar que esta condição será verificada se for

$$(3) \qquad \boxed{s \leqslant \frac{r}{2+r}}$$

Com efeito, tem-se $\dfrac{r}{2+r} < r$ e, portanto:

$$s \leqslant \frac{r}{2+r} \Rightarrow s < r \Rightarrow \frac{r}{2+r} < \frac{r}{2+s}$$

Logo (3) implica (2), como queríamos provar.

Teremos assim, em conclusão:

$$(4) \qquad |\Delta'x| < \frac{r}{2+r} \wedge |\Delta'y| < \frac{r}{2+r} \Rightarrow |\Delta'(xy)| < r$$

Quando $r < 1$ (como sucede normalmente), a fórmula (3) pode ser substituída por esta outra, mais cómoda para os cálculos:

$$(5) \qquad \boxed{s \leqslant \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4}}$$

EXEMPLO. Suponhamos que se trata de calcular $\pi \times \sqrt{2}$ com erro relativo inferior a 0,001. Então r = 0,001 e a fórmula (5) dá:

$$s < 0{,}0005 - 0{,}000\,000\,25$$

Como se vê, esta diferença é inferior a 0,0005, mas superior p. ex. a 0,0004. *Portanto, bastará tomar valores aproximados de* π *e de* $\sqrt{2}$ *com erros relativos inferiores a* 0,0004, *para termos a certeza de que o seu produto é valor aproximado de* $\pi\sqrt{2}$ *com erro relativo inferior a* 0,001.

Porém, o número 0,000 000 25 é tão pequeno em relação a 0,000 5, que, *na prática,* pode ser desprezado. Assim, poderíamos tomar simplesmente

$$s < 0{,}000\,5.$$

Dum modo geral, quando r é bastante menor que 1, a fórmula (5) pode ser substituída por

$$s \leqslant \frac{r}{2}$$

Isto não garante, *em absoluto,* que, sendo $|\Delta' x| < s$ e $|\Delta' y| < s$, se tenha $|\Delta'(xy)| < r$; mas, se for $|\Delta'(xy)| \geqslant r$, a diferença será então *insignificante para fins práticos.*

2. O estudo feito no número anterior permite-nos afirmar o seguinte:

(6) $\forall r > 0,\ \exists\, s > 0:\ |\Delta' x| < s \wedge |\Delta' y| < s \Rightarrow |\Delta'(xy)| < r$

Basta atender, p. ex., a (4) para ver que isto é verdade.

Ora, a proposição (6) pode ser estendida ao caso dos erros absolutos; isto é, podemos provar que:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: |\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow |\Delta(xy)| < \delta$$

Mais precisamente, vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA. *Sejam* x *e* y *dois números reais quaisquer. Então, dado arbitrariamente um número positivo* δ*, é sempre possível achar um número positivo* ε*, tal que, se* x_1 *e* y_1 *forem valores aproximados de* x *e de* y *a menos de* ε*, o produto* x_1y_1 *é, com certeza, valor aproximado de* xy *a menos de* δ.

Demonstração:

Basta considerar o caso em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, visto que, caso contrário, o teorema é evidente. Sejam, pois, x e y dois números reais não nulos. Suponhamos que queremos achar valores aproximados x_1 e y_1 de x e y, de modo que o erro absoluto $|x_1y_1 - xy|$ seja inferior a um dado número δ. Pretende-se, pois, que seja

$$(7) \qquad |\Delta(xy)| < \delta$$

Ora, pela definição de desvio relativo, tem-se:

$$\Delta'(xy) = \frac{\Delta(xy)}{xy}$$

Logo, a condição (7) é *equivalente* a esta outra:

$$(7') \qquad |\Delta'(xy)| < \frac{\delta}{|xy|}$$

Ponhamos $\frac{\delta}{|xy|} = r$. Ora, segundo (6), existe pelo menos um número $s > 0$ tal que

$$(8) \qquad |\Delta' x| < s \wedge |\Delta' y| < s \Rightarrow |\Delta'(xy)| < r$$

Mas, aplicando novamente a definição de desvio relativo, vê-se que as condições

$$|\Delta' x| < s \quad , \quad |\Delta' y| < s$$

equivalem, respectivamente, às condições

$$|\Delta x| < |x| \,.\, s \quad , \quad |\Delta y| < |y| \,.\, s$$

Portanto, se designarmos por ε o menor dos números positivos $|x|s$ e $|y|s$, deduzimos de (8):

$$|\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow |\Delta(xy)| < \delta,$$

Em conclusão: qualquer que seja $\delta > 0$, existe pelo menos um $\varepsilon > 0$, tal que

$$|x_1 - x| < \varepsilon \wedge |y_1 - y| < \varepsilon \Rightarrow |x_1 y_1 - xy| < \delta$$

q. e. d.

Este teorema tem muito interesse pelas suas aplicações à teoria dos limites e da continuidade. Convém, por isso, que a sua demonstração seja bem estudada.

3. Passemos, agora, ao caso do quociente. Sejam ainda x_1 e y_1 valores aproximados de dois números reais x e y, sendo $y \neq 0$ e $y_1 \neq 0$. Temos então, pondo $x_1 - x = \Delta x$ e $y_1 - y = \Delta y$:

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y} = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y}$$

$$= \frac{y\,\Delta x - x\,\Delta y}{(y + \Delta y)\,y}$$

ou seja:

$$(9) \qquad \boxed{\Delta\frac{x}{y} = \frac{y\,\Delta x - x\,\Delta y}{(y + \Delta y)\,y}}$$

Esta é a FÓRMULA DO DESVIO DO QUOCIENTE. Quando $|\Delta y|$ é bastante pequeno em relação a y, pode usar-se na prática a *fórmula aproximada:*

$$\Delta\frac{x}{y} \approx \frac{y\,\Delta x - x\,\Delta y}{y^2}$$

Posto isto, procuremos uma *fórmula do desvio relativo do quociente* (supondo também $x \neq 0$). De (9) deduz-se, notando que $\Delta x = x \cdot \Delta' x$ e $y = y \cdot \Delta' y$:

$$\Delta\frac{x}{y} = \frac{xy \cdot \Delta' x - xy \cdot \Delta' y}{(y + y\Delta' y)\,y} = \frac{x\Delta' x - x\Delta' y}{y + y\,\Delta' y}$$

donde, dividindo o 1.º membro e o último por x/y:

$$(10) \qquad \boxed{\Delta' \frac{x}{y} = \frac{\Delta'x - \Delta'y}{1 + \Delta'y}}$$

Eis, portanto, a FÓRMULA EXACTA DO DESVIO DO QUOCIENTE. Supondo, agora, $|\Delta'y| < 1$ (é este o caso que interessa normalmente), tem-se:

$$|1 + \Delta'y| \geqslant 1 - |\Delta'y| > 0$$

e de (9) deduz-se então:

$$(11) \qquad |\Delta' \frac{x}{y}| \leqslant \frac{|\Delta' x| + |\Delta'y|}{1 - |\Delta'y|}$$

que é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO DESVIO RELATIVO DO QUOCIENTE (com $|\Delta'y| < 1$), que vamos aplicar.

PROBLEMA DIRECTO. Sejam, por exemplo, 3,26 e 0,425 valores aproximados de dois números x e *y*, com erros relativos inferiores, respectivamente, a 3% e a 2%. Então $|\Delta'x| = 0{,}03$ e $|\Delta'y| = 0{,}02$, donde, aplicando (11):

$$|\Delta' \frac{x}{y}| < \frac{0{,}05}{0{,}98} < 0{,}0511$$

Na prática, pode tomar-se

$$|\Delta' \frac{x}{y}| \lesssim 0{,}05$$

e, dum modo geral,

$$|\Delta' \frac{x}{y}| \lesssim |\Delta' x| + |\Delta' y|,$$

exactamente como no caso do produto.

PROBLEMA INVERSO. Sejam x e y números reais quaisquer. Trata-se, agora, do seguinte problema:

Dado um número positivo r, *achar um número positivo* s, *tal que*

$$|\Delta' x| < s \wedge |\Delta' y| < s \Rightarrow |\Delta' \frac{x}{y}| < r$$

Para isso, notemos que, sendo *s* um número *positivo qualquer menor que* 1, tal que $|\Delta' x| < s$ e $|\Delta' y| < s$, virá de (11):

$$|\Delta' \frac{x}{y}| < \frac{2s}{1-s}$$

Então, para que o 1.º membro seja menor que r, basta que se tenha

$$\frac{2s}{1-s} \leqslant r,$$

o que, sendo $s < 1$, é equivalente a

$$(11) \qquad \boxed{s \leqslant \frac{r}{2+r}}$$

Assim, em conclusão:

$$(12) \qquad |\Delta' x| < \frac{r}{2+r} \wedge |\Delta' y| < \frac{r}{2+r} \Rightarrow |\Delta' \frac{x}{y}| < r$$

Quando $r < 1$, podemos usar, como no caso do produto, a seguinte fórmula em vez de (11):

$$(13) \qquad \boxed{s \leqslant \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4}}$$

EXEMPLO. Suponhamos que se trata de calcular $\pi/\sqrt{2}$ com erro relativo inferior a 0,001. Neste caso tem-se, como no exemplo anterior, $r = 0{,}001$. Usando a fórmula (13), idêntica à fórmula (5) usada para o produto, a conclusão será perfeitamente análoga à do referido exemplo.

NOTA. Observe-se que, nos problemas respeitantes a erros relativos de produtos e quocientes, não chegam a intervir os números x, y nem os respectivos valores aproximados x_1, y_1. O mesmo já não acontece quando se trata de erros absolutos.

4. A conclusão (12) permite-nos afirmar que, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$(14) \qquad \forall r > 0 \quad , \quad \exists\, s > 0: \; |\Delta' x| < s \wedge |\Delta' y| < s \Rightarrow |\Delta' \frac{x}{y}| < r$$

Esta proposição pode estender-se ao caso dos erros absolutos:

TEOREMA. *Sejam* x *e* y *dois números reais quaisquer, sendo* $y \neq 0$. *Então, dado arbitrariamente um número positivo* δ, *é sempre* *possível achar um número positivo* ε*, de tal modo que, se* x_1 *e* y_1 *são, respectivamente, valores aproximados de* x *e* y *a menos de* ε *(sendo* $y_1 \neq 0$*), o quociente* x_1/y_1 *é, com certeza, valor aproximado de* x/y *a menos de* δ*; isto é, em símbolos:*

$$|x - x_1| < \varepsilon \wedge |y - y_1| < \varepsilon \wedge y_1 \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y} \right| < \delta$$

A demonstração é perfeitamente análoga à que se deu para o caso do produto e pode ser feita como exercício pelo próprio aluno. O teorema tem grande interesse teórico, pelas suas aplicações à teoria dos limites e da continuidade.

5. Posto isto, pode-se passar ao estudo, feito no n.º 5 do ADITAMENTO I, sobre cálculo de expressões numéricas com multiplicações e divisões. Finalmente, será tratado, de maneira breve, o caso das potências e das raízes (TEXTO-PILOTO e ADITAMENTO I). Convém aproveitar a oportunidade para levar o aluno a aperfeiçoar a sua técnica de cálculo, quer numérico, quer algébrico.

Índice

§ 3. *Limites de funções de variável real*

§ 4. *Derivadas*

Capítulo II. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Março de 1976

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA