J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

2.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL

§ 1. CÁLCULO NUMÉRICO APROXIMADO

1. **Considerações prévias intuitivas.** Já várias vezes tem sido observado ao aluno que, em matemática aplicada, o conceito de '*verdadeiro*' da lógica bivalente cede o lugar, inevitavelmente, ao conceito de '*aproximadamente verdadeiro*' e ao de '*provavelmente verdadeiro*', que já não se subordinam ao esquema lógico do 'ser ou não ser', porque neles subsiste sempre, em última análise, uma componente subjectiva. Quando digo 'esta mesa tem 2 metros de comprimento', não pretendo afirmar uma proposição verdadeira, mas apenas referir um facto que *eu* considero aproximadamente verdadeiro. Aliás, ninguém pode ter a pretensão de afirmar que certo objecto material tem *exactamente* 2 metros de comprimento, porque tal afirmação seria desprovida de sentido. E o que se diz para comprimentos, aplica-se a áreas, volumes, tempos, massas, forças, temperaturas, etc., sempre que se trata de indicar resultados de medições.

Mas qual o critério que permite distinguir uma proposição *aproximadamente verdadeira* de outra que *o não é?*

É claro que, tal como em questões concretas de probabilidades e estatística, não existe nenhum critério inteiramente *objectivo* para esse efeito: a distinção é sempre mais ou menos *subjectiva* e *variável*, isto é, depende do *sujeito* que julga, bem como das circunstâncias e dos fins em vista.

Quando se diz por exemplo que a distância de Lisboa ao Porto, por estrada, é de cerca de 330 km, dá-se uma indicação útil, com aproximação *suficiente*, para fins de transporte em veículo automóvel. Mas se, em vez disso, dissermos que tal distância é de cerca de 500 km, já cometemos um *erro grosseiro*.

Para certos fins, um erro de 1 km é insignificante. Para outros, um erro de 1 mm é enorme. As recentes explorações espaciais fornecem exemplos de ambos os casos; mas não é preciso recorrer a tais exemplos, porque, a cada passo, nos encontramos perante situações semelhantes. Assim, por exemplo, pode ser importante o erro de alguns centímetros no comprimento de uma casa a construir; mas o mesmo erro deixará de ter significado na medição da altura de uma árvore, e ninguém, dotado de bom senso, se lembraria de exigir a medida da altura de uma árvore aproximada até aos milímetros. O erro de um decigrama, que não tem a mínima importância na pesagem de uma porção de manteiga, pode ser fatal na confecção de um produto farmacêutico. A temperatura de um doente costuma ser avaliada até aos décimos de grau centígrado; mas uma tal aproximação já é desnecessária para indicar a temperatura ambiente num dado lugar.

O erro de um décimo na classificação de um aluno não tem geralmente importância. Mas o erro de um valor pode ser decisivo. E é preciso não esquecer o carácter subjectivo de tais avaliações: verificam-se às vezes diferenças de um ou mais valores, em provas classificadas por professores igualmente cuidadosos e justos.

Inúmeros outros exemplos poderiam ser aqui apresentados.

Aliás, um problema análogo se levanta, ainda antes desse, na distinção entre *'números grandes'* e *'números pequenos'*. Que quer dizer 'número grande' e 'número pequeno'? É claro que não existe definição matemática de tais termos: um mesmo número pode ser considerado 'grande' ou 'pequeno', conforme as pessoas e as circunstâncias. Se ouvirmos dizer que, num desafio de futebol, o resultado foi de 15 a 0, não hesitaremos em afirmar que o número 15 (de golos) é muito grande. Mas, se nos disserem que o número de alunos de uma turma é 15, já achamos que esse número é pequeno. E pode ser que, dentro de alguns anos, o mesmo número de alunos de uma turma já não venha a ser considerado pequeno. Mas, note-se: em qualquer dos casos, dizer que um número *não é pequeno* não equivale a dizer que esse número *é grande*, uma vez que a distinção entre os dois atributos 'grande' e 'pequeno' não é geralmente rígida. Na verdade, diz-se muitas vezes, a respeito de um número ou de uma grandeza: 'não é grande, mas também não é pequeno'.

O mesmo se verifica, dum modo geral, com a maior parte dos juízos que formulamos a cada momento. Quando afirmamos, a respeito dum aluno, 'é inteligente' ou 'é aplicado', torna-se evidente o carácter *subjectivo* (e *relativo*) de tais afirmações: pode haver pessoas que tenham opinião contrária e pessoas que não tenham essa opinião nem a contrária, mas apenas opinião *dubitativa*. O mesmo quando dizemos 'faz calor', 'esta sala é quadrada', etc., etc. Assim, na vida corrente, o princípio do terceiro excluído deixa de ser válido: além dos valores 'verdadeiro' e 'falso', aparecem-nos os valores 'duvidoso', 'provavelmente verdadeiro', 'aproximadamente verdadeiro', etc.

As considerações anteriores suscitam, desde logo, uma dúvida:

Como é possível fundar uma teoria matemática de valores aproximados — ou seja, uma teoria *rigorosa* de coisas *não rigorosas?*

O leigo pensa, consciente ou inconscientemente, que tal não é possível e, por isso, ao ouvir falar de 'cálculo numérico aproximado' (ou de 'processos de cálculo aproximado'), julga estar em presença de matemática pouco rigorosa, que é como quem diz, de *matemática degenerada*. Ora isto, sim, é um erro grosseiro, que convém desde logo contrariar.

Assim como o cálculo das probabilidades é uma teoria matematicamente certa de coisas incertas, assim também o cálculo numérico aproximado é uma teoria matematicamente exacta de coisas inexactas.

Afinal, toda a matemática aplicada — a começar pela geometria, aplicada à física e à técnica — assenta, necessariamente, numa *teoria rigorosa* de coisas que, na prática, *não são rigorosas*.

Aliás, como teremos ocasião de ver, é o estudo dos valores aproximados que conduz naturalmente à *teoria dos limites*, base de toda a ANÁLISE INFINITESIMAL, que, tal como a aritmética dos números naturais, pode ser desenvolvida com rigor lógico impecável, a partir de um sistema de axiomas. O cálculo numérico aproximado que vamos estudar contém já, sob forma embrionária, o CÁLCULO DIFERENCIAL que, juntamente com o CÁLCULO INTEGRAL, constitui o CÁLCULO (ou ANÁLISE) INFINITESIMAL.

Aqui vemos, pois, mais um exemplo típico de interacção fecunda entre a *teoria* e a *prática*. O que torna muitas vezes difícil aos alunos a compreensão da teoria dos limites é, em grande parte, a separação artificial que se estabelece entre os dois termos do par *teoria-prática*, ou seja entre *matemática pura* e *matemática aplicada.*

Aliás, o cálculo numérico aproximado está a assumir importância cada vez maior nos tempos actuais, com o desenvolvimento dos computadores electrónicos e suas aplicações à vida das sociedades modernas, às investigações espaciais, etc., tendo conduzido à criação de um novo ramo da matemática: a ANÁLISE NUMÉRICA.

2. **Erro de um valor aproximado.** Vimos que é impossível definir matematicamente 'valor aproximado', assim como é impossível definir 'número grande' ou 'número pequeno'. *No entanto, já é possível definir matematicamente 'erro de um valor aproximado'.*

Por exemplo, se considerarmos o número 3,16 como valor aproximado de π, podemos afirmar 'o erro desse valor aproximado de π

é inferior a 0,02' — o que é uma proposição *verdadeira* (e não apenas *aproximadamente verdadeira*). Analogamente, é *verdadeira* a proposição:

'Se tomarmos o número 3,141 como valor aproximado de π, cometemos um erro inferior a 0,001'.

Porém, agora, trata-se de um *erro por defeito* (quer dizer $3{,}141 < \pi$), enquanto no exemplo anterior o erro é *por excesso* (quer dizer $\pi < 3{,}16$).

Assim, finalmente, podemos chegar a uma definição matematicamente rigorosa de 'erro de um valor aproximado':

DEFINIÇÃO 1. Seja x um número real qualquer e δ um número positivo (isto é, > 0). Chama-se *valor aproximado de* x *com erro inferior* a δ todo o número real x_1 tal que

$$|x_1 - x| < \delta$$

Convém recordar aqui (com exemplos) que o *módulo de um número real* u, que se representa por $|u|$, é igual a u, se $u \geqslant 0$, e é igual a $-u$ se $u \leqslant 0$. Portanto, escrever $|x_1 - x| < \delta$ equivale a escrever

$$x_1 - x < \delta \quad , \quad \text{se} \quad x_1 - x \geqslant 0$$

$$x - x_1 < \delta \quad , \quad \text{se} \quad x_1 - x \leqslant 0$$

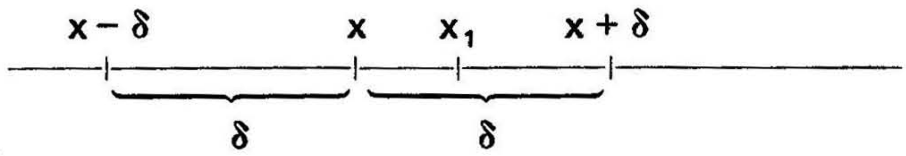
Daqui resulta:

$$|x_1 - x| < \delta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x + \delta & \text{se} \quad x_1 \geqslant x \\ x_1 > x - \delta & \text{se} \quad x_1 \leqslant x \end{cases}$$

e, portanto, como é fácil de ver,

$$\boxed{|x_1 - x| < \delta \Leftrightarrow x - \delta < x_1 < x + \delta} \tag{1}$$

Já sabemos que o conjunto dos valores de x_1 que verificam esta condição é $]x - \delta, x + \delta[$. Este intervalo é chamado *a vizinhança* (δ) *de* x.



Assim, por definição:

A *vizinhança* (δ) *de* x é o conjunto de todos os valores aproximados de x com erro inferior a δ.

Note-se que, na definição anterior, não se define o significado da expressão com *duas* variáveis:

x_1 *é valor aproximado de* x,

mas sim o da expressão com *três* variáveis:

x_1 *é valor aproximado de* x *com erro inferior a* δ.

Define-se portanto, aqui, uma *relação ternária* e não uma *relação binária*. Convém notar que se apresenta uma situação análoga com o atributo 'grande', aplicado a números. Na verdade, não se define em matemática a *propriedade absoluta:*

x *é grande* (no universo IR).

mas sim a *propriedade relativa:*

x *é maior que* y,

ou, mais precisamente, a relação binária $>$. (Como se tem visto, é substituindo o *absoluto* pelo *relativo* que se consegue, em geral, maior rigor lógico em ciência.)

CONVENÇÃO:

Em vez de '*valor aproximado de* x *com erro inferior a* δ', também se diz, para brevidade de linguagem:

valor aproximado de x *a menos de* δ

A definição 1 é completada com a seguinte:

DEFINIÇÃO 2. Chama-se *erro de* x_1 *como valor aproximado de* x (ou *erro de* x_1 *em relação a* x) precisamente $|x_1 - x|$. Diz-se que o erro de x_1 é *por excesso* ou *por defeito,* conforme $x_1 \geqslant x$ ou $x_1 \leqslant x$ (1).

---

(1) Neste *Compêndio* adoptámos a definição de 'erro de valor aproximado' como 'módulo do desvio desse valor'. No entanto, os alunos devem ser prevenidos de que, muitas vezes, se chama 'erro' precisamente àquilo a que chamamos aqui 'desvio'.

Assim, como se vê, *qualquer* número real x_1 pode ser considerado como valor aproximado de x, em matemática pura, pois o que se define apenas é o *grau de aproximação*, indicado pelo número δ.

Convém ainda fazer uma distinção entre 'erro' e 'desvio', que será muito útil, como veremos:

DEFINIÇÃO 3. Chama-se *desvio de* x_1 *em relação ao número* x a diferença $x_1 - x$.

Assim, o *desvio de* x_1 *em relação a* x será um número positivo, negativo ou nulo, ao contrário do erro de x_1 em relação a x, que é sempre superior ou igual a zero — por ser precisamente o *módulo do desvio*.

Quando estiver subentendido o valor x_1 de que se trata, designaremos pelo símbolo Δx o desvio de x_1 em relação a x, isto é, poremos:

$$\boxed{\Delta x = x_1 - x}$$

Mas, basta comparar os dois membros para se ver que a notação Δx é incompleta, se não estiver subentendido o valor aproximado x_1 a que se refere o desvio.

Como sinónimo de 'desvio', hão-de aparecer-nos, depois, os termos 'variação' e 'acréscimo', quando se tratar de funções.

NOTAS:

I. Na fórmula (1) podemos trocar os papéis de x e x_1, aplicando o princípio de substituição de variáveis aparentes. Assim:

$$|x_1 - x| < \delta \Leftrightarrow x_1 - \delta < x < x_1 + \delta$$

isto é: x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ, *sse* x *pertence ao intervalo* $]x_1 - \delta,\ x_1 + \delta[$.

II. Na prática, os números reais são medidas de grandezas. Assim, o que se diz quanto a erros e desvios para números, aplica-se *mutatis mutandis* a grandezas, expressas pelas respectivas medidas, em relação a uma unidade.

EXERCÍCIOS — I. Indique os desvios e os erros dos números

$$-1,\quad 0,\quad 2,\quad 3,\quad 2{,}1,\quad 2{,}3,\quad 2{,}34,\quad 2{,}339$$

em relação a 2,34.

II. Indique diversos valores aproximados de $\sqrt{3}$ a menos de 0,02 por excesso e por defeito.

III. Sabendo que 4,73 é valor aproximado dum número α a menos de 0,05, indique:

a) Uma vizinhança de α, tão pequena quanto possível, a que pertença o número 4,73(1).

b) Dois números tão próximos quanto possível, entre os quais esteja α.

Dê nova resposta à segunda alínea sabendo que: 1) 4,73 é valor aproximado de α por defeito; 2) 4,73 é valor aproximado de α por excesso.

---

(1) O intervalo $]\alpha-0{,}05;\ \alpha + 0{,}05[$.

IV. Sendo α um número real qualquer e δ um número positivo, identifique: *a*) o conjunto dos valores aproximados de α por defeito a menos de δ; *b*) o conjunto dos valores aproximados de α por excesso a menos de δ; *c*) a reunião dos dois conjuntos.

V. Sabe-se que a massa de um corpo é de 5,328 kg, com erro inferior a 3 g. Entre que limites está compreendida a massa do corpo?

VI. *a*) Sabendo que 4,37 é valor aproximado dum número α a menos de 0,02, indique um valor aproximado de α, por defeito, a menos de 0,04, e um valor aproximado de α, por excesso, a menos de 0,04.

b) Sabendo que *a* é valor aproximado de α a menos de δ, indique um valor aproximado de α por defeito e outro por excesso, a menos de $2\,\delta$. Enuncie o teorema contido na resposta.

VII. Sabendo que 0,27 é valor aproximado de α, por defeito, a menos de 0,05, indique um valor aproximado de α a menos de 0,03.

3. **Algarismos exactos dum valor aproximado.** Suponhamos, por exemplo, que 3,5835 é valor aproximado dum número α com erro inferior a 0,002. Então é fácil ver que

$$3{,}5815 < \alpha < 3{,}5855$$

Por conseguinte, *até ao algarismo das centésimas,* a dízima que representa α só pode ser 3,58. Diremos, por isso, que o número 3,5835 é *valor aproximado de α com três algarismos exactos.*

Analogamente, suponhamos que 4 853 420 é valor aproximado dum número β com erro inferior a 4 000. Temos então

$$4\,849\,420 < \beta < 4\,857\,420$$

e vemos que o número 4 853 420 é valor aproximado de β com *dois* algarismos exactos. Também podemos escrever:

$$\beta \approx 4{,}853 \times 10^6 \text{ (com erro inferior a 5000)}$$

Ainda neste caso, diremos, por exemplo, que 0,04853 é valor aproximado de $\beta \times 10^{-8}$ com *dois* algarismos exactos. Dum modo geral:

Com algarismos exactos só contam algarismos significativos, isto é, algarismos que não sejam zeros à esquerda (precisamente aqueles que intervêm na determinação da mantissa do logaritmo ou na utilização da régua de cláculo) ([1]).

4. **Majoração do erro de uma soma.** Sejam x, y dois números reais e tomemos dois números x_1, y_1 como valores aproximados de x e de y, respectivamente.

([1]) Os computadores mais rápidos têm sistema de *vírgula flutuante,* isto é, dão por um lado os algarismos significativos e, por outro lado, um número inteiro igual à característica do logaritmo.

Ora

$$(1) \qquad (x_1 + y_1) - (x + y) = (x_1 - x) + (y_1 - y)$$

O primeiro membro de (1) é o desvio de $x_1 + y_1$ em relação a $x + y$. Por sua vez $x_1 - x$ é o desvio de x_1 em relação a x e $y_1 - y$ o desvio de y_1 em relação a y. Assim, a fórmula (1) pode exprimir-se *abreviadamente,* dizendo:

O desvio da soma é igual à soma dos desvios das parcelas.

Ou ainda, simbolicamente:

$$(2) \qquad \boxed{\Delta (x + y) = \Delta x + \Delta y}$$

pondo $\Delta(x + y) = (x_1 + y_1) - (x + y)$, $\Delta x = x_1 - x$, $\Delta y = y_1 - y$

Daqui e da propriedade do módulo da soma deduz-se:

$$(3) \qquad \boxed{|\Delta (x + y)| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|}$$

Como *o erro é o módulo do desvio,* esta fórmula pode exprimir-se abreviadamente dizendo:

O erro da soma é sempre inferior ou igual à soma dos erros das parcelas.

Convém, ainda, notar o seguinte:

A fórmula (3) *pode ser substituída pela igualdade*

$$|\Delta(u+v)| = |\Delta u| + |\Delta v|$$

se e só se os erros das parcelas são ambos por excesso ou ambos por defeito (neste caso o erro da soma será também por excesso ou por defeito, respectivamente).

Estes resultados estendem-se, *mutatis mutandis*, a mais de duas parcelas.

Chama-se *majorante* (ou *maiorante*) dum número α, qualquer número $\alpha' \geqslant \alpha$. *Majorar* um número α é achar um majorante de α. Assim, a fórmula (3) pode ser chamada FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DA SOMA.

Analogamente, chama-se *minorante* dum número α, qualquer número $\alpha' \leqslant \alpha$.

EXEMPLOS:

I. Sabe-se que 3,14 é valor aproximado de π, por defeito, a menos de 0,01, e que 1,41 é valor aproximado de $\sqrt{2}$, por defeito, a menos de 0,01. Logo, o número $3{,}14 + 1{,}41 = 4{,}55$ é valor aproximado de $\pi + \sqrt{2}$, por defeito a menos de 0,02.

II. Sabe-se que 0,528, 3,032 e 4,530 são valores aproximados de três números α, β, γ, a menos de 0,002, 0,003, 0,005, respectivamente. Logo, o número $0{,}528 + 3{,}032 + 4{,}530$ é valor aproximado de $\alpha + \beta + \gamma$ a menos de 0,01.

5. **Cálculo aproximado de uma soma com erro inferior a um número dado.** Nos problemas do número anterior são dados valores aproximados x_1, y_1, ..., de números x, y, ..., com erros inferiores a números positivos também dados, e procura-se um majorante do erro da soma $x_1 + y_1 + \dots$. Consideremos, agora, o problema inverso (em primeiro lugar com duas parcelas):

Sejam x, y *números reais. Dado um número positivo* δ, *achar valores aproximados* x_1, y_1 *de* x *e* y *tais que* $x_1 + y_1$ *seja um valor aproximado de* $x + y$ *com erro inferior a* δ.

Ponhamos, como anteriormente:

$$x_1 - x = \Delta x \quad , \quad y_1 - y = \Delta y \quad , \quad (x_1 + y_1) - (x + y) = \Delta(x + y)$$

Trata-se, pois, de achar um número ε tal que, sendo

$|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, se tenha $|\Delta(x + y)| < \delta$. Ora

$$|\Delta(x + y)| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$$

Então, se for $|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, virá:

$$|\Delta(x + y)| \leqslant 2\varepsilon$$

Portanto, para se ter $|\Delta(x + y)| < \delta$, basta que seja $2\varepsilon = \delta$, isto é, $\varepsilon = \delta/2$. Em resumo:

TEOREMA. *Para calcular a soma de dois números com erro inferior a* δ, *basta tomar valores aproximados desses números com erro inferior a* $\varepsilon = \delta/2$.

Assim, podemos afirmar o seguinte:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: |\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow |\Delta (x + y)| < \delta$$

O teorema anterior estende-se, evidentemente, a somas com mais de duas parcelas: *basta substituir* 2 *por* n, *sendo* n *o número de parcelas*.

EXERCÍCIOS:

I. Calcular $\pi + \sqrt{2}$ a menos de 0,001 (por defeito).

II. Calcular

$$\pi + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{5}{3}$$

com erro inferior a 0,05, por excesso.

6. **Erro do valor simétrico e erro do valor absoluto.** É fácil reconhecer o seguinte:

TEOREMA 1. *Se x_1 é valor aproximado de x a menos de δ, também $-x_1$ é valor aproximado de $-x$ a menos de δ, e reciprocamente.*

Com efeito, este teorema é traduzido pela seguinte expressão simbólica:

$$x - \delta < x_1 < x + \delta \Leftrightarrow -x - \delta < -x_1 < -x + \delta$$

cuja dedução é imediata *(justifique)*.

Ao mesmo tempo, vê-se que:

Se x_1 *é valor aproximado de* x *por defeito,* $-x_1$ *é valor aproximado de* $-x$ *por excesso (e vice-versa).*

Com efeito:

$$x_1 < x \Rightarrow -x_1 > -x \quad , \quad x_1 > x \Rightarrow -x_1 < -x$$

Por outro lado:

TEOREMA 2. *Se* x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ, *também* $|x_1|$ *é valor aproximado de* $|x|$ *a menos de* δ.

Demonstração:

Suponhamos que x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ. Quer isto dizer que

$$(1) \qquad |x_1 - x| < \delta$$

Ora, segundo as regras de adição e subtracção de números reais, o módulo da diferença de dois números nunca pode ser inferior à diferença dos módulos desses números. Por exemplo:

$$|5 - (-3)| = 8 > |5| - |(-3)|$$

$$|(-3) - (-5)| = 2 = |(-5)| - |(-3)|$$

Em resumo: *o módulo da diferença de dois números é sempre* *superior ou igual ao módulo da diferença dos módulos desses números.* Temos, pois,

$$|x_1 - x| \geqslant \big|\, |x_1| - |x| \,\big| \quad , \quad \forall x, x_1 \in \mathbb{R},$$

donde, atendendo a (1):

$$\big|\, |x_1| - |x| \,\big| < \delta$$

Mas isto quer dizer, precisamente, que $|x_1|$ *é valor aproximado de* $|x|$ *a menos de* δ.

EXEMPLO. Suponhamos que $-0{,}04$ é valor aproximado dum número α a menos de 0,05. Então, segundo o teorema 1, 0,04 é valor aproximado de $-\alpha$ a menos de 0,05, isto é, tem-se:

$$-0{,}01 < -\alpha < 0{,}9.$$

Ao mesmo tempo, aplicando o teorema 2, podemos afirmar que 0,04 é valor aproximado de $|\alpha|$ a menos de 0,05. Mas não temos elementos para poder afirmar que α é positivo, que é negativo ou que é nulo. Porquê?

7. **Majoração do erro de uma diferença.** Visto que a diferença $x - y$ de dois números x, y é igual a $x + (-y)$ a majoração do erro da diferença reduz-se à da soma de x com $-y$. Em particular:

Se x_1 *é valor aproximado de* x *por defeito e* y_1 *é valor aproximado de* y *por excesso, então* $x_1 - y_1$ *é valor aproximado de*

$x - y$ *por defeito (e vice-versa,* trocando as palavras 'defeito' e 'excesso'). Por exemplo, sabemos que 1,414 é valor aproximado de $\sqrt{2}$ por defeito a menos de 0,001 e que 3,142 é valor aproximado de π, por excesso, a menos de 0,001. Então, o número

$$1{,}414 - 3{,}142 = -1{,}628$$

será um valor aproximado de $\sqrt{2} - \pi$, por defeito, a menos de 0,002.

Suponhamos agora que 4,38 e 1,59 são valores aproximados, ambos por defeito, de dois números α e β, respectivamente, a menos de uma centésima. Então, o número

$$4{,}38 - 1{,}59 = 2{,}79$$

é valor aproximado de $\alpha - \beta$ a menos de 0,01, *mas não sabemos se por excesso se por defeito.*

8. **Majoração do erro de um produto.** Sejam x_1, y_1 valores aproximados de dois números reais x, y, respectivamente, e ponhamos, como anteriormente, $x_1 - x = \Delta x$, $y_1 - y = \Delta y$. Então:

(1) $$x_1 = x + \Delta x \quad , \quad y_1 = y + \Delta y$$

donde

$$x_1 y_1 = xy + x\,\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

ou seja

$$(2) \qquad x_1y_1 - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

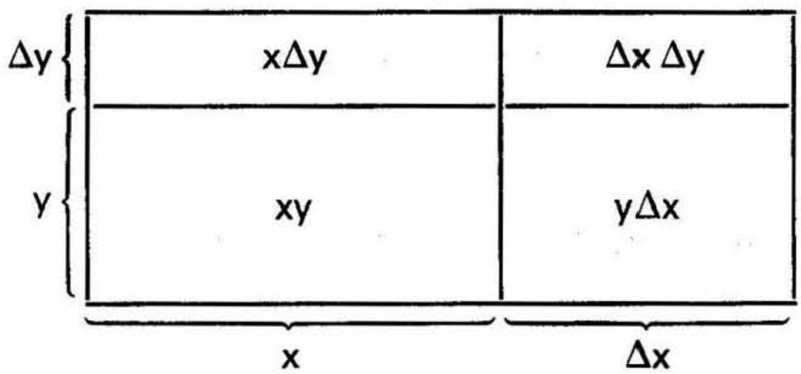
Ora podemos pôr, segundo a notação anterior:

$x_1y_1 - xy = \Delta\,(xy)$ (desvio de x_1y_1 em relação a xy)

Então (2) pode escrever-se:

$$(3) \qquad \boxed{\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y}$$

Esta fórmula é a importante FÓRMULA DO DESVIO DO PRODUTO, cuja interpretação geométrica intuitiva se encontra na figura que a seguir se apresenta no caso em que $\Delta x > 0$ e $\Delta y > 0$.



A figura fala por si e o aluno deve relacioná-la com as fórmulas anteriores sem auxílio alheio.

De (3) deduz-se, por exemplo:

$$\Delta\,(xy) = x\Delta y + (y + \Delta y)\,\Delta x$$

ou seja, atendendo a (1):

$$(4) \qquad \Delta(xy) = x\Delta y + y_1 \Delta x$$

Daqui vem, por sua vez:

$$(5) \qquad |\,\Delta\,(xy)\,| \leqslant |\,x\,|\,|\,\Delta y\,| + |\,y_1\,|\,|\,\Delta x\,| \quad \textit{(justifique)}$$

Seja, agora, $\hat{x}$ um majorante de $|x|$ e $\hat{y}$ um majorante de $|y_1|$, isto é: $\hat{x} \geqslant |\,x\,|$, $\hat{y} \geqslant |\,y_1\,|$ (1).

Então de (5) virá, pela monotonia da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$:

$$(6) \qquad \boxed{|\,\Delta\,(xy)\,| \leqslant \hat{x}\,|\,\Delta\,y\,| + \hat{y}\,|\,\Delta\,x\,|}$$

Esta é, pois, uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DO PRODUTO.

---

(1) É claro que nada impede de trocar aqui os papéis de x e y, visto que a multiplicação é comutativa. O símbolo $\hat{x}$ lê-se 'x circunflexo' ou 'x chapéu'. O mesmo para $\hat{y}$, etc.

EXEMPLO. Suponhamos que 4,538 e 0,5327 são valores aproximados de dois números x e y, respectivamente, a menos de 0,001 e de 0,0001. Neste caso, tem-se:

$$|x| = x < 4{,}539 \quad , \quad |y_1| = y_1 = 0{,}5327$$

e assim podemos tomar, por exemplo:

$$\hat{x} = 5 \quad , \quad \hat{y} = 1$$

Como $|\Delta y| = 0{,}0001$ e $|\Delta x| = 0{,}001$, virá, aplicando (6):

$$|\Delta(xy)| \leqslant 5 \times 0{,}0001 + 0{,}001 = 0{,}0015$$

Por conseguinte o produto

$$4{,}538 \times 0{,}5327 = 2{,}4173926$$

é um *valor aproximado de* xy *a menos de* 0,0015.

Suponhamos, agora, que os números 4,538 e 0,5327 são valores aproximados de x e y por defeito (com erros inferiores a 0,001 e 0,0001, respectivamente). Então, o produto desses números é valor aproximado de xy, por defeito a menos de 0,0015, isto é:

$$2{,}4173926 \leqslant xy < 2{,}4188926$$

Ficam, portanto, determinados apenas *três* algarismos exactos de xy:

$$xy = 2{,}41\ldots$$

Mas, é claro que 2,417 é ainda um *melhor* valor aproximado de xy (a menos de 0,002, por defeito). Os restantes algarismos decimais é que já não interessam ([1]).

NOTAS IMPORTANTES:

I. Para obter o produto de dois números com *n* algarismos exactos (incluindo a parte inteira, se esta não é nula) é necessário *geralmente* conhecer os factores com n + 1 algarismos exactos. Assim, no exemplo anterior, os factores são dados com 4 algarismos exactos e o produto é obtido com 3 algarismos exactos: *perdeu-se, portanto, um algarismo exacto*. Mas algumas vezes perde-se mais de um algarismo exacto; outras vezes, pelo contrário, não se perde nenhum.

II. No caso em que $x = x_1$, é claro que a fórmula (3) do desvio do produto se reduz à seguinte:

$$\Delta (xy) = x\Delta y,$$

sendo, neste caso, mais fácil a majoração do erro do produto. Analogamente se $y = y_1$.

II. Ainda a respeito da fórmula (3), que dá o desvio de um produto, convém notar o seguinte:

Quando os erros $|\Delta x|$ e $|\Delta y|$ são *bastante pequenos,* o termo $\Delta x \Delta y$ da fórmula (3) é *muito pequeno* em relação aos dois primeiros

---

([1]) O aluno poderá resolver outros exercícios deste tipo; mas convém escolher números com menos algarismos, para evitar cálculos demasiado laboriosos.

e pode, então, ser *desprezado* na prática. Assim, em vez de (3), podemos escrever:

(3') $$\boxed{\Delta\,(xy) \approx x\,\Delta\,y + y\,\Delta\,x}$$

Esta é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DO PRODUTO, que, nas referidas circunstâncias, pode substituir a fórmula *exacta* (3). Veremos depois como, no CÁLCULO DIFERENCIAL, a fórmula (3') se torna exacta, substituindo o conceito de 'desvio' pelo de 'diferencial' (ou pelo de 'derivada').

9. **Cálculo aproximado de um produto com erro inferior a um número dado.** Consideremos, agora, o problema inverso do que foi estudado no número anterior:

Dado arbitrariamente um número $\delta > 0$*, achar valores aproximados* x_1, y_1 *de dois números* x, y, *de tal modo que o produto* $x_1 y_1$ *seja valor aproximado do produto* xy *com erro inferior a* δ.

Sejam x_1 e y_1 valores aproximados de x e y (respectivamente), com erro inferior a um número ε *a determinar*. Continuemos a representar por $\Delta(xy)$ o desvio $x_1 y_1 - xy$. *O que se pretende, precisamente, é determinar* ε *de modo que seja:*

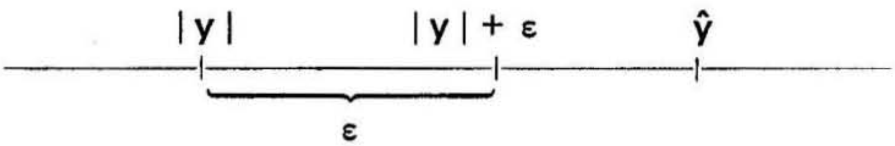
$$|\,\Delta\,(xy)\,| < \delta$$

Para isso, tomemos um número $\hat{x} \geqslant |x|$ e um número $\hat{y} > |y|$. Então, se obrigarmos ε a verificar a condição

$$(1) \qquad \varepsilon \leqslant \hat{y} - |y|$$

tem-se:

$$(2) \qquad |y| + \varepsilon \leqslant \hat{y}$$



Ora, sendo y_1, valor aproximado de y a menos de ε, também $|y_1|$ é valor aproximado de $|y|$ a menos de ε (ver n.º 6), e portanto ([1])

$$|y_1| < |y| + \varepsilon$$

donde, atendendo a (2):

$$|y_1| < \hat{y}$$

([1]) É claro que nos podíamos limitar aqui a *números positivos*, o que dispensava a notação de módulo. Mas, convém-nos a hipótese mais geral de números reais, para poder aplicar, depois, este teorema à teoria dos limites.

Assim, $\hat{x}$ é um majorante de $|x|$ e $\hat{y}$ um majorante de $|y_1|$, o que nos permite aplicar a fórmula do número anterior:

$$|\Delta(xy)| \leqslant \hat{x}\,|\Delta x| + \hat{y}\,|\Delta y|$$

Como, além disso, $|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, virá:

$$|\Delta(xy)| < (\hat{x} + \hat{y})\,\varepsilon$$

Por conseguinte, será $|\Delta(xy)| < \delta$, *se for*

$$(\hat{x} + \hat{y})\,\varepsilon \leqslant \delta \quad \text{ou seja} \quad \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{\hat{x} + \hat{y}}$$

em que, como se disse, $\hat{x} \geqslant |x|$ e $\hat{y} > |y|$, Além disso, ε deve ainda verificar a condição (1). Assim, em conclusão:

TEOREMA. *Sejam* x *e* y *determinados números reais. Então, qualquer que seja* $\delta > 0$, *existe pelo menos um* $\varepsilon > 0$ *tal que o produto de dois valores aproximados de* x *e* y *a menos de* ε *é, com certeza, valor aproximado de* xy *a menos de* δ. *Um tal número* ε *pode ser qualquer número positivo que verifique simultâneamente as duas condições:*

$$(3) \qquad \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{\hat{x} + \hat{y}} \quad , \quad \varepsilon \leqslant \hat{y} - |y|,$$

sendo $\hat{x}$, $\hat{y}$ *números quaisquer tais que*

$$\hat{x} \geqslant |x| \quad , \quad \hat{y} > |y| \; (^1)$$

---

(1) É claro que os papéis de x e de y podem ser trocados neste teorema.

A primeira parte do teorema pode ser traduzida simbolicamente pela fórmula

$$\forall \delta > 0, \ \exists \varepsilon > 0: \ |\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow |\Delta (xy)| < \delta$$

Mas, é preciso não esquecer o seguinte:

Ao contrário do que sucede no caso da soma, o número ε *procurado depende agora não só de* δ, *mas também dos próprios números* x, y, *como se vê pelas fórmulas* (3).

EXEMPLO. Suponhamos que se pretende achar um valor aproximado de $\pi \sqrt{2}$ com erro inferior a 0,001. Neste caso, pondo $x = \pi$, $y = \sqrt{2}$, podemos tomar por exemplo:

$$\hat{x} = 4 \quad , \quad \hat{y} = 2$$

Procuraremos, agora, um número ε tal que

$$\varepsilon \leqslant \frac{0{,}001}{4+2} \quad , \quad \varepsilon \leqslant 2 - \sqrt{2}$$

Um número que verifica a primeira condição é 0,0001. Ora, este número verifica também a segunda condição, visto que $\sqrt{2} < 1{,}5$ e portanto $1 - \sqrt{2} > 1 - 1{,}5 = 0{,}5$. Logo, podemos tomar

$$\varepsilon = 0{,}0001$$

isto é:

Para calcular $\pi \sqrt{2}$ *com erro inferior a* 0,001, *bastará tomar valores aproximados de* π *e de* $\sqrt{2}$ *com erro inferior a* 0,0001, *ou seja, aproximados até às décimas milésimas.*

10. **Majoração do erro de um quociente.** Sejam x_1 e y_1 valores aproximados de dois números x e y, respectivamente, e suponhamos que se tem $y \neq 0$ e $y_1 \neq 0$. Continuando a usar as notações anteriores, temos:

$$(1) \qquad x_1 = x + \Delta x \quad , \quad y_1 = y + \Delta y$$

donde

$$(2) \qquad \frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y} = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y}$$

$$= \frac{(xy + y\Delta x) - (xy + x\Delta y)}{y\ (y + \Delta y)}$$

Pondo, agora

$$\Delta \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y},$$

deduzimos de (1) e (2) a FÓRMULA DO DESVIO DO QUOCIENTE:

$$(3) \qquad \boxed{\Delta \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yy_1}}$$

Daqui, por sua vez, deduz-se:

$$\left| \Delta \frac{x}{y} \right| \leqslant \frac{|x|\,|\Delta y| + |y|\,|\Delta x|}{|y|\,|y_1|} \qquad \textit{(justifique)}$$

Seja, agora, $\hat{x}$ um majorante de $|x|$, $\hat{y}$ um majorante de $|y|$ e $\bar{y}$ um número *positivo*, tal que

$$\bar{y} \leqslant |y| \quad \text{e} \quad \bar{y} \leqslant |y_1| \text{ (1)}$$

Então, virá (2):

$$(4) \qquad \left|\Delta \frac{x}{y}\right| \leqslant \frac{\hat{x}\,|\Delta y| + \hat{y}\,|\Delta x|}{\bar{y}^2}$$

Esta é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DO QUOCIENTE.

EXEMPLO. Suponhamos que 0,23232 e 3,1416 são valores aproximados de dois números x e y, a menos de 0,000 01 e 0,000 1, respectivamente. Neste caso podemos tomar, por exemplo:

$$\hat{x} = 0{,}3 \quad , \quad \hat{y} = 4 \quad , \quad \bar{y} = 3$$

Assim:

$$\left|\Delta \frac{x}{y}\right| \leqslant \frac{0{,}3 \times 0{,}0001 + 4 \times 0{,}00001}{9} < 0{,}000\,008$$

Suponhamos, além disso, que o primeiro valor (dividendo) é aproximado por defeito, e que o segundo (divisor) é aproximado

---

(1) Diz-se, neste caso, que $\bar{y}$ é um minorante positivo de $|y|$ e $|y_1|$. O símbolo $\bar{y}$ lê-se 'y traço' ou 'y barra'.

(2) Aumentando o dividendo, o quociente aumenta; diminuindo o divisor, o quociente aumenta. Isto é: $a < b \Rightarrow a/c < b/c$, $b > c \Rightarrow a/b < a/c$ (em $\mathbb{R}$). Justifique, aplicando princípios de equivalência de inequações.

por excesso. Então o quociente é aproximado por defeito e tem-se, calculando o quociente até às milionésimas:

$$0{,}073949 < \frac{x}{y} < 0{,}073957$$

O quociente de x por y fica, pois, determinado com *três* algarismos exactos: perderam-se, portanto, *dois* algarismos exactos (geralmente, na divisão, perde-se apenas um algarismo exacto, tal como na multiplicação). Mas, note-se que o número 0,07394 é valor aproximado de x/y a menos de 0,00002.

Outros exemplos análogos poderiam ser apresentados. Convirá no entanto, para exercícios, escolher números com menos algarismos, a fim de evitar cálculos demasiado laboriosos.

NOTAS:

I. No caso particular em que $y = y_1$, é claro que a fórmula (3) do desvio do quociente se simplifica, dando:

$$\Delta \frac{x}{y} = \frac{\Delta x}{y}$$

Neste caso, a majoração do erro do quociente será mais fácil.

II. Relativamente à fórmula (3), convém ainda observar o seguinte:

Na prática, quando o erro $|\Delta y|$ é *bastante pequeno em rela-*

ção a $|y|$, é desprezável o erro que se comete, substituindo y_1 por y em (3). Assim, em vez de (3), podemos escrever:

$$\boxed{\Delta \frac{x}{y} \approx \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}} \tag{3'}$$

Esta é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DO QUOCIENTE que, nas referidas circunstâncias, pode substituir a fórmula exacta (3). Mais tarde veremos como, no CÁLCULO DIFERENCIAL, a própria fórmula (3') se torna exacta, substituindo o conceito de 'desvio' pelo conceito de 'diferencial' (ou pelo de 'derivada').

11. **Cálculo aproximado de um quociente com erro inferior a um número dado.** Consideremos, agora, o problema inverso do anterior:

Dado arbitrariamente $\delta > 0$, *achar valores aproximados* x_1, y_1 *de dois números* x,y, *de modo que o quociente* x_1/y_1 *seja aproximado do quociente* x/y *a menos de* δ (com $y \neq 0$ e $y_1 \neq 0$).

Sejam x_1, y_1 valores aproximados de x, y (respectivamente), com erro inferior a um número ε *a determinar*, e continuemos a designar por $\Delta(x/y)$ o desvio $x_1/y_1 - x/y$. Pretende-se, pois, determinar ε de modo que seja

$$\left|\Delta \frac{x}{y}\right| < \delta$$

Para isso, tomemos arbitrariamente um número $\hat{x} \geqslant |x|$, um número $\hat{y} \geqslant |y|$ e um número $\bar{y}$ tal que

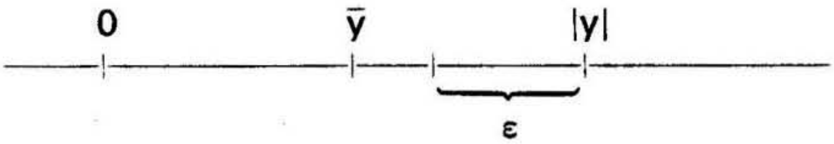
$$0 < \bar{y} < |y|$$

Então, se ε verificar a condição

$$\varepsilon \leqslant |y| - \bar{y}$$

tem-se:

$$(1) \qquad \bar{y} \leqslant |y| - \varepsilon$$



Ora, sendo y_1 valor aproximado de y a menos de ε, também $|y_1|$ é valor aproximado de $|y|$ a menos de ε e tem-se:

$$|y| - \varepsilon < |y_1|$$

donde, atendendo a (1):

$$\bar{y} < |y_1|$$

Assim, $\bar{y}$ é um minorante positivo de $|y|$ e $|y_1|$, e, como $\hat{x}$, $\hat{y}$ são majorantes de $|x|$ e $|y|$, respectivamente, podemos aplicar a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DO QUOCIENTE:

$$\left| \Delta \frac{x}{y} \right| \leqslant \frac{\hat{x}\,|\Delta y| + \hat{y}\,|\Delta x|}{\bar{y}^2}$$

Como, além disso, $|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, virá:

$$\left|\Delta \frac{x}{y}\right| < \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\bar{y}^2}\,\varepsilon$$

Por conseguinte, será $|\Delta (x/y)| < \delta$, desde que seja

$$\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\bar{y}^2}\,\varepsilon \leqslant \delta, \text{ e que equivale a } \varepsilon \leqslant \frac{\bar{y}^2}{\hat{x} + \hat{y}}\,\delta$$

Em conclusão:

TEOREMA. *Sejam* x *e* y *dois números reais e suponhamos* $y \neq 0$. *Então, para todo* $\delta > 0$, *existe pelo menos um* $\varepsilon > 0$, *tal que o quociente de um valor aproximado de* x *a menos de* ε *por um valor aproximado de* y *a menos de* ε *é valor aproximado de* x/y *a menos de* δ. *Um tal número* ε *pode ser qualquer número positivo que verifique as duas condições*

$$\varepsilon \leqslant \frac{\bar{y}^2}{\hat{x} + \hat{y}}\,\delta \quad , \quad \varepsilon \leqslant |y| - \bar{y},$$

sendo $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\bar{y}$, *números quaisquer tais que*

$$\hat{x} \geqslant |x| \quad , \quad \hat{y} \geqslant |y| \quad , \quad 0 < \bar{y} < |y|$$

A primeira parte do teorema é traduzida pela fórmula:

$$\forall \delta,\ \exists \varepsilon:\ |\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow \left|\Delta \frac{x}{y}\right| < \delta$$

Tal como no caso do produto, o número ε procurado depende não só de δ, *mas também de* x *e* y.

EXEMPLO. Suponhamos que se trata de calcular $\sqrt{2}/\pi$ a menos de 0,001. Pondo $x = \sqrt{2}$, $y = \pi$, podemos tomar, por exemplo:

$$\hat{x} = 2 \quad , \quad \hat{y} = 4 \quad , \quad \bar{y} = 3$$

Procuremos, agora, um número ε tal que

$$\leqslant \varepsilon \frac{9}{2+4} \times 0{,}001 \quad , \quad \varepsilon \leqslant \pi - 3$$

Um número que verifica a primeira condição é 0,0015. Ora, este número verifica também a segunda condição, visto que $\pi > 3{,}1$ e, portanto, $\pi - 3 > 0{,}1$. Logo, podemos tomar $\varepsilon = 0{,}0015$ ou mesmo

$$\varepsilon = 0{,}001$$

isto é:

Para calcular $\sqrt{2}/\pi$ *a menos de* 0,001, *basta tomar valores aproximados de* $\sqrt{2}$ *e de* π *até às milésimas.*

EXERCICIOS:

I. Sendo $\alpha = 0{,}252\ldots$ e $\beta = 3{,}141\ldots$, calcular $\alpha + \beta$, $\beta - \alpha$, $\alpha\beta$ e α/β, com o maior número possível de algarismos exactos.

II. Sabendo que a base e a altura dum triângulo medem respectivamente 26,3 cm e 5,0 cm, a menos de 1 mm por defeito, calcular um valor aproximado, por defeito, da área do triângulo, e achar um majorante do erro desse valor aproximado.

III. Determinar o número de algarismos exactos que se devem tomar no desenvolvimento de π para calcular a área dum círculo de 10 m de raio com erro inferior a 1 cm².

IV. Pretende-se construir um recipiente cilíndrico com 1 m de altura e 30 cm de raio da base. Avaliar o erro que pode provocar na capacidade do recipiente o erro de 1 mm cometido no raio da base e na altura.

V. Determinar a relação de grandeza que se verifica entre os números $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{3}$, aplicando o seguinte teorema:

'Sendo *a* e *b* números positivos e *n* um número natural, tem-se $a < b$, $a > b$ ou $a = b$, conforme $a^n < b^n$, $a^n > b^n$ ou $a^n = b^n$,

VI. Idem para os números $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ e $\sqrt{2}-1$.

VII. Dispor por ordem de grandeza os números 4, $\sqrt{13}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ sem recorrer a desenvolvimentos decimais.

VIII. Verificar que $\sqrt[3]{2-\sqrt{\pi}}$ está compreendido entre 0,6 e 0,7 (começando por calcular π a menos de 0,01).

12. **Majoração do erro de uma potência.** Seja x_1 valor aproximado de um número real x e seja *n* um número natural. Então, como se viu no 6.º ano,

$$x_1^n - x^n = (x_1 - x)\,(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots + x_1x^{n-2} + x^{n-1})$$

ou ainda, adoptando as notações anteriores para desvios:

$$(1) \qquad \Delta x^n = (x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots + x_1 x^{n-2} + x^{n-1})\,\Delta x,$$

que é a FÓRMULA DO DESVIO DA POTÊNCIA.

Daqui, por sua vez, deduz-se:

$$|\Delta x^n| \leqslant (|x_1|^{n-1} + |x_1|^{n-2}|x| + \ldots + |x|^{n-1})\,\Delta x$$

Portanto, se designarmos por $\hat{x}$ um majorante qualquer de $|x_1|$ e $|x|$, virá:

$$\boxed{|\Delta x^n| \leqslant n\,\hat{x}^{n-1}\,|\Delta x|}$$

que é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DA POTÊNCIA.

Esta permite não só majorar o erro da potência de um valor aproximado de x, como também resolver o problema inverso, de modo análogo ao que fizemos para o produto. Isto é:

Qualquer que seja $\delta > 0$, tem-se $|\Delta x^n| < \delta$, desde que seja $|\Delta x| < \varepsilon$, sendo ε um número positivo tal que

$$\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{n\,\hat{x}^{n-1}} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon \leqslant \hat{x} - |x|,$$

em que $\hat{x}$ é qualquer número maior que $|x|$.

Relativamente à fórmula (1), verifica-se, *na prática*, o seguinte facto:

Quando $|\Delta x|$ é bastante pequeno, o erro que se comete em substituir x_1 por x é *desprezável* e, assim, obtemos:

$$(1') \qquad \boxed{\Delta x^n \approx n\, x^{n-1}\, \Delta x}$$

Esta é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DA POTÊNCIA que, nas referidas circunstâncias, substitui a fórmula exacta (1). Veremos depois como, no CÁLCULO DIFERENCIAL, a própria fórmula (1') se torna exacta, substituindo o conceito de 'desvio' pelo conceito de 'diferencial' (ou pelo de 'derivada').

13. **Majoração do erro de uma raiz.** Sejam, agora, x e x_1 números reais *não negativos* e seja *n* um número natural. Pondo

$$y = \sqrt[n]{x} \qquad \text{e} \qquad y_1 = \sqrt[n]{x_1}$$

tem-se:

$$y_1^n - y^n = (y_1 - y)\,(y_1^{n-1} + y_1^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$$

ou seja:

$$x_1 - x = (\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x}) \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x_1})^{n-k-1} (\sqrt[n]{x})^k$$

Daqui, pondo

$$x_1 - x = \Delta x \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x} = \Delta \sqrt[n]{x} \ ,$$

vem, finalmente:

$$(1) \qquad \Delta \sqrt[n]{x} = \frac{\Delta x}{\sum_{k=0}^{n-1} x_1^{\frac{n-k-1}{n}} x^{\frac{k}{n}}}$$

que é a FÓRMULA DO DESVIO DA RAIZ. Daqui, por sua vez, deduz-se:

$$(2) \qquad |\Delta \sqrt[n]{x}| \leqslant \frac{1}{n\bar{x}^{\frac{n-1}{n}}} |\Delta x| \ ,$$

sendo $\bar{x}$ um *minorante positivo de* x_1 *e* x, isto é, um número tal que $0 < \bar{x} < x_1$ e $\bar{x} < x$. Esta é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DA RAIZ, que permite não só majorar o erro da raiz de índice *n* de um valor aproximado de x como também resolver o problema inverso:

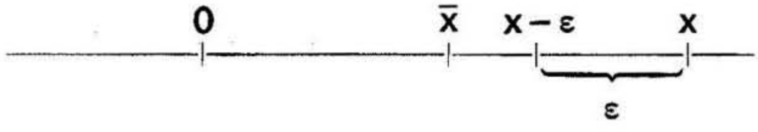
TEOREMA. *Qualquer que seja* $\delta > 0$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$|x_1 - x| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x}| < \delta \qquad (\text{com } x \geqslant 0)$$

Um tal número ε *pode ser qualquer número positivo que verifique as duas condições:*

$$(3) \qquad \varepsilon \leqslant n \sqrt[n]{\bar{x}^{n-1}} \, . \, \delta \ , \quad \varepsilon < x - \bar{x}$$

sendo $\bar{x}$ *qualquer minorante positivo de* x.



Com efeito, seja $\bar{x}$ um minorante positivo de x e seja x_1 um valor aproximado de x a menos de ε, sendo ε um número que verifica as condições (3). Então, será:

$$x - \varepsilon < x_1$$

donde, por ser $\varepsilon < x - \bar{x}$

$$x - (x - \bar{x}) < x_1 \qquad \textit{(porquê?)}$$

ou seja $\bar{x} < x_1$. Por conseguinte, $\bar{x} < x_1$. Assim, $\bar{x}$ é um minorante positivo de x e x_1, o que permite aplicar a fórmula (2):

$$|\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x}| \leqslant \frac{1}{n\,\bar{x}^{\frac{n-1}{n}}}\,|x_1 - x|$$

Mas, $|x_1 - x| < \varepsilon \leqslant n\,\bar{x}^{\frac{n-1}{n}}\,\delta$, por hipótese. Logo

$$|\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x}| < \delta \quad , \quad \text{q. e. d.}$$

Relativamente à fórmula (1), observa-se o seguinte:

Na prática, quando $|\Delta x|$ é *bastante pequeno*, o erro que se comete em substituir x_1 por x é desprezável e, assim, obtemos:

$$(1') \qquad \boxed{\Delta \sqrt[n]{x} \approx \frac{\Delta x}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

Esta é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DA RAIZ, que, nas referidas circunstâncias, substitui a fórmula exacta (1). Veremos também, como no CÁLCULO DIFERENCIAL, a fórmula (1') se torna exacta, substituindo o conceito de 'desvio' pelo de 'diferencial' (ou pelo de 'derivada').

14. **Desvio relativo e erro relativo.** Seja x um número real $\neq 0$ e seja x_1 um valor aproximado de x. Chama-se *desvio* relativo de x_1 (em relação a x) o quociente do desvio de x_1, (em relação a x) pelo próprio número x. Designaremos por $\Delta' x$ o desvio relativo de x_1 em relação a x. Será, pois, por definição:

$$\Delta' x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x_1 - x}{x}$$

Chama-se *erro relativo de* x_1 *em relação a* x o módulo de $\Delta' x$(1).

Por exemplo, já sabemos que 3,14 é valor aproximado de π, por defeito, a menos de 0,01. Então, o erro relativo de 3,14 em relação a π será inferior a

$$\frac{0{,}01}{3} < 0{,}004$$

Também podemos dizer, neste caso, que o erro relativo é inferior a 4 ‰ (ou inferior a 0,4 %). Quanto ao desvio relativo de 3,14 em

(1) Também se chama *'desvio absoluto'* ao desvio propriamente dito, para o distinguir de desvio relativo, e *'erro absoluto'*, ao erro propriamente dito.

relação a π, esse será superior a $-0{,}004$, visto que $3{,}14 < \pi$ e portanto $3{,}14 - \pi < 0$.

EXERCÍCIOS — I. Sabendo que 23,08 é valor aproximado dum número α com erro relativo inferior a 1 %, indique os limites (majorante e minorante) que daí se deduzem para o número α.

II. Problema análogo, sabendo que $2{,}538 \times 10^7$ é valor aproximado dum número β com erro relativo inferior a 0,2 %.

15. **Erro relativo de um produto*.** Da fórmula do desvio do produto

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

deduz-se imediatamente, dividindo por xy:

$$\frac{\Delta(xy)}{xy} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

ou seja:

$$\Delta'(xy) = \Delta'x + \Delta'y + \Delta'x\Delta'y$$

que é a FÓRMULA DO DESVIO RELATIVO DO PRODUTO.

Na prática, quando os erros relativos dos factores são suficientemente pequenos (p. ex. menores que 0,1), pode-se desprezar o produto desses erros e escrever:

$$(1) \qquad \Delta'(xy) \approx \Delta'x + \Delta'y$$

que é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO RELATIVO DO PRODUTO. No CÁLCULO DIFERENCIAL, esta fórmula torna-se exacta, substituindo o conceito de 'desvio relativo' pelo conceito de 'diferencial relativo' (ou pelo de 'elasticidade'). De (1) deduz-se, por sua vez:

$$(2) \qquad |\Delta'(xy)| \lesssim |\Delta' x| + |\Delta' y|$$

isto é:

Quando $|\Delta' x|$ *e* $|\Delta' y|$ *são bastante pequenos, o erro relativo do produto é inferior ou aproximadamente igual à soma dos erros relativos dos factores; e podemos dizer que é aproximadamente igual a essa soma, se os desvios dos factores tiverem o mesmo sinal*[1].

Por exemplo, se 0,27 e 3,5 são valores aproximados de dois números α e β com erros relativos inferiores a 1 %, podemos dizer que $0{,}27 \times 3{,}5$ é valor aproximado de $\alpha\beta$, com erro inferior ou aproximadamente igual a 2 %. Se o erro for superior a 2 %, a diferença (*erro de segunda ordem*) será inferior ao produto dos erros relativos dos factores e portanto inferior a 0,0001, o que é na verdade insignificante na prática.

16. **Erro relativo do quociente.*** Como vimos, a fórmula do desvio do quociente

$$\Delta \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y + \Delta y)}$$

---

(1) O sinal $\lesssim$ lê-se 'menor ou aproximadamente igual'.

pode ser substituída pela fórmula aproximada

$$(1) \qquad \Delta \frac{x}{y} \approx \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}$$

quando $|\Delta y|$ é bastante pequeno em relação a $|y|$, isto é, *quando* $|\Delta' y|$ *é suficientemente pequeno*. Então de (1) deduz-se, dividindo por x/y:

$$(2) \qquad \Delta' \frac{x}{y} \approx \Delta' x - \Delta' y$$

Esta FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DO QUOCIENTE cede o lugar a uma fórmula exacta, quando se substituir o conceito de 'desvio relativo' pelo conceito de 'diferencial relativo' (ou pelo de 'elasticidade').

De (2) por sua vez deduz-se, na hipótese considerada

$$\left| \Delta' \frac{x}{y} \right| \lesssim |\Delta' x| + |\Delta' y| \ ,$$

tendo-se

$$\left| \Delta' \frac{x}{y} \right| \approx |\Delta' x| + |\Delta' y| \ ,$$

quando $\Delta' x$ e $\Delta' y$ tiverem sinais contrários.

17. **Erros relativos da potência e da raiz.*** Por considerações semelhantes às dos números anteriores, chega-se às seguin-

tes FÓRMULAS APROXIMADAS DOS DESVIOS RELATIVOS DA POTÊNCIA E DA RAIZ:

$$\Delta' x^n \approx n\Delta' x$$

$$\Delta' \sqrt[n]{x} \approx \frac{1}{n} \Delta' x$$

que permitem fazer a majoração aproximada dos correspondentes erros relativos.

Índice

§ 2. *Teoria dos limites de sucessões*

§ 3. *Limites de funções de variável real*

§ 4. *Derivadas*

Capítulo II. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Março de 1976

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA