J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

2.º volume

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

§ 4. DERIVADAS

40. **Conceitos fundamentais e regras de derivação.** Sobre este ponto pode também seguir-se o *Compêndio de Álgebra,* no Cap. VIII. *Quanto à dedução das regras de derivação do produto, do quociente e da raiz, pode agora tirar-se partido do estudo feito no* § 1 *e utilizar as notações* Δx, Δy, Δu, Δv, etc., *atendendo à analogia entre o conceito de desvio e o de acréscimo.*

Assim, consideremos duas funções $u = f(x)$, $v = g(x)$ e um acréscimo Δx dado a x. Sejam Δu e Δv os acréscimos correspondentes de *u* e *v*, isto é:

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \quad , \quad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

e ponhamos $fg = \varphi$. Ora, já sabemos que se tem:

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u\,v$$

$$= u\,\Delta\,v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

donde:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,.\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Portanto, em todo o ponto x em que f e g admitem derivada finita, vem, aplicando os teoremas sobre limites:

$$(1) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

visto que $\Delta u \to 0$ *(porquê?)* e $\Delta v/\Delta x$ tende para um limite finito. Mas, lembrando que $u = f(x)$, $v = g(x)$ e $uv = f(x)g(x) = \varphi(x)$, a igualdade (1) escreve-se:

$$\varphi'(x) = f(x)\ g'(x) + g(x)\ f'(x)$$

ou, abreviadamente:

$$D(uv) = uDv + vDu$$

ou, ainda:

$$(uv)' = uv' + vu' \text{ } (^1)$$

A extensão a mais de 2 factores faz-se como no *Compêndio de Álgebra*.

---

(1) Estamos aqui a cometer o *abuso de linguagem* que consiste em tratar as *variáveis dependentes* u,v, como se fossem as próprias *funções* f,g. A fórmula correcta seria $(fg)' = fg' + gf'$ ou $D(fg) = fDg + gDf$. Mas o referido abuso de linguagem torna-se inevitável, a partir de certo momento, para não complicar demasiado as notações (principalmente em matemática aplicada). *Apenas quando houver perigo de confusão,* será indispensável utilizar a linguagem correcta.

Quanto à derivada do quociente, basta lembrar que

$$\Delta \frac{u}{v} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v\,(v + \Delta v)}$$

Daqui vem, supondo ainda $u = f(x)$, $v = g(x)$:

$$\frac{\Delta \frac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Portanto, em todo o ponto x em que f e g admitem derivada finita e $g(x) \neq 0$, virá, por passagem ao limite quando $\Delta x \to 0$ e pondo $f/g = \psi$:

$$\psi'(x) = \frac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$$

visto que $\Delta v \to 0$ quando $\Delta x \to 0$.

Em notação abreviada:

$$D \frac{u}{v} = \frac{vDu - uDv}{v^2}$$

ou, ainda:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Quanto à derivada da raiz, consideremos um número natural n e um número real $x_0 \neq 0$ (positivo se *n* é par). Então virá, para $x \neq x_0$ (cf. n.º 13, pp. 46-47):

$$\frac{x - x_0}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[n]{x})^{n-k}(\sqrt[n]{x_0})^{k-1}$$

donde:

$$(2) \qquad \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt[n]{x})^{n-k}(\sqrt[n]{x_0})^{k-1}}$$

Ora, quando $x \to x_0$, $(\sqrt[n]{x})^{n-k} \ (\sqrt[n]{x_0})^{k-1}$ tende para

$$(\sqrt[n]{x_0})^{n-k} \ (\sqrt[n]{x_0})^{k-1} = \sqrt[n]{x_0^{n-1}} \neq 0 \qquad \textit{(porquê?)}$$

e, portanto, o primeiro membro de (2) tende para um limite finito que é:

$$\underset{x=x_0}{D} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$$

Mais simplesmente, podemos escrever:

$$D \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

para todo o $x \neq 0$ (e positivo se n é par). Quanto à fórmula (18) do *Compêndio de Álgebra* (p. 239), subentende-se que a fórmula é aplicável em todo o ponto x em que φ admite derivada finita e tal que $\varphi(x) \neq 0$ (positivo se n é par).

A regra da derivação da função composta pode ser deduzida como no *Compêndio de Álgebra*. Não esquecer, entretanto, a linguagem moderna: se $f(x) \equiv \varphi[\psi(x)]$, diz-se que f é a *função composta de* φ *com* ψ e escreve-se $f = \varphi \circ \psi$.

Quanto à regra de derivação da função inversa, pode ser deduzida como no *Compêndio de Álgebra*, mas convém tratar desse assunto mais adiante, imediatamente antes da derivada da função logarítmica, em cuja dedução se aplica o referido teorema.

41. **Conceito de diferencial** (1). Seja f uma função que admita derivada finita num ponto x e ponhamos $y = f(x)$. Então, a todo o acréscimo Δx dado a x, corresponde um acréscimo Δy para y e tem-se:

$$(1) \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ponhamos, agora:

$$(2) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = r$$

---

(1) Antes deste assunto, convirá tratar das *aplicações das derivadas*, segundo o *Compêndio de Álgebra*. Sobre o conceito de diferencial, importa ver o *Guia!*

Será pois r a diferença entre a *razão incremental* e a derivada. Supondo x fixo e Δx variável, r é função de Δx e tem-se, em virtude de (1) e (2):

$$\lim_{\Delta x \to 0} r = 0$$

Ora de (2) vem:

$$(3) \qquad \boxed{\Delta y = f'(x) \ \Delta x + r \Delta x}$$

e tem-se:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} r = 0$$

Mas isto quer dizer que $r \Delta x$ *é um infinitésimo com* Δx *de ordem superior à de* Δx. Nestas condições, a fórmula (3) diz-nos o seguinte:

O acréscimo Δy *é igual a* $f'(x)\Delta x$, *mais um infinitésimo com* Δx *de ordem superior à de* Δx.

Mais ainda, se $f'(x) \neq 0$, tem-se:

$$\frac{r \Delta x}{f'(x) \Delta x} = \frac{r}{f'(x)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \Delta x \to 0$$

Donde, atendendo a (3):

$$\boxed{\frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} \to 1 \quad \text{quando} \quad \Delta x \to 0}$$

Exprime-se este facto, dizendo que Δy e $f'(x)\Delta x$ são *infinitésimos equivalentes* (isto é, o seu quociente tende para 1). Na prática, isto quer dizer o seguinte:

Quando Δx é bastante pequeno, o termo $r\,\Delta x$ será *muito pequeno em relação a* $f'(x)\,\Delta x$, e portanto desprezável, o que nos permite escrever, em vez de (3), a fórmula seguinte:

$$(3') \qquad \Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$$

Mas é preciso não esquecer que, em rigor, o acréscimo Δy não é geralmente igual a $f'(x)\,\Delta x$.

Chama-se *diferencial da função* f *no ponto* x o produto $f'(x)\,\Delta x$ da derivada de f em x pelo acréscimo Δx da variável independente. O diferencial de f em x representa-se por $df(x)$ ou simplesmente por dy, se pusermos $y = f(x)$. Será pois, por definição:

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x$$

ou

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

Notemos, desde já, o seguinte: em particular, se for $f(x) \equiv x$, será $f'(x) \equiv 1$ e portanto $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Isto leva-nos a escrever dx em vez de Δx, quando x é a variável independente. Ter-se-á, pois:

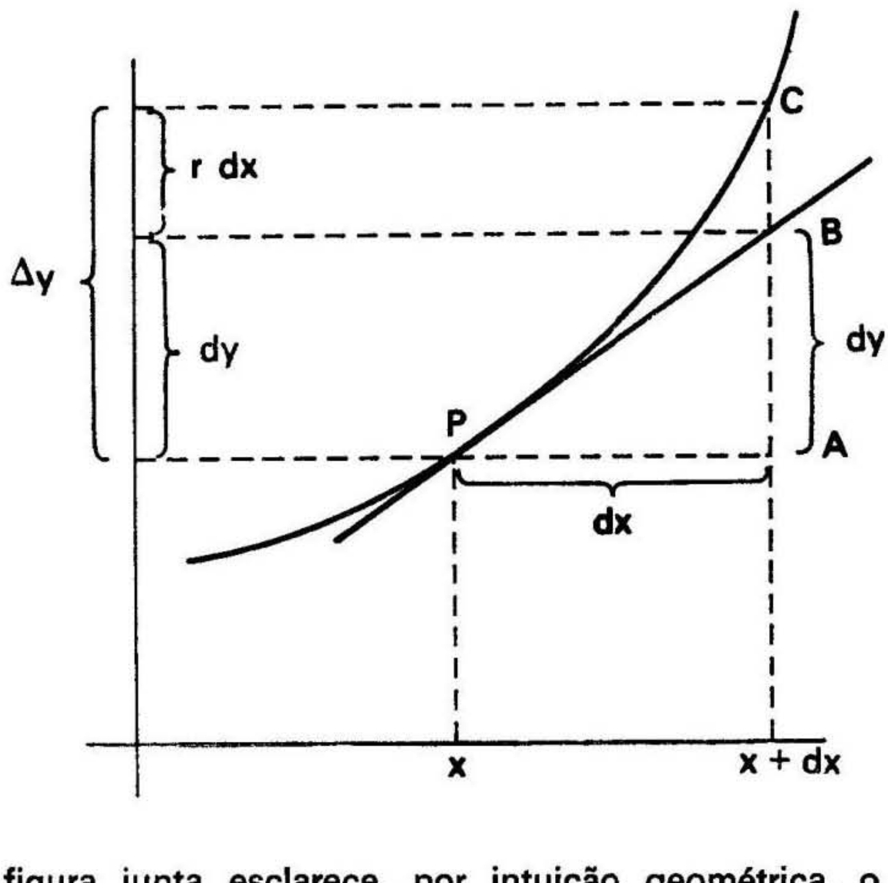
$$\boxed{dy = f'(x)dx} \tag{4}$$

E a fórmula (3) diz-nos, agora, o seguinte:

O acréscimo Δy *difere do diferencial* dy *por um infinitésimo de ordem superior à de* Δx *(ou* dx*) e pode escrever-se*

$$\Delta y \approx dy$$

quando dx *é bastante pequeno.*



A figura junta esclarece, por intuição geométrica, o que se acaba de dizer. A recta PB é a tangente ao gráfico da função f no ponto da abcissa x; o seu declive é, portanto, f'(x). Os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AB}$, catetos do triângulo rectângulo [PAB], representam respectivamente dx e dy (dy = f'(x)dx), à parte o sinal. O segmento $\overline{AC}$ representa o acréscimo Δy, à parte o sinal. A diferença Δy-dy é assim representada, em valor absoluto, por $\overline{BC}$. Ora vê-se que, quando dx tende para zero, esta diferença entre o acréscimo Δy e o diferencial dy torna-se desprezável em relação a dy.

Assim, a substituição do acréscimo Δy *pelo diferencial* dy *equivale a substituir a curva pela tangente (ou seja, a substituir* f *pela função linear cujo gráfico é a tangente), o que, para valores bastante pequenos de* dx, *não produz erro apreciável.*

Note-se, por último, que a fórmula

$$dy = f'(x)dx, \tag{4}$$

que define o diferencial, pode escrever-se:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{5}$$

Assim se explica a *notação* $\frac{dy}{dx}$ *de Leibniz,* para designar *a derivada de* y *em ordem a* x.

Para os precursores do cálculo infinitesimal, os diferenciais eram *infinitésimos actuais* (ou *indivisíveis*) ([1]). Deste modo, a derivada seria o quociente de duas quantidades infinitésimas. Foi Newton,

([1]) Reler NOTA IMPORTANTE das pp. 71-72.

ao que parece, quem primeiro concebeu a derivada correctamente, isto é, como limite da razão incremental $\Delta y/\Delta x$, quando $\Delta x \to 0$. No entanto, a fórmula (5) também é correcta, uma vez que se defina dy segundo (4) e não como sendo igual a Δy.

42. **Regras de diferenciação.** O conceito de diferencial, como desde já se pode reconhecer, está intimamente relacionado com o cálculo numérico aproximado. Seja, por exemplo, $f(x) \equiv \sqrt[p]{x}$, em que p é um número natural. Como $df(x) = f'(x)dx$ e

$$f'(x) \equiv \frac{1}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}} \, ,$$

será:

$$d\sqrt[p]{x} = \frac{dx}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}}$$

Esta é uma fórmula rigorosa, que, como já tínhamos anunciado no n.º 13, substitui a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DA RAIZ:

$$(1) \qquad \Delta\sqrt[p]{x} \approx \frac{\Delta x}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}} \, ,$$

Esta pode agora ser interpretada do seguinte modo: *a diferença entre os dois membros de* (1) *é um infinitésimo com* Δx *de ordem superior à de* Δx.

Da definição de diferencial

$$dy = f'(x)dx, \text{ sendo } y = f(x),$$

e das regras de derivação, resultam *regras perfeitamente análogas de diferenciação:*

$$\left.\begin{aligned} d(u+v) &= du + dv \\ d(uv) &= u\,dv + v\,du \\ d\frac{u}{v} &= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \end{aligned}\right\} \text{com } u = f(x),\ v = g(x)$$

Por exemplo:

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx = u\,dv + v\,du$$

Note-se que as REGRAS DE DIFERENCIAÇÃO DO PRODUTO E DO QUOCIENTE substituem as FÓRMULAS APROXIMADAS DO DESVIO DO PRODUTO E DO QUOCIENTE (n.os 9 e 11).

Finalmente, convém notar que o conceito de diferencial se estende a funções de mais de uma variável, sendo as regras de diferenciação perfeitamente análogas. No caso particular de uma função $z = f(x,y)$ de duas variáveis, que *verifique certas condições,* tem-se por definição:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

sendo $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ as *derivadas parciais da função,* respectivamente em ordem a x e em ordem a y. A primeira obtém-se derivando f(x,y) em ordem a x *supondo* y *constante*; e a segunda, derivando f(x,y) em ordem a y, *supondo* x *constante*. Por exemplo, se

$$z = \sqrt{x^2 + 3y}$$

tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}}$$

e, portanto:

$$(2) \qquad d\sqrt{x^2 + 3y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}}\,dx + \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\,dy$$

Este resultado podia ser obtido, aplicando as regras de diferenciação:

$$d\sqrt{x^2 + 3y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\,d(x^2 + 3y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\,(2xdx + 3dy)$$

Substituindo d por Δ e o sinal $=$ por $\approx$, obtém-se a fórmula aproximada do desvio de $\sqrt{x^2 + 3y}$.

43. **O conceito de diferencial nas ciências da natureza** [1]. Já se viu qual o papel do conceito de diferencial no cálculo numérico

---

(1) **Este número é particularmente recomendável** ***como leitura*****, para se compreender bem a** ***aplicação do cálculo infinitesimal às ciências da natureza*****, especialmente à física e à engenharia.**

aproximado. É corrente, em questões concretas de matemática relativas às ciências experimentais e à engenharia, usar os diferenciais como se estes fossem os próprios acréscimos das funções. Nisto consistem os chamados 'MÉTODOS ABREVIADOS DE CÁLCULO E RACIOCINIO'. É evidente que tais métodos carecem de rigor, pois, como vimos, ao substituir os acréscimos das funções pelos respectivos diferenciais, cometem-se erros. Mas, na prática, estes erros são desprezáveis, dentro de outros limites, e, nos raciocínios, são compensados por outros erros da mesma ordem, de modo que se chega muitas vezes assim a *resultados válidos*. Os referidos métodos abreviados são, pois, *métodos heurísticos,* isto é, métodos que, embora pouco rigorosos, permitem facilmente *descobrir* factos, que podem depois ser demonstrados logicamente pelos métodos rigorosos da matemática pura. *No fundo, continua a seguir-se o método dos indivisíveis* (pp. 71-72) *com uma só diferença: é que se tem agora consciência da falta de rigor e da necessidade de confirmar posteriormente os resultados à luz da lógica dedutiva.*

Convém, portanto, que o aluno fique desde já prevenido de que irá encontrar, com frequência, no estudo das ciências experimentais nomeadamente na física, raciocínios que deixam muito a desejar do ponto de vista do rigor lógico. A razão é esta: nesses casos, são normalmente usados os referidos métodos abreviados de carácter heurístico, e não há tempo para fazer demonstrações rigorosas, que são muitas vezes longas ou mesmo complicadas. Estas competem aos matemáticos.

Na NOTA HISTÓRICA do Cap. V do *Compêndio de Álgebra,* mostra-se como tal método pode ser usado para *descobrir* a fórmula da área do círculo. De modo análogo se pode *descobrir* a fórmula que dá o volume da esfera (supondo já conhecidas as que dão a área da esfera e o volume do cone).

Outros exeploms:

a) Já sabemos que, num movimento de equação $s = f(t)$, a velocidade, em cada instante t, é a derivada $f'(t)$ do espaço em ordem ao tempo, derivada que também se representa por ds/dt. Pois em linguagem abreviada raciocina-se deste modo: num intervalo de tempo infinitésimo $[t, t + dt]$, o movimento pode considerar-se *uniforme*; logo, a velocidade v nesse intervalo (e, portanto, no instante t) é o quociente do espaço percorrido

$$ds = f(t + dt) - f(t)$$

pelo tempo dt, isto é, $v = ds/dt = f'(t)$.

Ora, nesse raciocínio há dois erros: 1.º, supõe-se constante a velocidade no intervalo $[t, t + dt]$; 2.º, substitui-se o *acréscimo* $\Delta s = f(t + dt) - f(t)$ pelo *diferencial* ds. Mas é claro que os dois erros se compensam e o resultado está certo ([1]).

b) A quantidade de electricidade Q que passa numa dada secção dum fio condutor durante um tempo t é função de t:

$$Q = f(t)$$

Num intervalo infinitésimo $[t, t + dt]$, a quantidade de electricidade escoada, $dQ = f(t + dt) - f(t)$, é também infinitésima e pode considerar-se *proporcional* ao tempo dt. A constante de proporcionalidade, que representaremos por I, chama-se *intensidade de corrente no instante* t. Tem-se, pois:

$$I = \frac{dQ}{dt} = f'(t)$$

([1]) Aqui 'infinitésimo' significa 'muito pequeno'; mas já sabemos que, em rigor, 'infinitésimo' significa 'tendente para zero'.

Mas, em geral, I varia com t (é uma nova função de t) não sendo constante no intervalo $[t, t + dt]$, contrariamente ao que se supôs. *Em rigor,* a intensidade I deverá ser definida pela fórmula:

$$I = f'(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt}$$

c) A quantidade de calor q necessária para elevar de 0° a 1° a temperatura de um grama de certa substância é função de t:

$$q = \varphi(t)$$

A um acréscimo infinitésimo dt de t corresponde um acréscimo infinitésimo dq, de q, que pode ser considerado *proporcional* a dt. A constante de proporcionalidade, γ, chama-se *calor específico da substância à temperatura* t. Tem-se, pois:

$$\gamma = \frac{dq}{dt} = \varphi'(t)$$

Mas γ varia geralmente com a temperatura: é uma função de t (como no caso anterior).

NOTA IMPORTANTE. O acréscimo $\Delta y = \Delta f(x)$ de uma função num ponto x também é chamado *diferença finita da função,* principalmente quando se consideram acréscimos da variável independente *todos iguais entre si,* como sucede nas tabelas numéricas (p. ex. nas de logaritmos). Como acabámos de ver, a *diferença finita* Δy é, muitas vezes, substituída pelo *diferencial* dy. Mas também muitas vezes se faz a substituição inversa:

O *diferencial* dy é substituído pela *diferença finita* Δy (e portanto a *derivada* pela razão incremental), quando Δx é bastante pequeno.

Acontece isto correntemente em cálculo numérico, como veremos a propósito do cálculo integral. Faz-se então aquilo a que podemos chamar uma *discretização dos problemas*: as variáveis *contínuas* (de tempo, espaço, massa, etc.) são substituídas por variáveis *discretas*, com intervalos todos iguais. *O problema fundamental que se põe então aos matemáticos é o de avaliar o erro que daí resulta, para saber até que ponto a discretização conduz a resultados aceitáveis.*

No fundo, trata-se pois ainda aqui de *questões de convergência*, muitas das quais ainda estão por resolver em vários tipos de problemas, pela sua extrema dificuldade. Quando os técnicos não dispõem de critérios matemáticos rigorosos para controlar os resultados dos seus cálculos, são obrigados a verificá-los por meio de *modelos materiais*, que reproduzem ou *simulam*, em escala muito reduzida, a obra ou o fenómeno em estudo (modelos de barragens, modelos aerodinâmicos, etc.). Mas, além de morosos e caros, tais processos empíricos apenas fornecem uma fraca aproximação.

É de notar que os chamados 'computadores analógicos', baseados geralmente em analogias eléctricas, constituem um meio termo entre os métodos matemáticos e os *processos de simulação*.

44. **Derivação das funções exponencial e logarítmica.** Seja *a* um número positivo qualquer, diferente de 1. Procurem calcular a derivada da função $x \curvearrowright a^x$ num ponto x qualquer. Neste caso a razão incremental é:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$$

ou seja:

$$(1) \qquad \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

Suponhamos que $a^h - 1$ *tende para um limite finito quando* $h \to 0$ *e representemos esse limite por* $\lambda(a)$, *isto é:*

$$(2) \qquad \lambda(a) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Passemos, agora, ao limite em ambos os membros de (1), quando $h \to 0$, lembrando que a^x é *constante* (visto que estamos a considerar x fixo e só h variável). Virá, então:

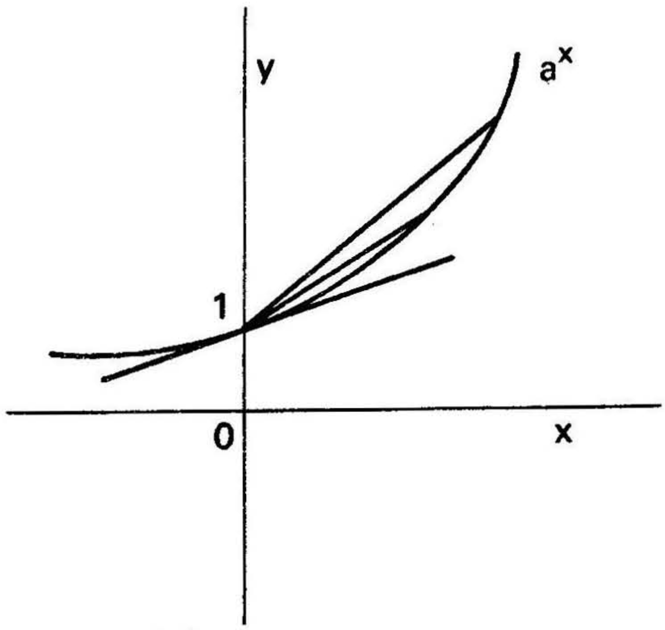
$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lambda(a)$$

Por conseguinte:

$$(3) \qquad D_x a^x = a^x \lambda(a) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1$$

Mas este resultado foi obtido na hipótese de existir e ser finito o limite indicado em (2). Em tal hipótese, o limite $\lambda(a)$ será a derivada da função a^x no ponto zero (visto que $a^0 = 1$) e representa, portanto, o declive do gráfico da função no ponto de abcissa zero. Ora, demonstra-se efectivamente que esse limite existe e é finito([1]). Podemos, portanto, aceitar a fórmula (3) como válida.

([1]) Supondo $a > 1$, a demonstração pode fazer-se a partir dos seguintes factos: 1) a função é contínua; 2) por menor que seja δ positivo, os acréscimos $a^\delta - 1$, $a^{2\delta} - a^\delta$, $a^{3\delta} - a^{2\delta}$ são cada vez maiores (função de *acréscimos crescentes*). Daqui resulta que a razão $(a^h - 1)/h$, representativa do declive e da secante, diminui quando h decresce para zero e, como é sempre menor que 1, tende para um limite finito quando $h \to 0^+$. Isto implica, por sua vez, que existe, e é igual ao primeiro, o limite da razão incremental quando $h \to 0^-$. E o resultado estende-se facilmente ao caso em que $a < 1$.



Se, no lugar de x, se tiver uma função $u = \varphi(x)$, com derivada finita, virá, pelo teorema das funções compostas:

$$(4) \qquad D_x a^u = (D_u a^u) D_x u = a^u \lambda(a) u'$$

Seja, agora, b outro número positivo $\neq 1$. Como

$$b = a^{\log_a b},$$

tem-se, elevando ambos os membros a *x*:

$$b^x = a^{x \log_a b},$$

donde, atendendo a (4), com $u = x \log_a b$:

$$D_x b^x = a^{x \log_a b} \lambda(a) \log_a b$$

ou seja:

$$D_x b^x = b^x \lambda(a) \ \log_a b$$

Mas, por outro lado, segundo (3), temos:

$$D_x\ b^x = b^x\,\lambda(b) \qquad \textit{(porquê?)}$$

donde, por comparação com a fórmula anterior:

$$\lambda(b) = \lambda(a)\ \log_a b$$

Ora, podemos determinar b *de modo que seja* $\lambda(b) = 1$, *isto é,* $\lambda(a)\ \log_a b = 1$. Com efeito, esta igualdade equivale a

$$\log_a b = \frac{1}{\lambda(a)},$$

ou seja:

$$(5) \qquad b = a^{1/\lambda(a)}$$

O valor de b assim obtido (sendo *a* um número positivo arbitrário) é a *base dos logaritmos neperianos,* que se designa por *e*. Demonstra-se que este número é irracional. Com 11 algarismos exactos, tem-se:

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

Será, pois, $e = a^{1/\lambda(a)}$, segundo (5), donde:

$$e^{\lambda(a)} = a$$

e, portanto:

$$\lambda(a) = \log_e a.$$

Quer dizer: $\lambda(a)$ é precisamente o *logaritmo neperiano de* a, que, em matemática aplicada, se designa muitas vezes por ln a:

$$\ln a = \log_e a$$

Em questões de análise, é costume representar simplesmente pela notação log a o logaritmo neperiano de a, dada a frequência com que se apresentam aí os logaritmos nessa base. Para evitar equívocos, será preciso representar por $\log_{10} a$ o logaritmo decimal de *a*. *Todavia, em questões numéricas em que intervêm só logaritmos decimais, continua-se, por comodidade, a omitir a base* 10 *em índice.*

Costuma-se pôr:

$$M = \log_{10} e \quad , \quad \text{donde:} \frac{1}{M} = \log_e 10$$

Com 7 algarismos exactos, tem-se [1]:

$$M = 0{,}4342944 \quad , \quad 1/M = 2{,}302585$$

Lembrando que $\log_e a = \log_{10} a \cdot \log_e 10$, vem:

$$(6) \qquad \boxed{\log a = \frac{1}{M} \log_{10} a \approx 2{,}3026 \log_{10} a}$$

[1] As tábuas de logaritmos costumam dar valores de *e*, M e 1/M com muitos algarismos exactos. Não é preciso, evidentemente, fixar os valores de *e*, M e 1/M, que são dados aqui apenas para eventual consulta.

Posto isto, a fórmula (3) pode escrever-se:

$$(7) \qquad \boxed{D_x a^x = a^x \log a}$$

Em particular, se $a = e$, vem:

$$(8) \qquad \boxed{D_x e^x = e^x} \quad , \text{ visto que } \log e = 1$$

Vemos, assim, que *a função* e^x *tem a particularidade muito notável de ser invariante por derivação*. É, portanto, *indefinidamente derivável,* sendo a sua derivada de qualquer ordem igual a e^x.

Mais geralmente, se, em vez de x, tivermos $u = \varphi(x)$, sendo φ uma função com derivada finita, as fórmulas (7) e (8) dão lugar às seguintes, aplicando o teorema das funções compostas:

$$D_x a^u = a^u \log a \cdot u' \quad , \quad D_x e^u = e^u u'$$

Note-se que a função e^x também se representa pela notação $\exp x$ (ler 'exponencial de x'). Tem-se, pois:

$$D_x \exp u = \exp u \cdot u'$$

EXEMPLOS:

I. Achar a derivada de $2^{\sqrt{x-1}}$ em ordem a x.

Tem-se;

$$D_x 2^{\sqrt{x-1}} = 2^{\sqrt{x-1}} \log 2 \cdot D_x \sqrt{x-1} = 2^{\sqrt{x-1}} \frac{\log 2}{2\sqrt{x-1}}$$

II. Achar a derivada de $\exp \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ em ordem a x.

Tem-se:

$$D_x \exp \frac{1-x^2}{1+x^2} = \exp \frac{1-x^2}{1+x^2} D_x \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

e como

$$D_x \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

vem:

$$D_x \exp \frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \exp \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

III. Calcular, em ordem a x:

$$D\, e^{3x}\ ,\ D\, e^{x^2+1}\ ,\ D\, e^{(1-\sqrt{x})^2}$$

NOTA IMPORTANTE. A fórmula (6) permite converter logaritmos decimais em logaritmos neperianos, com certa aproximação. Por outro lado, os alunos devem ter presente que o cálculo dos valores de e^x se pode fazer por meio de logaritmos decimais, atendendo a que

$$\log_{10} e^x = x \log_{10} e = Mx$$

Aliás, é da máxima conveniência que, neste momento, ou anteriormente, os alunos aprendam a utilizar a régua de cálculo para expressões numéricas do tipo a^b. E também a utilizar o papel logarítmico ou semilogarítmico para linearização de funções exponenciais ou funções potências.

45. **Derivada da função logarítmica.** Seja ainda *a* um número positivo diferente de 1. Da fórmula (7) deduz-se a derivada da função $\log_a x$, aplicando a regra de derivação da função inversa (que convém previamente deduzir). Pondo $y = \log_a x$, vem:

$$x = a^y$$

Ora, segundo (7):

$$\frac{dx}{dy} = a^y \log a$$

Mas, segundo a regra da função inversa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \log a}$$

Como $y = \log_a x$ e $x = a^y$, virá, finalmente:

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x \log a}$$

Em particular, com a = e, vem:

$$\boxed{D_x \log x = \frac{1}{x}}$$

Se, em vez de x, se tem $u = \varphi(x)$, com derivada finita, vem, pelo teorema das funções compostas:

$$D_x \log_a u = \frac{u'}{u \log a}$$

Em particular

$$D_x \log u = \frac{u'}{u}$$

EXERCICIOS. Calcular, em ordem a x:

$$D \log_{10}(1+x^2) \quad , \quad D \log (1 + e^x) \quad , \quad D \log (1 + \sqrt{x^2+1})$$

Resp.: $\dfrac{2x}{(1 + x^2)\log 10}$, $\dfrac{e^x}{1 + e^x}$, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}\,(1 + \sqrt{x^2 + 1}\,)}$

NOTA. As regras de derivação das funções exponencial e logarítmica permitem deduzir facilmente a regra de derivação das potências de expoente real α qualquer (racional ou irracional, positivo ou negativo). Tem-se, com efeito, $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$, donde:

$$Dx^\alpha = De^{\alpha \log x} = e^{\alpha \log x} D(\alpha \log x)$$

$$= x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Portanto:

$$\boxed{Dx^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

46. **Derivadas das funções circulares.** As derivadas das funções circulares directas são deduzidas no *Compêndio de Trigonometria,* como se diz no *Guia*. Tem-se:

$$D \text{ sen } x = \cos x \quad , \quad D \cos x = - \text{sen } x$$

Se, em vez de x, se tem $u = \varphi(x)$, com derivada finita, vem:

$$D \text{ sen } u = \cos u \cdot u' \quad , \quad D \cos u = - \text{sen } u \cdot u'$$

$$D \text{ tg } u = \sec^2 u \cdot u'$$

Por exemplo:

$$D \text{ sen } 3x = 3 \cos 3x \quad , \quad D \text{ sen}^2 x = 2 \text{ sen } x \cos x$$

$$D\, e^{\cos x} = - e^{\cos x} \text{sen } x \quad , \quad D \text{ tg } (1 + \log x) = \frac{1}{x} \sec^2 (1 + \log x)$$

$$D \log (1 + \text{sen}^3 x) = \frac{3 \text{ sen}^2 x \cos x}{1 + \text{sen}^3 x} \quad , \text{ etc.}$$

Para achar as derivadas das funções circulares inversas (ver *Guia,* 2.° volume, I, n.° 14), basta aplicar o teorema das funções inversas.

Assim:

a) Pondo $y = \text{arc sen } x$ (com $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), vem:

$$x = \text{sen } y \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \cos y$$

e, portanto:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ora

$$\cos y = \sqrt{1-\text{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2} \quad , \quad \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Logo, de (1) vem:

$$\boxed{D \text{ arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

b) Analogamente se reconhece que

$$\boxed{D \text{ arc cos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) Pondo $y = \text{arc tg } x$ (com $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) , vem:

$$x = \text{tg } y \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

e, portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Ora

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

Logo:

$$\boxed{D \text{ arc tg } x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Mais geralmente, sendo $u = \varphi(x)$, com derivada finita:

$$D_x \text{arc sen } u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad D_x \text{arc cos } u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$D_x \text{arc tg } u = \frac{u'}{1+u^2}$$

Imagine e resolva alguns exercícios em que se apliquem estas regras.

47. **Máximos e mínimos, concavidades e inflexões.** Sobre estes assuntos seguir o *Compêndio de Álgebra,* Cap. VIII. Como já foi observado atrás, convirá até começar a tratá-los imediatamente após terem sido dadas as primeiras regras da derivação (antes do conceito de diferencial), para que o aluno tome contacto, o mais cedo possível, com as aplicações concretas do estudo das derivadas.

Ao fazer a distinção entre *máximos* (ou *mínimos*) *relativos* e *máximos* (ou *mínimos) absolutos*, convém tomar nota do seguinte teorema, que se pode aceitar intuitivamente, sem demonstração:

TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Toda a função contínua num intervalo limitado e fechado* $[a, b]$ *toma nesse intervalo um valor máximo e um valor mínimo* (1).

É claro que tais valores têm de ser finitos *(porquê?)*.

Note-se que esse máximo ou esse mínimo podem ser atingidos em mais de um ponto; basta lembrar o exemplo da função *seno* em intervalos tais como $[0{,}4\pi]$, $[0{,}6\pi]$, etc.

Quanto a exercícios sobre máximos, mínimos, etc., dispomos agora de maior variedade, visto ter sido alargada a classe de funções cujas derivadas se podem determinar facilmente. Nos casos em que intervierem funções exponenciais ou logarítmicas, convém ter presente qual é o sinal destas funções, para poder aplicar o PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO. Para isso, é aconselhável começar por resolver os exercícios 10 e 11 do Cap. XXII do *Compêndio de Álgebra (7.º ano)*.

EXERCÍCIOS. Estudar o gráfico das seguintes funções, relativamente a sinais, sentido de variação e assímptotas:

$$a)\ e^{-\frac{x^2}{2}}\quad ;\quad b)\ x\,e^{-2x^2}\quad ;\quad c)\ \frac{e^x}{x}\quad ;\quad d)\ e^{-x}\cos x$$

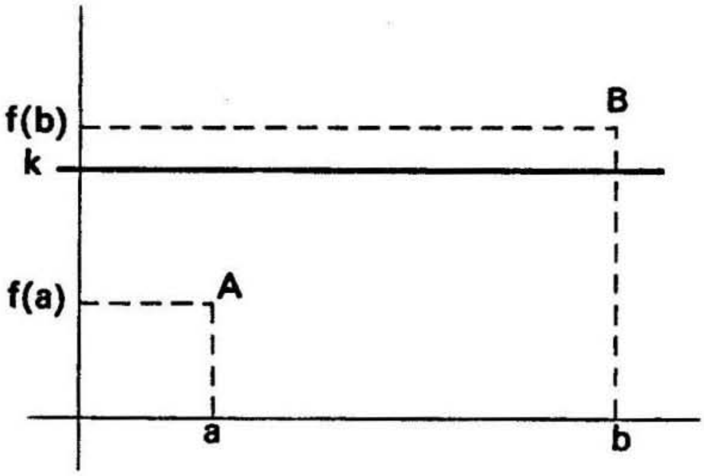
Estude o gráfico da primeira no que se refere a concavidades e pontos de inflexão *(respostas no final do número seguinte)*.

---

(1) Subentende-se 'máximo absoluto' e 'mínimo absoluto'.

48. **Teorema de Cauchy** ([1]). Consideremos uma função f contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$. Suponhamos que $f(a) \neq f(b)$ — por exemplo, $f(a) < f(b)$ — e seja k um número qualquer compreendido entre f(a) e f(b):

$$f(a) < k < f(b)$$



Consideremos agora, num plano cartesiano, os pontos $A \smile (a, f(a))$, $B \smile (b, f(b))$ e a recta $y = k$. O ponto A está *abaixo* desta recta e o ponto B está *acima* da mesma *(porquê?)*. Pergunta-se, agora:

Será possível ligar os pontos A *e* B *por meio de uma linha contínua sem atravessar a recta* $x = k$?

Vê-se intuitivamente que a resposta é negativa.

([1]) **A leitura deste número tem bastante interesse, mas não é indispensável para já.**

Ora, o gráfico da função f em [a,b] é uma *linha contínua* que liga os pontos A e B. Logo, o gráfico corta necessariamente a recta x = k *pelo menos* num ponto (pode cortar em mais de um: desenhe a lápis, sobre a figura, linhas destas em vários casos).

Posto isto, seja *c* a abcissa de um ponto em que o gráfico corta a dita recta. Qual é o valor da função f em c? Tem-se:

$$f(c) = \ldots$$

Vamos, agora, formular a conclusão sob a forma de um teorema. Hipótese? f *é uma função contínua em* [a,b], f(a) $\neq$ f(b), k *é um número compreendido entre* f(a) *e* f(b). Tese? *Existe, pelo menos, um ponto* c *entre* a *e* b tal que f(c) = k. Este teorema, devido a CAUCHY, tem importância fundamental em análise, e é demonstrado rigorosamente em cursos universitários. Podemos enunciá-lo do seguinte modo:

TEOREMA DE CAUCHY. *Se* f *é uma função contínua num intervalo limitado e fechado* [a,b], *e se* f(a) $\neq$ f(b), *então* f *toma nesse intervalo, todos os valores entre* f(a) *e* f(b).

Em forma intuitiva:

Uma função contínua não pode passar de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

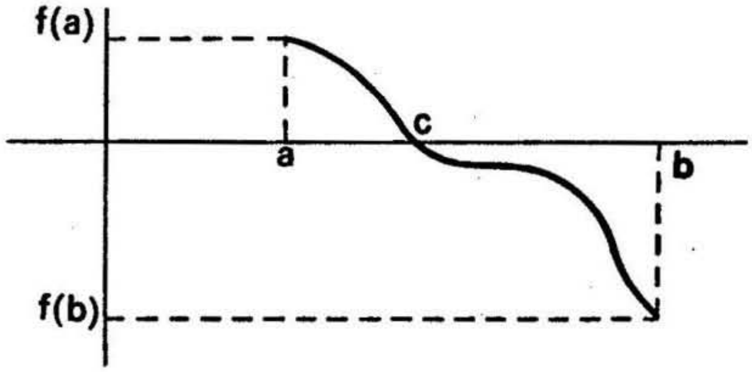
Exemplo concreto: a temperatura de um corpo é função contínua do tempo; logo, não pode passar de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios. (Nisto mesmo, aliás, consiste a ideia vulgar de '*variação contínua*'.)

Associado ao teorema de Weierstrass o teorema de Cauchy toma o seguinte aspecto:

I. *Uma função contínua num intervalo toma, nesse intervalo, todos os valores entre o máximo e o mínimo* (se estes coincidem a função é evidentemente constante no intervalo).

Outro aspecto do teorema de Cauchy é o seguinte:

II. *Se uma função* f *é contínua num intervalo* [a,b] *e toma sinais contrários nos extremos do intervalo, então* f *tem pelo menos uma raiz nesse intervalo.*



No caso da figura tem-se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, e existe um ponto *c* entre *a* e *b* tal que $f(c) = 0$. Será, pois, *c* um zero de f situado entre *a* e *b*.

Na prática, o teorema de Cauchy aplica-se ao cálculo de raízes reais de equações.

Consideremos uma equação da forma

$$f(x) = 0$$

em que f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$ (função real de variável real). Se f toma sinais contrários em *a* e *b*, já sabemos que existe, *pelo menos*, uma raiz de equação entre *a* e *b*. Para calcular uma tal raiz, pode-se começar por dividir $[a,b]$ em 10 partes iguais e ver o sinal que f toma nos pontos de divisão. Se f se anula num desses pontos (o que é pouco provável), está achada uma raiz; caso contrário, existem, *pelo menos*, dois pontos consecutivos a_1 e b_1, em que f toma ainda sinais contrários: *então existe, pelo menos, uma raiz entre* a_1 *e* b_1. Pode, agora, proceder-se para $[a_1, b_1]$, como se fez para $[a, b]$, e assim sucessivamente. Ora, de duas uma: ou um dos pontos de divisão é uma raiz, que fica assim calculada exactamente, ou se obtém uma sucessão de intervalos $[a_n,b_n]$ dentro dos quais está uma raiz r. Mas, neste caso, tem-se:

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$$

$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \ldots$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{10}\ , \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{100}\ , \quad \ldots\ b_n - a_n = \frac{b-a}{10^n}\ , \quad \ldots$$

o que mostra que a_n e b_n são valores aproximados de r, respectivamente por defeito e por excesso, a menos de $(b-a) \times 10^{-n}$. Podemos, assim, calcular r com a aproximação que quisermos[1].

EXEMPLOS:

I. *Achar as raízes da equação* $2^x = 3x + 1$.

---

(1) Este processo de cálculo fornece uma *demonstração construtiva* do teorema de Cauchy (cf. n.º 35).

Uma das raízes é evidentemente 0. Para achar outra raiz, notemos que a equação é equivalente à seguinte:

$$2^x - 3x - 1 = 0$$

Representando o primeiro membro por f(x), vê-se que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e que, por exemplo,

$$f(3) = -2 \quad , \quad f(4) = 3$$

Portanto, segundo o teorema de Cauchy, existe, *pelo menos*, uma raiz entre 3 e 4. Calculando os valores de f nos pontos

$$3{,}1;\ 3{,}2;\ 3{,}3;\ 3{,}4;\ 3{,}5;\ 3{,}6;\ 3{,}7;\ 3{,}8;\ 3{,}9$$

vê-se que $f(3{,}5) < 0$, $f(3{,}6) > 0$. Existe, pois, uma raiz entre 3,5 e 3,6, cujo valor com dois algarismos exactos é, portanto, 3,5. Analogamente se calculava a raiz até às centésimas, até às milésimas, etc.

(Prova-se que a equação tem só duas raízes, que são as abcissas dos pontos da intersecção da recta $y = 3x + 1$ com a curva $y = 2^x$.)

II. *Achar os máximos e mínimos relativos da função* $y = x \text{ sen } x$ *no intervalo* $[0,2\pi]$.

A derivada da função é:

$$y' = \text{sen } x + x \cos x$$

Uma das raízes da derivada é, precisamente, 0 e aí é fácil ver que y' passa de negativa a positiva: portanto, 0 é um ponto de mínimo relativo. No 1.º quadrante é sempre $y' > 0$. Mas, no 2.º quadrante, tem-se $y' = 1$ para $x = \pi/2$ e $y' = -\pi$, para $x = \pi$. Portanto, segundo o teorema de Cauchy, existe, pelo menos, uma raiz da derivada entre $\pi/2$ e π, que pode ser calculada por aproximações sucessivas, como foi indicado. Pode, ainda, provar-se que essa raiz da derivada entre $\pi/2$ e π é *única* e que y' passa de *positiva* a *negativa* nesse ponto, que é, portanto, um ponto de *máximo relativo.*

Analogamente se prova que *existe um ponto de mínimo relativo no 4.º quadrante*. No 3.º quadrante é sempre $y' < 0$ e portanto y é decrescente.

No entanto, o referido processo de cálculo é demasiado laborioso, sobretudo quando não se dispõe de um computador electrónico. Um método muito mais expedito é o *método de Newton* (ou *da tangente)* que já indicámos no n.º 18, no caso particular aí considerado.

RESPOSTAS AOS EXERCICIOS DO NÚMERO ANTERIOR

a) $y' = e^{-x^2/2}.\,(-x)$, $y'' = (x^2-1)\,e^{-x^2/2}$. Como $e^{-x^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se $y' > 0$ para $x < 0$, $y' < 0$ para $x > 0$ e o sinal de y'' é o de x^2-1, portanto $y'' > 0$ para $x < -1 \vee x > 1$, e $y'' < 0$ para $-1 < x < 1$. Logo, $y > 0$ em $\mathbb{R}$, crescente em $]-\infty, 0[$, decrescente em $]0, +\infty[$, máximo em 0, pontos de inflexão para $x = 1$ e $x = -1$, concavidade para baixo em $]-1, 1[$, etc. Assímptota: $y = 0$. b) Negativa para $x < 0$, positiva para $x > 0$, nula para $x = 0$, decrescente em $]-\infty, -1/2[$ e $]1/2, +\infty[$, crescente em $[-1/2, 1/2]$, mínima em $-1/2$, máxima em $1/2$, assímptota $y = 0$. Curva simétrica em relação à origem. c) $y < 0$ para $x < 0$, $y > 0$ para $x > 0$, $y = \infty$ para $x = 0$ ($+\infty$ à direita, $-\infty$ à esquerda), decrescente em $]-\infty, 0[$ e $]0,1[$, crescente em $]1, +\infty[$, mínimo relativo em 1, assímptotas $x = 0$, $y = 0$. Concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$, para cima em $]0, +\infty[$; não tem pontos de inflexão. d) Zeros e sinais iguais aos de cos x; $y' = -e^{-x}$ (sen x + cos x), logo $y' = 0$ para $x = 3\pi/4 + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$); mínimos relativos de y para $x = 3\pi/4 + 2n\pi$, máximos relativos para $x = 7\pi/4 + 2n\pi$; deduz-se daí onde y cresce e onde decresce. Assímptota: $y = 0$ (só à direita).

49. **Método da tangente (ou de Newton)**[1]. Consideremos uma equação

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

Suponhamos que a função é contínua e admite derivada contínua num intervalo $[a,b]$; e que, além disso, f(a) e f(b) têm sinais contrários. Existe, portanto, pelo menos uma raiz de f nesse intervalo. Seja x_1 um *primeiro valor aproximado* de uma tal raiz (por exemplo $x_1 = a$ ou $x_2 = b$). Como já sabemos, se o acréscimo $x - x_1$ for *bastante pequeno,* o acréscimo $f(x) - f(x_1)$ é *aproximadamente igual* ao diferencial, $f'(x_1)(x - x_1)$, isto é:

$$f(x) - f(x_1) \approx (x - x_1) f'(x_1)$$

ou seja:

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1)$$

Podemos portanto, em primeira aproximação, substituir a equação (1) pela equação em x:

$$(2) \qquad f(x_1) + (x - x_1)\, f'(x_1) = 0$$

---

(1) Leitura facultativa, recomendável antes da visita a um centro de cálculo automático.

Como a equação (2) é *linear*, diremos que, na passagem de (1) para (2), a equação (1) foi *linearizada*. Resolvendo (2), vem sucessivamente:

$$(x - x_1)\ f'(x_1) = -f(x_1)$$

$$x - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad \text{supondo } f'(x_1) \neq 0,$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'x_1)}$$

Representemos por x_2 esta raiz da equação (2), isto é:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Podemos tomar, agora, x_2 como *segundo valor aproximado* da raiz de (2) em questão e proceder para x_2 como se fez para x_1 e assim sucessivamente. Fica, pois, definida uma sucessão x_n, a partir de x_1, pela fórmula de recorrência:

$$\text{(3)} \qquad \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Suponhamos, agora, verificadas as seguintes condições:

I. f' é contínua e diferente de zero em $[a,b]$.

II. $x_n \in [a,b] \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

III. A sucessão x_n é convergente.

Então, virá de (3):

$$\lim x_{n+1} = \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)} \qquad \textit{(porquê?)}$$

donde, pondo $r = \lim x_n = \lim x_{n+1}$:

$$r = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

e, portanto

$$f(r) = 0$$

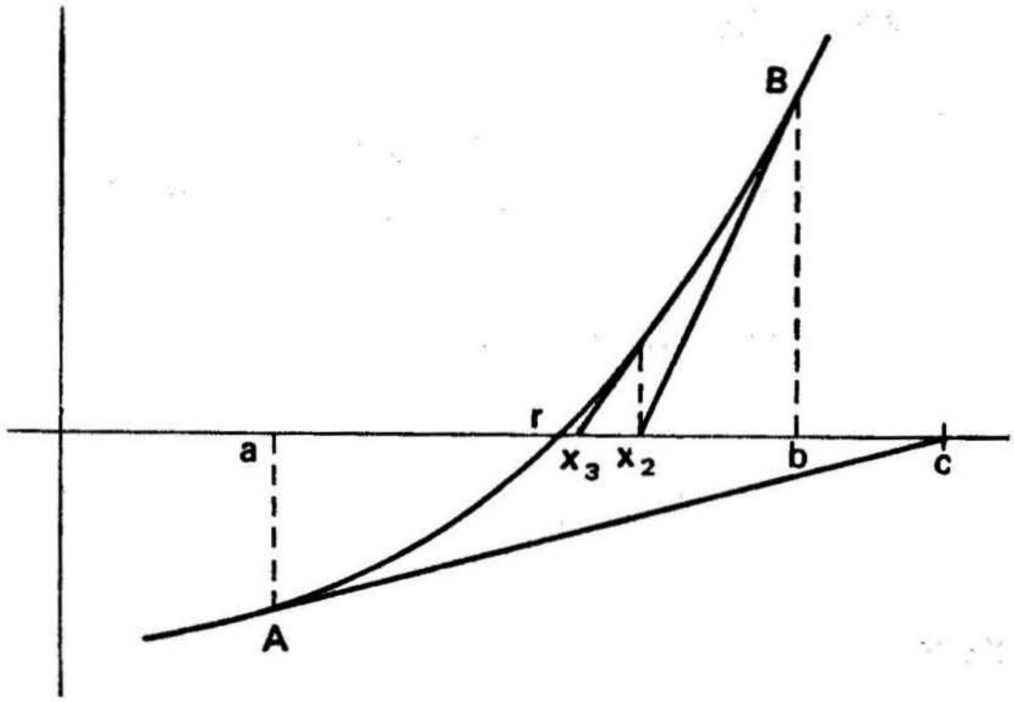
Quer dizer: *uma vez verificadas as referidas hipóteses*, a sucessão x_n tem, por limite, uma raiz de (1) situada entre *a* e *b*.

Mas, como se consegue saber se as condições II e III são verificadas?

Para isso, vamos recorrer à intuição geométrica. Já sabemos que a substituição do *acréscimo* $f(x) - f(x_1)$ pelo *diferencial* $f'(x_1)(x - x_1)$ equivale a substituir a *curva* representativa de f pela *tangente* à curva no ponto da abcissa x_1. Com efeito, esta recta tem por equação:

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

O valor x_2 é a abcissa do ponto de intersecção da recta com o eixo dos x.



Na figura junta considera-se o gráfico de uma função f, que verifica as seguintes condições no intervalo [a,b]: 1) f tem derivada f' positiva (∴ f é crescente); 2) f tem 2.ª derivada, f'', também positiva (∴ a curva tem a concavidade voltada para cima); 3) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Nestas condições, f tem uma *e uma só* raiz r em [a,b], *(porquê?)*. Experimentando o número *a* como primeiro valor aproximado de r, pelo método de Newton, vê-se que o segundo valor aproximado é um ponto c situado fora de [a,b]. Pondo $x_1 = b$, obtém-se um valor x_2 situado em [a,b] e bastante mais próximo de r (tem-se $r < x_2 < x_1$). Continuando a aplicar o método de Newton deste lado, vê-se *intuitivamente,* pela figura, que a sucessão x_n obtida tem todos os valores em [a,b] e é convergente. *São, pois, verificadas as condições* I, II e III *anteriores e, portanto,* $\lim x_n = r$.

Observe-se que, neste caso, se tem $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $f''(x) > 0$ em [a,b]. *Portanto* f *e* f'' *têm o mesmo sinal em* b, *mas sinais contrários em* a.

Dum modo geral, demonstra-se a seguinte

REGRA: *Se* f *é uma função contínua em* $[a,b]$ *tal que:*

1) f *toma sinais contrários em* a *e* b;

2) f *tem segunda derivada com sinal constante em* $[a,b]$;

então f *tem uma e uma só raiz em* $[a,b]$, *que pode ser calculada pelo método de Newton; deve então tomar-se para primeiro valor aproximado,* x_1, *aquele extremo do intervalo* $[a,b]$ *em que* f *e* f'' *têm o mesmo sinal.*

EXEMPLOS:

I. Calcular $\sqrt[5]{23}$ com 7 algarismos exactos.

Note-se que $\sqrt[5]{23}$ é a raiz real da equação

$$x^5 - 23 = 0$$

(Como já sabemos, esta equação tem mais 4 raízes, mas todas imaginárias.) Representando por f(x) o 1.º membro da equação, vem:

$$f'(x) \equiv 5x^4 \quad , \quad f''(x) \equiv 20x^3$$

$$f(1) = -22 < 0 \quad , \quad f(2) = 9 > 0$$

Portanto, a raiz real procurada está entre 1 e 2. No intervalo $[1,2]$, tem-se $f''(x) > 0$. No extremo 2 do intervalo, f e f'' têm o mesmo sinal: é, pois, esse o extremo que convém tomar para primeiro valor aproximado. A *fórmula de recorrência* será, agora:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 23}{5x_n^4}$$

O cálculo já foi apresentado no n.º 18, pp. 60-61. Nesse §, como se viu (n.os 18 e 23), o método iterativo foi justificado por via elementar.

II. Calcular, com 7 algarismos exactos, a raiz positiva da equação

$$2^x - 3x - 1 = 0$$

Já vimos no número anterior, exemplo I, que esta equação tem duas (e só duas) raízes reais: uma igual a zero e a outra situada entre 3 e 4. É desta que se trata agora. Representando por f(x) o 1.º membro da equação, vem:

$$f'(x) \equiv 2^x \ln 2 - 3 \quad , \quad f''(x) \equiv 2^x (\ln 2)^2$$

Como $f''(x) > 0$ com $[3,4]$ e $f(x) > 0$, vê-se que o extremo favorável é 4. Utilizando a fórmula de recorrência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2^{x_n} - 3x_n - 1}{2^{x_n} \ln 2 - 3} ,$$

com $x_1 = 4$, obteve-se por meio de um computador, no L. N. E. C., a sequência indicada à margem, tal como foi escrita pela teleimpressora ([1]). Aplicando a REGRA EMPÍRICA DE ESTABILIDADE, que será enunciada mais adiante, e admitindo que o número de algarismos exactos duplica sensivelmente em cada iteração, podemos aceitar que o seguinte valor aproximado da raiz tem 7 algarismos exactos:

· 40000000 $\ominus$ + 01
· 36291881 $\ominus$ + 01
· 35420414 $\ominus$ + 01
· 35376806 $\ominus$ + 01
· 35376701 $\ominus$ + 01

$$x = 3{,}537670$$

Note-se que uma dificuldade está no cálculo dos valores de 2^x para $x = x_2, x_3 \ldots$. Esse cálculo foi feito pelo computador, em cada iteração, por meio de um desenvolvimento em série segundo as instruções de uma *sub-rotina,* incluída no programa. O tempo de cálculo na máquina não chegou a 1 minuto.

50. **Método da corda (ou regra da falsa posição)*.** Seja ainda f uma função contínua em $[a,b]$ e que tome sinais contrários em *a* e *b*. Para calcular por aproximações sucessivas uma raiz de f situada em $[a,b]$, pode-se utilizar o *método da corda,* também chamado «*regula falsi*» ou «*regra da falsa posição*». Consiste este método em substituir a curva representativa de f pela respectiva corda, cujos extremos são os pontos

$$(a,f(a)) \quad , \quad (b,f(b))$$

([1]) Cf. n.º 33, nota do exemplo I.

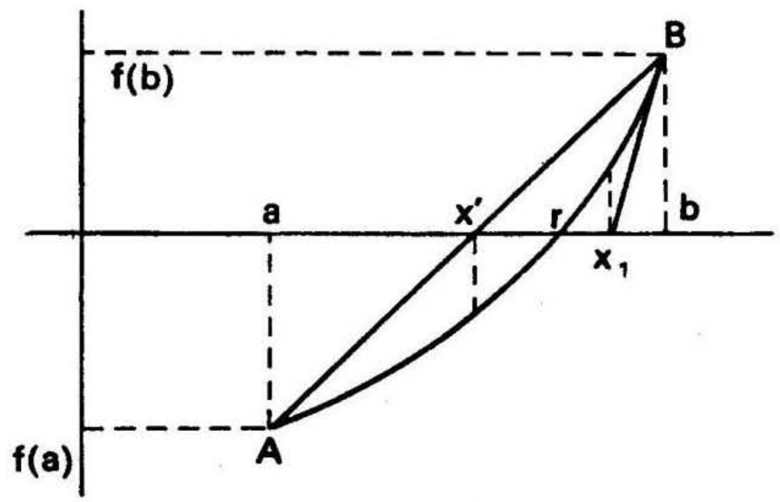
e achar a abcissa da intersecção da corda com o eixo dos x. Ora, uma equação da recta que passa por esses pontos é:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Fazendo nesta $y = 0$, obtém-se a equação em x que, resolvida, dá o referido valor aproximado. Representando-o por x', temos:

$$x' = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Este método é menos expedito que o de Newton, mas tem a vantagem de não exigir condições prévias além desta: f continua com sinais contrários em *a* e *b*.



Além disso, quando o método da tangente é aplicável, o método da corda fornece um valor aproximado da raiz situado do outro lado desta, o que permite *majorar* o erro dos valores obtidos pelos dois métodos associados.

Todavia, na prática, sobretudo quando se usam computadores electrónicos, prefere-se adoptar *a regra empírica de estabilidade,* que já foi atrás usada, e que será enunciada mais adiante com precisão.

51. **Interpolação por diferenças finitas*.** O método da corda (ou regra da falsa posição) não se aplica apenas ao cálculo de raízes de equações. A *falsa posição* (ou, melhor, a *falsa suposição)* que dá o nome à regra, consiste em supor que, no intervalo considerado, a função é *linear* e que, portanto, os *acréscimos da função são proporcionais aos acréscimos da variável.* Isto é falso em geral, evidentemente, mas o erro que daí resulta pode tornar-se desprezável quando o intervalo é bastante pequeno, como sucede, por exemplo, no emprego das diferenças tabulares em tábuas de logaritmos.

Por outro lado, como já se disse atrás, os acréscimos de uma função também se chamam *diferenças finitas* (por oposição aos *diferenciais),* especialmente quando correspondem a sucessivos acréscimos *iguais* da variável independente. Mais precisamente, imaginemos uma tabela que forneça sucessivos valores $y_1, y_2, y_3, \ldots$ da função, correspondentes a sucessivos valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ da variável, conforme se indica a seguir:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \ldots \end{array}$$

sendo $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = \ldots$ Então os acréscimos são chamados *diferenças finitas* da função na tábua e, mais precisamente, *pimeiras diferenças.* Chamam-se *segundas diferenças* da função as diferenças finitas das primeiras diferenças e representam-se do seguinte modo:

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \quad , \quad \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 \quad , \quad \ldots$$

Tem-se pois, por exemplo:

$$(1) \qquad \Delta^2 y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$$

Por sua vez, as diferenças finitas das segundas diferenças são chamadas *terceiras diferenças* e representam-se deste modo:

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \quad , \quad \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 \quad , \quad \ldots$$

e assim por diante.

Por exemplo, para a função $y = 1/x$, tem-se [1]:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3,0	0,33333			
		− 1075		
3,1	0,32258		67	
		− 1008		− 6
3,2	0,31250		61	
		− 947		− 5
3,3	0,30303		56	
		− 891		− 6
3,4	0,29412		50	
		− 841		
3,5	0,28571			

(1) Exemplo dado por D. R. HARTREE em «Numerical Analysis», Clarendon Press, Oxford.

em que, por comodidade, as diferenças são representadas tomando para unidade a centésima milésima.

O PROBLEMA DA INTERPOLAÇÃO — que tem importância fundamental no moderno cálculo numérico — consiste no seguinte:

Conhecidos os valores $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$, de uma função f em pontos sucessivos $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$, determinar uma função φ *de dado tipo,* que tome nesses pontos os mesmos valores que f, e que permita calcular os valores de f nos *pontos intermédios,* com *certa aproximação* e com *relativa facilidade.*

O tipo de funções mais usadas para esse fim é o das *funções polinomiais,* sendo o grau do polinómio $\leqslant n$, se o número de pontos x_i for $n+1$. Se, além disso, os intervalos entre estes pontos forem iguais, isto é, se $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{n+1} - x_n$ está indicado o *método de interpolação por diferenças finitas,* que vamos descrever.

Comecemos por notar que

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad , \quad \text{visto ser } \Delta y_1 = y_2 - y_1$$

Mas também $y_3 = y_2 + \Delta y_2$ e

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 \quad , \quad \text{visto ser } \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

Logo

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_1 + \Delta y_1) + (\Delta y_1 + \Delta^2 y_1)$$

$$= y_1 + 2\,\Delta y_1 + \Delta^2 y_1$$

Analogamente se reconhece que

$$y_4 = y_1 + 3\,\Delta y_1 + 3\,\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1$$

A *analogia com a fórmula do binómio faz-nos prever* que seja

$$y_{n+1} = y_1 + n\,\Delta y_1 + \binom{n}{2}\Delta^2 y_1 + \ldots + \binom{n}{p}\Delta^p y_1 + \ldots \times \Delta^n y_1$$

ou ainda, convencionando que $\Delta^0 y_1 = y_1$:

$$(2) \qquad y_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\,\Delta^p y_1$$

Esta previsão pode ser confirmada pelo *método de indução matemática,* de que trataremos oportunamente.

É claro que a fórmula (2) também é válida, substituindo n por $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. E surge, agora, uma *ideia-chave:* a fórmula continua a ser válida, substituindo n por r, *excepto no símbolo de somatório*; isto é, tem-se:

$$(3) \qquad y_{r+1} = \sum_{p=0}^{n} \frac{r(r-1)\ldots(r-p+1)}{p!}\,\Delta^p y_1,$$

para $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. Basta notar que, se $r < n$, cada termo do somatório correspondente a um $p > r$ é nulo, de maneira que tudo se passa como se estivesse apenas r em vez de n no sinal Σ. Ponhamos:

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{n+1} - x_n$$

Então será $x_1 + rh = x_{r+1}$, para $r = 0, 1, \ldots, n$. Seja, agora, x um ponto *qualquer* do intervalo $[x_1, x_{n+1}]$ e *r* não um inteiro mas sim o *número real* tal que $x_1 + rh = x$. Será, pois:

$$r = \frac{x - x_1}{h}$$

Substituindo r por esta expressão no 2.º membro de (3) e representando por y o valor da nova expressão obtida, vem:

$$y = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \frac{x-x_1}{h} \frac{x-x_1-h}{h} \frac{x-x_1-2h}{h} \cdots \frac{x-x_1-(p-1)h}{h} \Delta^p y_1$$

Mas $x_1 + h = x_2$, $x_1 + 2h = x_3$, ..., $x_1 + (p-1)h = x_p$. Logo:

$$(4) \qquad \boxed{y = \sum_{p=0}^{n} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ldots (x-x_p) \frac{\Delta^p y_1}{p!\, h^p}}$$

Esta é a FÓRMULA DE INTERPOLAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS, que se pode escrever, mais desenvolvidamente:

$$(4') \qquad y = y_1 + (x-x_1)\frac{\Delta y_1}{h} + (x-x_1)(x-x_2)\frac{\Delta_2^2 y_1}{2h^2} + \ldots +$$

$$+ (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n)\frac{\Delta^n y_1}{n!h^n}$$

É claro que se for $x = x_{r+1}$, com $r = 0, 1, \ldots, n$, vem $x - x_1 = x_{r+1} - x_1 = rh$ e o valor de y dado por (4) é y_{r+1} segundo (3). Portanto, como se vê, *a fórmula* (4) *define, efectivamente, uma função polinomial de grau* $\leqslant$ n, *que toma nos pontos* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *respectivamente os valores* $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ (¹).

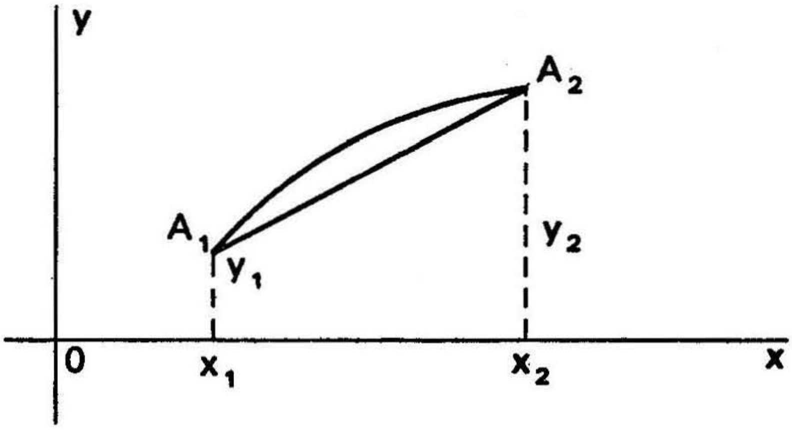
(¹) Aplicando o PRINCÍPIO DAS IDENTIDADES, vê-se que é esta a *única* função polinomial do grau $\leqslant$ n que toma os referidos valores nos pontos indicados.

Vamos examinar dois casos particulares:

1.º Se n = 1, a fórmula (4) reduz-se a:

$$(5) \qquad y = y_1 + (x - x_1)\frac{\Delta y_1}{h} = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

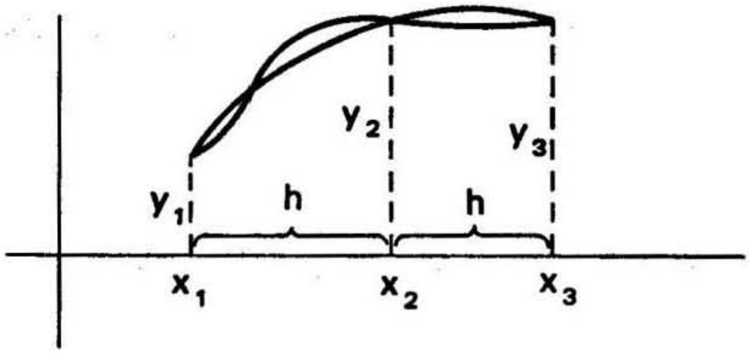
Neste caso *(interpolação por primeiras diferenças)* a função f é substituída em $[x_1, x_2]$ pela *função linear* que toma os mesmos valores nos extremos do intervalo — o que equivale a substituir o gráfico de f nesse intervalo, pela *corda* correspondente. É claro que isto não conduzirá a erro significante, *se o intervalo for bastante pequeno.*



Por exemplo, quando se usa uma tábua de logaritmos, a fórmula (5) permite calcular, com certa aproximação, o logaritmo y de um número x, compreendido entre dois números consecutivos, x_1 e x_2, inscritos na tábua. Neste caso, h = 1 e Δy_1 é a *diferença tabular,* expressa na última unidade decimal que a tábua dá para logaritmos (centésimas milésimas, para tábuas de 5 decimais). O problema inverso é o de *procurar o número* y *que tem por logaritmo* x, *estando* x *compreendido entre dois logaritmos,* x_1 *e* x_2, *consecutivos na tábua* (abstraindo da característica); neste caso, h é a diferença tabular e $\Delta y_1 = 1$.

2.º Se n = 2, a fórmula (4) reduz-se a:

$$(6) \qquad y = y_1 + (x - x_1)\frac{\Delta y_1}{h} + (x - x_1)(x - x_2)\frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}$$



Neste caso *(interpolação por segundas diferenças)*, a função f é substituída geralmente no intervalo $[x_1, x_3]$ por uma *função quadrática*, o que equivale a substituir o gráfico de f pela *parábola de eixo vertical* que o intersecta nos pontos de abcissas x_1, x_2, x_3. Este processo fornece, em geral, *melhor aproximação* do que o anterior, nos intervalos $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$.

Ocasionalmente, pode acontecer que seja $\Delta^2 y_1 = 0$. Então a função dada por (6) é linear e recai-se no caso anterior.

(Bastará fazer uns dois exercícios com 2.as diferenças.)

NOTAS — I. Por vezes, em vez do cálculo aproximado de uma função f num intervalo [a,b] em que f se encontra tabelada, procura-se uma expressão para o cálculo aproximado de f *fora* do intervalo [a,b], mas *não muito longe* dos extremos. Nesse caso, trata-se de *extrapolação*, em vez de *interpolação*.

II. A primeira diferença finita de uma função f, correspondente a um determinado acréscimo h da variável independente, é mais precisamente indicada por meio do símbolo Δ_h. Este representa, pois, um *operador* definido pela fórmula

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

para todo o x tal que $x \in D_f$ e $x + h \in D_f$. O operador Δ_h transforma assim a função f na função φ tal que $\varphi(x) \equiv f(x+h) - f(x)$. Por outro lado, pondo

$$T_h f(x) = f(x+h) \quad , \quad \forall x : x, x+h \in D_f,$$

fica definido um novo operador T_h (*operador de translação*) e a fórmula anterior pode escrever-se

$$\Delta_h f = T_h f - f,$$

o que sugere a escrita $\Delta_h f = (T_h - 1)f$ ou ainda

$$\Delta_h = T_h - 1,$$

em que o símbolo 1 representa, agora, o *operador identidade*. Por outro lado, teremos

$$T_h = 1 + \Delta_h$$

e somos naturalmente *induzidos* a pensar que

$$T_h^n = (1 + \Delta_h)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta_h^p \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

A potência T_h^n de T_h é, evidentemente, o operador que consiste em somar *n* vezes h à variável independente de f, isto é, $T_h^n f(x) = f(x + nh)$. Portanto, a fórmula anterior significa que

$$f(x + nh) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta_h^p f(x),$$

o que, para $x = x_1$, nos faz recair na fórmula (2) atrás usada. Analogamente, somos induzidos a pensar que

$$\Delta_h^n = (T_h - 1)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} T_h^p \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

o que, aplicando a f, dá:

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} f(x + ph),$$

fórmula esta que também é verdadeira. É claro que, na prática, se pode omitir h em índice, desde que esteja subentendido qual é o acréscimo h de que se trata.

Note-se que a justificação dos anteriores desenvolvimentos de T_h^n e de Δ_h^n é feita num ramo de matemática moderna, chamado CÁLCULO SIMBÓLICO ou CÁLCULO OPERACIONAL.

III. Demonstra-se que, *se* f *é uma função polinomial do grau* $\leqslant$ n, *as suas diferenças finitas de ordem* n + 1 *são nulas qualquer que seja* h. A recíproca desta proposição também é verdadeira.

IV. As noções de *primeira diferença, segunda diferença, ..., diferença de ordem* n, correspondem às de *primeiro diferencial, segundo* *diferencial, ..., diferencial de ordem* n. Estas, para uma função $y = f(x)$, são definidas pelas fórmulas

$$dy = f'(x)dx \quad , \quad d^2y = f''(x)dx^2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,$$

em que $f^{(n)}$ é a *derivada de ordem* n *de* f e dx^n é a potência *n* do acréscimo dx, que também podemos representar por h, isto é: $dx^n = h^n$. Daqui as *notações de Leibniz* para as derivadas de ordem superior à primeira

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} = f''(x) \quad , \quad \ldots \quad , \quad \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

Demonstra-se que a diferença

$$\Delta^n y - d^n y$$

entre a *diferença de ordem* n e o *diferencial de ordem* y é um infinitésimo de ordem superior à de dx^n (num ponto x em que existe derivada de ordem *n* de f finito).

NOTA IMPORTANTE SOBRE TERMINOLOGIA. Muitos autores portugueses dizem 'a diferencial' em vez de 'o diferencial', por tradução directa do francês 'la différentielle'. Mas então deveria dizer-se, e não se diz, 'a integral' (do francês 'l'intégrale', em que o género feminino do substantivo 'intégrale' não se distingue, por causa do apóstrofo). Julgamos, assim, preferível adoptar para estas e outras noções análogas o género masculino, como fazem os italianos que dizem:

'il differenziale', 'l'integrale' (masc.)

e, genericamente: 'il funzionale' (*o funcional*).

Aliás, são frequentes as incoerências na terminologia matemática portuguesa, resultantes de uma tradução apressada do francês, como se verifica nas expressões:

'espaço a 3 dimensões' (em vez de *'espaço com 3 dimensões'*)
'equação às derivadas parciais' (em vez de *'equação nas derivadas parciais'* ou *'equação em derivadas parciais'*).

É também manifesta a incoerência entre as duas seguintes expressões em uso entre nós:

'máximo divisor comum' e *'menor múltiplo comum'*

A 'máximo' opõe-se 'mínimo'. Ou bem se diz *'máximo divisor comum'* e *'mínimo múltiplo comum,* ou bem se diz *'maior divisor comum'* e *'menor múltiplo comum'*.

Aproveitamos ainda a oportunidade para discordar do significado que se atribui actualmente entre nós a 'bilião' (como 'milhão de milhões'). Não só nos parece pouco necessária uma designação especial para o número 10^{12}, como ainda se cria confusão na leitura de autores franceses, norte-americanos, italianos, alemães, etc., em que o correspondente a 'bilião' é 'mil milhões'. Acresce a circunstância de a população do Globo ser da ordem dos *biliões,* isto é, dos *mil milhões.*

É certo que os ingleses chamam 'billion' ao milhão de milhões; mas também é verdade que não adoptam *ainda* o sistema métrico e circulam *ainda* pela esquerda...

Índice

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Março de 1976

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA