J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

2.º volume

Capítulo I

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

§ 3. LIMITES DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL REAL

34. **Conceitos e propriedades elementares.** Neste ponto, deverá tomar-se como texto-base o *Compêndio de Álgebra,* no Capítulo V. A definição de 'limite de uma função', dada na p. 188 desse *Compêndio,* pode agora ser esclarecida por meio da lógica simbólica(1).

Seja f uma função real de variável real. Trata-se de definir o significado da frase:

f(x) *tende para* b *quando* x *tende para* a

que se escreve, abreviadamente:

$$f(x) \to b \textit{ quando } x \to a$$

sendo *a* e *b* constantes, finitas ou infinitas.

Esta expressão tem um sentido bastante intuitivo, ligado à *ideia*

---

(1) As considerações que vão seguir-se dirigem-se mais propriamente ao professor, para orientação didáctica. Mas devem também ser aconselhadas como leitura aos alunos mais interessados.

de movimento, sentido esse que se pode traduzir mais directamente, lendo a expressão do seguinte modo:

f(x) *aproxima-se de* b, *quando* x *se aproxima de* a,

ou ainda deste modo:

Quando x *vai para* a, f(x) *vai para* b.

Esta *intuição* de carácter dinâmico é muito valiosa e convém, por isso, mantê-la sempre viva no espírito, utilizando com frequência as referidas maneiras de dizer. Mas, em matemática, não basta a intuição: é preciso definir os conceitos com *rigor lógico*, para podermos sobre eles raciocinar com inteira segurança.

Note-se que, nas frases anteriores, a conjunção 'quando' equivale à condicional 'se', que se traduz pelo símbolo $\Leftarrow$. Portanto, interpretada à letra, a expressão '$f(x) \to b$ *quando* $x \to a$' traduz-se simbolicamente por:

$$f(x) \to b \Leftarrow x \to a$$

ou, o que é equivalente, por:

$$x \to a \Rightarrow f(x) \to b$$

Mas, as expressões '$x \to a$' e '$f(x) \to b$', consideradas *isoladamente*, não têm qualquer significado que não seja aquele intuitivo, ligado à ideia de movimento. Com rigor lógico, só definimos, até agora, o significado de expressões do tipo $u_n \to a$, em que u_n é o termo geral de uma sucessão. Ora, a maneira de dizer intuitiva:

x *aproxima-se de* a,

pode ser interpretada deste modo:

x *toma uma sucessão de valores tendentes para* a,

ficando subentendido que esses valores são *todos distintos de* a.

Assim, finalmente, a expressão '$f(x) \to b$ *quando* $x \to a$' vem a ser definida como abreviatura da seguinte:

$$u_n \to a \wedge u_n \neq a \ (\forall n) \Rightarrow f(u_n) \to b$$

e é isso mesmo o que diz a definição 1 da p. 188 do dito *Compêndio de Álgebra*.

Subentende-se, é claro, que a implicação (2) é *formal*, isto é, deve verificar-se qualquer que *seja* a sucessão u_n considerada (supondo que os valores desta pertencem todos ao domínio de f).

NOTA. Se em vez da notação u_n usarmos a notação $\varphi(n)$, o significado da expressão '$f(x) \to b$ *quando* $x \to a$' será dado mais precisamente pela seguinte:

$$\varphi \to a \wedge \varphi(n) \neq a \ (\forall n \in \mathbb{N}) \underset{\varphi}{\Rightarrow} f o \varphi \to b$$

que é, como sabemos, uma abreviatura desta outra:

$$\forall \varphi : \varphi \to a \wedge \varphi(n) \neq a \ (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f o \varphi \to b$$

Aqui, as variáveis *n* e φ são de *tipos diferentes:* o domínio da primeira é $\mathbb{N}$; o da segunda é o conjunto de *todas as sucessões de números reais* (aplicações de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$) *cujos termos pertencem a* D_f.

Assim, a anterior noção intuitiva acabou por ser completamente *logificada* (ou *formalizada*). Mas observe-se como foi profunda, neste caso, a evolução que se deu no sentido da *intuição para a lógica*.

35. **Definição de 'limite de uma função' segundo Cauchy*.** Como vimos, a anterior definição de limite de uma função de variável real faz intervir a noção anterior de 'limite de uma sucessão'. Mas tal definição, cuja ideia se atribui a Heine, pode ser substituída por uma definição directa, devida a Cauchy. *Bastará considerar aqui o caso em que* a *e* b *são finitos (números reais)*. Neste caso, a expressão intuitiva:

f(x) *aproxima-se de* b, *quando* x *se aproxima de* a

pode ser interpretada do seguinte modo:

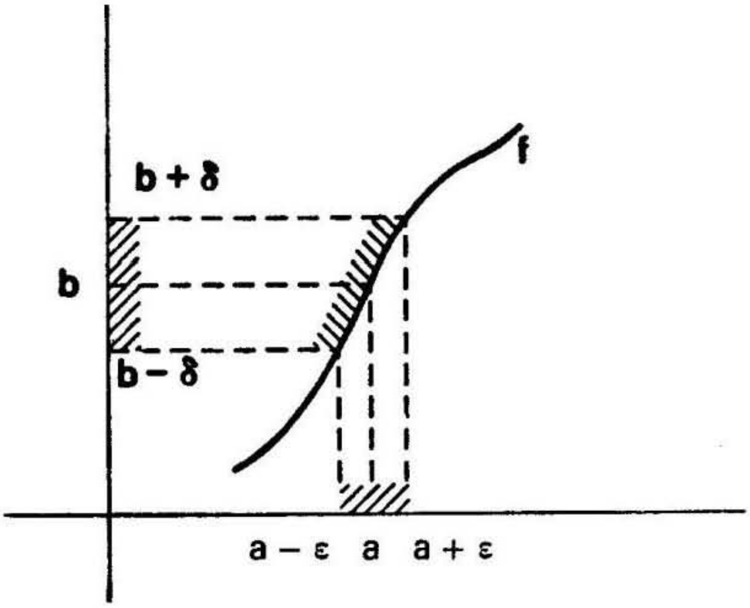
Por menor que seja o número positivo δ, *existe um número positivo* ε, *tal que* f(x) *está na vizinhança* (δ) *de* b *quando* x *está na vizinhança* (ε) *de* a.

Se a isto juntarmos a condição $x \neq a$, temos finalmente a definição de Cauchy, com *a* e *b* finitos:

DEFINIÇÃO. Diz-se que $f(x) \to b$ quando $x \to a$, sse:

$$\forall \delta > 0, \ \exists\, \varepsilon > 0: \ |x-a| < \varepsilon \wedge x \neq a \underset{x}{\Rightarrow} |f(x)-b| < \delta$$

A figura junta ajuda a esclarecer esta definição



Quanto à intervenção da condição $x \neq a$, esta só ficará inteiramente clarificada quando se tratar da noção de continuidade.

Resta saber se a definição de Cauchy é equivalente à anterior (de Heine). Vamos ver que sim.

1.ª parte. Suponhamos que a proposição

(1) $$f(x) \to b \text{ quando } x \to a$$

é verdadeira segundo Cauchy. Queremos provar que também é verdadeira segundo Heine; isto é: sendo u_n uma sucessão *qualquer* de números reais distintos de a (pertencentes a D_f) tal que $u_n \to a$, trata-se de provar que $f(u_n) \to b$. É o que vamos fazer.

Seja δ um número positivo *arbitrário*. Então existe um número positivo ε tal que

$$|u_n - a| < \varepsilon \underset{n}{\Rightarrow} |f(u_n) - b| < \delta \qquad \textit{(porquê?)}$$

Por outro lado, como $u_n \to a$, existe um número p tal que

$$n > p \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - a| < \varepsilon \qquad \textit{(porquê?)}$$

Logo

$$n > p \underset{n}{\Rightarrow} |f(u_n) - b| < \delta$$

E, como δ pode ser um número positivo *qualquer*, isto significa que $f(u_n) \to b$ e que, portanto, a proposição (1) é verdadeira segundo Heine.

2.ª parte. *Suponhamos que a proposição* (1) *é verdadeira segundo Heine*. Queremos provar que também é verdadeira segundo Cauchy; é, isto que:

$$(2) \qquad \forall \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ |x-a| < \varepsilon \wedge x \neq a \underset{x}{\Rightarrow} |f(x) - b| < \delta$$

Vamos prová-lo por *redução ao absurdo*. Suponhamos que a proposição (2) é *falsa*, isto é, suponhamos o seguinte:

Existe pelo menos um $\delta > 0$ tal que:

$$(3) \qquad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x:\ |x-a| < \varepsilon \wedge x \neq a \wedge |f(x) - b| \geqslant \delta$$

Seja então δ_0 um número positivo que verifique esta condição e seja *n* um número natural *qualquer*. Como $1/n > 0$, conclui-se de (3), com $\varepsilon = 1/n$, que *existe pelo menos um* x tal que

$$(4) \qquad |x-a| < \frac{1}{n} \wedge x \neq a \wedge |f(x) - b| \geqslant \delta_0$$

Seja x_n um determinado valor de x que verifique esta condição, *escolhido arbitrariamente* (pode haver mais de um!). Assim, a cada $n \in \mathbb{N}$, fizemos corresponder um (e um só!) número real x_n que verifica as três condições seguintes:

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad , \quad x_n \neq a \quad , \quad |f(x_n) - b| \geqslant \delta_0 \qquad (\forall n)$$

Da primeira deduz-se:

(5) $\qquad x_n \to a \qquad$ *(porquê?)*

Da terceira deduz-se:

(6) $\qquad f(x_n) \not\to b \qquad$ *(porquê?)*

E, como $u_n \neq a$ para todo o *n*, conclui-se que ***a proposição***

$$f(x) \to b \text{ quando } x \to a$$

é falsa segundo Heine. Mas isto é contra a hipótese. Fica, portanto, provado o que pretendíamos.

36. **Axioma de Zermelo*.** Na 2.ª parte da demonstração anterior admitimos implicitamente que é possível fazer corresponder a cada $n \in \mathbb{N}$ um *determinado* valor x_n de x que verifique (4), escolhido entre *vários possíveis*. Por outras palavras, admitimos o seguinte:

E possível efectuar uma infinidade de escolhas, independentes umas das outras, para definir a sucessão u_n *como foi indicado.*

Mas, pergunta-se: Como pode uma pessoa — mesmo que vivesse uma eternidade — efectuar *completamente* uma infinidade de escolhas independentes? (Por *'escolhas independentes'* entende-se aqui 'escolhas que não fiquem *predeterminadas,* a partir de certa ordem, por um processo qualquer'.)

Muitos matemáticos tinham admitido implicitamente essa possibilidade, em várias demonstrações, *sem se aperceberem de tal.* Mas bastou que o matemático ZERMELO (hebreu alemão) formulasse explicitamente pela primeira vez essa possibilidade, *como axioma da lógica* (o famoso AXIOMA DA ESCOLHA), para que se levantasse um imenso coro de protestos. Zermelo defendeu-se então dizendo que *a possibilidade admitida por esse axioma era puramente ideal* e deu ao seu axioma a seguinte forma *lógica,* sem qualquer intervenção de conceitos *psicológicos:*

AXIOMA DE ZERMELO. *Qualquer que seja a família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios (finita ou infinita), existe pelo menos uma aplicação φ que faz corresponder a cada conjunto X de $\mathcal{F}$ um determinado elemento x desse mesmo conjunto, isto é, uma função φ tal que*

$$\varphi(X) = x \in X \quad , \quad \forall X \in \mathcal{F}$$

A esta função φ podemos chamar *'operador de escolha',* visto que tal função *escolhe (ou selecciona),* por assim dizer, em cada conjunto X, *um e um só elemento* x desse conjunto.

Por exemplo, se cada conjunto X da família $\mathcal{F}$, é o conjunto das cidades de um mesmo país, o operador de escolha pode ser o que faz corresponder a X a capital desse país. Neste caso, *a família $\mathcal{F}$ é finita* e muitas outras funções de escolha podem ser definidas.

Se $\mathcal{F}$ é o conjunto de *todos* os segmentos de recta do espaço, $\mathcal{F}$ é *infinito* e um operador de escolha pode ser, por exemplo, o que é definido pela expressão 'ponto médio de'. E é claro que, *uma vez escolhido um referencial cartesiano,* muitos outros operadores de escolha podem ser definidos para esta família.

Se $\mathcal{F}$ é a família de todos os conjuntos não vazios de números naturais, isto, é se $\mathcal{F} = \mathcal{P}$ (IN), a função de escolha pode ser, por exemplo, definida assim:

$$\varphi(X) = \text{o menor elemento de } X \qquad (\forall X \in \mathcal{F})$$

Mas note-se, agora, o seguinte facto importante:

Se $\mathcal{F} = \mathcal{P}$ (IR), não existe nenhum operador de escolha conhecido, e admite-se que nunca venha a ser possível definir algum.

No caso da demonstração do número anterior (2.ª parte) a família $\mathcal{F}$ é constituída pelos conjuntos X_n assim definidos:

$$X_n = \{\, x\colon |x-a| < \frac{1}{n} \wedge x \neq a \wedge |f(x)-b| \geqslant \delta_0 \} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ora, *no caso geral* (sendo f uma função *qualquer*), não se conhece nenhum operador φ tal que:

$$\varphi(X_n) = x_n \in X_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mas a resposta de Zermelo, quando lhe eram apresentadas objecções deste tipo, pode resumir-se nas seguintes palavras:

Há muitas coisas que existem e que nós não conhecemos nem viremos a conhecer.

Este mesmo ponto de vista foi claramente expresso por HADAMARD nos seguintes termos:

Il y a bien des choses que nous ne pouvons jamais connaitre et qui, cependant, existent «en soi», indépendammant de la capacité humaine de les décrire, indépendamment l'activité de notre espirit et indépendamment même de l'existence de l'homme sur la Terre.

Mas, aqui, levantou-se uma viva polémica, de carácter filosófico, entre diversos matemáticos, que se dividiram em duas correntes principais:

1) A corrente dos *matemáticos idealistas* (ou *platónicos*), caracterizada essencialmente pela aceitação do anterior ponto de vista de Hadamard.

2) A corrente dos *matemáticos empiristas* (ou *positivistas*), que não aceitam a referida posição(1).

Para estes últimos, a expressão: *Existe pelo menos um ente ... tal que* ... significa o seguinte:

É possível determinar (ou *definir) um ente ... tal que* ...

---

(1) Sendo a matemática, por assim dizer, a essência do *racionalismo*, em oposição ao *empirismo*, pode parecer que a designação 'matemático empirista' seja contraditória em si mesma. Note-se, porém, que racionalismo e empirismo são duas atitudes *complementares*, e portanto *inseparáveis*, do nosso espírito, predominando uma ou outra conforme as pessoas e as situações. Já sabemos que a matemática não é *só lógica, só racionalismo*. Da conciliação *dialéctica, dinâmica*, das duas tendências, é que pode resultar progresso. E note-se que a palavra 'empirismo' não é tomada na acepção vulgar pejorativa (ver NOTA HISTÓRICA do Cap. IV do *Compêndio de Álgebra*).

Por exemplo, a proposição:

$$\exists x \in \mathbb{C}: x^8 + 3x^2 + 1 = 0,$$

significa:

É possível determinar (com a aproximação que se queira) um número complexo que verifique a equação $x^8 + 3x^2 + 1 = 0$.

O TEOREMA DE D'ALEMBERT (1.º volume, 2.º tomo, Cap. VI, p. 155) afirma precisamente que *toda a equação algébrica de coeficientes em* $\mathbb{C}$ *e de grau* $n \geqslant 1$ *tem, pelo menos, uma solução em* $\mathbb{C}$. Mas, as demonstrações mais frequentes (e mais simples) deste teorema são feitas pelo *método de redução ao absurdo* — e, por isso, tais demonstrações não são *construtivas,* isto é, não fornecem nenhum *método para o cálculo da solução (ou das soluções).* Ora bem:

Os matemáticos empiristas não admitem como válidas demonstrações de existência que não sejam construtivas.

Entre as demonstrações não construtivas figuram:

1) As que recorrem ao método de redução ao absurdo, baseado no PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO.

2) As que recorrem ao AXIOMA DE ZERMELO.

Deste modo, o princípio do terceiro excluído e o axioma de Zermelo não foram aceites como *axiomas da lógica,* pelos matemáticos positivistas. Na Holanda, foi fundada por Brouwer uma escola (1) que tem vindo a desenvolver uma nova lógica e uma

---

(1) Chamada *'escola intuicionista'.*

nova matemática, não baseadas nesses princípios. Mas, embora essa escola tenha conduzido a resultados de real interesse, a verdade é que, por outro lado, põe entraves excessivos ao progresso da matemática. Vendo bem, as demonstrações não construtivas podem ser bastante cómodas e úteis, *numa primeira fase da investigação.*

Por exemplo, as demonstrações não construtivas do TEOREMA DE D'ALEMBERT servem habitualmente para demonstrar a validade de vários *métodos de cálculo das raízes,* tais como o *método de Gräffe* (ver n.º 33, pp. 117-128) e outros mais.

Em dado momento, havia muitos matemáticos que aceitavam o princípio de terceiro excluído, mas não o axioma de Zermelo — o que é, na verdade, um tanto ou quanto contraditório.

Hoje, pode dizer-se, a maioria dos matemáticos aceita os dois princípios como *hipóteses cómodas de trabalho,* admitindo que é indispensável um certo grau de idealização platónica, para não cair num positivismo demasiado restritivo da actividade criadora do espírito.

NOTA. A vida de Zermelo foi tristemente atribulada pela polémica, nem sempre correcta, que se levantou à volta do princípio que tem o seu nome, e depois, mais tarde, pelas perseguições que sofreu, em consequência da sua origem hebraica. Tal como Cantor [*o fundador da TEORIA DOS CONJUNTOS* (1845-1918), também judeu alemão, que sofreu graves dissabores por causa das críticas sarcásticas suscitadas inicialmente pelos *paradoxos* da sua teoria], Zermelo passou grande parte dos últimos anos da sua vida em estado de perturbação mental. Faleceu em Freiburg em 1953.

Têm sido encontradas várias proposições importantes, equivalentes ao axioma da escolha, algumas delas formuladas pelo próprio Zermelo.

37. **Exemplos de limites de funções circulares e das funções exponencial e logarítmica.** Neste momento, já são conhe-

cidas do aluno as funções circulares e as funções exponencial e logarítmica, que fornecem exemplos importantes de limites.

Comecemos pela função *seno*. Desde logo se vê intuitivamente o seguinte:

Quando $x \to +\infty$, *a função* sen x *não tende para limite algum, finito ou infinito, visto que oscila sempre entre* 1 *e* -1.

Logicamente, podemos demonstrar este facto, considerando por exemplo as duas seguintes sucessões:

$$u_1 = 0 \ , \ u_2 = \pi \ , \ u_3 = 2\pi \ , \ \ldots \ , \ u_n = (n-1)\pi \ , \ \ldots$$

$$v_1 = \frac{\pi}{2} \ , \ v_2 = \frac{5\pi}{2} \ , \ v_3 = \frac{9\pi}{2} \ , \ \ldots \ , \ v_n = \frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi \ , \ \ldots$$

Qualquer destas sucessões tende para $+\infty$, como é fácil ver, e, no entanto:

$$\text{sen } u_n = 0 \ (\forall n), \text{ portanto sen } u_n \to 0$$

$$\text{sen } v_n = 1 \ (\forall n), \text{ portanto sen } v_n \to 1$$

Daqui se conclui que sen x não tende para limite algum quando $x \to +\infty$.

Analogamente se vê que *não existe limite de* sen x *quando* $x \to -\infty$, *e o mesmo para* cos x *quando* $x \to +\infty$ *ou* $x \to -\infty$.

Passemos, agora, à função *tangente*. A representação da tangente por meio do círculo trigonométrico mostra que:

A função tg x *tende para* $+\infty$ *quando* x *tende para* $\pi/2$, *por valores menores que* $\pi/2$ *e tende para* $-\infty$ *quando* x *tende para* $\pi/2$ *por valores maiores que* $\pi/2$; *isto é:*

$$\lim_{x \to \frac{\pi-}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \frac{\pi+}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$$

ou ainda:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi-}{2} = +\infty \quad , \quad \operatorname{tg} \frac{\pi+}{2} = -\infty$$

Analogamente para todos os pontos $\frac{\pi}{2} + n\pi$ e para a função *cotangente*, nos pontos $n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Seja agora a função a^x, com $a > 0$. Comecemos por supor $a > 1$. Então, segundo vimos no n.º 30, p. 99, tem-se:

$$\lim a^n = +\infty,$$

sendo *n* a variável natural. Mas, como a função a^x é crescente, facilmente se deduz daqui que, sendo u_n uma sucessão *qualquer tendente para* $+\infty$, será:

$$\lim a^{u_n} = +\infty$$

Por conseguinte:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \text{se} \quad a > 1}$$

Por outro lado, notando que $a^{-x} = 1/a^x$, conclui-se daqui que

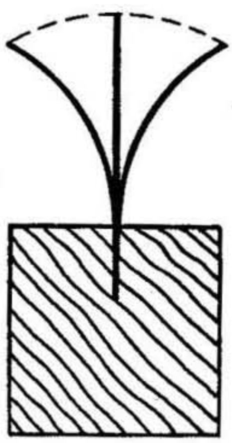
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \;, \quad \text{se} \quad a > 1}$$

Se $a < 1$ (sendo $a > 0$), a^x tende para 0 ou para $+\infty$, conforme $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Também, agora, é fácil reconhecer que:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty \quad \text{se} \quad a > 1.$$

(Convém rever, agora, os gráficos das funções 2^x e $\log_2 x$.)



Como aplicação concreta dos resultados obtidos, consideremos o caso de uma lâmina cravada num taco de madeira e que é afastada ligeiramente da posição normal. Como é sabido, uma vez abandonada à força que a solicita para a posição normal, a lâmina segue um movimento que, *em primeira aproximação,* podemos considerar *rectilíneo* e *vibratório simples,* isto é, definido pela equação:

$$x = a \cos \omega t,$$

em que t é o tempo contado a partir do instante inicial, x a distância da ponta da lâmina à posição normal no instante t (com o sinal + ou − conforme está no lado inicial ou no outro), *a* a *amplitude* do movimento, isto é, a distância máxima à posição normal e ω a *pulsação,* isto é, $\omega = 2\pi/T$, sendo T o tempo de uma oscilação completa (período).

Assim, como se vê, *a* e ω são constantes, e x é uma função de t. Ora, pelo que se viu atrás, x não tende para limite algum quando $t \to +\infty$: a lâmina oscila *eternamente* entre as mesmas posições extremas.

Mas nós sabemos que, na realidade, as coisas não se passam assim: a resistência de ar *amortece* cada vez mais as oscilações. Em *segunda aproximação,* a lâmina segue então um *movimento vibratório amortecido,* que é definido por uma equação do tipo

$$x = e^{-kt} a \cos \omega t$$

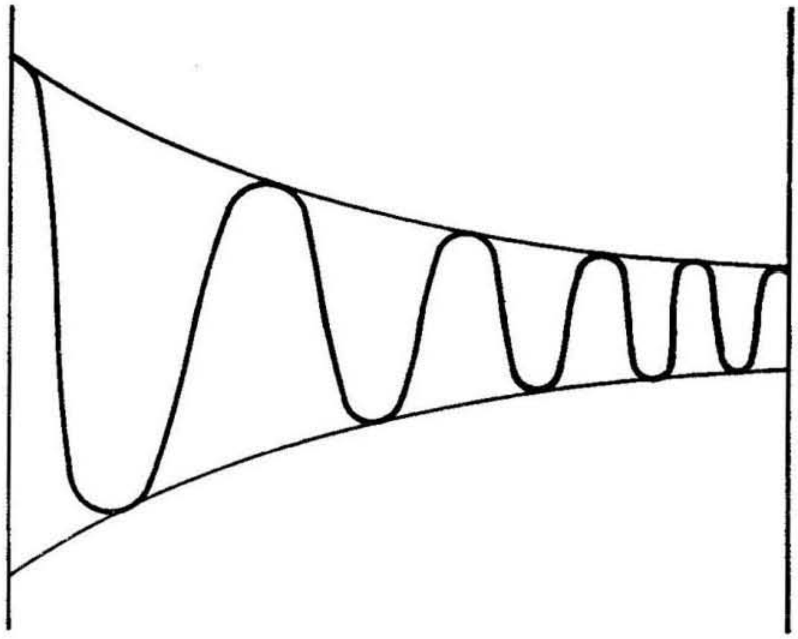
em que k é uma constante positiva (coeficiente de amortecimento). Como $|\cos \omega t| \leqslant 1$ para todo o *t,* vê-se que:

$$|x| \leqslant a e^{-kt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

E, como $e^{-kt} \to 0$ quando $t \to +\infty$, conclui-se:

$$x \to 0 \text{ quando } t \to +\infty$$

Quer dizer: a amplitude das oscilações é cada vez mais pequena, *tendendo para zero, quando* $t \to +\infty$. *Teoricamente,* o valor de x nunca se torna *definitivamente nulo,* isto é, a lâmina *nunca pára em absoluto.* Todavia, na *prática,* chega um momento em que o movimento se pode considerar definitivamente terminado.



A figura junta descreve o fenómeno: são indicados, por um lado, os gráficos das funções ae^{-kt}, $-ae^{-kt}$ e, por outro lado, o gráfico da função $ae^{-kt}\cos\omega t$.

Recordemos, a propósito, que os *modelos matemáticos são sempre esquemas, isto é, descrições simplificadas (ou aproximadas) da realidade, pois seria impossível uma descrição exacta.* Aliás, é sabido que a própria lâmina não é constituída por uma porção *contínua* de matéria, mas antes por uma espécie de *nevoeiro de átomos,* que estão em perpétuo movimento uns em relação aos outros.

38. **Indeterminações.** O problema das indeterminações aparece no cálculo dos limites de funções de variável real, tal como já tinha sucedido para as sucessões.

Agora será muito frequente a indeterminação 0/0. Suponhamos, por exemplo, que se trata de achar o limite de

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

quando $x \to 2$. Tentando aplicar o teorema do limite do quociente, é-se conduzido à indeterminação 0/0. Mas o facto de ambos os polinómios $x^2 - 4$ e $x^2 - 5x + 6$ se anularem quando $x = 2$, significa que ambos são divisíveis por $x - 2$. Tem-se então (aplicando a regra de Ruffini ao segundo polinómio):

$$x^2 - 4 \equiv (x-2)(x+2) \quad , \quad x^2 - 5x + 6 \equiv (x-2)(x-3)$$

Portanto

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{x+2}{x-3} \quad , \quad \forall x \neq 2$$

E como, no cálculo do limite quando $x \to 2$, *só interessam os valores de* x *distintos de* 2, vem:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x-3} = \frac{0}{-1} = 0$$

Exemplos análogos de indeterminações da forma 0/0 ou ∞ / ∞ aparecem nos exercícios do *Compêndio de Álgebra,* Cap. VI, pp. 198-199 [1].

39. **Funções contínuas.** Quanto às definições e propriedades elementares, pode seguir-se inteiramente o *Compêndio de Álgebra,* Cap. VII. Os professores e os alunos mais interessados poderão analisar a definição directa de 'função contínua', segundo Cauchy:

Diz-se que uma função f é *contínua num ponto* a, sse *a* pertence ao domínio de f e, para todo o $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$, tal que, se *x* é valor aproximado de *a* a menos de ε, então f(x) é valor aproximado de f(a) a menos de δ; isto é, simbolicamente:

$$\forall \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ |x-a| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |f(x) - f(a)| < \delta$$

Agora a condição $x \neq a$ não é necessária, visto que a implicação se verifica manifestamente, mesmo quando $x = a$.

Por exemplo, tem-se, qualquer que seja $a > 0$:

$$\forall \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ |x-a| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \delta,$$

o que significa que a função $x \curvearrowright \sqrt{x}$ é contínua em todo o seu

---

(1) Não vale a pena apresentar casos em que os dois termos da fracção têm raízes múltiplas comuns. O aluno aprenderá depois em Matemáticas Gerais a Regra de *l'Hôpital* que é bastante mais prática.

domínio de existência. Mais geralmente, isto acontece com a função $x \mapsto \sqrt[p]{x}$, em que p é qualquer número natural. *E é isso, afinal, o que diz o teorema do n.º 13,* pp. 47-48, *relativo ao cálculo numérico aproximado de uma raiz.*

A noção de função contínua pode estender-se de modo análogo ao caso de funções de mais de uma variável. Consideremos, por exemplo, uma *função* $f(x,y)$ *de duas variáveis reais.* Diz-se que uma tal função é *contínua num ponto* (a,b), sse este pertence ao domínio de f e, além disso:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: |x-a|| < \varepsilon \wedge |y-b| < \varepsilon \underset{x,y}{\Rightarrow} |f(x,y) - f(a,b)| < \delta$$

Por exemplo, sendo *a* e *b* dois números reais quaisquer, tem-se, segundo os teoremas dos n.os 5 e 9, relativos ao cálculo numérico aproximado da soma e do produto:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: |x-a| < \varepsilon \wedge |y-b| < \varepsilon \underset{x,y}{\Rightarrow} |(x+y)-(a+b)| < \delta$$

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: |x-a| < \varepsilon \wedge |y-b| < \varepsilon \underset{x,y}{\Rightarrow} |xy - ab| < \delta$$

o que significa, precisamente, que a soma $x + y$ e o produto xy são funções contínuas de x e y em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Por sua vez, o quociente x/y é função contínua de x e y em todo o seu domínio de existência, que é o complementar da recta $y = 0$ no plano $\mathbb{R}^2$.

Índice

§ 3. *Limites de funções de variável real*

§ 4. *Derivadas*

Capítulo II. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Março de 1976

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA