J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

2.º volume
Capítulo I

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

§ 2. TEORIA DOS LIMITES DE SUCESSÕES

18. **Métodos de aproximações sucessivas.** Suponhamos, por exemplo, que se pretende calcular a raiz quadrada de 2. Aplicando o processo de cálculo que foi aprendido (mas não justificado) no 1.º ciclo liceal, é possível determinar valores aproximados de $\sqrt{2}$ com a aproximação que se quiser: a menos de 0,1, de 0,01, de 10^{-6}, de 10^{-100}, etc. Mas é, evidentemente, impossível achar um *valor decimal exacto* de $\sqrt{2}$, visto que este número é irracional, portanto representável por uma dízima infinita não periódica.

Assim, podemos dizer que o referido processo de cálculo é um *método de aproximações sucessivas*. Além disso, é um *método de tentativas sistemáticas,* pois que, como todos sabemos, é preciso muitas vezes experimentar mais de um algarismo, antes de acertar no que convém.

Aliás, o processo habitual da divisão também é um *método de tentativas sistemáticas,* pela mesma razão e, quando não conduz nunca a resto zero, pode considerar-se um *método de aproximações sucessivas,* com uma diferença, em relação ao sistema anterior: é que o quociente é representado por uma *dízima infinita periódica,* quando o dividendo e o divisor são números racionais.

Vamos, agora, estudar um outro método de aproximações sucessivas para o cálculo de raízes quadradas. Este método, como veremos, apresenta diversas vantagens, que o tornam mais aconselhável do que o anterior, *especialmente quando se recorre a computadores.*

Seja *a* o número cuja raiz quadrada se pretende calcular (supomos, é claro, $a > 0$) e seja x_1 um número tal que

$$x_1^2 > a$$

Este número pode sempre ser determinado por tentativas, de modo que x_1^2 *não seja muito maior do que* a. Teremos então

$$x_1 > \sqrt{a}$$

e, deste modo, x_1 pode ser tomado *como primeiro valor aproximado de* $\sqrt{a}$ (por excesso). Para obter uma segunda aproximação, ponhamos $a_1 = x_1^2$ e notemos que se tem, pela FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DA RAIZ, dada no n.º 13, (1'), pág. 46 [1]:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a_1} \approx \frac{a - a_1}{2\sqrt{a_1}}$$

Daqui, lembrando que $\sqrt{a_1} = x_1$ e que $x_1^2 > a$, vem:

$$\sqrt{a} \approx x_1 - \frac{x_1^2 - a}{2x_1}$$

Ponhamos, então:

$$(1) \qquad x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - a}{2x_1}$$

---

(1) Agora temos $n = 2$, a_1 em vez de x e a em vez de x_1.

ou seja:

$$(2) \qquad x_2 = \frac{x_1^2 + a}{2x_1}$$

De (1) deduz-se que $x_2 < x_1$ *(porquê?)*. De (2) vem:

$$x_2 - \sqrt{a} = \frac{x_1^2 + a - 2x_1\sqrt{a}}{2x_1} = \frac{(x_1 - \sqrt{a})^2}{2x_1} > 0$$

Por conseguinte

$$\sqrt{a} < x_2 < x_1$$

Assim, podemos tomar x_2 como *segundo valor aproximado de* $\sqrt{a}$. Se pusermos agora

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - a}{2x_2}$$

podemos desde já concluir, pelas razões anteriores (com x_2 no lugar de x_1 e x_3 no lugar de x_2) que

$$\sqrt{a} < x_3 < x_2 \, ,$$

o que nos leva a tomar x_3 como *terceiro valor aproximado de* $\sqrt{a}$. Deste modo, se pusermos em geral:

$$(3) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

fica definida uma *sucessão de valores aproximados de* $\sqrt{a}$ tal que

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots > \sqrt{a}$$

Trata-se, pois, de uma *sucessão decrescente* (cada termo é superior ao seguinte) e *limitada inferiormente* (todos os termos são superiores a $\sqrt{a}$)(¹). A fórmula (3) é chamada uma *fórmula de recorrência,* porque permite calcular cada termo da sucessão, depois do primeiro, a partir do termo anterior: essa fórmula define pois a sucessão, uma vez dado o primeiro termo x_1 (com a condição $x_1^2 > a$).

Notemos, agora, que a parte inteira dos números x_n não pode diminuir indefinidamente, visto que esses números são todos maiores que $\sqrt{a}$. *Portanto, a parte inteira dos números* x_n *estabiliza-se (isto é, passa a ser sempre a mesma) a partir de certa ordem* n_1.

Por sua vez, a partir desta ordem n_1, o algarismo das décimas dos números x_n não pode aumentar *(porquê?)* e também não pode diminuir indefinidamente *(porquê?). Logo, o algarismo das décimas dos números* x_n *estabiliza-se a partir de certa ordem* $n_2 \geqslant n_1$.

E analogamente para as centésimas, para as milésimas, etc.

Seja x o número representado pela dízima que se obtém deste modo, por estabilização sucessiva da parte inteira e dos algarismos decimais dos valores aproximados x_n. *Vamos ver intuitivamente que* $x = \sqrt{a}$.

Seja, por exemplo, r a ordem a partir da qual se estabilizaram os algarismos das milésimas. Tem-se então, dentro dessa aproximação

$$x \approx x_n \quad \text{para} \quad n \geqslant r$$

(¹) As definições de 'sucessão crescente', 'sucessão limitada', etc. serão formuladas mais adiante. Basta, por enquanto, a *noção intuitiva*.

Isto permite escrever, em vez da fórmula (3):

$$x \approx x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

o que equivale a $x^2 - a \approx 0$ ou ainda a $x \approx \sqrt{a}$ por ser $x > 0$. E, como o erro da aproximação é *tão pequeno quanto se queira,* será exactamente $x = \sqrt{a}$.

Veremos, depois, como a teoria dos limites permite demonstrar rigorosamente este facto.

Vejamos, agora, como o método anterior se generaliza ao cálculo de raízes de índice *p* qualquer ($p \in \mathbb{N}$). Seja *a* um número positivo cuja raiz de índice p se pretende calcular e tomemos x_1 de modo que seja $x_1^p > a$. Então, pondo $x_1^p = a_1$, vem, pela *fórmula aproximada do desvio:*

$$\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{a_1} \approx \frac{a - a_1}{p\sqrt[p]{a_1^{p-1}}}$$

ou seja:

$$\sqrt[p]{a} \approx x_1 - \frac{x_1^p - a}{p\,x_1^{p-1}}$$

Isto conduz-nos à *fórmula de recorrência:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{px_n^{p-1}} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prova-se, então, que

$$\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e que os números x_n são valores aproximados de $\sqrt[p]{a}$, com *erro tão pequeno quanto se queira.*

Mais tarde se verá como este método se pode generalizar ao cálculo de raízes reais de equações algébricas ou transcendentes, com a designação de *método de Newton* ou *método da tangente.*

EXEMPLOS NUMÉRICOS:

I. Suponhamos que se trata de calcular $\sqrt{2}$ pelo método de Newton. Devemos então começar por escolher um número x_1 tal que $x_1^2 > 2$. Poderá ser $x_1 = 1,5$; tem-se, com efeito, $1,5^2 = 2,25$. A segunda aproximação será, neste caso:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 1,5 - \frac{0,25}{3} \approx 1,417$$

Como $x_2 < 1,42$, tem-se $\sqrt{2} < 1,417$ e podemos tomar

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} = 1,417 - \frac{0,007889}{2,834} \approx 1,4143$$

continuando a *aproximar por excesso.* Podemos, pois, tomar agora

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 2}{2x_3} \approx 1,4143 - \frac{0,0002449}{2,8286} \approx 1,41421357$$

e assim sucessivamente. A aproximação seguinte mostra, por estabilização, que este valor é aproximado por excesso a menos de 10^{-8}. Tem-se, pois, até essa ordem decimal:

$$\sqrt{2} = 1,41421356...$$

Vê-se que este método é mais expedito que o método usual, sobretudo quando se trabalha com uma máquina de calcular: o número de algarismos exactos tende a duplicar em cada aproximação.

II. Suponhamos, agora, que se trata de calcular $\sqrt[5]{23}$ pelo método de Newton. Como se tem $2^5 = 32 > 23$, podemos tomar 2 como primeiro valor aproximado de $\sqrt[5]{23}$. A partir deste, podemos depois calcular sucessivos valores aproximados de $\sqrt[5]{23}$ aplicando a fórmula de recorrência:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 23}{5x_n^4}$$

Mas os cálculos são agora mais laboriosos, tornando-se para isso aconselhável recorrer a um computador. Os valores aproximados que a seguir apresentamos foram calculados por meio do computador electrónico que se encontra ao serviço do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1{,}88750001$$
$$x_3 = 1{,}87241820$$
$$x_4 = 1{,}87217129$$
$$x_5 = 1{,}8721712$$

O programa para este cálculo foi escolhido de modo a dar as seguintes ordens ao computador: 1) fornecer sucessivos valores aproximados de $\sqrt[5]{23}$, segundo o método de Newton, partindo de $x_1 = 2$ (com 8 algarismos decimais); 2) terminar no valor aproximado que tiver 7 decimais exactos, ou seja com erro inferior a 10^{-7} (1).

Será, pois:

$$\sqrt[5]{23} = 1{,}821712 \quad , \quad \text{a menos de } 10^{-7} \text{ (por defeito)}$$

O computador poderia, também, ter recebido ordem para fornecer directamente este valor, sem dar os anteriores. Em qualquer dos casos o tempo de cálculo no computador utilizado é praticamente nulo: da ordem dos mili-segundos.

Estes cálculos foram amavelmente dirigidos pela matemática do L. N. E. C., Senhora Dr.ª D. Madalena Quirino, a quem por esse facto deixamos aqui expressos os nossos vivos agradecimentos.

19. **Convergência de uma sucessão.** No número anterior, vimos como, dado um número positivo *a*, é possível achar sucessivos valores aproximados de $\sqrt{a}$:

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; \ldots$$

com erro *tão pequeno quanto se queira*. Mais precisamente, vimos que, por menor que seja um número positivo δ, existe uma ordem r, depois da qual *todos* os números x_n são valores aproximados de $\sqrt{a}$ a menos de δ, isto é, tal que:

$$n > r \Rightarrow | x_n - \sqrt{a} | < \delta.$$

---

(1) Chamamos 'algarismos decimais' aos algarismos da *parte decimal*.

Este facto pode ser traduzido pela fórmula:

$$\forall \delta > 0, \quad \exists r \in \mathbb{N}: \quad n > r \underset{n}{\Rightarrow} |x_n - \sqrt{a}| < \delta$$

(E analogamente para $\sqrt[p]{a}$, com qualquer $p \in \mathbb{N}$.)

Pois bem, exprime-se este facto dizendo que a sucessão x_n *tende para* $\sqrt{a}$ (ou *converge para* $\sqrt{a}$) e escrevendo

$$x_n \to \sqrt{a}$$

Assim, no 1.º exemplo do número anterior, calculámos cinco termos

$$1{,}5; \quad 1{,}417; \quad 1{,}4143; \quad 1{,}41421357; \quad \ldots$$

de uma sucessão que converge, rapidamente, para $\sqrt{2}$. Podemos mesmo dizer que esta sucessão *converge cada vez mais rapidamente,* porque, como vimos, o número de algarismos exactos (estabilizados) tende a duplicar em cada aproximação efectuada (¹).

Dum modo geral:

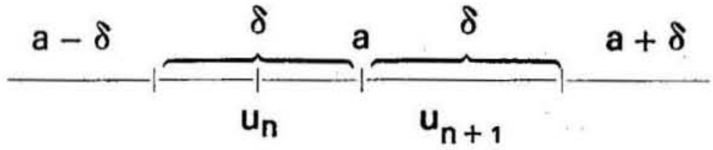
DEFINIÇÃO 1. Diz-se que uma sucessão $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de números reais *tende* (ou *converge*) para um número real *a,* sse, para todo o número $\delta > 0$, existe uma ordem r depois da qual *todos* os termos da sucessão são valores aproximados de *a* a menos de δ. Escreve-se então:

$$u_n \to a \quad (\text{ler: } u_n \textit{ tende para } a)$$

(¹) No 2.º exemplo foram calculados quatro termos duma sucessão que converge rapidamente para $\sqrt[5]{23}$.

Portanto, a expressão $u_n \to a$ equivale, *por definição*, à seguinte:

$$\forall \delta > 0,\ \exists r \in \mathbb{N}:\ n > r \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - a| < \delta$$



Note-se ainda: dizer que u_n é valor aproximado de *a* a menos de δ, quando $n > r$, equivale a dizer que u_n *está na vizinhança* (δ) *de* a, *quando* $n > r$ *(porquê? Que significa vizinhança* (δ) *de* a*?)*.

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que uma sucessão de números reais é *convergente*, sse tende para um número real. Caso contrário diz-se que a sucessão é *divergente*.

EXEMPLOS:

I. Seja $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$u_1 = -1 \quad , \quad u_2 = 1 \quad , \quad u_3 = -1 \quad , \quad u_4 = 1 \quad , \quad \ldots$$

e a sucessão −1, 1, −1, 1, ... assim definida é *divergente*, isto é, não tende para número nenhum. Com efeito, suponhamos que u_n tendia para um número *a* e tomemos por exemplo $\delta = 0{,}5$. Então existia uma ordem r tal que

$$|u_n - a| < 0{,}5$$

para todo o $n > r$. Mas, depois da ordem r, há sempre termos iguais a 1 e termos iguais a -1.

$$\begin{array}{ccc} a-\delta & & a+\delta \\ \hline & -1 \quad a \quad 1 & \end{array}$$

Portanto, os números 1 e -1 teriam de estar na vizinhança (0,5) de a, isto é, deveria ser:

$$a - 0{,}5 < -1 < 1 < a + 0{,}5$$

donde:

$$1 - (-1) < (a + 0{,}5) - (a - 0{,}5) \qquad \textit{(porquê?)}$$

ou seja: $2 < 1$, o que é absurdo. Logo, u_n não tende para nenhum número *a:* a sucessão é, pois, divergente.

II. Provar que a sucessão dos números naturais ($u_n = n$), a sucessão das potências de 10 ($u_n = 10^n$) e a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n n$ são todas divergentes(1).

III. Consideremos, agora, a sucessão dos inversos dos números naturais:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

---

(1) Por redução ao absurdo, como no caso anterior. É preciso lembrar que, ***qualquer que seja $\alpha \in R$, todos os números naturais superiores à característica de α são maiores que α.***

Esta sucessão é convergente: *tende para zero*. Com efeito, seja δ *qualquer* número positivo (por exemplo $\delta = 3$, $\delta = 0{,}001$, $\delta = 10^{-6}$, $\delta = 10^{-100}$, etc.). Trata-se de provar que se tem, a partir de certa ordem

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$$

Como o primeiro membro é igual a $1/n$ *(porquê?), tudo se reduz a resolver a inequação* $1/n < \delta$ *em ordem a* n. Tem-se, então:

$$(1) \qquad \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Seja, agora, r um número natural *igual ou superior* a $1/\delta$. Então $n > r \Rightarrow n > 1/\delta$ e de (1) vem:

$$n > r \Rightarrow \frac{1}{n} < \delta$$

Por exemplo, seja $\delta = 0{,}003$. Neste caso, $1/\delta = 1000/3$ e um número natural $\geqslant 1/\delta$ será, por exemplo, $r = 334$. Portanto

$$n > 334 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}003$$

isto é: *depois da ordem* 334, *todos os termos da sucessão são menores que* 0,003. E analogamente noutros casos.

Em resumo:

$$\forall \delta, \exists r : n > r \underset{n}{\Rightarrow} \frac{1}{n} < \delta$$

o que significa precisamente que $1/n \to 0$.

(Quando $u_n \to 0$ diz-se que u_n é um *infinitésimo*.)

IV. Escreva os seis primeiros termos das sucessões definidas pelas expressões:

$$\frac{(-1)^n}{n}, \quad \frac{1}{10^n}, \quad \frac{(-1)^n}{10^n}$$

e mostre que qualquer destas sucessões tende para zero.

V. Seja, agora, a sucessão

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

em que cada termo, a partir do segundo, se obtém adicionando 1 ao numerador e ao denomiandor da fracção que representa o termo anterior. Os números assim obtidos são cada vez maiores (*sucessão crescente*), mas são todas inferiores a 1 (*sucessão limitada*), visto serem representados por fracções próprias. *Vamos provar que esta sucessão tende para* 1. Tem-se, com efeito:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = 1 - \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \textit{(porquê?)}$$

$$= \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Seja, agora, δ um número positivo qualquer. Então

$$\frac{1}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta} - 1$$

Portanto, se r for um número natural $\geqslant \frac{1}{\delta} - 1$, tem-se:

$$n > r \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \delta$$

Assim

$$\forall \delta > 0, \ \exists r \in \mathbb{N}: \ n > r \underset{n}{\Rightarrow} \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \delta$$

o que significa que $\frac{n}{n+1} \to 1$. Para ter uma visão intuitiva deste facto, convém ver a figura do *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano,* pág. 162.

Note-se que a convergência desta sucessão é muito lenta: por exemplo, só a partir do termo de ordem 99 *se obtêm valores aproximados de* 1 *a menos de* 0,01.

VI. Analogamente se reconhece que a sucessão

$$2, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{3}, \ \frac{5}{4}, \ \ldots, \ \frac{n+1}{n}, \ \ldots$$

converge para 1. Mas, enquanto a anterior *tende para* 1 *por valores* *menores que* 1, *esta tende para* 1 *por valores maiores que* 1. Exprimem-se estes factos, escrevendo, respectivamente,

$$\frac{n}{n+1} \to 1^- \ , \quad \frac{n+1}{n} \to 1^+$$

VII. Por sua vez, a sucessão

$$0, \ \frac{3}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{5}{4}, \ \frac{4}{5}, \ \ldots, \ \frac{(-1)^n + n}{n}, \ \ldots$$

tende para 1, como é fácil verificar, *mas por valores alternadamente inferiores e superiores a* 1 (ver a fig. 2 do *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, pág. 163).

VIII. Dadas as sucessões:

$$1{,}8; \ 1{,}98; \ 1{,}998; \ 1{,}9998; \ \ldots; \ 2 - \frac{2}{10^n} \ ; \ \ldots$$

$$2{,}2; \ 2{,}02; \ 2{,}002; \ 2{,}0002; \ \ldots; \ 2 + \frac{2}{10^n} \ ; \ \ldots$$

$$1{,}8; \ 2{,}02; \ 1{,}998; \ 2{,}0002; \ \ldots; \ 2 + (-1)^n \frac{2}{10^n} \ ; \ \ldots$$

verificar: a) se são convergentes; b) para que números tendem; c) de que modo convergem. Comparar a rapidez de convergência destas sucessões com a das sucessões anteriores.

20. **Pormenores de terminologia.** O conceito de 'sucessão' foi apresentado já no 2.º ciclo. *Dar* (ou *definir*) *uma sucessão de*

números reais equivale a dar um processo qualquer, pelo qual, a cada número natural n, fique a corresponder um determinado número real u_n. Neste caso, u_1 é o *primeiro termo* da sucessão, u_2 o *segundo termo* da sucessão, etc.; u_n é o *termo da ordem* n (ou *termo geral*) da sucessão. Deste modo, a variável u_n representa uma *função real* da *variável natural* n ou seja uma *aplicação*

$$n \mapsto u_n \text{ de } \mathbb{N} \text{ em } \mathbb{R}$$

E é precisamente esta aplicação (ou função) que se chama 'sucessão de números reais'. Tal aplicação é normalmente chamada '*a sucessão de termo geral* u_n, ou, simplesmente, a '*sucessão* u_n'. Em vez da notação u_n, podem também usar-se notações tais como $u(n)$, $f(n)$, $\varphi(n)$, ..., que se empregam habitualmente a respeito de funções em geral (isto é, escrevendo a variável independente *n* entre parênteses, a seguir ao símbolo da função, em vez de pôr essa variável como índice).

Como qualquer outra função, uma sucessão pode, em muitos casos, ser definida por uma expressão designatória (chamada, neste caso, '*expressão do termo geral*'), como se verifica nos exemplos anteriores. Mas também se define muitas vezes uma sucessão por um processo de recorrência, de que vimos alguns exemplos no n.º 18, ao tratar do método de Newton para extracções de raízes. Mais tarde trataremos, em pormenor, de métodos de recorrência.

Dum modo geral, dado um conjunto A qualquer, chama-se *sucessão de elementos de* A toda a aplicação $n \mapsto u_n$ de $\mathbb{N}$ em A. Por exemplo, a expressão i^n define uma sucessão de números complexos:

$$i, \ -1, \ -i, \ 1, \ i, \ -1, \ -i, \ 1, \ i, \ \ldots$$

Como se vê, o conceito de sucessão é uma extensão do conceito de sequência. Poderíamos chamar *'sucessões finitas'* às sequências. Por exemplo, a sequência de 5 números complexos

$$i, \; -1, \; -i, \; 1, \; i$$

é uma aplicação do conjunto 1, 2, 3, 4, 5 no conjunto $\mathbb{C}$. É só por comodidade e para evitar equívocos que reservamos o termo 'sequência' para as sucessões finitas.

Tornemos, agora, às sucessões de números reais. Muitas vezes, em vez de dizer *'a sucessão* u_n *tende para* a' diz-se *'a variável* u_n *tende para* a'. Trata-se de um abuso de linguagem, pois, como vimos, uma sucessão não é uma variável, mas sim uma aplicação (isto é, uma determinada correspondência). Mas, trata-se de um abuso de linguagem *cómodo e sugestivo*, que não tem inconvenientes, desde que o aluno esteja advertido sobre o facto, de modo a evitar possíveis equívocos.

A propósito do exemplo III do número anterior, introduziu-se a seguinte

DEFINIÇÃO. Diz-se que u_n é um *infinitésimo*, sse $u_n \to 0$.

Também se diz neste caso que u_n é um *infinitamente pequeno*.

Da definição 1 do número anterior deduz-se imediatamente o seguinte facto:

$$u_n \to a \Leftrightarrow u_n - a \to 0$$

Isto é: *dizer que* u_n *tende para* a *equivale a dizer que* $u_n - a$ *é um infinitésimo*.

NOTA IMPORTANTE. Em questões de física e de outras ciências experimentais, a expressão 'infinitamente pequeno' (ou 'infinitésimo') é usada para designar uma *grandeza praticamente nula*, isto é, de tal modo pequena (em valor absoluto) que pode ser desprezada na questão de que se trata. Também no CÁLCULO NUMÉRICO APROXIMADO, que introduzimos no capítulo I, os erros desprezáveis (por exemplo no cálculo de um produto) podem ser chamados infinitésimos.

Este significado prático da palavra 'infinitésimo' corresponde, de certo modo, à noção intuitiva de 'infinitésimo' que tinham os matemáticos nos primórdios do CÁLCULO INFINITESIMAL: *um infinitésimo (positivo) seria, então, uma grandeza menor que qualquer submúltiplo da unidade e, contudo, maior que zero.* Mas, segundo o conceito usual de grandeza, um infinitésimo deveria ter, nesse caso, a seguinte propriedade:

'Ser nulo e não ser nulo ao mesmo tempo'

o que é impossível, segundo o PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO; ou então não ser uma coisa nem outra, isto é:

'Estar numa situação intermédia entre ser nulo e não ser nulo'

o que é impossível, segundo o PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO.

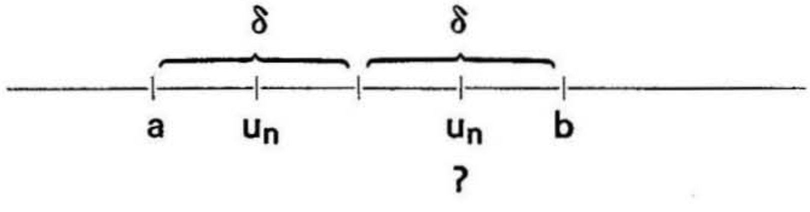
Por exemplo, se dividirmos um segmento com um metro de comprimento em 2 partes iguais, em 4 partes iguais, em 8 partes iguais, e assim sucessiva e indefinitamente, obtemos segmentos cada vez mais pequenos, cujos comprimentos *tendem para zero.* Ora, segundo os referidos matemáticos, esses segmentos não tenderiam propriamente para segmentos nulos, *mas sim para segmentos* *infinitésimos*. Estes segmentos infinitésimos seriam em número infinito e a sua soma daria o segmento inicial (se fossem efectivamente nulos, a sua soma também teria de ser nula).

Assim, os infinitésimos eram concebidos como quantidades fixas (chamadas 'indivisíveis' ou 'infinitésimos actuais') e não como variáveis, ou ainda, como *sucessões que tendem para zero* (segundo a definição anterior). Mas, já vimos que o conceito de infinitésimo actual é contraditório.

Note-se que o anterior exemplo das divisões sucessivas de um segmento em partes iguais está na base dos PARADOXOS DE ZENÃO e, nomeadamente, do *paradoxo da seta* (ver no *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, a 'Nota Histórica' do Cap. IV).

21. **Primeiros teoremas sobre limites.** Quando uma sucessão u_n tende para um número a, também se diz que *a é limite* da sucessão. Tem-se, porém, a seguinte propriedade:

TEOREMA 1 (DA UNICIDADE DO LIMITE). *Uma sucessão não pode tender para dois números diferentes.*



Demonstração (por redução ao absurdo):

Suponhamos que existe uma sucessão u_n que tende ao mesmo tempo para dois números a, b diferentes e seja, por exemplo, $a < b$.

Ponhamos

$$\delta = \frac{b-a}{2}$$

Então δ é um número positivo *(porquê?)* e tem-se:

$$2\delta = b - a$$

donde:

$$(1) \qquad a + \delta = b - \delta$$

Ora, como $u_n \to a$ e $u_n \to b$, existem uma ordem r e uma ordem s tais que

$$(2) \qquad \begin{cases} n > r \Rightarrow a - \delta < u_n < a + \delta \\ n > s \Rightarrow b - \delta < u_n < b + \delta \end{cases}$$

Designemos por p o maior dos números r, s. Então de (2) deduz-se:

$$n > p \Rightarrow u_n < a + \delta \wedge u_n > b - \delta$$

Mas isto, segundo (1), é absurdo: u_n não pode ser ao mesmo tempo *menor* que $a + \delta$ e *maior* que $a + \delta$ *(porquê?)*. Logo, u_n não pode tender ao mesmo tempo para *a* e *b*.

Assim, quando uma sucessão é convergente, o seu limite existe e é único. Pois bem:

Representa-se pelo símbolo lim u_n o limite duma sucessão convergente, isto é, tem-se, por definição:

$$\boxed{a = \lim u_n \Leftrightarrow u_n \to a}$$

Vamos, agora, estudar um caso particular de convergência. Suponhamos, por exemplo, que certo método de aproximações sucessivas fornece a sucessão:

5,83; 5,94; 5,99; 6; 6; 6; 6; ...

em que todos os termos, a partir do quarto, são iguais a 6. Então, se designarmos por u_n o termo geral da sucessão, tem-se, evidentemente:

$$\forall \delta > 0: \; n > 3 \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - 6| < \delta \qquad \textit{(porquê?)}$$

Por conseguinte, $u_n \to 6$.

No caso geral, demonstra-se, de modo análogo, o seguinte:

TEOREMA 2. *Se todos os termos de uma sucessão, a partir de uma certa ordem, são iguais a um mesmo número* c, *a sucessão tem por limite esse número* c.

Em particular, pode acontecer que todos os termos de uma sucessão u_n sejam iguais a *c* (logo a partir do primeiro), isto é, que se tenha

$$u_n = c \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Diz-se, neste caso, que a sucessão é *constante* e podemos escrever

$$\boxed{\lim \; c = c}$$

o que se exprime habitualmente dizendo (por abuso de linguagem):

'O limite de uma constante é a própria constante'

Finalmente, o teorema 2 do n.º 6 dá o seguinte

TEOREMA 3. *Se* $u_n \to a$, *então* $|u_n| \to |a|$.

22. **Álgebra dos limites.** Os teoremas de cálculo aproximado da soma, do produto, do quociente e da raiz, estudados no § 1, fornecem outros tantos teoremas sobre limites.

Comece por rever o teorema n.º 5. Desse teorema deduz-se facilmente o seguinte

TEOREMA DO LIMITE DA SOMA. *A soma de duas sucessões* *convergentes,* u_n *e* v_n, *é também uma sucessão convergente e tem-se:*

$$\boxed{\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$u_n \to a \quad e \quad v_n \to b \qquad (\text{com } a, b \in \mathbb{R})$$

e seja δ um número positivo *qualquer*. Então, $\delta/2$ também é um número positivo e, portanto, existem uma ordem r e uma ordem s, tais que

$$n > r \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2} \quad , \quad n > s \Rightarrow |v_n - b| < \frac{\delta}{2} \qquad \textit{(porquê?)}$$

Assim, se designarmos por p *o maior dos números* r, s, teremos:

$$n > p \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2} \wedge |v_n - b| < \frac{\delta}{2}$$

Ora, segundo o teorema do n.º 5, sendo u_n e v_n valores aproximados de *a* e *b*, a menos de $\delta/2$, a sua soma, $u_n + v_n$, será valor aproximado de $a + b$ a menos de δ. Por conseguinte:

$$n > p \Rightarrow |(u_n + v_n) - (a + b)| < \delta$$

E, como δ pode ser *qualquer* número positivo, isto significa que

$$\lim (u_n + v_n) = a + b = \lim u_n + \lim v_n$$

Este teorema é, evidentemente, generalizável ao caso de uma soma com um número qualquer (finito) de parcelas. Por exemplo, tratando-se de três sucessões u_n, v_n, w_n convergentes, virá, aplicando duas vezes o teorema anterior:

$$\lim (u_n + v_n + w_n) = \lim [(u_n + v_n) + w_n] = \lim (u_n + v_n) + \lim w_n =$$

$$= \lim u_n + \lim v_n + \lim w_n$$

E analogamente para 4 parcelas, 5 parcelas, etc. Podemos resumir estas conclusões no seguinte enunciado geral:

A soma de duas ou mais sucessões convergentes é sempre uma sucessão convergente, que tem por limite a soma dos limites das parcelas.

Reveja, agora, o teorema do n.º 9. Dele se deduz:

TEOREMA DO LIMITE DO PRODUTO. *Se* u_n *e* v_n *são sucessões convergentes,* $u_n \cdot v_n$ *também é sucessão convergente e tem-se:*

$$\boxed{\lim (u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$(1) \qquad u_n \to a \quad e \quad v_n \to b \qquad (\text{com } a, b \in \mathbb{R})$$

e seja δ um número positivo *qualquer*. Segundo o teorema do n.º 9, existe um número positivo ε tal que, se u_n e v_n forem valores aproximados de *a* e de *b* a menos de ε, então $u_n v_n$ é valor aproximado de ab a menos de δ; isto é, simbolicamente:

$$(2) \qquad |u_n - a| < \varepsilon \wedge |v_n - b| < \varepsilon \Rightarrow |u_n v_n - ab| < \delta$$

Por outro lado, em virtude de (1), existem uma ordem r e uma ordem s tais que

$$n > r \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon \quad , \quad n > s \Rightarrow |v_n - b| < \varepsilon$$

Deste modo, sendo p o maior dos números r, s, vem:

$$n > p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon \wedge |v_n - b| < \varepsilon$$

donde, atendendo a (2):

$$n > p \Rightarrow |u_n \, v_n - ab| < \delta$$

E, como δ é um número positivo *qualquer,* isto significa que

$$\lim u_n v_n = ab = \lim u_n \cdot \lim v_n, \qquad \text{q. e. d.}$$

Este teorema pode ainda generalizar-se ao caso de um número qualquer (finito) de factores, como se fez para a soma. Assim, podemos afirmar que:

O produto de duas ou mais sucessões convergentes ainda é uma sucessão convergente, que tem por limite o produto dos limites dos factores.

COROLÁRIO I. *Se* u_n *é convergente e* p *é um número natural qualquer (constante), tem-se:*

$$\boxed{\lim u_n^p = (\lim u_n)^p}$$

Com efeito, tem-se, por definição de potência:

$$u_n^p = u_n\, u_n \ldots u_n \quad (\text{p vezes})$$

e, aplicando o teorema anterior, vem (sendo u_n convergente):

$$\lim u_n^p = \underbrace{(\lim u_n)\,(\lim u_n)\ldots(\lim u_n)}_{\text{p vezes}} = (\lim u_n)^p$$

COROLÁRIO II. *Se* u_n *e* v_n *são sucessões convergentes, tem-se:*

$$\boxed{\lim (u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n}$$

Basta notar que $u_n - v_n = u_n + (-1)v_n$, donde, aplicando os teoremas anteriores,

$$\lim (u_n - v_n) = \lim u_n + \lim (-1) \lim v_n = \lim u_n - \lim v_n$$

TEOREMA DO LIMITE DO QUOCIENTE. *Se* u_n *e* v_n *são sucessões convergentes e* $\lim v_n \neq 0$, *também* u_n/v_n *é convergente e tem-se:*

$$\boxed{\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}} \qquad (\text{supondo } v_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

Por outros termos:

O quociente de duas sucessões convergentes também é uma sucessão convergente, desde que o divisor nunca seja zero nem tenda para zero. Neste caso, o limite do quociente é igual ao quociente do limite do dividendo pelo limite do divisor.

A demonstração, baseada no teorema do n.º 11, é perfeitamente análoga à que foi dada para o teorema do produto e pode ser feita como exercício pelo aluno.

TEOREMA DO LIMITE DA RAIZ. *Sendo* p *um número natural e* u_n *uma sucessão convergente, também* $\sqrt[p]{u_n}$ *é convergente (supondo que é sempre* $u_n \geqslant 0$, *se* p *é par). Tem-se, então:*

$$\boxed{\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}}$$

Demonstração:

Bastará considerar o caso em que $u_n \geqslant 0$ para todo o *n*, pois que, se for $u_n < 0$ (com p ímpar), tem-se $\sqrt[p]{u_n} = -\sqrt[p]{|u_n|}$ e ficamos reduzidos ao caso anterior. Suponhamos, pois, que

$$(3) \qquad u_n \to a \quad , \quad \text{com } a \geqslant 0 \quad \text{e} \quad u_n \geqslant 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja δ um número positivo *qualquer*. Então, segundo o teorema do n.º 13, existe um número $\varepsilon > 0$, tal que

$$|u_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| < \delta$$

Por outro lado, segundo (3), existe uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Logo

$$n > r \Rightarrow |\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| < \delta,$$

o que significa que $\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim u_n}$.

23. **Métodos de iteração.** Consideremos uma equação da forma

$$f(x) = x,$$

em que f é uma função dada. Procurando resolver esta equação por tentativas, podemos adoptar um número x_1 como valor aproximado da solução. Seja x_2 o valor de $f(x_1)$, isto é:

$$f(x_1) = x_2$$

Se fosse $x_2 = x_1$, então x_1 seria, de facto, solução. Mas, em geral, isto não sucede. Ponhamos, sucessivamente:

$$f(x_2) = x_3 \quad , \quad f(x_3) = x_4 \quad , \quad \ldots$$

e, em geral,

$$(1) \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta *fórmula de recorrência,* juntamente com o valor inicial x_1, escolhido arbitrariamente, define uma sucessão x_n. Suponhamos, agora, que são verificadas as duas seguintes condições:

1) a sucessão x_n é convergente;

2) $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Seja c o limite de x_n. Então c será também o limite da sucessão x_{n+1} (cujo 1.º termo é x_2, cujo 2.º termo é x_3, etc.). Com efeito, sendo δ um número positivo arbitrário, existe uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |x_n - c| < \delta \qquad \text{(visto que } x_n \to c\text{)}$$

Mas, daqui resulta que

$$n > r \Rightarrow |x_{n+1} - c| < \delta \qquad \text{e, portanto, } x_{n+1} \to c$$

Assim, de (1) virá, atendendo à condição 2):

$$\lim x_{n+1} = f(\lim x_n)$$

ou seja:

$$c = f(c)$$

o que significa, precisamente, que o número *c* é solução da equação $f(x) = x$. A sucessão x_n fornece, pois, valores aproximados desta solução, com a aproximação que se queira.

O método geral de aproximações sucessivas que acabamos de descrever é chamado *método de iteração* ('iterar' significa 'repetir') e a função f é chamada *função iterante*. Os métodos de iteração (quando aplicáveis) prestam-se muito para o cálculo de raízes de equações por meio de computadores.

O método de Newton, que foi descrito em pormenor no n.º 18, no caso particular da radiciação, é exemplo típico dum método de iteração. Por exemplo, calcular $\sqrt{a}$, com $a > 0$, é calcular a raiz positiva da equação $x^2 = a$. Ora, tem-se, como é fácil ver:

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = x - \frac{x^2 - a}{2x} \quad , \quad \forall x > 0$$

Assim, a equação $x^2 = a$ é posta sob a forma $x = f(x)$, sendo

$$f(x) \equiv x - \frac{x^2 - a}{2x} \quad \text{(função iterante).}$$

Como vimos, se escolhermos x_1 de modo que $x_1^2 > a$, a sucessão x_n, obtida pela fórmula de recorrência $x_{n+1} = f(x_n)$, é convergente. Por outro lado, aplicando os teoremas anteriores, vem neste caso:

$$\lim f(x_n) = \lim x_n - \frac{(\lim x_n)^2 - a}{2 \lim x_n} = f(\lim x_n) \qquad \textit{(justifique)}$$

São, portanto, verificadas as condições 1) e 2) anteriores, o que garante que x_n tende, efectivamente, para uma raiz da equação $x^2 = a$: a raiz positiva ou seja $\sqrt{a}$.

24. **Critérios particulares de convergência.** Diz-se que uma sucessão u_n é *crescente*, quando cada um dos termos é menor do que o seguinte, isto é, quando $u_n < u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. É claro que esta condição equivale a esta outra:

$$n < m \Rightarrow u_n < u_m$$

Diz-se que uma sucessão u_n é *decrescente,* quando cada um dos seus termos é maior que o seguinte (e, portanto, maior que todos os seguintes).

Uma sucessão u_n diz-se *monótona,* sse é crescente ou é decrescente.

Diz-se que u_n é *crescente em sentido lato,* quando se tem $u_n \leqslant u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Analogamente se define '*sucessão decrescente em sentido lato*' e ainda '*sucessão monótona em sentido lato*'.

Uma sucessão u_n diz-se *limitada*, quando todos os seus termos têm módulo inferior a um certo número; isto é, sse existe algum número L tal que

$$|u_n| < L \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Para exemplos, ver *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, pp. 148-149.)

CRITÉRIO DAS SUCESSÕES MONÓTONAS. *Toda a sucessão limitada que seja monótona (mesmo em sentido lato) é convergente.*

Demonstração:

No caso de uma sucessão u_n crescente em sentido lato, cujos termos sejam todos positivos, a demonstração pode fazer-se de modo semelhante ao seguido no n.º 18 para provar que a sucessão x_n era convergente. Como todos os u_n não menores que um certo número L, a parte inteira de u_n há-de *estabilizar-se* a partir de certa ordem *(porquê?)*. Depois disso, é o algarismo das décimas que se estabiliza, pois não pode crescer para lá de 9. Depois ainda, estabiliza-se o algarismo das centésimas. E assim sucessivamente. É claro que o número representado pela parte inteira e pelos algarismos decimais assim estabilizados é o limite para que tende u_n.

Se u_n é uma sucessão decrescente em sentido lato, limitada, e cujos termos são todos positivos, a demonstração é perfeitamente análoga (é o caso do n.º 18; veja o exemplo das pp. 60-61).

Finalmente, os restantes casos reduzem-se aos anteriores, notando que: 1) a partir de certa ordem os termos da sucessão são todos positivos, todos negativos ou todos nulos; 2) se $u_n \to a$, então $-u_n \to -a$.

(Convém ver o exemplo do número π, dado no *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, pg. 169.)

CRITÉRIO DAS SUCESSÕES ENQUADRADAS. *Dadas três sucessões* u_n, v_n, x_n *tais que*

$$(1) \qquad u_n \leqslant x_n \leqslant v_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se u_n e v_n *tendem para um mesmo número* a, *também* $x_n \to a$.

Demonstração:*

Se $\lim u_n = \lim v_n = a$, então $\lim(u_n - v_n) = 0$. Por outro lado, a condição (1) implica

$$0 \leqslant x_n - u_n \leqslant v_n - u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e, como para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |v_n - u_n| < \delta \qquad \textit{(porquê?)}$$

também

$$n > r \Rightarrow |x_n - u_n| < \delta \qquad \textit{(porquê?)}$$

e, portanto, $x_n \to a$, q. e. d.

25. **Símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação.** O teorema do limite do quociente (n.º 22) exclui a hipótese em que o divisor tende para zero. Consideremos, agora, essa hipótese, isto é, suponhamos que o dividendo, u_n, tende para um

número real *a* qualquer e que o divisor, v_n, tende para 0, embora seja sempre $v_n \neq 0$. Neste caso, *não* podemos dizer que

$$\frac{u_n}{v_n} \text{ converge para } \frac{a}{0}$$

E, desde já, vamos ver porquê. Dois casos se podem dar:

1.° *caso:* $a \neq 0$. Neste caso, não existe quociente de *a* por 0, isto é, não existe nenhum número x tal que $0 \cdot x = a$ *(porquê?)*. Por outros termos:

A equação $0 \cdot x = a$ é *impossível.*

Por isso mesmo, a expressão a/0, que deveria indicar o quociente de *a* por 0, é chamada um *símbolo de impossibilidade*. São pois símbolos de impossibilidade, por exemplo, as expressões

$$\frac{1}{0}, \frac{3}{0}, \frac{-2}{0}, \frac{\sqrt{2}}{0}, \frac{\pi}{0}, \text{ etc.}$$

2.° *caso*: $a = 0$. Neste caso, qualquer número real x verifica a condição $0 \cdot x = a$. Esta equação é, pois, *indeterminada* e, por isso mesmo, se diz que a expressão $\frac{0}{0}$ é um *símbolo de indeterminação.*

Conheceremos outros símbolos de indeterminação.

Vamos ver agora como, nos casos em que se obtêm símbolos de impossibilidade ou indeterminação, ainda se pode chegar muitas vezes a conclusões úteis na teoria dos limites.

26. **Limites infinitos.** Seja

$$u_n = 2 \quad \text{e} \quad v_n = 10^{-n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Então $u_n \to 2$ e $v_n \to 0$. Ora, u_n/v_n vem a dar a sucessão:

$$\frac{2}{0{,}1}\ ,\ \frac{2}{0{,}01}\ ,\ \frac{2}{0{,}001}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{2}{10^{-n}},\ \ldots$$

ou seja:

$$20\ ,\ 200\ ,\ 2000\ ,\ \ldots\ ,\ 2 \times 10^n\ ,\ \ldots$$

Esta sucessão *não é convergente,* isto é, não tende para nenhum número real, mas apresenta a seguinte particularidade notável:

Os termos da sucessão tornam-se *definitivamente superiores* a qualquer número dado, isto é: qualquer que seja o número real L existe uma ordem r, depois da qual *todos* os termos da sucessão são superiores a L. Exprime-se este facto dizendo que a sucessão *tende para o infinito positivo* (ou que *tende para* $+\infty$, em que o símbolo $+\infty$ se lê 'mais infinito').

Dum modo geral:

DEFINIÇÃO 1. Diz-se que uma sucessão u_n tende para $+\infty$, e escreve-se

$$u_n \to +\infty$$

sse, qualquer que seja o número real L, existe uma ordem depois da qual todos os termos da sucessão são maiores que L (1). Simbolicamente:

$$u_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0, \ \exists r \in \mathbb{N}: \ n > r \Rightarrow u_n > L$$

Também se diz, neste caso, que u_n é um *infinitamente grande positivo.*

Por outro lado:

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que u_n tende para $-\infty$ e escreve-se

$$u_n \to -\infty$$

sse $-u_n \to +\infty$. Também se diz, neste caso, que u_n é um *infinitamente grande negativo.*

DEFINIÇÃO 3. Diz-se que u_n tende para ∞ e escreve-se

$$u_n \to \infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \infty$$

sse $|u_n| \to +\infty$. Também se diz, neste caso, que u_n é um *infinitamente grande* (simplesmente).

Convém ver exemplos no *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano,* pp. 150-152 e 165-166.

Quanto à noção de 'infinito matemático', interessa ler a 'Nota Histórica' do Capítulo V desse *Compêndio.*

---

(1) É claro que basta, neste caso, considerar números L positivos.

Desde já convém lembrar que uma sucessão é *convergente*, sse tende para um número real *(limite finito)*. Ora, se uma sucessão tende para infinito ($+\infty$, $-\infty$ ou apenas ∞), não pode tender para nenhum número real e é, portanto, *divergente*. Por este motivo, não é correcto dizer 'u_n *converge para* ∞', mas apenas 'u_n tende para ∞'.

Diz-se que uma sucessão é *propriamente* divergente, quando tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. É fácil reconhecer que:

Toda a sucessão monótona não limitada é propriamente divergente, sendo o seu limite $+\infty$ *ou* $-\infty$, *conforme a sucessão é crescente ou decrescente. Outro tanto se pode dizer relativamente às sucessões monótonas em sentido lato.*

Uma sucessão divergente que não seja propriamente divergente chama-se *oscilante*. Por exemplo, a sucessão

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \ldots,\ (-1)^n n,\ \ldots$$

é oscilante porque tende para ∞, mas não para $+\infty$ nem para $-\infty$. Por sua vez a sucessão

$$-1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots$$

é oscilante, porque não *tende para limite algum, finito ou infinito.*

27. **Operações com limites infinitos.** Começaremos por estabelecer três lemas:

LEMA 1. $u_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \to \infty$ (supondo $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

Por outros termos: *O inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande.*

Demonstração:

Suponhamos que $u_n \to 0$, com $u_n \neq 0$, $\forall n$, e seja L um número positivo arbitrário. Então $1/L$ também é um número positivo e existe, portanto, uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{L} \quad \textit{(porquê?)}$$

Ora

$$|u_n| < \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{1}{|u_n|} > L$$

e, como $\dfrac{1}{|u_n|} = \left|\dfrac{1}{u_n}\right|$ *(porquê?)*, tem-se:

$$n > r \Rightarrow \frac{1}{|u_n|} > L,$$

o que significa que $1/u_n \to \infty$.

LEMA 2. $u_n \to \infty \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \to 0$ (supondo $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Por outros termos: *O inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo.*

A demonstração é análoga à anterior.

Estes dois lemas podem resumir-se num enunciado único:

$$u_n \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} \to \infty \qquad (\text{com } u_n \neq 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N})$$

LEMA 3. *Se* $v_n \to \infty$ *e se existe um número* $\varepsilon > 0$ *tal que* $|u_n| > \varepsilon$ *a partir de certa ordem, então* $u_n v_n \to \infty$.

Demonstração:*

Suponhamos verificada a hipótese e seja L um número positivo arbitrário. Então L/ε também é um número positivo e, portanto, existe uma ordem r tal que

$$(1) \qquad n > r \Rightarrow |v_n| > \frac{L}{\varepsilon} \qquad \textit{(porquê?)}$$

Por outro lado, existe uma ordem s tal que

$$(2) \qquad n > s \Rightarrow |u_n| > \varepsilon \qquad \textit{(porquê?)}$$

Então se for p o maior dos números r, s, virá de (1) e (2):

$$n > p \Rightarrow |v_n| > \frac{L}{\varepsilon} \wedge |u_n| > \varepsilon$$

e portanto

$$n > p \Rightarrow |u_n v_n| > L$$

o que prova que $u_n v_n \to \infty$.

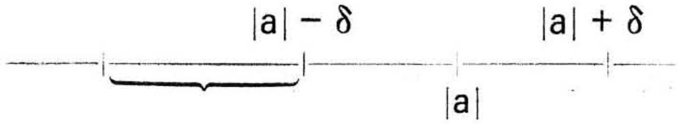
Posto isto, podemos demonstrar os seguintes teoremas:

TEOREMA 1. *Se* u_n *tende para um limite* a *diferente de zero (finito ou infinito) e* $v_n \to \infty$, *então* $u_n v_n \to \infty$.

*Demonstração**:*

Aplicando o lema 3, basta demonstrar que existe um número $\varepsilon > 0$ tal que $|u_n| > \varepsilon$ a partir de certa ordem. Ora isto será verdade, se $u_n \to \infty$ (por definição). Resta-nos, pois, analisar o caso em que u_n tende para um número *a* diferente de zero. Neste caso, $|u_n| \to |a|$ (ver n.º 21). Portanto, se tomarmos um número positivo $\delta < |a|$, existe uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |a| - \delta < |u_n| < |a| + \delta$$



Então, se pusermos $\varepsilon = |a| - \delta$, será $\varepsilon > 0$ *(porquê?)* e

$$n > r \Rightarrow |u_n| > \varepsilon \quad , \quad \text{q. e. d.}$$

TEOREMA 2. *Se* u_n *tende para um limite* $a \neq 0$ *e* $v_n \to 0$, *então* $\dfrac{u_n}{v_n} \to \infty$ (supondo $v_n \neq 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Este teorema é consequência imediata do anterior e do lema 1, visto que se tem:

$$\frac{u_n}{v_n} = u_n \cdot \frac{1}{v_n}$$

TEOREMA 3. *Se* u_n *tende para um limite finito e* $v_n \to \infty$ *então* $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$ (supondo $v_n \neq 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Demonstração:

Suponhamos que $u_n \to a$ (finito) e $v_n \to \infty$. Então $1/v_n \to 0$ e, pelo teorema do produto (n.º 22):

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \left(u_n \cdot \frac{1}{v_n}\right) = \lim u_n \cdot \lim \frac{1}{v_n} = a \cdot 0 = 0$$

TEOREMA 4. *Se* $u_n \to \infty$ *e* v_n *tende para um limite finito, então* $\frac{u_n}{v_n} \to \infty$ *(com* $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Este teorema é consequência do teorema 1, notando que, se v_n tende para um limite *a* finito, então $1/v_n$ tende para um limite diferente de zero, que será finito ou infinito, conforme $a \neq 0$ ou $a = 0$.

TEOREMA 5. *Se* u_n *tende para um limite finito e* $v_n \to \infty$, *então* $u_n + v_n \to \infty$.

Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor.

28. **Regras de cálculo com o símbolo** ∞. A fim de facilitar a aplicação dos teoremas anteriores, é cómodo adoptar as seguintes convenções:

I. $\frac{a}{0} = \infty$, se $a \neq 0$.   III. $a \cdot \infty = \infty$, se $a \neq 0$

II. $\frac{a}{\infty} = 0$, se $a \neq \infty$.   IV. $\frac{\infty}{a} = \infty$, se $a \neq \infty$

V. $a + \infty = \infty$, se $a \neq \infty$.

Note-se que estas convenções são as expressões abreviadas, respectivamente, dos teoremas 2, 3, 1, 4 e 5. Tais convenções permitem-nos, agora, generalizar os teoremas relativos aos limites da soma, do produto e do quociente, tornando mais cómodo o cálculo dos limites. Assim, o TEOREMA DO LIMITE DO QUOCIENTE pode, agora, generalizar-se nos seguintes termos:

O limite dum quociente é igual ao quociente do limite do dividendo pelo limite do divisor, quando estes limites existem e não são ambos nulos nem ambos infinitos.

Por sua vez o TEOREMA DO LIMITE DO PRODUTO surge com o aspecto:

O limite dum produto é sempre igual ao produto dos limites dos factores, quando estes limites existem, sem que um deles seja infinito e o outro nulo.

Finalmente o TEOREMA DO LIMITE DA SOMA generaliza-se deste modo:

O limite duma soma é igual à soma dos limites das parcelas, quando estes limites existem e não são ambos infinitos.

Note-se que os teoremas da potência e da raiz também podem ser generalizados. Assim, é fácil provar que:

Se $u_n \to \infty$, então $u_n^p \to \infty \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Se $u_n \to +\infty$, então $\sqrt[p]{u_n} \to +\infty \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Estes teoremas dão lugar às convenções:

$$\infty^p = \infty, \quad \sqrt[p]{\infty} = \infty \qquad \text{se } p \in \mathbb{N}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO:

$$\frac{1+n}{3(1+\frac{1}{n})} \to \frac{1+\infty}{3(1+0)} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

$$(1+\sqrt{n})(1+n^2) \to (1+\sqrt{\infty})(1+\infty) = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\sqrt{n}} \to \frac{3+\frac{1}{\infty}}{1-\sqrt{\infty}} = \frac{3+0}{1-\infty} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Note-se que, nos dois primeiros exemplos, o limite é precisamente $+\infty$, enquanto no terceiro o limite é $-\infty$.

29. **Novos símbolos de indeterminação.** Na regra I do número anterior excluímos a hipótese $a = 0$. Nesse caso, obtém-se a expressão $0/0$ que, como já foi dito atrás, é um *símbolo de indeterminação*. Quando duas sucessões u_n e v_n tendem ambas para zero, todos os casos se podem dar a respeito do quociente u_n/v_n: ou é convergente ou tende para infinito ou não tende para limite algum. Veremos exemplos destes diversos casos, ao tratarmos de limites de funções de variável real.

Interessa-nos, agora, estudar novos símbolos de indeterminação:

a) *Símbolo* $\frac{\infty}{\infty}$. Nas regras II e IV do número anterior excluímos a hipótese $a = \infty$. Nesse caso, obtém-se a expressão ∞/∞, que é um *símbolo de indeterminação*. Quer isto dizer o seguinte: quando duas sucessões u_n e v_n tendem ambas para ∞, todos os casos se podem dar a respeito do quociente u_n/v_n, como vamos ver com exemplos.

I. Seja

$$u_n = n-1 \text{ e } v_n = 3n+1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Então $u_n \to \infty$ e $v_n \to \infty$. Por substituição em u_n/v_n, obtém-se o símbolo de indeterminação ∞/∞, que nada esclarece. Porém, dividindo ambos os termos da fracção por n, obtém-se:

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n-1}{3n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} \to \frac{1-\frac{1}{\infty}}{3+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

A sucessão u_n/v_n converge, portanto, para 1/3.

II. Seja $u_n = 1-n$ e $v_n = 2+\sqrt{n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Então $u_n \to \infty$, $v_n \to \infty$, e obtém-se, novamente, o símbolo ∞/∞ por substituição em u_n/v_n. Mas

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1-n}{2+\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{2}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{\frac{1}{\infty}-1}{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{-1}{0} = \infty$$

Por conseguinte $u_n/v_n \to \infty$.

III. Seja, agora, $u_n = 1+(-1)^n n$ e $v_n = n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Neste caso, obtém-se ainda a indeterminação ∞/∞. Mas

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n} + (-1)^n$$

O termo $1/n$ tende para zero. O termo $(-1)^n$ não tende para limite algum (finito ou infinito). Logo, a soma dos dois, igual a u_n/v_n, também não tende para limite algum.

Nos exemplos I e II achou-se um limite para u_n/v_n; diz-se então que se *levantou a indeterminação* (indeterminação aparente). No exemplo III não existe limite: diz-se então que *é impossível levantar, a indeterminação* (indeterminação real).

b) *Símbolo* $0 \times \infty$. Na regra III do número anterior excluímos a hipótese $a = 0$. Neste caso, obtém-se a expressão $0 \times \infty$, que é um *símbolo de indeterminação;* quer dizer: quando $u_n \to 0$ e $v_n \to \infty$ todos os casos se podem dar a respeito do produto $u_n v_n$, como se pode ver com exemplos.

c) *Símbolo* $\infty - \infty$. Na regra V do número anterior excluímos a hipótese $a = \infty$. Neste caso, é-se conduzido, em geral, a um novo tipo de indeterminação. Mas convém, desde já, notar os seguintes factos, que é fácil provar:

Se $u_n \to +\infty$ *e* $v_n \to +\infty$, *também* $u_n + v_n \to +\infty$

Se $u_n \to -\infty$ *e* $v_n \to -\infty$, *também* $u_n + v_n \to -\infty$

Abreviadamente, podemos exprimir estes factos pelas fórmulas:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

Mas se $u_n \to +\infty$ e $v_n \to -\infty$ (ou vice-versa), somos conduzidos à expressão

$$(+\infty) + (-8)$$

que abreviadamente se escreve $\infty - \infty$ e que é um símbolo de indeterminação. Seja por exemplo:

$$u_n = 3n \text{ e } v_n = -\sqrt{n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ e somos conduzidos à indeterminação $\infty - \infty$, para $u_n + v_n$. Porém

$$u_n+v_n = 3n - \sqrt{n} = n\,(3 - \frac{1}{\sqrt{n}}) \to \infty \times (3 - \frac{1}{\infty}) = \infty$$

Portanto, neste caso, $u_n + v_n \to \infty$ (mais precisamente $u_n + v_n \to +\infty$). Outros casos se podem verificar.

NOTA. Quando duas sucessões u_n e v_n tendem para ∞ *sem sinal determinado* (uma pelo menos), todos os casos se podem dar a respeito de $u_n + v_n$. Deste modo, a expressão $\infty + \infty$ deve, em rigor, ser considerada um símbolo de indeterminação.

30. **Limite da exponencial.** Seja *a* um número real qualquer e consideremos a sucessão

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^n,\ \ldots$$

constituída pelas sucessivas potências de expoente natural de *a*.

TEOREMA. *Se* $a > 1$, *a sucessão* $n \curvearrowright a^n$ *tende para* $+\infty$ (1).

(1) Neste caso, empregamos a expressão rigorosa 'sucessão $n \curvearrowright a^n$' em vez da expressão abreviada 'sucessão a_n', para evitar possíveis equívocos.

Demonstração:

Suponhamos $a > 1$. Então, se pusermos $h = a - 1$, será $h > 0$ e $a = 1 + h$, donde, segundo a fórmula do binómio:

$$(1) \qquad a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2}h + \ldots + h^n$$

Mas, como $h > 0$, os termos $\binom{n}{2}$, ..., h^n são todos positivos se $n > 1$ (e nulos se $n = 1$). Logo, de (1) resulta:

$$(2) \qquad a^n \geqslant 1 + nh \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Com esta fórmula é fácil agora demonstrar que $a^n \to +\infty$. Com efeito, seja L um número real qualquer. Ora, de (2) resulta:

$$1 + nh > L \Rightarrow a^n > L$$

Mas

$$1 + nh > L \Leftrightarrow n > \frac{L-1}{h}$$

Logo

$$n > \frac{L-1}{h} \Rightarrow a^n > L$$

Daqui se conclui:

$$\forall L \in \mathbb{R} \quad , \quad \exists p \in \mathbb{N}: \ n > p \underset{n}{\Rightarrow} a^n > L$$

Mas isto significa que $a^n \to +\infty$, q. e. d.

EXEMPLOS:

$$2^n \to +\infty \quad , \quad 1{,}01^n \to +\infty \quad , \quad \text{etc.}$$

COROLÁRIO 1. *Se* $|a| > 1$, *então* $a^n \to \infty$.

Com efeito, $|a^n| = |a|^n$, quaisquer que sejam $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Então, se $|a| > 1$, tem-se pelo teorema:

$$|a|^n \to +\infty \text{ e portanto } |a^n| \to +\infty$$

ou seja $a^n \to \infty$ (cf. n.º 26, pg. 88).

É claro que $|a| > 1 \Leftrightarrow a > 1 \vee a < -1$. Se $a > 1$, então $a^n \to +\infty$ como já vimos. Se $a < -1$, então $a^n \to \infty$ sem sinal determinado. Por exemplo, se $a = -2$, tem-se a sucessão oscilante:

$$-2,\ 4,\ -8,\ 32,\ -64,\ \ldots,\ (-2)^n,\ \ldots \to \infty$$

COROLÁRIO 2. *Se* $|a| < 1$, *então* $a^n \to 0$.

Com efeito, suponhamos $|a| < 1$. Então se pusermos $k = 1/a$, vem:

$$|k| = \frac{1}{|a|} > 1$$

e portanto $k^n \to \infty$ segundo o corolário anterior. Por outro lado, tem-se $a = 1/k$, donde

$$a^n = \frac{1}{k^n} \text{ e portanto } a^n \to 0 \qquad \textit{(porquê?)}$$

EXEMPLOS:

$$(-\frac{1}{2})^n \to 0 \quad , \quad 0{,}75^n \to 0 \quad , \quad 0{,}9999^n \to 0$$

A primeira destas sucessões tende para 0 por valores alternadamente positivos e negativos. E as outras duas?

Podemos escrever então $0{,}75^n \to 0^+$, etc.

Resta-nos analisar o caso em que $|a| = 1$, isto é, em que $a = 1$ ou $a = -1$. Se $a = 1$, tem-se $1^n = 1$ para todo o *n* e assim $a^n \to 1$. Se $a = -1$, tem-se a sucessão $-1, 1, -1, \ldots$ que, como vimos, não tende para limite algum. Em resumo:

$$|a| > 1 \Rightarrow a^n \to \infty \begin{cases} a > 1 \Rightarrow a^n \to +\infty \\ a < -1 \Rightarrow a^n \text{ oscilante} \end{cases}$$

$$|a| < 1 \Rightarrow a^n \to 0$$

$$a = 1 \Rightarrow a^n \to 1 \quad , \quad a = -1 \Rightarrow a^n \text{ não tem limite}$$ [1].

31. **Soma de todos os termos duma progressão geométrica.** Como é sabido, sendo r um número real qualquer, chama-se *progressão geométrica de razão* r toda a sucessão em que cada termo

---

(1) Ver exercícios no final do número seguinte.

a partir do segundo é igual ao produto do anterior por r. Se for *a* o primeiro termo, a progressão geométrica de razão r será

$$a \ , \ ar \ , \ ar^2 \ , \ ar^3 \ , \ \ldots$$

e vê-se que o termo de ordem *n* (termo geral) é:

$$(1) \qquad a_n = a\, r^{n-1}$$

Vamos, agora, supor sempre $a \neq 0$. Como é sabido, a soma dos *n* primeiros termos da sucessão (1) é dada pela fórmula

$$(2) \qquad \boxed{S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r}, \text{ quando } r \neq 1}$$

Tem-se, com efeito, supondo $r \neq 1$,

$$\frac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}$$

e portanto

$$a\,\frac{1-r^n}{1-r} = a + ar + \ldots + ar^{n-1} = S_n$$

Consideremos, agora, a sucessão

$$S_1, \ S_2, \ \ldots, \ S_n, \ \ldots$$

Quatro casos se podem dar[1]:

1.º caso. $|r| < 1$. Então, aplicando o corolário 2 do número anterior e lembrando que a e r são *constantes* na sucessão, virá:

$$S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r} \to a\,\frac{1-0}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

2.º caso. $|r| > 1$. Virá, então, aplicando o corolário 1 do número anterior e lembrando que $a \neq 0$:

$$S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r} \to a\,\frac{1-\infty}{1-r} = \frac{a}{1-r} \times \infty = \infty$$

Mais ainda, é fácil ver que:

$$r > 1 \Rightarrow S_n \to +\infty \text{ se } a > 0 \text{ e } S_n \to -\infty \text{ se } a < 0$$

$$r < -1 \Rightarrow S_n \text{ oscilante}$$

3.º caso. $r = 1$. Agora $S_n = a + \ldots + a$ (n vezes) $=$ na e portanto $S_n \to \infty$, visto que $a \neq 0$.

4.º caso. $r = -1$. Agora $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, ... e, como $a \neq 0$, vê-se que S_n *não tende para limite algum.*

---

(1) Será conveniente estudar antes disto os exemplos concretos mais simples (I, II e V) que vêm a seguir, indo assim do *particular para o geral.* Convirá, depois, voltar do *geral ao particular,* aplicando a teoria a exemplos concretos menos simples.

Desta análise, resulta em particular o seguinte

TEOREMA. *A sucessão* S_n *é convergente, sse* $|r| < 1$. *Neste caso, tem-se:*

$$\boxed{\lim S_n = \frac{a}{1-r}}$$

EXEMPLOS:

I. Consideremos a progressão geométrica

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \ldots$$

cujo primeiro termo é $a = 1/2$ e cuja razão é $r = 1/2$. A soma dos seus *n* primeiros termos é:

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

e portanto, neste caso, $S_n \to 1$.

Este limite aparece intuitivamente ao nosso espírito como sendo a soma de *todos* os termos da sucessão. Teremos pois assim uma *soma com uma infinidade de parcelas,* que somos levados a representar pela expressão:

$$(3) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

ou, abreviadamente, por qualquer das expressões:

$$(3') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,, \text{ etc. (n, k, etc. são } \textit{índices mudos}\text{).}$$

A expressão (3) ou qualquer das suas equivalentes (3') é chamada uma *série geométrica* e, precisamente, a *série geométrica de razão* 1/2, *cujo primeiro termo é* 1/2.

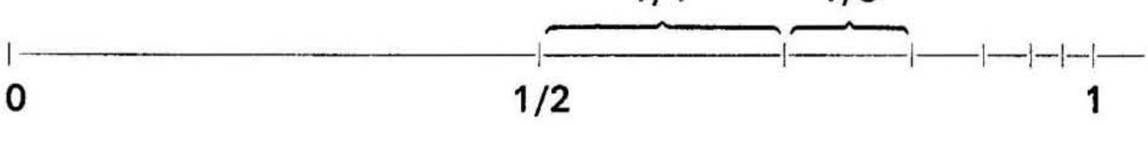
O valor destas expressões será, pois, o limite da referida sucessão S_n, isto é:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Este exemplo está relacionado com o PARADOXO DA DICOTOMIA (DE ZENÃO), numa das suas formas:

Tudo o que se move tem de percorrer metade do caminho, antes de chegar ao fim; tem de percorrer, depois, metade do que resta (ou seja 1/4 *do total); depois ainda, metade do que resta (ou seja* 1/8 *do total) e assim sucessivamente. Deste modo, nunca chega ao fim, o que equivale a dizer que não existe movimento.*

A situação é descrita na figura seguinte:



Segundo as considerações anteriores, poderíamos dizer que o percurso total (ou seja a unidade) é a soma de uma infinidade de parcelas indicada pela expressão (3). Matematicamente, o paradoxo é resolvido de modo análogo ao que se indica no *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano,* para o *paradoxo da tartaruga.* O exemplo seguinte aplica-se a este paradoxo.

II. Consideremos a dízima infinita de período 1

$$11{,}11111111\ldots,$$

que se escreve abreviadamente: 11,(1). Esta dízima representa, por definição, o limite da sucessão

$$10;\ 11;\ 11{,}1;\ 11{,}11;\ 11{,}111;\ 11{,}1111;\ldots,$$

cujo termo geral é a soma dos *n* primeiros termos da progressão geométrica de razão 0,1:

$$10;\ 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots;\ 10^{-n+2};\ \ldots$$

Será, pois, agora $a = 10$, $r = 1/10$ e portanto

$$S_n = 10\,\frac{1 - 0{,}1^n}{1 - 0{,}1}\ ,$$

donde:

$$S_n \to \frac{10}{1 - 0{,}1} = \frac{100}{9} = 11\,\frac{1}{9}$$

III. Seja a dízima infinita de período 327

$$0{,}327\,327\,327\ \dots = 0{,}(327)$$

Esta equivale à expressão

$$0{,}327 + 0{,}000\,327 + 0{,}000\,000\,327 + \dots$$

que é a série geométrica de razão 0,001, *cujo primeiro termo é* 0,327. Tem-se, pois, neste caso:

$$\lim S_n = \frac{0{,}327}{1-0{,}001} = \frac{327}{999}$$

ou seja 0,(327) = 327/999.

Analogamente se reconhece que

$$5{,}(37) = 5 + 0{,}(37) = 5 + \frac{37}{99}\,,$$

$$2{,}3(8) = 2{,}3 + \frac{0{,}(8)}{10} = 2{,}3 + \frac{8}{90}\,, \quad \text{etc.}$$

e que, dum modo geral, *toda a dízima periódica representa um número racional.*

A recíproca, como se sabe, também é verdadeira: *todo o número racional é representável por uma dízima periódica* (cujo período pode ser 0, em particular). E é fácil ver porquê. Consideremos, por exemplo, o número racional 35/273. Ao aplicar o processo habitual da divisão para converter esta fracção em dízima, os *restos parciais sem vírgula são, necessariamente, menores que o divisor,* 273; há, por isso, *quando muito,* 273 restos parciais diferentes (sem vírgula), e assim chegará um momento em que *reaparece* um destes restos, o que dá origem a uma *sequência de algarismos que se vai repetindo indefinidamente.* Essa sequência de algarismos é precisamente o período.

Note-se que, *em geral,* o facto de uma dízima ser periódica tem interesse meramente teórico, sobretudo se o número de algarismos do período é muito grande. Basta lembrar que, *na prática,* se trabalha normalmente com valores aproximados, representados no sistema decimal com um número limitado de algarismos exactos (12 nos melhores computadores).

IV. Considere a progressão geométrica de razão $-1/2$ e cujo primeiro termo é $1/2$. a) Calcule, sob a forma de dízima, a soma dos *n* primeiros termos da progressão, sendo $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e represente os resultados sobre um eixo. b) Calcule, sob as formas de fracção ordinária e de dízima, a soma de todos os termos da progressão, e indique de que modo S_n tende para essa soma.

V. ASAPHAD, historiador árabe, conta que SESSA apresentou o jogo de xadrez, que acabara de inventar, a SHERAN, príncipe da India. Perguntando-lhe este que recompensa queria, SESSA respondeu: 'Que V. Majestade se digne dar-me 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 pela 2.ª, 4 pela 3.ª, e assim sucessivamente, duplicando sempre até à 64.ª casa'. Encantado com a modéstia do inventor, o príncipe ordenou aos seus ministros que lhe satisfizessem o pedido. Pergunta-se: a) Quantos grãos de trigo receberia SESSA? b) Que área seria necessária semear para colher esse trigo, supondo que 1 hectare produz 25 hl e que 1 hl contém aproximadamente

2 000 000 de grãos? (Basta apresentar os resultados com dois algarismos exactos, utilizando logaritmos ou a régua de cálculo.)

Resp.: a) $2^{64}-1 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$ grãos; b) $3{,}6 \times 10^{11}$ ha.

Obs.: Como a área total das terras sobre o Globo é aproximadamente $1{,}3 \times 10^{10}$ ha, seria necessária mais de 28 vezes esta área e, descontando as terras incultas, seriam necessários vários séculos para pagar o trigo prometido.

Este exemplo mostra como é rápido o *crescimento exponencial,* isto é, o crescimento da função exponencial a^n quando $a > 1$ (também se diz '*crescimento em progressão geométrica*' em vez de '*crescimento exponencial*'). Note-se porém que, se a base é maior que 1 mas *próxima de* 1, o crescimento só começa a ser rápido a partir de uma ordem elevada. Exemplo: calcular, por meio de logaritmos, a ordem a partir da qual se tem $1{,}01^n > 1000$.

Analogamente, se $|a| < 1$, a^n *tende em geral rapidamente para zero,* mas se $|a|$ é próximo de 1, a convergência só começará a ser rápida a partir de uma ordem elevada. Exemplo: calcular a ordem a partir da qual se tem $0{,}99^n < 0{,}01$.

EXERCÍCIOS RELATIVOS AO NÚMERO ANTERIOR

I. Indicar quais das seguintes sucessões são convergentes e determinar os respectivos limites:

a) $\dfrac{5^{n+1} + 2^{n+1}}{5^n + 2^n}$; b) $\sqrt[n]{5^n + 2^n}$; c) $\sqrt[n]{5^n + (-5)^n}$

d) $\sqrt[n]{|(-5)^n + 2^n|}$; e) $\sqrt[n]{5^n + 2^n + (-2)^n}$

II. Indicar uma condição suficiente a que devem satisfazer dois números reais *a, b,* para que a sucessão $\sqrt[n]{|a^n + b^n|}$ seja convergente, e determine, nesse caso, o limite.

III. Problema análogo ao anterior para

$$\sqrt[n]{|a^n + b^n + c^n|}$$

IV. Sendo *a* um número maior que 1 e r um número real qualquer, achar sucessivamente os limites de

$$\frac{a^n}{n}, \quad \frac{a^n}{n^2}, \quad \frac{a^n}{n^r}$$

V*. Sendo *a* um número real qualquer, achar o limite da sucessão $\frac{a^n}{n!}$.

Ver respostas no final do número seguinte.

32. **Aproximações por meio de séries. Série binomial*** Há métodos de aproximações sucessivas que não se enquadram no esquema dos métodos iterativos. Um deles é o *método dos desenvolvimentos em série.* Segundo este, os sucessivos valores aproximados são obtidos a partir de uma sucessão

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

adicionando sucessivamente os seus termos, o que dá:

$$u_1,\ u_1 + u_2,\ u_1 + u_2 + u_3, \dots,\ u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots$$

Designaremos por s_n a soma dos *n* primeiros termos da sucessão dada, isto é, ponhamos

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Assim, a partir da sucessão dada, obtivemos uma nova sucessão, de termo geral s_n. O que interessa na prática, primeiro que tudo, é que a nova sucessão seja convergente. Representando por *s* o seu limite, isto é, pondo $s = \lim s_n$, é-se levado a escrever então

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

ou, condensadamente,

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Em qualquer hipótese, a expressão

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

ou a sua abreviatura $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é chamada uma *série*, cujos *termos* são $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ *Portanto, em matemática, a palavra 'série' não significa o mesmo que 'sucessão' ao contrário do que acontece na linguagem vulgar.*

A série diz-se *convergente,* se a soma s_n dos seus n primeiros termos é convergente quando n aumenta indefinidamente; isto é, se a sucessão s_n tende para um limite finito, s. Neste caso, o limite s é chamado a *soma da série,* e então $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$ são os sucessivos valores aproximados da soma da série.

Se a sucessão s_n é divergente, a série também se diz *divergente.*

O primeiro exemplo de série que se nos apresenta naturalmente é o das séries geométricas, estudadas no número anterior. As séries geométricas estão na base do *estudo geral das séries,* que tem como objectivos fundamentais estabelecer:

1) *critérios de convergência,* isto é, condições que sejam suficientes ou necessárias (ou ambas as coisas) para que a série dada seja convergente;

2) *processos de cálculo* que permitam, dada uma série convergente e um número positivo δ, determinar n de modo que s_n seja valor aproximado de s a menos de δ(1).

Aliás, é de notar que as próprias dízimas infinitas são séries, representadas abreviadamente.

Por exemplo, a dízima periódica 0,666 ... 6... é uma abreviatura da série geométrica

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$$

(1) Na prática, trabalha-se geralmente com valores aproximados dos termos $u_1, u_2, \ldots$ e então haverá que contar também com o erro da própria soma s_n.

e, na prática, o cálculo da soma de uma série consiste afinal em passar esta à forma de dízima.

Um outro exemplo importante de série é o das *séries binomiais*. Como é sabido, sendo r um número inteiro $\geqslant 0$, tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \ldots + x^r$$

Suponhamos, agora, que r é um *número real não pertencente* a $\mathbb{N}_0$, e continuemos a escrever neste caso:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!} \quad , \ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Como, agora, se tem $r \neq k$, $\forall k$, o *coeficiente binomial* $\binom{r}{k}$ não se anula por maior que seja *k* e assim, em vez de uma *soma com um número finito de parcelas,* tem-se uma *série*

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \ldots + \binom{r}{n} x^n + \ldots$$

chamada *série binomial.*

Ora bem: *prova-se que esta série é convergente se* $|x| < 1$ *e que, neste caso, a soma da série é de facto igual a* $(1+x)^r$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

As séries binomiais têm numerosas aplicações. Vamos indicar apenas uma, de carácter elementar. Suponhamos que se trata de calcular $\sqrt[5]{23}$ (cf. n.º 18) pelo *método dos desenvolvimentos em série.* Como

$$23 = 2^5 - 9,$$

tem-se:

$$\sqrt[5]{23} = \sqrt[5]{2^5\left(1 - \frac{9}{32}\right)} = 2\left(1 - \frac{9}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Como, por outro lado, $9/32 < 1$, podemos aqui aplicar a série binomial:

$$\left(1 - \frac{9}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{32} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2}\left(\frac{9}{32}\right)^2 -$$

$$- \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right)}{2 \times 3}\left(\frac{9}{32}\right)^3 + \ldots$$

Note-se que, para o cálculo aproximado da soma da série, é preciso reduzir as fracções ordinárias à forma decimal. A série converge rapidamente, mas este método para o cálculo da raiz é muito menos expedito que o de NEWTON, mesmo quando se trabalha com um computador.

Veremos que são conhecidas diversas séries para o cálculo do número π com a aproximação que se queira; mas há umas cuja convergência é mais rápida que outras.

EXERCÍCIO. Verificar que, se $r = -1$, o desenvolvimento de $(1+x)^r$ em série binomial coincide com o desenvolvimento em série geométrica de razão x.

RESPOSTAS AOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR

I. São convergentes todas menos a terceira e o limite é 5.

II. $|a| > |b|$ ou $|b| > |a|$. O limite é $|a|$ ou $|b|$, conforme $|a| > |b|$ ou $|b| > |a|$.

III. Por exemplo: $|a| > |b| \geqslant |c|$. Neste caso o limite é $|a|$.

IV. O limite é sempre ∞, isto é: *a exponencial* a^n (com $a > 1$) *cresce mais rapidamente que qualquer potência de* n (ou ainda: é um infinitamente grande de *ordem superior* à de qualquer potência de n). A ideia-chave é a mesma da demonstração do teorema do n.º 30, considerando mais termos no desenvolvimento binomial e atendendo a este facto: *'Se* $v_n \to +\infty$ *e* $u_n \geqslant v_n$ *a partir de certa ordem, então* $u_n \to +\infty$*'.*

V. O limite é zero. A ideia-chave consiste em considerar um determinado número natural $p > |a|$ e decompor $a^n/n!$ num produto de dois factores, o primeiro dos quais é a *constante* $a^p/p!$, notando que se tem:

$$\frac{|a|}{k} < \frac{|a|}{p} \quad , \quad \forall k > p \qquad \text{se } a \neq 0$$

(considerar em primeiro lugar o caso $a \geqslant 0$*).*

Em particular, se $a > 1$, vê-se que a exponencial a^n é um infinitamente grande de *ordem inferior* à de $n!$ *Aliás, já no 6.º ano se tinha observado que a função factorial cresce rapidissimamente.*

33. **Um método geral de resolução de equações algébricas de qualquer grau*.** O método que vamos expor resumidamente chama-se *método de Gräffe* (do nome do matemático suíço que o inventou há mais de um século) e baseia-se num facto muito simples, que é a generalização dos resultados dos exercícios II e III do n.º 30:

Seja p *um número natural qualquer (fixo) e* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *números quaisquer, reais ou complexos, tais que*

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| \geqslant |\alpha_3| \geqslant \ldots \geqslant |\alpha_p|$$

Nestas condições, a sucessão de termo geral

$$\sqrt[n]{|\alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_p^n|} \qquad \textit{(com n variável)}$$

tende para $|\alpha_1|$ (1).

Para maior clareza, consideremos, em primeiro lugar, o caso de uma equação do 3.º grau:

$$(1) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0)$$

de coeficientes reais. Designando por x_1, x_2, x_3 as raízes desta equação, já sabemos que se tem:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \ , \ \frac{c}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \ , \ -\frac{d}{a} = x_1x_2x_3$$

---

(1) Supõe-se que, neste momento, já se conhece o conceito de 'módulo dum número complexo' e a extensão das propriedades dos módulos da soma, do produto e do quociente ao corpo complexo. O aluno pode fazer, por si, a demonstração do facto enunciado.

Dividindo ambos os membros de (1) por *a* e pondo $b/a = A_1$, $c/a = A_2$, $d/a = A_3$, obtém-se a equação equivalente:

$$(1') \qquad x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

Seja, agora, *n* um número natural qualquer e suponhamos que foi possível achar, por qualquer processo, *a equação do* 3.º *grau que tem por raízes* x_1^n, x_2^n, x_3^n. Se a escrevermos sob a forma

$$(2) \qquad x^3 + A_1^{(n)}x^2 + A_2^{(n)}x + A_3^{(n)} = 0$$

será, pois:

$$-A_1^{(n)} = x_1^n + x_2^n + x_3^n\,,\quad A_2^{(n)} = x_1^nx_2^n + x_1^nx_3^n + x_2^nx_3^n\,,\quad -A_3^{(n)} = x_1^nx_2^nx_3^n$$

Em tudo o que segue supomos os índices 1, 2, 3, escolhidos de tal modo que

$$|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3|$$

Vamos, agora, considerar dois casos particulares (os outros casos possíveis são tratados de modo análogo):

1.º caso. As raízes x_1, x_2, x_3 são reais e

$$|x_1| > |x_2| > |x_3|.$$

Então será também $|x_1x_2| > |x_1x_3| > |x_2x_3|$ e, aplicando duas vezes a propriedade anterior, vê-se que:

$$\sqrt[n]{|A_1^{(n)}|} = \sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n|} \to |x_1|$$

(quando $n \to \infty$)

$$\sqrt[n]{|A_2^n|} = \sqrt[n]{|x_1^n x_2^n + x_1^n x_3^n + x_2^n x_3^n|} \to |x_1 x_2|$$

Portanto, se *n* for *bastante elevado*, teremos, com *boa aproximação:*

$$\sqrt[n]{|A_1^{(n)}|} \approx |x_1| \quad , \quad \sqrt[n]{|A_2^{(n)}|} \approx |x_1x_2|$$

Uma vez calculados $|x_1|$ e $|x_1x_2|$ com a devida aproximação, podemos calcular $|x_2|$ e $|x_3|$, por meio das fórmulas

$$|x_2| = \frac{|x_1x_2|}{|x_1|} \quad , \quad |x_3| = \frac{|x_1x_2x_3|}{|x_1x_2|} = \frac{|A_3|}{|x_1x_2|}$$

Resta, pois, achar os *sinais* das raízes, visto que já conhecemos os seus *módulos*. Para isso, há vários processos. O mais elementar consiste em verificar directamente quais dos números $|x_1|$, $-|x_1|$, $|x_2|$, $-|x_2|$, $|x_3|$, $-|x_3|$ são efectivamente raízes. Trata-se, pois, de calcular, com a aproximação possível, os valores de

$$f(|x_1|) \quad , \quad f(-|x_1|) \quad , \quad \text{etc.}$$

sendo $f(x)$ o primeiro membro da equação do 3.º grau proposta, e ver quais são *aproximadamente nulos*. Este processo elementar tem a vantagem de permitir um controlo dos cálculos, evitando possíveis erros cometidos no cálculo dos módulos.

2.º caso. *As raízes x_1 e x_2 são imaginárias (conjugadas) e têm módulo superior ao da raiz x_3 (real).* Seja $x_1 = u + iv$, $x_2 = u - iv$, com $u, v \in \mathbb{R}$. Então $|x_1| = |x_2| = \sqrt{u_2 + v_2} > |x_3|$ e a sucessão cujo termo geral é

$$\sqrt[n]{|A_1^{(n)}|} = \sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n|}$$

não converge. Mas, como

$$|x_1x_2| > |x_1x_3| = |x_2x_3|,$$

a sucessão $\sqrt[n]{|A_2^{(n)}|}$ converge e tem-se, precisamente:

$$\lim \sqrt[n]{|A_2^{(n)}|} = |x_1x_2|$$

Assim, teremos com a aproximação que quisermos

$$\sqrt[n]{|A_2^{(n)}|} \approx |x_1x_2|$$

desde que *n* seja bastante elevado. Quanto a $|x_3|$, tem-se:

$$|x_3| = \frac{|x_1x_2x_3|}{|x_1x_2|} = \frac{|A_3|}{|x_1x_2|}$$

Como $|x_1x_2| = x_1x_2 = (u+iv)(u-iv) = u^2 + v^2 > 0$, o sinal de x_3 será o de $-A_3$. Finalmente, note-se que

$$x_1 + x_2 = -A_1 - x_3$$

A partir de $x_1 x_2$ e $x_1 + x_2$ determinam-se x_1 e x_2 pelo processo usual:

$$x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} + i\sqrt{x_1 x_2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$$

$$x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} - i\sqrt{x_1 x_2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$$

Um caso perfeitamente análogo é aquele em que as raízes x_2 e x_3 são imaginárias, com módulo inferior ao de x_1.

Mas, todas as considerações precedentes foram baseadas numa hipótese: a de que sabemos construir a equação (2), cujas raízes são x_1^n, x_2^n, x_3^n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. No entanto, é claro que *basta saber construir tais equações para valores de* n *tão grandes quanto se queira*. Ora, isso é possível por meio de um artifício muito simples, que vamos indicar.

Consideremos, de novo, a equação

$$(3) \qquad x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

Esta equação é equivalente a

$$x^3 + A_2x = -A_1x^2 - A_3$$

Esta, por elevação ao quadrado, implica a seguinte:

$$x^6 + 2A_2x^4 + A_2^2x^2 = A_1^2x^4 + 2A_1A_3x^2 + A_3^2,$$

equivalente a:

$$x^6 - (A_1^2 - 2A_2)x^4 + (A_2^2 - 2A_1A_3)x^2 - A_3^2 = 0$$

Pondo, agora, $x^2 = y$, vê-se que a equação obtida

$$(4) \qquad y^3 - (A_1^2 - 2A_2)y + (A_2^2 - 2A_1A_3)y - A_3^2 = 0$$

tem como raízes x_1^2, x_2^2, x_3^2. A equação (4) é chamada a *transformada de Gräffe* da equação (3). E é evidente que nada nos impede de continuar a usar em (4) a letra x em vez de y como incógnita.

Posto isto, podemos proceder para (4) como se fez para (3): a transformada de Gräffe de (4) terá como raízes x_1^4, x_2^4, x_3^4. Por sua vez, a transformada de Gräffe desta terá como raízes x_1^8, x_2^8, x_3^8. E assim sucessivamente. Dum modo geral, sendo p um número natural qualquer, ao fim de p operações deste tipo, obtém-se a *transformada de Gräffe de ordem* p da equação (3) e essa transformada tem como raízes

$$x_1^n, \ x_2^n, \ x_3^n \quad , \quad \text{sendo } n = 2^p$$

Como se vê, podemos assim alcançar muito rapidamente valores elevados de n. Por outro lado, a *uniformidade mecânica do processo* torna-o facilmente adaptável ao cálculo automático.

Se, em vez de uma equação do 3.º grau, tivermos uma do 4.º grau,

$$x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0,$$

a transformada de Gräffe será:

$$x^4 + A_1^{(2)}x^3 + A_2^{(2)}x^2 + A_3^{(2)}x + A_4^{(2)} = 0$$

com $A_1^{(2)} = -A_1^2 + 2A_2$, $A_2^{(2)} = A_2^2 - 2A_1A_3 + 2A_4$, $A_3^{(2)} = -A_3^2 + 2A_2A_4$, $A_4^{(2)} = A_4^2$. E analogamente para as equações de grau superior ao quarto. As restantes considerações são também perfeitamente análogas às que fizemos para as equações do 3.º grau, excepto no que se refere a raízes imaginárias; para estas, o cálculo das partes real e imaginária, uma vez conhecido o módulo, torna-se mais complicado quando aumenta o grau da equação. São conhecidos diferentes processos para este último cálculo.

EXEMPLOS:

I. *Calcular as raízes da equação* $x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = 0$, *com 7 algarismos exactos.*

Este problema, como todos os que, neste volume, exigem cálculo automático, foi resolvido na Divisão de Mecânica Aplicada do L.N.E.C.

As sucessivas transformadas de Gräffe, fornecidas pelo computador até à ordem que pareceu conveniente, foram as seguintes:

$$x^3 + 8x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$x^3 + 88x^2 - 112x + 256 = 0$$

$$x^3 + 7968x^2 - 32512x + 65536 = 0$$

$$x^3 + 6{,}3554048 \cdot 10^7x^2 + 1{,}2648448 \cdot 10^7x + 4{,}2949673 \cdot 10^9 = 0$$

$$x^3 + 4{,}0391170 \cdot 10^{15}x^2 - 5{,}4576513 \cdot 10^{17}x + 1{,}8446744 \cdot 10^{19} = 0$$

$$x^3 + 1{,}6314466 \cdot 10^{31}x^2 + 1{,}4884247 \cdot 10^{35}x + 3{,}4028237 \cdot 10^{38} = 0$$

Nas três últimas os coeficientes apresentam o aspecto com que foram *lidas* na resposta do computador(1).

Note-se que, a partir da 4.ª transformada, os valores dos coeficientes já não são exactos, porque a máquina só fornece directamente 8 *algarismos exactos. Daqui* resultam *erros de arredondamento,* que se vão acumulando, mas que são depois compensados em grande parte nas extracções de raiz.

De acordo com o que foi dito atrás, as equações anteriores têm como raízes as potências das raízes x_1, x_2, x_3 da proposta, com os expoentes 2, 4, 8, 32, 64 e 128, respectivamente.

Efectuando as extracções de raízes com estes índices, conforme foi indicado, a máquina forneceu as seguintes sequências de valores aproximados para $|x_1|$, $|x_1x_2|$ e $|x_1x_2x_3|$:

$\|x_1\|$	$\|x_1x_2\|$	$\|x_1x_2x_3\|$
2,8284271	3,4641016	4
3,0628143	3,2531531	4
3,0737509	3,6644218	4
3,0739475	2,7789282	4
3,0739475	3,5832857	4
3,0739475	3,5446541	4

Como era de esperar, os valores obtidos para $|x_1x_2x_3|$ são *exactos,* todos iguais a 4 *(porquê?).*

---

(1) No papel escrito à máquina pela teleimpressora, cada número é dado por uma dízima de 8 algarismos, com parte inteira maior que 0 e menor que 10, e pela *característica* de logarítmo do número, isto é, pelo expoente (positivo, negativo ou nulo) da potência de 10 pela qual deve ser multiplicada a dízima; esta aparece precedida do sinal — se o número é negativo. Por exemplo, a expressão—3.2512037⊙04 representa o número $-3{,}2512037 \times 10^4 = -32512{,}037$, enquanto a expressão 7.3025609⊙—37 representa o número $7{,}3025809 \times 10^{-37}$.

Na 1.ª coluna, os 8 algarismos fornecidos pela máquina estabilizaram-se logo a partir do 4.º termo: há, portanto, *sinais evidentes de convergência,* que levam a concluir que x_1 é raiz real.

Na 2.ª coluna, não se observa qualquer *sintoma de convergência,* o que sugere o seguinte *diagnóstico*: as raízes x_2, x_3 devem ter módulos iguais e *são provavelmente imaginárias.* Esta hipótese é confirmada pelo facto de nem sequer haver estabilidade no sinal do coeficiente de x das transformadas de Gräffe.

Vejamos, agora, qual o sinal de x_1. Substituindo o último valor aproximado de $|x_1|$ no 1.º membro da equação proposta, obtém-se:

$$f(3{,}0739475) = -\,0{,}00000013$$

O valor assim obtido (chamado *resíduo*) é tão próximo de zero, que não restam dúvidas sobre a conclusão: a raiz x_1 é positiva e tem-se, com 8 *algarismos exactos:*

$$x_1 = 3{,}0739475 \ (^1)$$

Posto isto, para terminar o cálculo de x_2 e de x_3, basta observar que se tem $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, donde:

$$x_2 + x_3 = 2 - 3{,}0739475 = -\,1{,}0739475$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = -\,0{,}5369738 \ \text{(parte real de } x_2 \text{ e } x_3\text{) e,}$$

por outro lado, $x_1 x_2 = \dfrac{4}{3{,}0739475} = 1{,}3012584$

---

(1) Note-se que o facto de x_1 ser positivo podia já concluir-se *a priori* do facto de x_2 e x_3 serem imaginárias conjugadas (portanto $x_1 x_2 > 0$) e de ser $x_1 x_2 x_3 = 4 > 0$.

Portanto, a parte imaginária de x_2 e x_3 será:

$$x_2 - x_3 = i\sqrt{x_2x_3 - \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2} = 1{,}006438\,i$$

Assim obtemos, finalmente, com 7 *algarismos exactos:*

$$x_2 = -\,0{,}5369738 + 1{,}006438\,i$$

$$x_3 = -\,0{,}5369738 - 1{,}006438\,i$$

sendo o resíduo, para ambos estes valores:

$$0{,}00000001 - 0{,}00000005\,i$$

O tempo total de cálculo na máquina para este problema foi de cerca de 4 minutos. No entanto, se a máquina tivesse recebido ordem para fornecer unicamente os resultados finais no cálculo dos módulos, o tempo teria sido muito menor.

II. Seja agora a equação $x^3 - 4x^2 + x + 5 = 0$. Neste caso, o computador recebeu ordem para fornecer directamente os valores aproximados de $|x_1|$, $|x_2|$ e $|x_3|$, que foram os seguintes:

$\|x_1\|$	$\|x_2\|$	$\|x_3\|$
3,7416574	1,7113069	0,78086881
3,2675799	1,7127384	0,89341400
3,2014124	1,7134676	0,91149119
3,1987004	1,7135375	0,91222681
3,1986912	1,7135379	0,91222918
3,1986912	1,7135379	0,91222918

Manifesta-se, pois, convergência nas três sucessões (aliás, a máquina podia também ter recebido ordem para fornecer apenas os valores com os algarismos estabilizados).

Quanto a sinais, verificou-se que x_1 e x_2 são positivos e x_3 negativos, tendo-se:

$x_1 = 3{,}1986912$	com o resíduo	$-0{,}00000010$
$x_2 = 1{,}7135379$	» » »	$-0{,}00000004$
$x_3 = -0{,}91222918$	» » »	$-0{,}00000001$

III. Seja a equação

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5 = 0$$

Neste caso, o computador forneceu os seguintes valores das raízes, até à ordem decimal indicada:

$$x_1 = 2{,}2360680 \quad (\text{resíduo: } 0{,}00000091)$$

$$x_2 = -2{,}2360680 \quad (\text{resíduo: } 0{,}00000043)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = -0{,}50000000 + 0{,}86602540\, i \\ x_4 = -0{,}50000000 - 0{,}86602540\, i \end{array}\right\} \text{resíduo: } -(4+i)\ 10^{-8}$$

Aliás, pode verificar-se que se tem *exactamente*, neste caso:

$$x_1 = \sqrt{5}\ ,\ x_2 = -\sqrt{5}\ ,\ x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

e a razão é simples: o 1.º membro da equação foi construído *propositadamente* como produto de $x^2 - 5$ por $x^2 + x + 1$. Mas note-se que coincidências como esta são extremamente raras na prática, em que os coeficientes provêm de dados empíricos.

NOTA IMPORTANTE. Há métodos semelhantes ao de Gräffe que permitem calcular directamente os valores das raízes, *sem passar pelo cálculo dos módulos,* o que os torna mais expeditos.

O método de Gräffe e outros congéneres são pouco satisfatórios, quando há raízes com módulos *aproximadamente* iguais (mas não *exactamente* iguais). Nesses casos, há que utilizar, por exemplo, *métodos iterativos.* Deve notar-se que, além do método de Newton para o cálculo das raízes reais, há também métodos iterativos para o cálculo das raízes imaginárias. Mas importa, desde já, que a seguinte ideia fique bem gravada no espírito do aluno:

Em matemática aplicada, e nomeadamente no cálculo numérico, não há métodos universais que sejam igualmente eficazes para todos os casos: *o melhor método para um caso não é, muitas vezes, o melhor para outro.* A matemática pura está para a matemática aplicada, de certo modo, como a medicina está para a clínica, sendo uso dizer-se neste último caso: *não há doenças, há doentes.* Aqui, a lógica tem de ser, muitas vezes, compensada com a intuição: *a ciência torna-se arte.*

Índice

NOTA PRÉVIA 7

ADVERTÊNCIA 9

Capítulo I. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL

§ 1. *Cálculo numérico aproximado*

1. Considerações prévias intuitivas 11
2. Erro de um valor aproximado 14
3. Algarismos exactos dum valor aproximado. 20
4. Majoração do erro de uma soma 21
5. Cálculo aproximado de uma soma com erro inferior a um número dado 24
6. Erro do valor simétrico e erro do valor absoluto 25
7. Majoração do erro de uma diferença 27
8. Majoração do erro de um produto. 28
9. Cálculo aproximado de um produto com erro inferior a um número dado 33
10. Majoração do erro de um quociente 37
11. Cálculo aproximado de um quociente com erro inferior a um número dado. 40

12. Majoração do erro de uma potência 44

13. Majoração do erro de uma raiz 46

14. Desvio relativo e erro relativo. 49

15. Erro relativo de um produto 50

16. Erro relativo do quociente 51

17. Erros relativos da potência e da raiz. 52

§ 2. *Teoria dos limites de sucessões*

18. Métodos de aproximações sucessivas. 54

19. Convergência de uma sucessão 61

20. Pormenores de terminologia. 68

21. Primeiros teoremas sobre limites. 72

22. Álgebra dos limites 75

23. Métodos de iteração 81

24. Critérios particulares de convergência. 84

25. Símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação . . 86

26. Limites infinitos. 88

27. Operações com limites infinitos 90

28. Regras de cálculo com o símbolo ∞ 94

29. Novos símbolos de indeterminação. 96

30. Limite da exponencial 99

31. Soma de todos os termos duma progressão geométrica . . 102

32. Aproximações por meio de séries. Série binomial 111

33. Um método geral de resolução de equações algébricas de qualquer grau 117

§ 3. *Limites de funções de variável real*

34. Conceitos e propriedades elementares 129

35. Definição de 'limite de uma função segundo Cauchy'. . . . 132

36. Axioma de Zermelo 135

37. Exemplos de limites de funções circulares e das funções exponencial e logarítmica 140

38. Indeterminações 146

39. Funções contínuas 147

§ 4. *Derivadas*

40. Conceitos fundamentais e regras de derivação 149

41. Conceito de diferencial 153

42. Regras de diferenciação 158

43. O conceito de diferencial nas ciências da natureza 160

44. Derivação das funções exponencial e logarítmica 164

45. Derivada da função logarítmica 171

46. Derivadas das funções circulares. 173

47. Máximos e mínimos, concavidades e inflexões. 175

48. Teorema de Cauchy. 177

49. Método da tangente (ou de Newton) 183

50. Método da corda (ou regra da falsa posição) 189

51. Interpolação por diferenças finitas 191

Capítulo II. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL

1. O problema da primitivação 203

2. Primitivações imediatas. 207

3. Regras elementares de primitivação 211

4. Alguns exemplos de aplicação às ciências da natureza . . . 218

5. Noção intuitiva de integral 228

6. Definição de integral 235

7. O integral como limite de uma sucessão 238

8. Interpretação geométrica do conceito de integral 242

9. Valor médio duma função; teorema da média 243

10. Teorema da decomposição do intervalo 247

11. Teorema fundamental do cálculo integral 249

12. Fórmula de Barrow 257

13. Cálculo de áreas 262

14. Cálculo de volumes 265

15. Cálculo do comprimento de curvas 270

16. Novos exemplos da física 277

17. Propriedades em que se baseia o cálculo numérico de integrais 285

18. Métodos de integração numérica 289

19. Fórmula de Taylor 293

20. Série de Taylor 296

21. Desenvolvimentos em série de potências 298

22. Integração de séries termo a termo 301

23. Exemplos de equações diferenciais 307

24. Integração numérica de equações diferenciais 312

Capítulo III — TEORIA DEDUTIVA DOS NÚMEROS NATURAIS

1. Caracterização da estrutura do grupóide ($\mathbb{N}$,+) 319

2. Princípio de indução em IN. Sucessões; definições por recorrência. 325

3. O princípio de indução matemática em termos de compreensão. Demonstrações por indução 333

4. Nova forma do raciocínio de indução matemática 342

5. Regresso ao problema inicial: caracterização da estrutura de (IN,+) 344

6. Axiomática da teoria dos números naturais. Primeiras definições e teoremas 346

7. Caracterização da estrutura aditiva dos números naturais (conclusão) 353

8. Axiomática de Peano 359

9. Axiomáticas compatíveis 362

10. Axiomáticas categóricas 363

11. Axiomáticas independentes 365

12. Existem afinal conjuntos infinitos? 366

13. O problema da não contradição da aritmética 375

Aditamento I. Câlculo de valores aproximados 383

Advertência prévia. 383

1. O sistema da vírgula flutuante no cálculo elementar, no cálculo logarítmico e no cálculo electrónico 385

2. Algarismos significativos e algarismos exactos 390

3. Arredondamento de valores numéricos 394

4. Erro relativo e número de algarismos exactos. 395

5. Avaliação do erro do resultado de multiplicações e divisões sucessivas 401

6. Caso da potência 407

7. Caso da raiz 408

8. Caso da adição e da subtracção 409

Aditamento II. Nova orientação no estudo do cálculo de valores aproximados 411

NOTA FINAL 423

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Março de 1976

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA