

J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

2.º volume

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

CAPÍTULO III

TEORIA DEDUTIVA DOS NÚMEROS NATURAIS (¹)

1. **Caracterização da estrutura do grupóide** $(\mathbb{N}, +)$. Como vimos no capítulo III, do 1.º volume, os números naturais apresentam-se espontâneamente ao nosso espírito como *cardinais de conjuntos finitos não vazios*. Por exemplo:

$$1 = \# \{ \text{Lisboa} \} = \# \{ \text{Liceu Camões} \} = \dots$$

$$2 = \# \{ \text{Terra, Lua} \} = \# \{ \text{Magnésio, Brasil} \} = \dots$$

$$3 = \# \{ \text{dó, ré, mi} \} = \# \{ 1, \pi, \text{Hidrogénio} \} = \dots$$

e assim por diante. Nesta ordem de ideias, a operação lógica de *reunião*, entre conjuntos disjuntos, dá lugar à *adição* de números naturais. Por exemplo, a fórmula em termos de conjuntos:

$$\{ \text{Terra, Lua} \} \cup \{ \text{dó, ré, mi} \} = \{ \text{Terra, Lua, dó, ré, mi} \}$$

(¹) Este capítulo já não está incluído no projecto da O.C.D.E. (ver o *Guia*).

dá lugar à fórmula em termos de números:

$$2 + 3 = 5$$

E, assim como a ideia de número natural é *mais abstracta* que a de conjunto finito, assim também a ideia de adição entre números é *mais abstracta* que a de reunião entre conjuntos. *Por conseguinte, na passagem do universo dos conjuntos finitos para o universo dos números naturais, há uma subida no nível de abstracção.*

Por outro lado, como vimos, as propriedades da reunião de conjuntos, que inferimos da experiência quotidiana por um processo indutivo-dedutivo mais ou menos consciente, conduzem-nos a propriedades correspondentes da adição entre números naturais, tais como as seguintes:

I. *Para todo o par (a,b) de números naturais, existe sempre um e um só número natural c, que é soma de a com b, isto é, tal que $a + b = c$.*

II. $(a+b) + c = a+(b + c) \quad , \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}.$

III. $a + b = b + a \quad , \quad \forall a,b \in \mathbb{N}.$

Nestas propriedades, o ponto mais delicado — e, podemos dizer, *mais discutível* — é a proposição de existência contida em I. Tal proposição equivale à seguinte:

Quaisquer que sejam os conjuntos finitos A e B, existem sempre dois conjuntos disjuntos A' e B' tais que $\# A' = \# A$ e $\# B' = \# B$.

Mais tarde discutiremos o conteúdo desta proposição. Por agora interessa apenas lembrar o seguinte:

1.º *A propriedade I diz-nos que o par $(\mathbb{N}, +)$ é um grupóide.*

2.º A propriedade II (junta a I) diz-nos que o grupóide $(\mathbb{N}, +)$ é associativo, portanto um semigrupo.

3.º A propriedade III (junta a I e II) diz-nos que o semigrupo $(\mathbb{N}, +)$ é comutativo.

Mas há inúmeros semigrupos comutativos (A, θ) não isomorfos a $(\mathbb{N}, +)$, por exemplo $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{N}, \times)$, etc. Por outro lado, há também inúmeros semigrupos comutativos isomorfos a $(\mathbb{N}, +)$, que têm portanto a mesma estrutura deste (procure exemplos). O problema que nos propomos resolver é precisamente o seguinte:

Caracterizar a estrutura de $(\mathbb{N}, +)$ por meio de um sistema, tão simples quanto possível, de propriedades lógicas da adição de números naturais.

Temos, pois, de procurar outras propriedades da adição em $\mathbb{N}$, independentes de I, II, III (isto é, que não se deduzam destas). Para isso, recordemos que, além da *adição*, é definida em $\mathbb{N}$ a *relação de grandeza*. Esta pode ser definida a partir da *relação de inclusão estrita*, entre conjuntos finitos, do seguinte modo:

$$(1) \quad \# A < \# B \Leftrightarrow \exists X: X \subsetneq B \wedge \# X = \# A$$

Daqui se deduzem as propriedades anti-reflexiva, anti-simétrica, transitiva e tricotómica da relação $<$. Mas vimos também que:

A relação $<$ pode ser definida em $\mathbb{N}$ a partir da operação $+$, utilizando a propriedade:

$$(2) \quad a < b \Leftrightarrow \exists x: a + x = b$$

Adoptemos, pois, esta propriedade como definição da relação $<$ em $\mathbb{N}$. Podemos então traduzir as propriedades anteriores desta

relação *em termos de adição*. Por exemplo, a PROPRIEDADE ANTI-REFLEXIVA:

$$a < b \Rightarrow a \neq b$$

pode traduzir-se do seguinte modo:

$$\text{IV.} \quad a + x \neq a, \quad \forall a, x \in \mathbb{N}.$$

O mais curioso agora é que as propriedades anti-simétrica e transitiva se deduzem das propriedades I-IV da adição.

Começemos por demonstrar a transitividade⁽¹⁾:

Sejam a, b, c três números naturais tais que $a < b$ e $b < c$. Então existem dois números naturais x, y tais que

$$a + x = b, \quad b + y = c \quad (\text{porquê?})$$

donde:

$$(a + x) + y = c \quad (\text{porquê?})$$

ou seja:

$$a + (x + y) = c \quad (\text{porquê?})$$

Daqui se conclui que $a < c$ (*porquê?*). Assim provámos a PROPRIEDADE TRANSITIVA:

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

(¹) Demonstração facultativa.

Demonstremos, agora, a anti-simetria:

Sejam a, b dois números naturais tais que $a < b$. Pretende-se demonstrar que $b \nless a$. Vamos fazê-lo pelo *método da redução ao absurdo*. Suponhamos que $b < a$. Então, como $a < b$ e $b < a$ tem-se $a < a$ (*porquê?*) e portanto $a \neq a$ (*porquê?*), o que é absurdo (*porquê?*). Logo tem-se, necessariamente, $b \nless a$ e assim fica provada a PROPRIEDADE ANTI-SIMÉTRICA (ESTRITA):

$$a < b \Rightarrow b \nless a$$

Pelo contrário, a PROPRIEDADE TRICOTÓMICA:

$$\forall a, b, c: a < b \vee b < a \vee a = b$$

é independente das anteriores, isto é, não se pode deduzir destas. Note-se que esta propriedade é equivalente à seguinte:

$$a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a$$

o que permite traduzi-la em termos de adição do seguinte modo:

$$V. \quad a \neq b \Rightarrow \exists x: a + x = b \vee b + x = a$$

Vejamos, agora, se a lista de propriedades I-V já chega para caracterizar a estrutura de $(\mathbb{N}, +)$:

Existe algum grupóide (A, θ) não isomorfo a $(\mathbb{N}, +)$ que verifique as propriedades I-V, com A no lugar de $\mathbb{N}$ e com θ no de $+$?

É fácil ver que existe um tal grupóide. Um exemplo é o grupóide $(\mathbb{R}^+, +)$. Porquê? \

Procuremos uma propriedade de $(\mathbb{N}, +)$ que não seja verificada em $(\mathbb{R}^+, +)$:

Existe um número natural que dá origem a todos os outros.
Qual? O número 1. Como?

Por adições sucessivas:

$$1 + 1, \quad 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad \dots$$

Em resumo, podemos acrescentar à lista anterior a seguinte propriedade:

VI. *Existe um número natural que gera todos os outros por adição sucessiva.*

No número seguinte daremos um enunciado desta propriedade em termos de lógica simbólica. Pergunta-se, entretanto:

Existe algum elemento de $\mathbb{R}^+$ que gere todos os outros por adição sucessiva?

Suponhamos que existia um elemento u de $\mathbb{R}^+$ nestas condições. Então todos os outros números positivos se podiam obter a partir de u por adições sucessivas:

$$u + u, \quad u + u + u, \quad u + u + u + u, \quad \dots$$

Seria, portanto, válida em $\mathbb{R}^+$ a propriedade:

$$x \neq u \Rightarrow x > u \quad (1)$$

(1) A justificação deste facto será por enquanto intuitiva.

Mas isto é impossível, visto que:

$$\forall u \in \mathbb{R}^+ , \exists x \in \mathbb{R}^+ : x < u$$

Com efeito, sendo u um número positivo qualquer, se tomarmos por exemplo $x = u/2$ teremos $x \in \mathbb{R}^+$ e $x + x = u$, donde $x < u$.
Em conclusão:

O grupóide aditivo $\mathbb{R}^+$ não tem a propriedade correspondente a VI.

Resta saber se a lista de propriedades I-VI já chega para caracterizar a estrutura de $(\mathbb{N}, +)$. Mas, para isso, precisamos de dar novas formas à propriedade VI, o que faremos nos números seguintes.

NOTA. Pode ainda perguntar-se: 'O que nos leva a afirmar que a propriedade VI é verdadeira? Como veremos, essa propriedade resulta da *própria noção de conjunto finito* e da definição de número natural como cardinal do conjunto finito não vazio.

2. Princípio da indução em $\mathbb{N}$. Sucessões; definições por recorrência. Tentemos, agora, formular com símbolos de lógica matemática a propriedade VI atrás indicada. Seja X o conjunto formado pelo número 1 e por todos os outros números que se podem obter a partir de 1 por adição sucessiva. Temos, então, por um lado

$$(1) \quad 1 \in X$$

Por outro lado, se $n \in X$, também $n + 1 \in X$, isto é:

$$(2) \quad n \in X \Rightarrow n + 1 \in X \quad (\text{porquê?})$$

Ora, a proposição:

'O número 1 gera todos os outros números naturais por adição sucessiva'

significa precisamente o seguinte:

'Só existe um conjunto X de números naturais que verifica as condições (1) e (2); esse conjunto é $\mathbb{N}$ '.

Simbolicamente, esta proposição traduz-se do seguinte modo:

$$(3) \quad 1 \in X \wedge (n \in X \Rightarrow_{\mathbb{N}} n + 1 \in X) \Rightarrow_X X = \mathbb{N}$$

supondo que n varia em $\mathbb{N}$ e X em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Note-se que (3) ainda não é a tradução simbólica da propriedade VI: esta apenas afirma que *existe, pelo menos, um* número natural que gera todos os outros. A sua tradução simbólica, consequência do (3), será pois:

$$\exists u: u \in X \wedge (n \in X \Rightarrow_{\mathbb{N}} n + u \in X) \Rightarrow_X X = \mathbb{N}$$

Mas é da propriedade (3) que vamos ocupar-nos agora. Esta é chamada *princípio de indução matemática (em $\mathbb{N}$)* e pode ser enunciada, em linguagem mista (parcialmente simbólica), do seguinte modo:

PRINCIPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA. *Se um conjunto X de números naturais verifica as duas seguintes condições:*

$$1 \in X, \quad n \in X \Rightarrow_{\mathbb{N}} n + 1 \in X,$$

então X só pode ser $\mathbb{N}$.

Este princípio tem uma grande importância em matemática, como veremos. Em primeiro lugar, pode ser utilizado para definir as mais diversas funções de *uma ou mais variáveis naturais*.

Consideremos primeiramente uma função f de uma só variável natural, isto é, uma aplicação de $\mathbb{N}$ num conjunto A *qualquer*. Então f faz corresponder a cada número natural n um determinado elemento a_n de A , conforme o esquema:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \end{pmatrix}$$

Neste esquema, os valores de f aparecem dispostos uns a seguir aos outros, segundo a ordem dos números naturais aos quais correspondem, como uma espécie de *sequência infinita*:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

Por este facto se diz que f é uma *sucessão* ou, mais precisamente, uma $\mathbb{N}$ -sucessão. Assim:

DEFINIÇÃO. Chama-se $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos dum conjunto A toda a aplicação f de $\mathbb{N}$ em A . Os valores de f dizem-se *termos* da sucessão: $f(1)$ o *primeiro termo*, $f(2)$ o *segundo termo*, ..., $f(n)$ o *termo de ordem n* (ou *termo geral*) da sucessão.

Note-se que, no esquema anterior, as expressões ' $f(n)$ ' e ' a_n ' são equivalentes.

De modo análogo se define ' $\mathbb{N}_0$ -sucessão' e ' $\mathbb{Z}$ -sucessão'. Quando não houver perigo de equívoco, diremos apenas 'sucessão'.

Assim, o conceito de 'sucessão' aparece-nos como extensão do conceito de 'sequência'. Com efeito, uma *sequência de n elementos de A* é uma aplicação do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ no conjunto A

(cf. 1.º vol., 1.º tomo, pg. 120). Podíamos então chamar *sucessões finitas* às sequências, para as distinguir das $\mathbb{N}$ -sucessões, $\mathbb{N}_0$ -sucessões, etc. É só para simplificar a linguagem que chamamos às primeiras 'sequências' e às segundas 'sucessões'.

O aluno já conhece inúmeros exemplos de sucessões (*indique os 4 primeiros termos de cada uma*):

- 1) a sucessão dos números naturais (a aplicação $n \mapsto n$);
- 2) a dos números pares (a aplicação $n \mapsto 2n$);
- 3) a dos números ímpares (a aplicação $n \mapsto 2n - 1$);
- 4) a dos quadrados perfeitos (a aplicação $n \mapsto n^2$);
- 5) a das potências de 10 (a aplicação $n \mapsto 10^n$);
- 6) a das potências de π (a aplicação $n \mapsto \pi^n$);
- 7) a das potências dum operador φ qualquer (a aplicação $n \mapsto \varphi^n$); etc.

Tal como sucede com as sequências, é necessário não confundir nunca uma sucessão f com o conjunto dos seus termos (contradomínio de f).

Por exemplo, se f é a sucessão definida pela expressão 'resto da divisão de n por 4', isto é:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & \dots \end{pmatrix}$$

ou, abreviadamente

$$f = (1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \dots),$$

o conjunto dos termos da sucessão será:

$$D'_f = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

Como conjunto que é, D'_f não depende da ordem dos seus elementos e estes são *todos distintos*.

Muitas vezes, uma sucessão (como qualquer outra aplicação) pode ser dada por uma expressão designatória de tipo já conhecido. Por exemplo, a sucessão dos números ímpares

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$$

pode ser definida pela expressão designatória $2n-1$, também chamada 'expressão do termo geral'.

Mas nem sempre assim acontece. Tal é, por exemplo, o caso da sucessão dos números primos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots$$

(Não confundir com o conjunto dos números primos!)

Ora, há processos extremamente gerais para definir sucessões, chamados MÉTODOS DE RECORRÊNCIA. Estes métodos baseiam-se no PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, consistindo essencialmente num processo que permite determinar cada termo (a partir de certa ordem), uma vez conhecidos um ou mais termos anteriores.

Seja f , por exemplo, uma sucessão que verifique as duas seguintes condições:

$$(1) \quad f(1) = 1, \quad f(n+1) = \begin{cases} f(n)+1, & \text{se } f(n) \neq 2 \\ 0 & , \text{ se } f(n) = 2 \end{cases}$$

Será então:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 0, \quad f(4) = 1, \quad f(5) = 2, \quad f(6) = 0,$$

$$f(7) = 1, \quad f(8) = 2, \quad f(9) = 0, \quad f(10) = 1, \quad \dots$$

Desde logo se vê, *intuitivamente*, que as condições (1) definem uma função de $\mathbb{N}$ com valores em $\mathbb{N}_0$, e que se tem:

$$f(n) \equiv \text{resto da divisão de } n \text{ por } 3,$$

segundo a terminologia habitual.

Mas, para demonstrar rigorosamente que existe uma e uma só sucessão f que verifica as condições (1), é necessário aplicar o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA:

Seja X o conjunto dos números naturais x tais que o valor de $f(x)$ é univocamente determinado pelas condições (1). Tem-se, então:

$$1 \in X \quad (\text{pela 1.ª condição})$$

$$n \in X \Rightarrow n + 1 \in X \quad (\text{pela 2.ª condição})$$

Logo $X = \mathbb{N}$. Quer dizer: as referidas condições definem uma, e só uma sucessão, que é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}_0$.

Este processo de definição de f , por meio das condições (1), é pois um processo de recorrência. A primeira condição, $f(1) = 1$, é chamada '*condição inicial*'; a segunda condição é chamada '*fórmula de recorrência*'.

A partir da anterior função f podemos agora definir, *também por recorrência*, uma nova função g , do seguinte modo:

$$1) \text{ condição inicial: } g(1) = 0$$

$$2) \text{ fórmula de recorrência: } g(n+1) = \begin{cases} g(n) & \text{se } f(n) \neq 2 \\ g(n) + 1 & \text{se } f(n) = 2 \end{cases}$$

Veja se consegue identificar esta função g , utilizando uma expressão designatória que já conheça.

Vejamos outro exemplo. Recordemos que, sendo r um número real qualquer, se chama *progressão aritmética de razão r* a toda a sucessão φ em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com r . Deste modo, se for a o primeiro termo, a sucessão fica definida pelo seguinte processo de recorrência:

$$\varphi(1) = a, \quad \varphi(n+1) \equiv \varphi(n) + r$$

e é fácil reconhecer agora (intuitivamente) que

$$\varphi(n) \equiv a + (n-1)r$$

Analogamente para as *progressões geométricas* (convém rever exemplos).

Aliás, em qualquer grupóide A , aditivo ou multiplicativo, as noções de 'produto por um número natural' e de 'potência de expoente natural', podem ser definidas, respectivamente, pelos seguintes processos de recorrência:

$$\begin{cases} 1 \cdot a = a \\ (n+1)a = na + a \end{cases} \quad \begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \end{cases} \quad \forall a \in A$$

A própria noção de '*operação θ iterada*' (em particular, *adição* ou *multiplicação iterada*) pode ser definida por recorrência:

$$\bigoplus_{k=1}^1 a_k = a_1, \quad \bigoplus_{k=1}^{n+1} a_k = \bigoplus_{k=1}^n a_k \oplus a_{n+1}$$

Vendo bem, este é na verdade o *primeiro processo rigoroso*, que nos aparece para definir tais noções.

Notemos ainda o seguinte facto evidente:

Em $\mathbb{N}_0$ também é válido um princípio de indução, semelhante ao de $\mathbb{N}$: a única diferença está em que a condição $1 \in X$ deve agora ser substituída pela condição $0 \in X$.

Deste modo, o que foi dito para $\mathbb{N}$ -sucessões, aplica-se, *mutatis mutandis*, a $\mathbb{N}_0$ -sucessões (aplicações de $\mathbb{N}_0$ em qualquer conjunto A), que continuaremos a chamar simplesmente 'sucessões', quando não houver perigo de confusão.

Notemos, por último, que os processos de recorrência se estendem à definição de *funções de duas ou mais variáveis* em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$. Tais funções dizem-se respectivamente *sucessões duplas*, *sucessões triplas*, etc. e, dum modo geral, *sucessões múltiplas*. Disto vamos ver já exemplos.

EXERCÍCIOS:

I. Identifique a função f definida em $\mathbb{N}_0$ pelas condições: $f(0) = 1$, $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$.

II. Escreva os 4 primeiros termos da sucessão φ assim definida:

$$\varphi(1) = a, \quad \varphi(n+1) \equiv a^{\varphi(n)}, \quad \text{com } a \in \mathbb{N}.$$

Parece-lhe que existe alguma expressão conhecida para o termo geral de φ ?

III. Escreva os 5 primeiros termos da sucessão a_n tal que

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

Suspeita de alguma expressão conhecida para o termo geral?

IV. Represente por uma tabela a sucessão dupla $a_{m,n}$ tal que:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{m,1} = m, & a_{1,n} = n \\ a_{m+1, n+1} = \frac{a_{m+1,n} + a_{n,m+1} - 2a_{m,n}}{2} \end{cases}$$

V. Identifique a função $f(m,n)$ tal que: $f(m,0) \equiv f(m,m) \equiv 1$,

$$f(m+1, n+1) \equiv f(m,n) + f(m,n+1)$$

sendo $D_f = \{(m,n): 0 \leq n \leq m\}$, com $m, n \in \mathbb{N}_0$.

3. O princípio de indução matemática em termos de compreensão. Demonstrações por indução. Os primeiros termos da sucessão a_n considerada no exercício III do número anterior, são:

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{17}{16}, \quad \dots$$

ou seja:

$$1 + 1, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{4}, \quad 1 + \frac{1}{8}, \quad 1 + \frac{1}{16}, \quad \dots$$

$$\text{Ora } 4 = 2^2, \quad 8 = 2^3, \quad 16 = 2^4, \quad \dots$$

Isto leva-nos a admitir a hipótese de que seja

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^n}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}_0.$$

Esta condição é verificada para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, e continuará a ser confirmada para outros valores de n . Mas nós queremos *demonstrar* que é verificada para *todos*!

Se, em vez de matemática, se tratasse de física, contentar-nos-íamos em verificar a hipótese para um *grande número de valores de* n . Então, aplicando o MÉTODO DE INDUÇÃO EXPERIMENTAL, concluiríamos que o facto é verdadeiro para *todos* os valores de n . Mas é óbvio que tal conclusão nunca teria o carácter de *certeza absoluta*, ou melhor, de *certeza matemática*: tratar-se-ia de um resultado obtido por *indução experimental* e não por *dedução*. Como demonstrá-lo matematicamente? Eis a resposta:

Recorrendo ao que chamámos 'PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA' (neste caso em $\mathbb{N}_0$). O nome foi escolhido por analogia com o método de indução das ciências experimentais. Mas pode originar um equívoco que convém desde já eliminar:

O método de *indução matemática* é, na realidade, um processo de *dedução*, isto é, uma das inúmeras formas do raciocínio dedutivo — precisamente um dos mais potentes processos de demonstração.

Para indicar como se aplica o referido princípio nas demonstrações, convém passá-lo da *forma extensiva* à *forma compreensiva*.

Como sabemos, todo o conjunto X de números naturais pode ser definido por uma *condição* ou *propriedade* $P(n)$, sendo n uma variável em $\mathbb{N}$ e tendo-se:

$$n \in X \Leftrightarrow P(n)$$

Deste modo, a proposição $1 \in X$ traduz-se por $P(1)$ e a implicação $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$ assume a forma

$$(2) \quad P(n) \Rightarrow P(n + 1)$$

DEFINIÇÃO. Diz-se que, no universo $\mathbb{N}$, uma propriedade $P(n)$ é *hereditária*, sse cumpre a condição (2), isto é, sse o facto de ser verificada por um número natural n implica o facto de ser verificada por $n + 1$, qualquer que seja n . (Analogamente em $\mathbb{N}_0$.)

Por exemplo, a propriedade *ser maior que 5* (ou seja a propriedade $n > 5$) é uma propriedade hereditária, visto que $n > 5 \Rightarrow n + 1 > 5$.

É visível que o termo 'hereditário' nesta acepção foi escolhido por analogia com a noção biológica de hereditariedade: o número $n + 1$ chama-se *sucessor de n* ; dizer que uma propriedade $P(n)$ é hereditária significa que essa propriedade, uma vez verificada num número n , se *transmite necessariamente* ao seu sucessor⁽¹⁾.

Posto isto, é fácil ver que o princípio de indução matemática toma o seguinte aspecto:

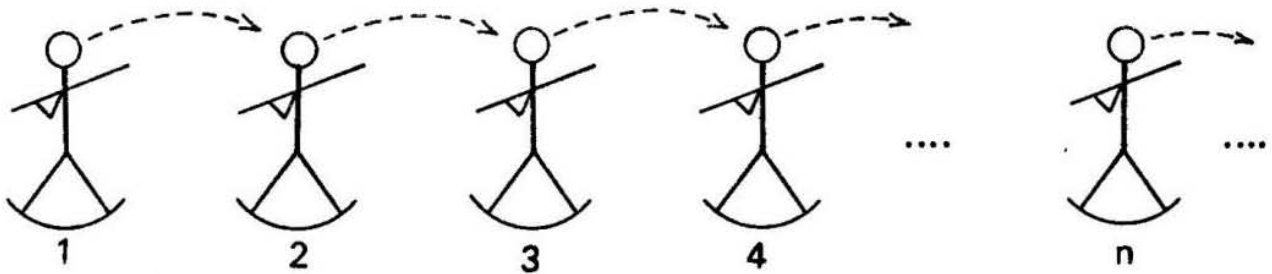
PRINCÍPIO DE INDUÇÃO (em $\mathbb{N}$). *Se uma propriedade hereditária $P(n)$ é verificada para $n = 1$, então é verdadeira qualquer que seja n . Simbolicamente:*

$$[P(n) \Rightarrow P(n + 1)] \wedge P(1) \Rightarrow \forall n: P(n)$$

Este enunciado pode tornar-se ainda mais intuitivo, usando uma imagem. Imaginemos uma fileira de soldados de chumbo, coloca-

(¹) Note-se entretanto que, ao contrário desta, a hereditariedade biológica é apenas uma *tendência* e não uma *norma sem excepção*.

dos de tal modo que, *se um qualquer cair para trás, o que se lhe segue cai também:*



Então é óbvio que, *se o primeiro cai para trás, todos os soldados caem para trás.*

Eis, agora, o princípio de indução sob a FORMA DE SILOGISMO:

$P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ (PREMISSA MAIOR)

$P(1)$ (PREMISSA MENOR)

$\forall n, P(n)$ (CONCLUSÃO)

É claro que todas estas considerações se estendem de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}_0$, substituindo $P(1)$ por $P(0)$.

Antes de tornar ao exemplo inicial, o que faremos mais adiante, convém aplicar o método de indução matemática a casos mais simples.

EXEMPLOS E EXERCÍCIOS:

I. Demonstrar a seguinte proposição:

Em qualquer semigrupo $(A, \cdot)$ comutativo, tem-se:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} ; a, b \in A$$

No 1.º volume, 2.º tomo, pg. 21, já foi dada uma *demonstração intuitiva* deste teorema. Para uma *demonstração rigorosa*, do ponto de vista lógico, é necessário recorrer ao método de indução matemática (em $\mathbb{N}$).

Para compreender melhor a demonstração, comecemos por supor que o semigrupo considerado é precisamente $(\mathbb{N}, \cdot)$, munido da multiplicação usual (que também se pode indicar com o sinal $\times$ ou com um espaço em branco). Suponhamos, por exemplo, $a = 2$ e $b = 5$. Trata-se então de provar que

$$(3) \quad (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Neste caso $P(n)$ é a propriedade $(2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$. Ora $P(1)$ é uma proposição verdadeira, isto é:

$$(4) \quad (2 \times 5)^1 = 2^1 \times 5^1$$

Resta então provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Seja p um número natural *qualquer* (isto é, suponhamos que a letra p é uma *constante*, que designa um número natural, escolhido *arbitrariamente*: por exemplo 1, 2, mil, um milhão, etc.) e suponhamos que p verifica a condição $P(n)$, isto é, que é verdadeira a proposição:

$$(5) \quad (2 \times 5)^p = 2^p \times 5^p$$

Ora, segundo a definição de potência dada no número anterior

$$(2 \times 5)^{p+1} = (2 \times 5)^p \times (2 \times 5)$$

Logo

$$(2 \times 5)^{p+1} = (2^p \times 5^p) \times (2 \times 5) \quad (\text{porquê?})$$

$$= (2^p \times 2) \times (5^p \times 5) \quad (\text{porquê?})$$

e portanto

$$(6) \quad (2 \times 5)^{p+1} = 2^{p+1} \times 5^{p+1} \quad (\text{porquê?})$$

Assim, supondo que é verdadeira (5), prova-se que é verdadeira (6). E, como a letra p pode designar qualquer número natural, fica provado que

$$(2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n \Rightarrow (2 \times 5)^{n+1} = 2^{n+1} \times 5^{n+1},$$

quer dizer: a propriedade $P(n)$ é hereditária. Daqui e de (4), aplicando o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, conclui-se (3).

Notemos, agora, que a escolha particular dos números 5 e 7 não influiu em nada na demonstração. Assim, se nos lugares dos símbolos 2 e 5 escrevermos as letras a e b , tomadas como *constantes* (isto é, como designações de números naturais *determinados*, mas arbitrários), todo o raciocínio continua certo. Isto leva-nos a concluir que

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} ; a, b \in \mathbb{N}$$

Finalmente, se em vez do semigrupo $(\mathbb{N}, \cdot)$ considerarmos *qualquer outro semigrupo* $(A, \cdot)$ *comutativo*, o raciocínio continua certo, ficando assim demonstrada a proposição inicial.

Note-se que nesta proposição são *variáveis*, sujeitas a quantificador universal, não só a letra n , como ainda as letras a, b, A e o próprio sinal $\cdot$ de multiplicação, que pode receber as mais diversas interpretações. Pode inclusivamente ser substituído pelo sinal $+$, traduzindo-se a linguagem multiplicativa na linguagem aditiva:

$$n(a + b) = n a + n b, \quad \forall n \in \mathbb{N} ; a, b \in A,$$

supondo, é claro, que $(A, +)$ é um semigrupo comutativo. Pode ainda ser substituído por outros símbolos, tais como $\oplus, \Phi$, etc.

II. Demonstrar a seguinte proposição:

Qualquer que seja o semigrupo $(A, \cdot)$, tem-se:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad , \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad ; \quad a \in A$$

Seja a um determinado elemento de A (arbitrário) e m um determinado elemento de $\mathbb{N}$ (também arbitrário). Trata-se, então, de provar que

$$(7) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para isso, vamos seguir o MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, sendo $P(n)$ a propriedade $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. É claro que estamos a supor a, m constantes e n variável (*variável de indução*).

Ora, a proposição $P(1)$ é verdadeira, isto é:

$$(8) \quad a^m \cdot a^1 = a^{m+1} \quad (\text{porquê?})$$

Seja, agora, k um número natural *qualquer* e suponhamos que é verdadeira a proposição

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}$$

(esta suposição é chamada '*hipótese de indução*'). Ora

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m(a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k)a \quad (\text{porquê?})$$

donde, pela hipótese de indução:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{k+1} &= a^{m+k} \cdot a \\ &= a^{m+(k+1)} \quad (\text{porquê?}) \end{aligned}$$

Assim se vê que

$$a^m a^n = a^{m+n} \Rightarrow a^m a^{n+1} = a^{m+(n+1)}$$

o que, juntamente com (8), prova (7).

Finalmente, como a é um elemento *arbitrário* de A e n um elemento arbitrário de $\mathbb{N}$, fica provado o que se pretendia.

III. Provar que a soma dos n primeiros números naturais é:

$$\sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

É claro que:

$$(9) \quad \sum_{p=1}^1 p = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

Suponhamos que a letra n designa um número natural arbitrário ⁽¹⁾ e que é verdadeira a proposição:

$$(10) \quad \sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{hipótese de indução})$$

Ora

$$\sum_{p=1}^{n+1} p = \sum_{p=1}^n p + (n+1) \quad (\text{porquê?})$$

(1) Muitas vezes, por comodidade, um mesmo símbolo é usado umas vezes como *constante arbitrária* e outras vezes como *variável*, numa mesma demonstração. Basta que não haja perigo de confusão.

Então virá, pela hipótese de indução:

$$\sum_{p=1}^{n+1} p = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

e, portanto:

$$(11) \quad \sum_{p=1}^{n+1} p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ora, esta fórmula é precisamente a que resulta de (10), substituindo n por $n+1$. Assim, tornando a considerar a letra n como variável ⁽¹⁾, vê-se que a propriedade (10) é hereditária e, como é verificada para $n=1$, fica provado o que se pretendia.

IV. Provar que a soma dos quadrados de 1, 2, ..., n é dada por

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

V. Provar que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

VI. Provar que

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad r \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

⁽¹⁾ Ver nota anterior.

4. Nova forma do raciocínio de indução matemática*.

Podemos agora tornar ao exercício III do n.º 2, em que era definida uma sucessão a_n pelas condições:

$$(1) \quad a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

Para provar que $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, há que recorrer à seguinte forma do princípio de indução (em $\mathbb{N}_0$):

Se uma propriedade $P(n)$ é verificada para $n = 0$ e para $n = 1$, e se, além disso,

$$P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow_n P(n+2),$$

então $P(n)$ é universal (em $\mathbb{N}_0$).

Para demonstrar esta proposição, vamos recorrer à primeira forma do *princípio da indução matemática* (em $\mathbb{N}_0$). Ponhamos:

$$(2) \quad Q(n) \equiv P(n) \wedge P(n+1)$$

É fácil ver que *se tem sempre:*

$$(3) \quad P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow_n P(n+1)$$

Suponhamos, agora, que se verifica a condição:

$$P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow_n P(n+2)$$

Então, daqui e de (3), resulta:

$$P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow_n P(n+1) \wedge P(n+2)$$

ou seja, atendendo a (2):

$$(4) \quad Q(n) \Rightarrow_n Q(n+1)$$

Suponhamos, agora, que as proposições $P(0)$ e $P(1)$ são verdadeiras. Então será verdadeira $P(0) \wedge P(1)$ ou seja $Q(0)$. Daqui e de (4) resulta (pelo princípio de indução matemática em $\mathbb{N}_0$), que $Q(n)$ é universal, ou seja:

$$P(n) \wedge P(n+1) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

donde:

$$P(n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

A esta forma do princípio de indução corresponde um NOVO TIPO DE SILOGISMO, que é o seguinte:

$$\begin{array}{ll} P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow_n P(n+2) & \text{(PREMISSA MAIOR)} \\ P(1) & \text{(PREMISSA MENOR)} \\ \hline \forall n, P(n) & \text{(CONCLUSÃO)} \end{array}$$

Posto isto, será um simples exercício, que o leitor pode resolver facilmente, provar o que se pretendia acerca da sucessão definida por (1).

5. Regresso ao problema inicial: caracterização da estrutura de $(\mathbb{N}, +)$. No n.º 1 organizámos uma lista de seis propriedades da adição em $\mathbb{N}$, com o objectivo de caracterizar a estrutura deste grupóide aditivo. Ora convém, desde já, notar que a propriedade III (comutativa da adição) pode ser deduzida das restantes pelo método de indução matemática.

Vamos apresentar aqui essa dedução, a título de curiosidade. Trata-se de provar que:

$$(1) \quad m + n = n + m, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Começemos por provar que

$$(2) \quad 1 + n = n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

É evidente que a propriedade $1 + n = n + 1$ é verificada para $n = 1$. Suponhamos, agora, que n é um determinado número natural e que a proposição

$$(3) \quad 1 + n = n + 1$$

é verdadeira (*hipótese de indução*). Ora

$$1 + (n + 1) = (1 + n) + 1 \quad (\text{porquê?}),$$

donde, pela hipótese de indução:

$$(4) \quad 1 + (n + 1) = (n + 1) + 1$$

Por conseguinte, (3) implica (4), qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, e assim fica provado (2).

Provemos agora (1). Seja n um número natural *qualquer*. Pretende-se provar que

$$(5) \quad m + n = n + m, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

(Agora a letra n é considerada uma *constante arbitrária* e a letra m é a *nova variável de indução*.)

Segundo a proposição (2), já demonstrada, a *proposição*

$$(6) \quad 1 + n = n + 1$$

é verdadeira. Suponhamos, agora, que m é um determinado número natural e que a proposição

$$(7) \quad m + n = n + m$$

é verdadeira (hipótese de indução). Ora

$$(m + 1) + n = m + (1 + n) = m + (n + 1) = (m + n) + 1,$$

donde, pela hipótese de indução,

$$(m + 1) + n = (n + m) + 1$$

e portanto

$$(8) \quad (m + 1) + n = n + (m + 1) \quad (\text{porquê?})$$

Assim, (7) implica (8) qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, donde, atendendo a (6), se conclui (5). E, como n é arbitrário, fica demonstrada a proposição (1).

6. Axiomática da teoria dos números naturais. Primeiras definições e teoremas. Das cinco referidas propriedades da adição em $\mathbb{N}$, a terceira pode ser eliminada, visto que é consequência das restantes. Ficamos assim reduzidos ao seguinte sistema de propriedades:

A1. *Quaisquer que sejam os números naturais a, b , existe sempre um e um só número natural, que se chama 'soma de a com b ' e se representa por ' $a + b$ '.*

$$A2. (a+b) + c = a + (b+c) \quad , \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$A3. a + b \neq a \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

$$A4. a \neq b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}: a + x = b \vee b + x = a$$

a, b

A5. *Existe um (e um só) número natural que gera todos os outros por adição sucessiva.*

Como veremos, a conjunção destas propriedades é suficiente para definir a estrutura de $(\mathbb{N}, +)$. Além disso, pode-se provar que estas propriedades são *independentes entre si*, isto é, nenhuma delas pode ser deduzida das restantes. Podemos, então, adoptá-las para *axiomas duma teoria dedutiva dos números naturais*(¹).

DEFINIÇÃO 1. Chama-se *unidade* e designa-se pelo símbolo 1 o número natural cuja existência e unicidade é afirmada pelo axioma A5.

Desta definição e de A5 resulta imediatamente o **PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA**, tal como foi atrás enunciado, em

(¹) A independência das propriedades *não é condição necessária* para que sejam tomadas como axiomas.

qualquer das suas formas, extensiva ou compreensiva. Como vimos no número anterior, este permite-nos demonstrar o seguinte:

TEOREMA. $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, temos a seguinte

DEFINIÇÃO 2. $a < b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}: a + x = b$.

Posto isto, são *teoremas* que já sabemos demonstrar (ver n.º 1) as seguintes propriedades:

$$a < b \Rightarrow a \neq b$$

$$a < b \Rightarrow b \not< a$$

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

$$a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a$$

Um outro teorema é a *monotonia da adição*:

TEOREMA. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ ($\forall a, b, c \in \mathbb{N}$).

Demonstração:

Suponhamos $a < b$. Então existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $a + x = b$. Portanto, se for c um número natural qualquer, tem-se $(a + x) + c = b + c$, donde:

$$(a + c) + x = b + c$$

Existe, pois, um $x \in \mathbb{N}$ que verifica esta condição, o que significa que $a + c < b + c$, q. e. d.

Consideremos, agora, o

PROBLEMA DA SUBTRACÇÃO. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, determinar $x \in \mathbb{N}$ tal que $a + x = b$.*

Segundo a DEFINIÇÃO 2, este problema é *possível*, se e só se $a < b$. Por outro lado:

TEOREMA. *Não pode existir mais de um número natural x tal que $a + x = b$.*

Demonstração:

Sejam x, y números naturais tais que $a + x = b$ e $a + y = b$. Se $x < y$, tem-se $a + x < a + y$ (*porquê?*) e portanto $b < b$, o que é impossível (*porquê?*). Igualmente se vê que não pode ser $y < x$. Então só pode ser $x = y$ (*porquê?*), o que demonstra o teorema.

Este teorema pode ainda ser apresentado com o seguinte aspecto (mudando o papel das letras):

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{N})$$

Esta é a chamada PROPRIEDADE DA REDUÇÃO (ou PROPRIEDADE DO CORTE) da adição em $\mathbb{N}$.

Em conclusão:

O problema da subtracção em $\mathbb{N}$, tal como foi posto, é possível, sse $a < b$, e nesse caso é determinado.

Já sabemos que se chama *diferença entre b e a* e se representa por $b - a$ o número x procurado.

DEFINIÇÃO 3. Chama-se *multiplicação* a operação que faz corresponder a cada par (n, a) de números naturais um determinado número natural, que se chama *produto de n por a* e se representa por $n \times a$, $n \cdot a$ ou na , de acordo com as seguintes condições:

$$1 \cdot a = a \quad , \quad (n+1)a = na + a \quad , \quad \forall n, a \in \mathbb{N}$$

Desde logo se reconhece que esta definição é um caso particular da definição de *produto de um número natural n por um elemento a dum semigrupo* $(A, +)$. Podemos, pois, considerar desde já demonstrado, por indução matemática, o *teorema da distributividade à esquerda*:

$$(m + n)a = ma + na \quad , \quad \forall m, n, a \in \mathbb{N}$$

E, como o semigrupo $(\mathbb{N}, +)$ é comutativo, segue-se o *teorema da distributividade à direita*:

$$n(a + b) = na + nb \quad , \quad \forall n, a, b \in \mathbb{N}$$

Mas daqui vai resultar a *comutatividade da multiplicação*:

TEOREMA. $ab = ba \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$

Demonstração:*

Comecemos por demonstrar que

$$(1) \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a (= a) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

A propriedade $a \cdot 1 = a$ é manifestamente verificada quando $a = 1$. Suponhamos, agora, que a propriedade é verificada por um determinado número natural n :

$$n \cdot 1 = n \quad (\text{hipótese de indução})$$

Ora, tem-se $(n+1) \cdot 1 = n \cdot 1 + 1$ (*porquê?*), donde, pela hipótese de indução:

$$(n+1) \cdot 1 = n+1 = 1 \cdot (n+1)$$

Fica, assim, provado (1).

Seja, agora, a um *determinado número natural arbitrário*. Trata-se de provar que

$$(2) \quad a b = b a, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

A propriedade $a b = b a$ (em que a é constante e b variável) é verificada quando $b = 1$, segundo (1). Seja, agora, n um determinado número natural e suponhamos que é verdadeira a proposição:

$$(3) \quad a n = n a \quad (\text{hipótese de indução})$$

Ora, $a(n+1) = a n + a$ (*porquê?*). Logo, pela hipótese de indução, tem-se:

$$a(n+1) = n a + a,$$

donde:

$$(4) \quad a(n+1) = (n+1)a \quad (\text{porquê?})$$

Assim, (3) implica formalmente (4), o que acaba de provar (2). E, como a é arbitrário, fica provado o teorema.

Analogamente para a *associatividade da multiplicação*:

TEOREMA. $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c$.

Agora convém tomar as letras a, b para constantes arbitrárias e a letra n , no lugar de c , para variável de indução. Dão-se apenas os passos essenciais da demonstração:

Tem-se, evidentemente: $(ab) \cdot 1 = a(b \cdot 1)$

Hipótese de indução: $(ab)n = a(bn)$

Ora, $(ab)(n+1) = (ab)n + ab = a(bn) + ab$
 $= a(bn + b) = a(b(n+1))$

Logo, $(ab)(n+1) = a(b(n+1))$, o que acaba de provar o teorema.

Outro teorema é o da *monotonia da multiplicação*:

TEOREMA. $a < b \Rightarrow ac < bc$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

Demonstração:

Suponhamos $a < b$. Então existe x em $\mathbb{N}$ tal que $a + x = b$. Seja, agora, c um número natural qualquer. Tem-se:

$$ac + xc = bc \quad (\text{porquê?})$$

Existe, pois, um número natural $y (= xc)$ tal que $ac + y = bc$, o que significa que $ac < bc$.

PROBLEMA DA DIVISÃO. *Dados dois números naturais a, b , determinar um número natural x tal que $ax = b$.*

Sabemos que este problema nem sempre é possível em $\mathbb{N}$, mas *quando possível, é determinado*. Com efeito:

TEOREMA. *Quaisquer que sejam os números naturais a, b , não pode existir mais de um número natural x tal que $ax = b$.*

Com efeito, suponhamos que se tem $ax = b$ e $ay = b$, com $a, b, x, y \in \mathbb{N}$. Então, vem $ax = ay$. Ora, se fosse $x < y$, viria $ax < ay$ (*porquê?*), o que é impossível (*porquê?*). Analogamente se vê que não pode ser $y < x$. Então só pode ser $x = y$.

Este teorema pode ser ainda apresentado com o seguinte aspecto:

$$ab = bc \Rightarrow a = b \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{N})$$

Esta é a chamada PROPRIEDADE DA REDUÇÃO (ou PROPRIEDADE DO CORTE) da multiplicação em $\mathbb{N}$ (não verificada em $\mathbb{N}_0$).

Diz-se que b é *divisível por* a , sse existe x em $\mathbb{N}$ tal que $ax = b$. Nesta hipótese, segundo o teorema anterior, existe um único número x em $\mathbb{N}$ tal que $ax = b$. Esse número é chamado o *quociente de b por a* (ou a *razão entre b e a*) e representa-se por qualquer das notações:

$$b \div a, \quad \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad b/a$$

Tem-se, pois, *por definição*:

$$(b \div a) \cdot a = b \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} \cdot a = b$$

Quanto ao conceito de *potência* no universo $\mathbb{N}$, é claro que se trata de um caso particular do conceito de *potência de expoente natural* num semigrupo $(A, \cdot)$ comutativo, e as respectivas propriedades são teoremas que podemos, desde já, considerar demonstradas pelo método de indução matemática.

NOTA. Viria, agora, a propósito estudar o PROBLEMA DA DIVISÃO INTEIRA (em $\mathbb{N}_0$), ao qual se segue naturalmente, por um

lado, o estudo rigoroso dos SISTEMAS DE NUMERAÇÃO e, por outro lado, a TEORIA DA DIVISIBILIDADE E DOS NÚMEROS PRIMOS (em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$). Mas não podemos ocupar-nos por enquanto destes assuntos.

7. Caracterização da estrutura aditiva dos números naturais (conclusão)*. Resta provar que os axiomas A1 – A5 enunciados no número anterior caracterizam efectivamente a estrutura do grupóide $(\mathbb{N}, +)$. Trata-se, pois, de provar o seguinte

TEOREMA. *Se um par (U, θ) , constituído por um conjunto U e uma operação θ , verifica as condições A1 – A5, com U no lugar de $\mathbb{N}$ e com θ no lugar de $+$, então (U, θ) é necessariamente isomorfo a $(\mathbb{N}, +)$.*

Demonstração:

Suponhamos que (U, θ) verifica as seguintes condições (axiomas):

A'1). Para todo o par (a, b) de elementos de U existe um e um só elemento de U que se designa por $a\theta b$.

A'2. $(a\theta b)\theta c = a\theta(b\theta c)$, $\forall a, b, c \in U$.

A'3. $a\theta b \neq a$, $\forall a, b \in U$.

A'4. $a \neq b \Rightarrow \exists x: a\theta x = b \vee b\theta x = a$

A'5. Existe um e um só elemento de U que gera todos os outros pela operação θ iterada.

Este último axioma fornece um *princípio de indução em U* .

Com efeito, seja u o elemento de U que verifica a condição indicada em A'5. Então, se X designa um subconjunto de U , tem-se:

$$(a \in X \Rightarrow a \theta u \in X) \wedge u \in X \Rightarrow X = U,$$

o que é o *princípio de indução em U na forma extensiva*.

Definamos, agora, uma aplicação f do conjunto $\mathbb{N}$ no conjunto U , pelo seguinte *processo de recorrência*:

$$(1) \quad \begin{cases} f(1) = u \\ f(n+1) = f(n) \theta u \end{cases}$$

Provaremos, sucessivamente, os seguintes factos:

$$I) \quad f(m+n) = f(m) \theta f(n) \quad , \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Prova-se este facto, aplicando o *princípio de indução em $\mathbb{N}$* . Seja m um número natural qualquer. Tem-se, então:

$$f(m+1) = f(m) \theta u = f(m) \theta f(1) \quad (\text{por definição de } f)$$

Suponhamos, agora:

$$f(m+n) = f(m) \theta f(n) \quad (\text{hipótese de indução})$$

Então

$$f[m+(n+1)] = f[(m+n)+1] = f(m+n) \theta u$$

donde, pela hipótese de indução e por A'2:

$$f[m+(n+1)] = [f(m) \theta f(n)] \theta u = f(m) \theta [f(n) \theta u] = f(m) \theta f(n+1)$$

o que acaba de provar I).

II) f é uma aplicação *injectiva*, isto é:

$$m \neq n \Rightarrow f(m) \neq f(n)$$

Com efeito, sejam m e n dois números naturais *distintos*. Então, segundo A4, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que

$$m + x = n \quad \vee \quad n + x = m$$

Ora, se $m + x = n$, vem, segundo I):

$$f(m) \theta f(x) = f(n)$$

e portanto $f(m) \neq f(n)$. Analogamente concluímos que $f(m) \neq f(n)$, se $n + x = m$. Portanto $f(m) \neq f(n)$ sempre que $m \neq n$.

III) f é uma aplicação *sobre* U .

Com efeito, se pusermos

$$Y = \{y: \exists x \in \mathbb{N} \quad , \quad y = f(x)\},$$

Y é o contradomínio de f e tem-se:

$$(2) \quad u \in Y \quad (\text{porquê})?$$

Por outro lado, seja a um elemento qualquer de Y . Então existe um elemento n de $\mathbb{N}$ tal que $a = f(n)$ e tem-se:

$$f(n + 1) = f(n) \theta u = a \theta u$$

Portanto $a \theta u$ também pertence a Y e, assim:

$$(3) \quad a \in Y \Rightarrow a \theta u \in Y$$

De (2) e (3) conclui-se, aplicando o *princípio de indução* em U , que $Y = U$ e que, portanto, f é uma aplicação de $\mathbb{N}$ sobre A .

Ora, a conjunção das propriedades I), II) e III) exprime-se precisamente, dizendo que f é um *isomorfismo* de $(\mathbb{N}, +)$ sobre (U, θ) . Logo, (U, θ) é isomorfo a $(\mathbb{N}, +)$, q. e. d.

ESCÓLIO. *Existe uma infinidade de grupóides (U, θ) que verificam a axiomática A'1–A'5; por exemplo: o conjunto dos números pares com a adição usual, o conjunto das potências de expoente natural de 10 com a multiplicação usual, o conjunto das potências naturais de um translação $\neq 1$ no espaço $\mathcal{E}$, com a multiplicação interpretada no sentido de composição de aplicações, etc., etc. Mas, segundo o teorema anterior, todos os grupóides que verificam essa axiomática são isomorfos entre si — têm, portanto, a mesma estrutura.*

Aqui, como já se tem dito várias vezes, a palavra 'estrutura' pode designar a conjunção de todas as possíveis *propriedades formais* que se verificam num *qualquer* desses grupóides — visto que, segundo o teorema anterior e o PRINCÍPIO DE ISOMORFIA, desde que essas propriedades se verifiquem num dos grupóides, verificam-se em todos os outros.

Disto resulta o seguinte

COROLÁRIO. *Toda a propriedade lógica da operação de um grupóide (U, θ) que verifique os axiomas A'1–A'5 é implicada formalmente por estes axiomas.*

Entre essas, as propriedades que não forem axiomas serão chamadas *teoremas*.

Aqui, ao falar de *implicação formal*, subentende-se que as variáveis aparentes (sujeitas a quantificador universal) são os símbolos U e θ . Em particular, podemos ter $U = \mathbb{N}$, $\theta = +$.

Assim, a axiomática $A'1-A'5$ é comparável a um *sistema de 5 equações com duas incógnitas*, U e θ , que admite uma e uma só solução, *a menos de um isomorfismo*: o grupóide $(\mathbb{N}, +)$.

Escusado será dizer que os axiomas $A1-A5$ são, apenas, uma concretização dos axiomas $A'1-A'5$, com $\mathbb{N}$ no lugar de U e $+$ no lugar de θ . *Mas, ao demonstrar os teoremas sobre números naturais, podemos abstrair por completo do significado dos símbolos $\mathbb{N}$ e $+$, o que equivale a considerar estes símbolos como variáveis.*

Torna-se, agora, bem claro que a axiomática $A1-A5$ (como qualquer outra equivalente) não define afinal o conceito de número natural. Este conceito, tal como se forma no nosso espírito desde muito cedo, é o de *número cardinal de um conjunto finito (não vazio)* — e esse não aparece em nenhum dos referidos axiomas. O que a axiomática define é, apenas, a *estrutura interna do conjunto dos números naturais, a partir da adição*.

Na verdade, isto é quanto basta para desenvolver a aritmética dos números naturais, como *teoria de matemática pura*. Só quando se trata de *aplicar a aritmética*, temos de recorrer ao conceito de número natural.

Aliás, tudo o que se diz para números naturais aplica-se, de modo semelhante, a *números inteiros absolutos*, cuja estrutura aditiva pode ser definida por um sistema análogo de axiomas [não equivalentes ao anterior, porque os grupóides $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}_0, +)$ não são evidentemente isomorfos].

NOTA. O conceito de número cardinal de um *conjunto finito não vazio* pode ser definido por indução do seguinte modo:

$$\begin{cases} \# A = 1 \text{ sse } A \text{ é conjunto singular} \\ \# (A \cup B) = \# A + 1 \text{ sse } B \text{ é conjunto singular e } B \subset A \end{cases}$$

O conceito de número cardinal estende-se à *classe dos conjuntos finitos, acrescida do conjunto vazio*, introduzindo a condição inicial seguinte:

$$\# A = 0 \Leftrightarrow A \text{ é conjunto vazio}$$

Mas estas definições pressupõem uma *caracterização axiomática da classe dos conjuntos finitos*, por exemplo em termos de 'reunião'. Um dos axiomas pode ser a proposição: *Dados dois conjuntos finitos A e B, existe sempre um e um só conjunto finito que é a reunião de A com B*. Outros axiomas podem ser propriedades formais da reunião, tais como a *associatividade*, a *comutatividade*, a *idempotência* e a *existência de elemento neutro* (o conjunto $\emptyset$). A relação de inclusão pode ser definida a partir da operação de reunião do seguinte modo:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

Daqui a definição de 'conjunto singular': Diz-se que um conjunto A é *singular*, sse A não é vazio e não existe nenhum conjunto X distinto de A e de $\emptyset$ tal que $\emptyset \subset X \subset A$.

Seguem-se, finalmente, os dois axiomas decisivos:

α — *Qualquer que seja o conjunto finito A, existe pelo menos um conjunto singular U tal que $U \subset A$.*

β — *Seja $\mathcal{X}$ uma classe de conjuntos finitos que verifique as três seguintes condições:*

- 1) *o conjunto vazio pertence a $\mathcal{X}$;*
- 2) *todo o conjunto singular pertence a $\mathcal{X}$;*

3) se A pertence a $\mathcal{X}$ e U é conjunto singular, também $A \cup U$ pertence a $\mathcal{X}$.

Então $\mathcal{X}$ é a classe de todos os conjuntos finitos.

O axioma α também é válido para conjuntos infinitos, assim como os anteriores. O axioma β (a que poderíamos chamar PRINCÍPIO DE INDUÇÃO NO UNIVERSO DOS CONJUNTOS FINITOS) é o que faz a separação rigorosa entre *conjuntos finitos* e *conjuntos infinitos*.

Note-se que o conceito de número cardinal também pode ser definido em *termos de compreensão*:

$$\exists^0_x P(x) \Leftrightarrow \sim \exists_x P(x)$$

$$\exists^{n+1}_x P(x) \Leftrightarrow \exists_x P(x) \wedge [P(x) \Rightarrow \exists^n_y x \neq y \wedge P(y)]$$

Aqui o símbolo $\exists^n_x$ lê-se 'existem n e só n elementos x tais que' (ou 'existem exactamente n elementos x tais que'). Trata-se de um *quantificador exacto de existência*. Exemplo:

Existem exactamente 2 planetas que são satélites de Marte.

8. Axiomática de Peano. A axiomática A1 – A5 define a estrutura de $\mathbb{N}$ a partir da adição: as *noções primitivas* da axiomática são as noções de 'número natural' e de 'soma de dois números naturais'. A partir destas definem-se outras (chamadas por isso mesmo 'noções derivadas'), tais como a de 'produto de dois números', a

relação 'menor que', etc. Uma *noção derivada*, relativa a esta axiomática, é a de 'sucessor de um número':

Chama-se *sucessor de um número natural* n o número $n + 1$.

Usaremos a expressão 'suc n ' como abreviatura de 'sucessor de n '.

Posto isto, consideremos as seguintes proposições:

I. *Para todo o número natural n existe um e um só número natural que é sucessor de n .*

II. *Se suc $a = \text{suc } b$, então $a = b$.*

III. *Existe um e um só número natural que não é sucessor de nenhum número natural.*

DEFINIÇÃO. Designa-se por '1' o número natural que não é sucessor de nenhum outro.

IV. *Se X é um conjunto de números naturais a que pertence 1 e tal que, se $n \in X$, também $\text{suc } n \in X$, então X é o conjunto de todos os números naturais.*

Relativamente à axiomática A1-A5 as proposições I-III são *teoremas*, isto é, são proposições que se demonstram, tomando A1, A2, A3, A4 e A5 como *axiomas*. A proposição IV é o *princípio de indução matemática em $\mathbb{N}$* .

Mas, desde logo se observa que as proposições I-IV são *mais simples* e, a bem dizer, *mais evidentes* do que as proposições A1-A5, que tomámos para axiomas. Além disso, acontece que as proposições A1-A5 (e portanto todas as que se deduzem destas) podem

ser demonstradas, admitindo as proposições I-IV como *premissas* (ou *axiomas*) e definindo a adição por recorrência. *Por conseguinte, nada nos impede de adoptar o sistema de proposições I-IV como axiomática da teoria dos números naturais.* Esta axiomática é devida ao matemático italiano Peano, que foi um dos criadores da lógica matemática (a ele se deve, por exemplo, a distinção fundamental entre as relações $\in$ e $\subset$).

Não adoptámos a axiomática de PEANO, em vez da axiomática A1-A5, pela simples razão de que as demonstrações das propriedades A2, A3 e A4 a partir do sistema I-V são árduas e de pouco interesse, exigindo uma repetição fatigante do princípio de indução.

Note-se que, na axiomática de PEANO, são consideradas como *primitivas* a noção de 'número natural' e a de 'sucessor'. Pelo contrário, a noção de 'soma' é, neste caso, uma *noção derivada* e as proposições A1-A5 são *teoremas*. Houve portanto aqui uma mudança de *ponto de vista* (ou de *referencial*):

Em qualquer teoria dedutiva os termos 'axioma', 'teorema', 'noção primitiva', 'noção derivada' exprimem propriedades relativas. (Já no capítulo I assinalámos a relatividade das próprias noções de 'elemento' e de 'conjunto'.)

Mas, é curioso notar que o conjunto $\mathbb{N}_0$, com a noção usual de 'sucessor', também verifica a axiomática de PEANO (basta substituir '1' por '0' e 'número natural' por 'número inteiro absoluto'). Analogamente, se chamarmos '*sucessor de um número primo n*' ao menor número primo maior que n , vê-se que o conjunto dos números primos também verifica a axiomática (substituindo, é claro, '1' por '2' e 'número natural' por 'número primo').

Muitos outros exemplos podiam ser apresentados.

9. Axiomáticas compatíveis. Como vimos, o par $(\mathbb{N}, +)$ verifica a axiomática A1-A5, mas já o par $(\mathbb{N}^0, +)$ e o par $(\mathbb{N}, \cdot)$, com $\cdot$ no lugar de $+$, não a verificam. Analogamente, os pares $(\mathbb{N}, \text{suc})$, $(\mathbb{N}_0, \text{suc})$ verificam a axiomática de Peano, mas já o par $(\mathbb{Z}, \text{suc})$ não a verifica. Diremos, então, que o par $(\mathbb{N}, +)$ é uma *realização* (ou um *modelo*) da axiomática A1-A5, ao contrário dos outros dois, e que os pares $(\mathbb{N}, \text{suc})$, $(\mathbb{N}_0, \text{suc})$ são *realizações* da axiomática de Peano, ao contrário do par $(\mathbb{Z}, \text{suc})$.

Deste modo, as *realizações* de uma axiomática são comparáveis às *soluções* de um sistema de equações ou inequações. E, assim como o *número de incógnitas* no sistema pode ser 2, 3, 4, etc., assim também o *número de noções primitivas* da axiomática pode ser 2, 3, 4, etc. Pode, portanto, haver axiomáticas cujas realizações sejam *pares ordenados*, *ternos ordenados*, *quaternos ordenados*, etc.

Diz-se que uma axiomática é *compatível*, se admite, pelo menos, uma realização (também se diz, neste caso, que os axiomas são *compatíveis*).

Por exemplo: *A axiomática que demos do conceito de grupo é compatível.* Uma realização muito simples desta axiomática é o par $(\mathcal{L}, \dot{\vee})$, em que $\mathcal{L}$ é o conjunto dos valores lógicos V, F, e $\dot{\vee}$ a operação de *disjunção exclusiva*. Como o conjunto $\mathcal{L}$ só tem dois elementos, torna-se muito fácil provar, *com certeza absoluta*, que o sistema de axiomas é efectivamente verificado.

Analogamente:

1) *A axiomática das álgebras de Boole é compatível.* Uma sua realização é o terno $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$.

2) *A axiomática dos corpos é compatível.* Uma sua realização é o terno $(\mathcal{L}, \dot{\vee}, \wedge)$.

Muitos outros exemplos podiam ser apresentados.

Pergunta-se, agora:

A axiomática A1-A5 (ou a axiomática equivalente de Peano) é compatível?

Por outros termos:

Existe, na verdade, o grupóide $(\mathbb{N}, +)$?

Eis aqui um problema difícilimo. E toda a dificuldade reside neste facto: deduz-se da própria axiomática que o conjunto $\mathbb{N}$ é *infinito*.

Com efeito, o axioma I de Peano diz-nos que existe uma aplicação $n \mapsto \text{succ } n$ do conjunto $\mathbb{N}$ em si mesmo; depois o axioma II diz-nos que essa aplicação é *biunívoca*; finalmente, o axioma III diz-nos que a aplicação é *sobre* o conjunto $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Existe, portanto, uma aplicação biunívoca do conjunto $\mathbb{N}$ sobre uma parte estrita de $\mathbb{N}$. Mas isto quer dizer que $\mathbb{N}$ é equipotente a uma sua parte estrita e, portanto, é infinito.*

A questão é, pois, esta:

Existem afinal conjuntos infinitos?

Discutiremos este assunto mais adiante.

10. Axiomáticas categóricas. Se um sistema de equações é compatível, pode ser *determinado* ou *indeterminado*, conforme tem uma única solução ou mais de uma solução ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Também se diz que um sistema é determinado ou indeterminado, conforme tem um número finito ou uma infinidade de soluções. O significado dos termos varia com os autores e com os assuntos.

Pois bem:

Diz-se que uma axiomática é *categórica*, sse admite uma única realização, *a menos de um isomorfismo*. Quer isto dizer que o sistema de axiomas verifica as duas seguintes condições:

- 1) existe, pelo menos, uma realização do sistema (isto é, a axiomática é compatível);
- 2) todas as possíveis realizações da axiomática são isomorfas entre si.

Consideremos, por exemplo, a axiomática dos semigrupos (U, θ) :

A'1. Para todo o par (a,b) de elementos de U existe um e um só elemento de U que se designa por $a\theta b$.

$$A'2. (a\theta b)\theta c = a\theta(b\theta c) \quad , \quad \forall a, b, c \in U.$$

Este sistema de axiomas é compatível, mas não categórico. Com efeito, conhecemos várias realizações desta axiomática (chamadas 'semigrupos'), que não são isomorfas entre si: o semigrupo $(\mathcal{L}, \vee)$, o semigrupo $(\mathcal{L}, \dot{\vee})$, o semigrupo $(A_3, +)$, etc., etc.

Porém, se juntarmos ao sistema A'1-A'2 os axiomas A'3, A'4, e A'5, considerados no n.º 6, obtemos a axiomática A'1-A'5 que já é categórica, segundo o teorema demonstrado nesse número.

Daí resulta que *todas as realizações dessa axiomática têm a mesma estrutura*.

Analogamente, *todas as realizações da axiomática de Peano têm a mesma estrutura*.

Assim, podemos dizer que uma axiomática é categórica, sse define uma única estrutura. Sob este ponto de vista, uma axiomática

categórica é comparável a um sistema de equações que seja *determinado*.

Por exemplo, a axiomática dos grupos não é categórica, porque há uma infinidade de estruturas de grupo. A axiomática de geometria euclidiana dada por Hilbert é categórica; define, pois, uma única estrutura: a geometria euclidiana elementar.

Uma das características da matemática moderna consiste no estudo predominante de diversas classes de estruturas, definidas por *axiomáticas não categóricas*: estruturas de grupóide, de semigrupo, de grupo, de anel, de corpo, de álgebra de Boole, de conjunto ordenado, de espaço vectorial, de espaço afim, de espaço topológico, etc., etc.

11. Axiomáticas independentes. Diz-se que uma axiomática é *independente*, sse nenhum dos seus axiomas é implicado pela conjunção dos restantes.

Para ver se um dado axioma não é implicado pela conjunção dos restantes, o que se costuma fazer é procurar um modelo que verifique todos os axiomas, excepto o axioma considerado. Isto é comparável ao que se pode fazer, por exemplo, para provar que a inequação $x - y < 0$ é independente do sistema de inequações $x^2 - y^2 < 9$, $x + y > 0$: assim, o par (2,1) verifica estas duas e não verifica a primeira.

Se, pelo contrário, se consegue provar que um dos axiomas é implicado pela conjunção dos restantes, a axiomática não é independente, mas sim *redundante* (ou *pleonástica*): esse axioma pode, então, passar para a categoria de *teorema*. Foi isto o que verificámos a respeito da comutatividade da adição dos números naturais, quando, no n.º 5, demonstrámos essa propriedade a partir dos axiomas A1-A5.

No entanto, o problema da independência de uma axiomática é um problema lógico de menor importância: o que interessa principalmente é saber se a axiomática é compatível e se é ou não categórica. Adotar uma axiomática que não seja independente é considerado apenas *pouco elegante*, do ponto de vista lógico, mas pode ser *admissível e cómodo*, principalmente se a demonstração de um axioma, a partir dos restantes, é difícil e de pouco interesse.

Todavia, continua em aberto o problema de saber se a axiomática A1-A5 é ou não compatível. Vamos, agora, discutir esse problema.

12. Existem afinal conjuntos infinitos? Como se viu no n.º 8, a axiomática de Peano (ou a axiomática equivalente A1-A5) implica que o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito. Tal não aconteceria se fosse suprimido o axioma segundo o qual *todo o número natural tem um sucessor* (ou o axioma segundo o qual *existe sempre a soma de dois números naturais*). Mas isso daria lugar a constantes embaraços, pois haveria muitas vezes dúvidas sobre a possibilidade de somar dois números dados — e *então os raciocínios, para serem rigorosos, acabariam por se tornar muito mais complicados*. É pois, principalmente, por razões de *comodidade* que se é levado a admitir o referido axioma. Mas não é só por isso.

Suponhamos que admitíamos o contrário, isto é, que admitíamos a existência de um *último número natural* — quer dizer, de um número natural *que não tem sucessor*. Isto parece desde logo uma arbitrariedade, que repugna à nossa intuição ou, pelo menos, ao *hábito* que adquirimos na nossa experiência quotidiana. Com efeito, a *indução experimental* leva-nos a admitir que é sempre possível *acrescentar mais um elemento a um conjunto*. Mas a indução experimental nunca nos dá uma certeza — e menos ainda neste caso.

No decorrer do tempo, o homem toma conhecimento de conjuntos cada vez mais numerosos. Uma pergunta que nos ocorre fazer, logo desde pequenos, é a seguinte:

'Quantas estrelas há no Céu?'

e, na imaginação do povo, associar-se esta pergunta a uma outra: 'Quantos peixes há no mar?'

Supõe-se, hoje, que existem (ou têm existido), biliões de galáxias, cada uma das quais tem biliões de estrelas. Já isso conduz a um número enorme de estrelas ⁽¹⁾ — um *número astronómico*, como se costuma dizer. Se depois pensarmos nas partículas atómicas que porventura constituem cada estrela, somos levados a números inconcebíveis.

E, contudo, daí a afirmar que o *número de seres materiais é infinito*, vai uma grande distância.

Há anos, num jardim de infância em Nova York, quando estava a chover, alguém perguntou às crianças quantas gotas de chuva poderiam cair durante o dia naquela cidade ⁽²⁾. O maior número indicado foi 100. Para as crianças a palavra 'cem' significava já um número astronómico — *mas não infinito*. A pouco e pouco, porém, foram levadas a reconhecer que o número das gotas de chuva teria de ser muito maior e acharam que esse número deveria ser mais ou menos igual ao *número de grãos de areia de uma praia*. Para dar uma ideia de número tão grande, uma das crianças do jardim de infância escreveu na pedra o algarismo 1 seguido de 100 zeros. Mais tarde, outra criança (um sobrinho do Dr. Kasner, com 9 anos), achou que era preciso baptizar esse número e deu-lhe o nome '*googol*'.

(1) Cerca de 10^{23} estrelas ao todo.

(2) Este facto é referido na obra de EDWARD KASNER e JAMES NEWMAN, '*Mathematics and Imagination*', Simon and Schuster, New York, 1940.

Ora bem, depois de cuidadosas investigações, chegou-se à conclusão de que o número de gotas de chuva que podem cair em Nova York durante um dia, um ano ou mesmo um século, será sempre muito inferior a um googol... Mais ainda, segundo os cálculos do físico EDDINGTON, baseados nas concepções de EINSTEIN, o número total de electrões do universo deve andar à volta de 10^{79} , portanto muito menos do que um googol...

Que dizer então de números tais como $10^{1 \text{ googol}}$ (googolplex), $10^{1 \text{ googolplex}}$ e de outros que podemos *facilmente designar*? Haverá pois expressões numéricas que, *teoricamente*, designem números naturais, mas que, *na prática*, não correspondem a nenhuns conjuntos finitos que tenham esses números por cardinais?

Uma resposta poderia ser esta:

Se ainda não se apresentaram até hoje tais conjuntos, poderão vir a apresentar-se no futuro. E os números não se fizeram só para contar *seres materiais* que se distribuam no *espaço* (gotas de chuva, grãos de areia, estrelas, electrões, etc.). Aplicam-se também a *acontecimentos*, que se sucedam no *tempo*.

Este é o ponto de vista que conduz à ideia de *infinito potencial*, que substitui a de *infinito actual* (ver NOTA HISTÓRICA do capítulo V do *Compêndio de Álgebra*, 6.º ano).

As crianças de 4 a 6 anos, quando começam a aprender o sistema de numeração falada, emocionam-se facilmente com a possibilidade de designar números cada vez maiores (à criança interessam principalmente os extremos, os excessos, o muito grande e o muito pequeno, tudo, enfim, que seja motivo para exclamações de surpresa). E é frequente, depois de mencionarem um número que lhes parece enorme, desfecharem a pergunta: 'E agora! Há um número maior do que este?' O adulto poderá, talvez, indicar outros números ainda

maiores; mas depois, para pôr termo a um jogo que ameaça eternizar-se, responderá possivelmente:

'Por maior que seja um número, há sempre outro número maior do que esse'(¹).

Em crianças receptivas, o efeito desta frase pode ser extraordinário: a criança tentará talvez reproduzi-la, para apreender todo o seu significado e compenetrar-se bem do seu alcance, comentando-a com grandes exclamações. E tem boas razões para isso. Pois não é esse o seu primeiro contacto com a ideia de infinito matemático?

O adulto, muitas vezes, perdeu por completo a faculdade de se admirar seja do que for. Não se apercebe, como a criança, de que tudo à sua volta é motivo de espanto e que há pensamentos inevitáveis que causam vertigens...

Uma criança de 5 anos, que teve assim a revelação do infinito matemático, perturbada com a ideia, tornou à carga, dias depois, com esta observação:

'Já sei! É porque há sempre dias e noites que os números não mais acabam'.

A observação é justíssima. A sucessão dos dias e das noites é talvez o que sugere mais fortemente no nosso espírito, por indução, a ideia da sucessão infinita dos números naturais. Assim, a criança tinha substituído a concepção de infinito actual pela de infinito potencial — *a do infinito contestável das coisas actuais pela do infinito plausível das que estão por vir*.

(¹) Em símbolos: $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists m \in \mathbb{N}: m > n$.

Há mais de dois mil anos, PLATÃO tinha dito algo de semelhante, em forma poética (no *Diálogo Timeu*):

'O tempo e os céus foram criados no mesmo instante. Deus fez o Sol, para que os seres dotados de inteligência pudessem aprender a aritmética; quer isto dizer que, sem a sucessão dos dias e das noites nós não teríamos pensado nos números. Foi o discernimento dos dias e das noites, dos meses e dos anos, que deu lugar ao conhecimento dos números e à concepção do tempo...'

Na verdade, a ideia de infinito matemático aparece indissoluvelmente ligada à ideia de tempo (1). Em outro passo do mesmo *Diálogo*, Platão diz em resumo o seguinte, na mesma linguagem poética:

'Para dar ao homem uma imagem da Eternidade, o Criador fez essa imagem eterna, mas móvel, na medida em que é traduzível por números; ao passo que a verdadeira Eternidade é una, portanto imutável. É a essa imagem móvel da Eternidade que chamamos Tempo'.

Alguém poderia ter dito àquela criança de 5 anos:

'Os dias e as noites, na Terra, também alguma vez terão fim. Mas em outros astros, em outros planetas, continuará a haver *dias* e *noites*, para ensinar os números a seres inteligentes. E assim sucessivamente.

Até quando? Até onde? Chegados a este ponto, todos somos crianças: acabamos por fazer perguntas, que nem sequer parecem ter sentido.

(1) O infinito espacial é aparente, como desde logo nos revela a teoria da relatividade, mostrando quanto é ilusória a ideia de simultaneidade a distância: nós vemos as estrelas, não como elas são *actualmente* (porque tal não tem sentido), mas sim como *foram*, algumas delas há milhões de anos.

NOTA SOBRE AS CORRENTES NOMINALISTA E REALISTA. Um dos factos dominantes na história da filosofia medieval foi a controvérsia entre *nominalistas* e *realistas*, que se arrastou durante dois séculos, acerca da existência dos *universais*. Dava-se este nome aos *entes abstractos*, que são independentes do espaço e do tempo, isto é, às *propriedades* (ou *atributos*), bem como às *classes*. Exemplos: a *verdade*, a *beleza*, o *bem*, a *justiça*, a *brancura*, a *esfericidade*, a *humanidade* (ou ainda a *espécie humana*), ou ainda, dum modo geral, os números, as formas, as cores, as classes biológicas, etc.

A posição inicial dos nominalistas pode resumir-se nestes termos:

Não existem a verdade, a beleza, a justiça, a esfericidade, etc.: existem apenas factos verdadeiros, coisas belas, acções justas, corpos esféricos, etc. Um substantivo abstracto é, pois, um *nome* (designação), a que não corresponde nenhum *ente* (designado). E o mesmo se pode dizer dos substantivos comuns, tais como 'rosa', 'gato', 'homem', 'astro', etc.: cada um destes é apenas um *nome*⁽¹⁾, que aplicamos indistintamente a *diversos indivíduos semelhantes entre si*, mas ao qual não corresponde nenhum *ente*, que seja a classe ou o conjunto desses indivíduos.

Pelo contrário, os realistas afirmam a existência dos universais e chegam a atribuir-lhes mais *realidade* do que aos *seres concretos* (ou *seres empíricos*), nos quais se manifestam os universais. Uma das formas extremas do realismo é a *teoria platónica das ideias*, que diz, em resumo, o seguinte:

Para além do mundo sensível, onde tudo é instável e se corrompe, ergue-se a realidade inteligível, o mundo sublime das Ideias, imu-

(1) 'Nada mais do que *flatus voci* (um sopro de voz)' teria dito o filósofo escolástico ROSCELINO, fundador do nominalismo (século XI).

tável e eterno, do qual o primeiro é apenas imitação grosseira, imagem deformada, como a de paisagem serena, reflectida na superfície agitada de um rio. Assim, as coisas sensíveis, isto é, os entes que nós conhecemos por meio dos sentidos, são apenas reproduções imperfeitas das Ideias. Estas existem desde sempre na verdadeira Realidade (que é o Céu, donde a nossa alma veio) e os entes materiais apenas contribuem para despertar em nós a recordação das ideias [*teoria platónica das reminiscências*]. Por exemplo, os círculos, tais como nós os desenhamos e materialmente os conhecemos, são apenas imagens toscas da Ideia do Círculo, que conhecemos com os olhos da razão ou seja da alma. Deste modo, o mundo sensível não passa de miragem evanescente, pois que nada aí perdura e consiste.

Como se vê, a palavra 'realismo' é, neste caso, usada em sentido literalmente oposto ao habitual, pois que se refere à realidade inteligível (ou ideal). Ora, na linguagem vulgar, o significado de 'ideal' opõe-se ao de 'real'. Assim, identificar o real com o ideal é uma audácia que choca o senso comum: chama-se hoje, de preferência, '*idealismo*' a esta forma de realismo (1).

Na Idade Média, os nominalistas representam a filosofia do Devir, o empirismo heracliteano, ao passo que os realistas representam a filosofia do Ser e em especial o racionalismo platónico. Nominalismo e realismo, empirismo e racionalismo, ser e devir — diálogo que

(1) Como sempre, ao sustentar uma doutrina que choca o senso comum, a linguagem de Platão assume forma poética. Interessa registar que a teoria platónica das duas realidades (a sensível e a inteligível), bem como a teoria das reminiscências, inspirou a Camões um dos seus mais belos poemas, '*Babel e Sião*': Babel é o mundo sensível e Sião o mundo inteligível (ou seja o Céu, de que 'a nossa alma sente saudades').

Modernamente, os cientistas apresentam uma versão biológica da teoria das reminiscências: cada indivíduo recebe no embrião o seu *código genético*, que lhe permite *recordar*, em contacto com a natureza, as experiências e os hábitos mentais, adquiridos em milhões de anos por todos os seus antecessores.

não mais terá fim, enquanto houver história humana, pois que se trata de duas atitudes *complementares* que se alternam no nosso espírito ao perscrutar a natureza. O que interessa é saber conciliar as duas atitudes, conforme a situação, de acordo com o *bom senso*, procurando evitar posições rígidas. Essa filosofia da *conciliação pelo bom senso*, que já tinha sido adoptada por ARISTÓTELES, foi retomada no século XIII por S. TOMÁS DE AQUINO, que pôs, assim, termo à polémica escolástica sobre os universais. Mas, o antagonismo tem vindo a renascer sob as mais diversas formas, até aos tempos actuais...

É impossível sustentar, *em absoluto*, a tese nominalista ou a tese realista, sem cair em paradoxos. Ainda em fins de século passado o realismo das classes, levado ao extremo, conduziu aos célebres *paradoxos da teoria dos conjuntos*, que provocaram o fim trágico da vida de CANTOR, atacado pelos matemáticos empiristas. E não se pode dizer que a questão esteja encerrada.

Por outro lado, segundo a tese nominalista, não existe por exemplo o verde, mas apenas a palavra 'verde' (e coisas verdes); não existe o número 3, mas apenas a designação '3' (e conjuntos de 3 elementos); e assim por diante, negando tudo que seja classe, propriedade ou relação, como coisa que possa existir, além dos seres individuais. Mas, o que são afinal as palavras e os símbolos senão *entes abstractos*, — classes de coisas sensíveis? Consideremos, por exemplo, a *letra a*. O que é este ente, que se designa por 'a', senão uma certa classe de figuras materiais, nem sequer semelhantes entre si no sentido geométrico? É evidente que se trata de uma entidade convencional, com inúmeras modalidades de concretização, sem que seja possível delimitá-la com nitidez perfeita: da letra *a* podemos passar, por *continuidade*, à letra *q*, à letra *d*, etc.; quando dizemos 'este *a*, aquele *a*', fazemos alusão a duas *representações* distintas do *mesmo sinal*: a letra *a* escrita não só em dois *lugares* diversos, mas ainda de dois *modos* necessariamente diversos. E, se passarmos da linguagem escrita para a linguagem falada, a situação é, perfeitamente, análoga.

Aliás, a crítica empirista, para se manter coerente consigo mesma, foi cair, como era inevitável, no *cepticismo*, negando a existência do que quer que seja, concreto ou abstracto, quer no domínio da matéria (BERKELEY) quer no do espírito (HUME).

O bom senso e a experiência dizem-nos afinal que, para poder-mos pensar e subsistir no mundo em que vivemos, precisamos de *acreditar* nos sentidos, controlados pela razão, e na razão, controlada pelos sentidos, num processo de correcção mútua e constante. Assim, deveremos aceitar como *hipótese eficaz e necessária*, a existência de diversos entes, quer sejam indivíduos, propriedades, classes ou relações (já sabemos, aliás, o que há de relativo em tais conceitos).

Consideremos, por exemplo, a *espécie humana*. É uma classe, um ente abstracto. Mas, como negar inteiramente a sua realidade? Não é um conjunto bem definido, sem dúvida: vem obscuramente do passado e prolonga-se de maneira imprevisível no futuro, sem *fronteiras marcadas*. Mas são assim todos os entes da natureza⁽¹⁾.

Aliás, é esse carácter indefinido dos entes naturais que gera em nós a ideia de *infinito*. E, todavia, a respeito de tudo o que é obra da natureza, se diz que é *finito*, isto é, que tem *fim*... Mas, por outro lado, também se diz que os entes da natureza se transformam continuamente uns nos outros, que a quantidade se transforma na qualidade, etc.

Assim, os conceitos complementares de *finito* e *infinito*, de *contínuo* e *descontínuo*, etc. são, como quaisquer outros, simplificações mentais sugeridas ao nosso espírito pela própria natureza para a poder-mos interpretar, e que não podemos por isso evitar, mas que, em cada caso, só imperfeitamente podem ser aplicados — porque a natureza é *infinitamente* complexa...

(1) Quando se diz, por exemplo, '*Não existem raças humanas*', está-se a adoptar uma atitude nominalista, que equivale a dizer: '*Não existem critérios rígidos (ou fronteiras) que permitam distinguir raças humanas*'.

13. O problema da não contradição da aritmética. Os trabalhos de CANTOR, FREGE, PEANO, RUSSELL e outros tendiam a reduzir toda a matemática à lógica e à teoria dos conjuntos. Porém, essa tendência (chamada '*logicismo*' em matemática) não conseguiu alcançar o seu objectivo. Daí resultaram novas formas de nominalismo (ou empirismo) em matemática, das quais a mais extremista é talvez o chamado '*intuicionismo*' de BROUWER e a mais moderada o chamado '*formalismo*' de HILBERT⁽¹⁾.

Segundo Hilbert, a matemática, considerada apenas no seu aspecto lógico-dedutivo, é essencialmente uma *linguagem exacta*, para uso da ciência. Cada uma das suas formas (ou, como se diz precisamente, cada um dos seus *formalismos*) é constituído por um sistema de *símbolos* e de *regras de tipo gramatical*, para associar esses símbolos em termos e em proposições aceitáveis como verdadeiras (axiomas, definições e teoremas). Não interessa propriamente à matemática o problema da existência ou não existência de entes aos quais se possam aplicar os termos: basta admitir que existem os símbolos com os quais se trabalha e saber (ou admitir) que as regras para uso dos símbolos, em cada formalismo, não conduzirá nunca a contradição, isto é, a uma proposição *que seja ao mesmo tempo verdadeira e falsa*.

Para compreender melhor este ponto de vista (exposto necessariamente de maneira sumária e imprecisa), consideremos a axiomática dos grupos $(U, .)$ em linguagem multiplicativa:

G1. Para todo o par (a, b) de elementos de U , existe um e um só elemento de U chamado produto de a por b , que se representa por ab .

(¹) DAVID HILBERT (1862-1943) é considerado um dos maiores matemáticos da primeira metade deste século, se não o maior. Ver a NOTA HISTÓRICA do Cap. V do *Compêndio de Álgebra*, 6.º ano.

G2. Existe um elemento de U , que se representa por 1, tal que $a1 = 1a$, $\forall a \in U$ (1).

G3. $(ab)c = a(bc)$, $\forall a,b,c \in U$.

G4. Para todo o elemento a de U , existe um elemento a^{-1} de U tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Já sabemos que esta axiomática é *compatível*. Juntemos-lhe, agora, o seguinte axioma:

G5. Existe, pelo menos, um elemento a de U , distinto de 1, tal que $a^2 = a$.

Será a nova axiomática G1-G5 compatível?

Para ver que não, consideremos um elemento a qualquer de U e suponhamos que

$$a^2 = a$$

Então

$$a^{-1} a^2 = a^{-1} a$$

donde $a = 1$ (porquê?)

Assim, dos axiomas G1-G4 deduz-se a seguinte proposição:

$$(1) \quad a^2 = a \Rightarrow a = 1 \quad (\forall a \in U)$$

(1) Supõe-se U não vazio.

Mas, segundo o axioma G5, é verdadeira a *negação* desta proposição:

$$\exists a \in U: a^2 = a \wedge a \neq 1$$

Por conseguinte, segundo a axiomática G1-G5, a proposição (1) é, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa, o que é inadmissível segundo o PRINCIPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO.

Pois bem, diz-se que uma axiomática é *contraditória*, sse é possível deduzir dela uma proposição que seja ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

Desde logo se vê que:

A) Se uma axiomática é compatível, não é contraditória.

Com efeito, dizer que uma axiomática é compatível significa que existe, pelo menos, uma realização ou modelo *m* dessa axiomática. Neste caso, todas as proposições que se deduzem logicamente da axiomática serão *verificadas efectivamente* em *m*, isto é, são todas *verdadeiras e nenhuma falsa*.

Pela regra de conversão, a proposição A) equivale à seguinte:

A') Se uma axiomática é contraditória, então é incompatível.

Por exemplo, a axiomática G1-G4 dos grupos é compatível, logo não contraditória. Por sua vez, a axiomática G1-G5 é contraditória, logo incompatível (isto é, não existe nenhuma realização dessa axiomática).

Resta saber se é verdadeira a recíproca da proposição A):

A) Se uma axiomática não é contraditória, então é compatível.*

Pois bem:

Considera-se esta proposição verdadeira, *por definição*. 'Por definição de quê?', pode perguntar-se. A resposta é esta: Por definição de '*existência de uma realização da axiomática*'. HENRI POINCARÉ exprimia este facto dizendo:

'Existir, em matemática, significa: ser isento de contradição'.

Por exemplo, dizer que *existe o conjunto* $\mathbb{N}$ equivale a dizer que a axiomática de Peano (ou a axiomática A1-A5) é não contraditória; dizer que *existe o espaço euclidiano usual* $\mathcal{E}$ equivale a dizer que é não contraditória qualquer axiomática da geometria euclidiana elementar, etc.

As proposições A) e A*) fundem-se numa única:

Uma axiomática é compatível, sse não é contraditória

Assim, na impossibilidade de construir uma realização da axiomática A1-A5, como se fez para a axiomática dos grupos (que admite *realizações finitas*), somos conduzidos ao seguinte problema:

PROBLEMA DA NÃO CONTRADIÇÃO DA ARITMÉTICA. *Provar que a axiomática de Peano (ou qualquer outra equivalente) é não contraditória.*

Convém desde logo notar que, no enunciado dos teoremas de aritmética, bem como na respectiva dedução, intervêm não só os axiomas e as noções primitivas da aritmética, segundo a referida axiomática, *mas também noções e axiomas da lógica*. Esta observação levou HILBERT a tentar resolver o problema da não contradição da

aritmética, partindo de uma axiomática dos números naturais, ampliada com noções primitivas e axiomas da lógica. É claro que, para obter o máximo rigor, foi indispensável formular todos esses axiomas em *linguagem simbólica*. Um tal conjunto de símbolos e de axiomas (que podemos equiparar a *regras gramaticais*) é chamado um *formalismo rigoroso* ou *língua científica*.

Com os seus esforços neste sentido, HILBERT acabou por dar um incremento ao estudo dos fundamentos da matemática; *mas, não conseguiu alcançar o seu objectivo principal, que era o de provar a não contradição da aritmética*.

Este insucesso parcial levou o lógico matemático KURT GÖDEL a demonstrar um teorema memorável, que constitui um marco milenário na história do pensamento científico (1). Não podemos formular exactamente o teorema de GÖDEL; mas a sua ideia é esta:

É impossível demonstrar a não contradição dos formalismos lógico-aritméticos de Hilbert, sem recorrer a uma teoria mais ampla (chamada 'meta-teoria', em relação à primeira), isto é, sem criar um novo formalismo mais rico ('meta-lingua' ou 'sintaxe' do primeiro), introduzindo novos símbolos e novos axiomas. Põe-se, portanto, o problema da não contradição deste novo formalismo, o que requer por sua vez um formalismo ainda mais amplo, e assim sucessivamente, sem mais se poder chegar a uma conclusão definitiva.

Em conclusão:

Procurando racionalizar o *infinito quantitativo* dos números naturais, o matemático acaba por ir de encontro a um outro mais

(1) O nome de GÖDEL encontra-se ligado, juntamente com os de VON NEUMANN e NORBERT WIENER, ao advento da Cibernética. É sabido como a análise lógica e a construção de línguas científicas intervêm nos computadores.

temeroso: o *infinito qualitativo* das linguagens, que se criam e se sucedem de modo imprevisível!

Uma análise aprofundada do assunto mostra que é este o tipo de infinito que intervém no conjunto dos números reais (1).

O teorema de Gödel vem, afinal, mostrar o *poder criador do espírito humano* e tem sido invocado como argumento contra os adeptos extremistas da CIBERNÉTICA, que atribuem verdadeira inteligência aos computadores electrónicos e que, vice-versa, equiparam o cérebro humano a um computador evoluído. Assim, o nosso cérebro seria apenas o produto aperfeiçoadíssimo da *evolução biológica*, efectuada em milhões de anos.

Mas há a tese oposta, defendida por outros cientistas, segundo a qual é absurdo atribuir inteligência aos computadores, se 'inteligência' significa: *faculdade de reflectir* perante situações novas; *capacidade de adaptação* a essas novas situações; *liberdade de opção*, segundo critérios pessoais; enfim, *poder criador*, capaz de modificar o mundo e o curso dos acontecimentos.

Na verdade, se as máquinas tivessem inteligência, esta seria terrível — porque seria *inteligência sem consciência*.

NOTAS — I. O ponto de vista do formalismo é nominalista na medida em que considera os símbolos como a realidade em que assenta directamente a matemática. O *problema ontológico*, que consiste em saber se existem ou não seres (indivíduos, classes ou rela-

(1) Segundo investigações posteriores, o resultado negativo de Gödel poderia ser superado mediante uma espécie de *teoria dos tipos lógicos* para os formalismos. Nesta ordem de ideias, haveria não *um*, mas *vários* conjuntos de números reais, sucessivamente mais amplos e cada um dos quais teria a *potência do contínuo* segundo o formalismo correspondente, mas a *potência do numerável* segundo o formalismo seguinte.

ções) aos quais se apliquem os símbolos, é considerado um problema extra-matemática.

II. Dizer que uma axiomática é não contraditória equivale a dizer que é válido o PRINCIPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO na teoria a que dá origem. Nos formalismos de Hilbert são ainda utilizados, como regras de lógica, o PRINCIPIO DA IDENTIDADE e o PRINCIPIO DO TERCEIRO EXCLUIDO. Porém, este último não é aceite pelos *intuicionistas* (ver p. 139).

III. Na linguagem comum são frequentes os casos em que um mesmo termo aparece a designar entes distintos: então o termo diz-se *plurívoco* (ou *ambíguo*) e os entes designados dizem-se *homónimos*. Já no *Compêndio de Matemática*, I vol., 1.º tomo, pp. 20 e 21, se observou que estes casos vão contra os princípios da identidade e da não contradição, podendo originar equívocos. Exemplos:

‘Viseu é uma cidade portuguesa. Viseu não é uma cidade portuguesa. Logo Viseu não é Viseu’.

‘Ingrid Bergman é uma estrela. Ingrid Bergman não é uma estrela’. Logo há uma estrela que não é estrela’. (Acepções diferentes da palavra ‘estrela’) (1).

Num formalismo rigoroso pode haver termos *sinónimos*, mas não termos *ambíguos*: cada termo só pode designar *um* ente e cada pro-

(1) A imprecisão de linguagem pode prestar-se não só a equívocos, mas também a jogos de palavras, a sofismas, à dialéctica no mau sentido, como a que se emprega por vezes em tribunais e em discursos demagógicos... Assim é que, quando falta bom senso ou a boa fé, se chega a provar que o branco é preto...

posição só pode ter *um* valor lógico (numa determinada realização da axiomática). Por isso, os formalismos rigorosos também se chamam *línguas unívocas* ou *línguas exactas*. A linguagem comum não é evidentemente uma língua exacta (embora possa conter línguas exactas, contraditórias entre si).

Os formalismos rigorosos têm a exactidão inflexível das máquinas de calcular, às quais se aplicam. A linguagem comum não tem a precisão das máquinas; mas, por isso mesmo, oferece outras vantagens, que a tornam imprescindível: a plasticidade, o dinamismo, o *élan* criador; numa palavra — a vida.

Índice

NOTA PRÉVIA	7
ADVERTÊNCIA	9
Capítulo I. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL	
§ 1. <i>Cálculo numérico aproximado</i>	
1. Considerações prévias intuitivas	11
2. Erro de um valor aproximado	14
3. Algarismos exactos dum valor aproximado.	20
4. Majoração do erro de uma soma	21
5. Cálculo aproximado de uma soma com erro inferior a um número dado	24
6. Erro do valor simétrico e erro do valor absoluto	25
7. Majoração do erro de uma diferença.	27
8. Majoração do erro de um produto.	28
9. Cálculo aproximado de um produto com erro inferior a um número dado	33
10. Majoração do erro de um quociente	37
11. Cálculo aproximado de um quociente com erro inferior a um número dado.	40
	425

12. Majoração do erro de uma potência	44
13. Majoração do erro de uma raiz	46
14. Desvio relativo e erro relativo.	49
15. Erro relativo de um produto	50
16. Erro relativo do quociente	51
17. Erros relativos da potência e da raiz.	52

§ 2. Teoria dos limites de sucessões

18. Métodos de aproximações sucessivas.	54
19. Convergência de uma sucessão	61
20. Pormenores de terminologia.	68
21. Primeiros teoremas sobre limites.	72
22. Álgebra dos limites	75
23. Métodos de iteração	81
24. Critérios particulares de convergência.	84
25. Símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação . .	86
26. Limites infinitos.	88
27. Operações com limites infinitos	90
28. Regras de cálculo com o símbolo ∞	94
29. Novos símbolos de indeterminação.	96
30. Limite da exponencial	99
31. Soma de todos os termos duma progressão geométrica . .	102
32. Aproximações por meio de séries. Série binomial	111
33. Um método geral de resolução de equações algébricas de qual- quer grau	117

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

§ 3. Limites de funções de variável real

34. Conceitos e propriedades elementares	129
35. Definição de 'limite de uma função segundo Cauchy'.	132
36. Axioma de Zermelo	135
37. Exemplos de limites de funções circulares e das funções exponencial e logarítmica	140
38. Indeterminações	146
39. Funções contínuas	147

§ 4. Derivadas

40. Conceitos fundamentais e regras de derivação	149
41. Conceito de diferencial	153
42. Regras de diferenciação	158
43. O conceito de diferencial nas ciências da natureza	160
44. Derivação das funções exponencial e logarítmica	164
45. Derivada da função logarítmica	171
46. Derivadas das funções circulares.	173
47. Máximos e mínimos, concavidades e inflexões.	175
48. Teorema de Cauchy.	177
49. Método da tangente (ou de Newton)	183
50. Método da corda (ou regra da falsa posição).	189
51. Interpolação por diferenças finitas	191

Capítulo II. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL

1. O problema da primitivação	203
2. Primitivações imediatas.	207

3. Regras elementares de primitivação	211
4. Alguns exemplos de aplicação às ciências da natureza . . .	218
5. Noção intuitiva de integral	228
6. Definição de integral	235
7. O integral como limite de uma sucessão	238
8. Interpretação geométrica do conceito de integral	242
9. Valor médio duma função; teorema da média	243
10. Teorema da decomposição do intervalo	247
11. Teorema fundamental do cálculo integral	249
12. Fórmula de Barrow	257
13. Cálculo de áreas	262
14. Cálculo de volumes	265
15. Cálculo do comprimento de curvas	270
16. Novos exemplos da física	277
17. Propriedades em que se baseia o cálculo numérico de integrais	285
18. Métodos de integração numérica	289
19. Fórmula de Taylor	293
20. Série de Taylor.	296
21. Desenvolvimentos em série de potências	298
22. Integração de séries termo a termo	301
23. Exemplos de equações diferenciais.	307
24. Integração numérica de equações diferenciais	312

Capítulo III — TEORIA DEDUTIVA DOS NÚMEROS NATURAIS

1. Caracterização da estrutura do grupóide $(\mathbb{N}, +)$	319
--	-----

COMPENDIO DE MATEMATICA

2. Princípio de indução em $\mathbb{N}$. Sucessões; definições por recorrência.	325
3. O princípio de indução matemática em termos de compreensão. Demonstrações por indução	333
4. Nova forma do raciocínio de indução matemática	342
5. Regresso ao problema inicial: caracterização da estrutura de $(\mathbb{N}, +)$	344
6. Axiomática da teoria dos números naturais. Primeiras definições e teoremas	346
7. Caracterização da estrutura aditiva dos números naturais (conclusão)	353
8. Axiomática de Peano	359
9. Axiomáticas compatíveis	362
10. Axiomáticas categóricas	363
11. Axiomáticas independentes	365
12. Existem afinal conjuntos infinitos?	366
13. O problema da não contradição da aritmética	375
 Aditamento I. Cálculo de valores aproximados	 383
 Advertência prévia.	 383
1. O sistema da vírgula flutuante no cálculo elementar, no cálculo logarítmico e no cálculo electrónico	385
2. Algarismos significativos e algarismos exactos	390
3. Arredondamento de valores numéricos	394
4. Erro relativo e número de algarismos exactos.	395
5. Avaliação do erro do resultado de multiplicações e divisões sucessivas	401
6. Caso da potência	407

J. SEBASTIAO E SILVA

7. Caso da raiz	408
8. Caso da adição e da subtracção	409
Aditamento II. Nova orientação no estudo do cálculo de valores aproximados	411
NOTA FINAL	423

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Março de 1976

**GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA**