J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

3.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

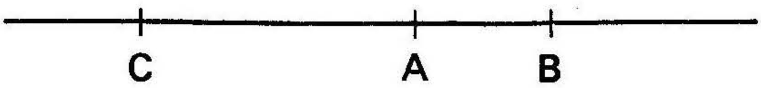
CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO VECTORIAL

1. **Relação 'situado entre'.** Dados três pontos A, B, C em linha recta, sabemos o que quer dizer a proposição

'A *está situado entre* B *e* C'

que pode ser verdadeira ou falsa, conforme os casos (verdadeira no exemplo da figura).



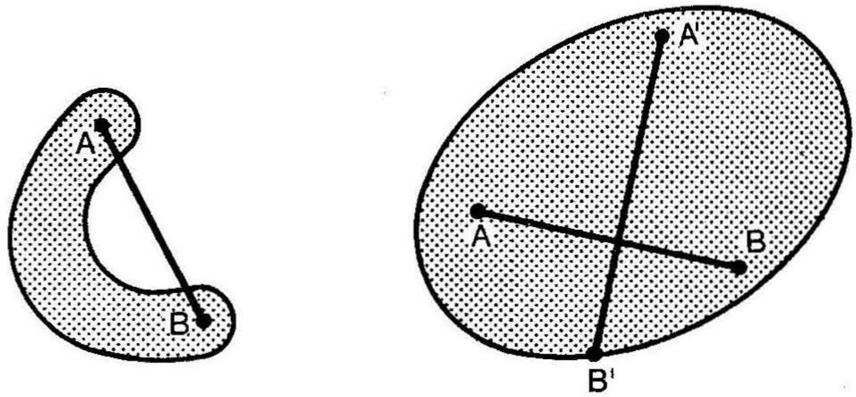
Assim, se considerarmos as letras A, B, C como variáveis, a anterior expressão proposicional define uma *relação ternária* entre pontos da recta. Chamar-lhe-emos, abreviadamente, a relação 'situado entre'. Esta é uma das noções que podem ser adoptadas como primitivas na geometria euclidiana. A partir dela se definem as noções de 'segmento de recta', de 'semi-recta' e de 'semiplano'.

Dados dois pontos A e B distintos, chama-se *segmento de recta de extremos A e B* o conjunto constituído pelos pontos A, B e por todos os pontos da recta AB situada entre A e B [1]. Se A=B, chama-se *segmento de extremos* A, B o conjunto singular $\{A\}$ (segmento *nulo*). Em qualquer dos casos o segmento de extremos A, B é designado pela notação $\overline{AB}$.

---

[1] O **estar situado entre** A **e** B implica **ser distinto de** A **e de** B.

Diz-se que um conjunto $\mathcal{C}$ de pontos é *convexo*, quando, quaisquer que sejam os pontos A e B de $\mathcal{C}$, o segmento $\overline{AB}$ está contido em $\mathcal{C}$. Na figura indica-se um conjunto que é convexo e outro que não o é.



É evidente que *toda a recta é um conjunto convexo.* Um plano também é um conjunto convexo: porquê?

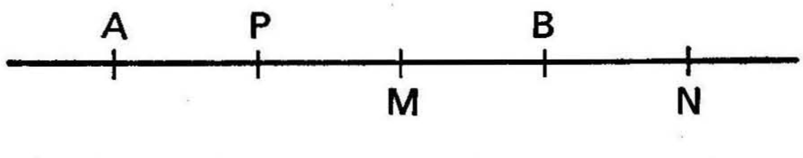
A noção de semi-recta resulta da seguinte proposição, que pode ser tomada como um dos axiomas da geometria euclidiana:

PROPOSIÇÃO 1. *Todo o ponto* P *duma recta* r *divide* r *em duas partes* r_1 *e* r_2 *tais que:*

1) r_1 *e* r_2 *são dois conjuntos convexos cuja reunião é* r *e cuja intersecção é* $\{P\}$;

2) *existe pelo menos um ponto de* r_1 *distinto de* P *e um ponto de* r_2 *distinto de* P;

3) *quaisquer que sejam os pontos* A *de* r_1 *e* B *de* r_2, *o ponto P pertence ao segmento* $\overline{AB}$.



Como é sabido, chamam-se *semi-rectas de origem* P os dois conjuntos r_1 e r_2 que verificam estas condições. Da proposição anterior resulta que uma semi-recta fica determinada, quando se indica a sua origem e um seu ponto qualquer distinto da origem. Se for P a origem e A o outro ponto indicado, designaremos a semi-recta pela notação $\dot{P}A$.

(Um segmento de recta será um conjunto convexo? Justifique a resposta, a partir da proposição 1.)

Diz-se que duas semi-rectas de r *estão voltadas para o mesmo lado,* se uma delas está contida na outra.

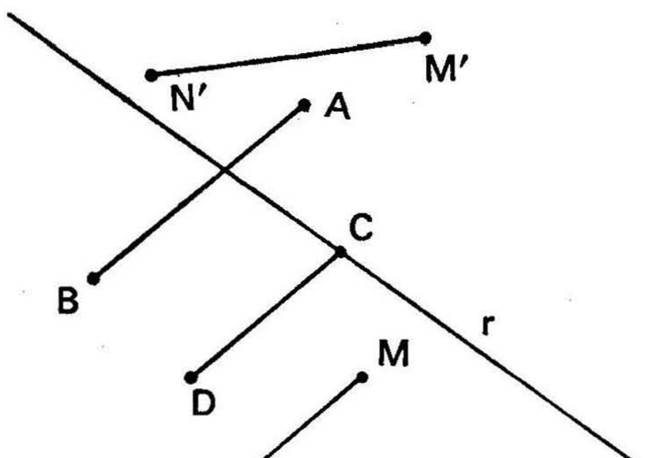
Por sua vez, a noção de semiplano assenta na seguinte proposição, que também pode ser tomada como axioma da geometria euclidiana:

PROPOSIÇÃO 2. *Toda a recta* r *dum plano* α *divide* α *em duas partes* α_1 *e* α_2*, tais que:*

1) α_1 *e* α_2 *são dois conjuntos convexos cuja reunião é* α *e cuja intersecção é* r;

2) *quaisquer que sejam os pontos* A *de* α_1 *e* B *de* α_2*, o segmento de recta* $\overline{\mathrm{AB}}$ *intersecta a recta* r.

Os dois conjuntos que verificam estas condições são chamados *semiplanos* e a recta r *fronteira dos semiplanos.*



Um semiplano fica pois determinado quando se dá a sua fronteira e um seu ponto qualquer não pertencente à fronteira (1). Se esta for *r* e o ponto indicado for A, o semiplano será designado pela notação $\overline{\mathrm{r}}\,\mathrm{A}$.

(1) Prova-se que existe pelo menos um ponto do semiplano fora da fronteira.

2. Relações de ordem. Chama-se *relação de ordem*, num universo U, toda a relação binária R que tenha as seguintes propriedades:

1) ANTI-REFLEXIVA: $xRy \Rightarrow x \neq y$

2) ANTI-SIMÉTRICA ESTRITA: $xRy \Rightarrow y \not R x$

3) TRANSITIVA: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

4) TRICOTÓMICA: $\forall x, y \in U: xRy \vee yRx \vee x = y$

Por exemplo, a relação $<$ em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem e o mesmo sucede com a sua inversa, a relação $>$. Aliás, imediatamente se reconhece que:

Se R *é uma relação de ordem, também* R^{-1} *é uma relação de ordem.*

A relação definida pela expressão *'precede alfabeticamente'*, que se usa nos dicionários, nas listas de telefones, nas pautas de alunos, etc., é outro exemplo da relação de ordem (chamada, neste caso, *'ordem alfabética'* ou *'ordem lexicográfica'*).

Consideremos, agora, a relação R assim definida

$$xRy \Leftrightarrow x \textit{ é menos caro que } y$$

no universo das mercadorias. É anti-reflexiva, anti-simétrica estrita e transitiva. *Mas não é tricotómica, pois existem mercadorias* x, y *tais que*

$$x \not R y \wedge y \not R x \wedge x \neq y$$

Diz-se neste caso que x e y *têm o mesmo preço* (relação de equivalência). Mas já no *universo dos preços* (que são propriedades das mercadorias), a relação $<$ é uma relação de ordem.

Analogamente, a relação 'mais volumoso', definida no universo dos sólidos, tem as propriedades 1), 2), 3), mas não é tricotómica. Com efeito, dois sólidos x, y podem ter o *mesmo volume* (relação de equivalência) e serem distintos ($x \neq y$). Mas no *universo dos volumes* a relação $>$ é uma relação de ordem.

Um exemplo típico é o da relação de grandeza entre segmentos de recta. Dados dois segmentos de recta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, a proposição

'$\overline{AB}$ é menor que $\overline{CD}$'

significa o mesmo que

'$\overline{AB}$ *é menos comprido que* $\overline{CD}$'

e escreve-se abreviadamente, neste caso,

$$\overline{AB} < \overline{CD}$$

Mas esta relação $<$ *entre segmentos não é uma relação de ordem*. Porquê? A razão é esta:

Se $\overline{AB} \not> \overline{CD}$ e $\overline{CD} \not> \overline{AB}$, não se pode concluir que seja $\overline{AB} = \overline{CD}$ (isto é, que os dois segmentos coincidem). O mais que se pode dizer é que os dois segmentos são *geometricamente iguais* (relação de equivalência), o que indicamos escrevendo

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Desta relação deriva a noção de comprimento.

Chama-se *comprimento* de $\overline{AB}$, e representa-se por $|AB|$, a propriedade comum a todos os segmentos geometricamente iguais a $\overline{AB}$. Assim:

$$|AB| = |CD| \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Por sua vez, escreve-se, por definição:

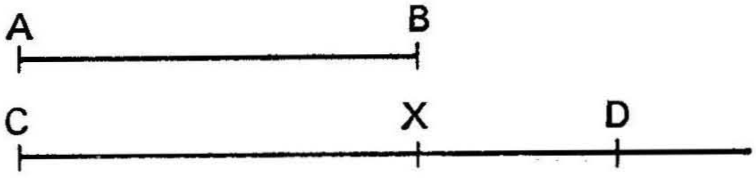
$$|AB| < |CD| \Leftrightarrow \overline{AB} < \overline{CD}$$

e prova-se que, *no universo dos comprimentos* (que são propriedades dos segmentos), a relação $<$ já é uma relação de ordem.

Por várias vezes temos salientado que o sinal $=$ exprime identidade lógica. Quando usado em geometria, deverá sempre ler-se '*coincidente com*' ou '*o mesmo que*' e, assim, o sinal $\cong$ já se poderá ler simplesmente 'igual a', sem receio de ambiguidade.

Convém ainda lembrar que a relação $<$, referida a segmentos de recta, deriva da relação *'situado entre'*, referida a pontos duma recta. Com efeito:

Diz-se que $\overline{AB} < \overline{CD}$, se existe um ponto X situado entre C e D tal que $\overline{CX} \cong \overline{AB}$.



EXERCÍCIOS:

I. Determinar todas as relações de ordem que é possível definir num conjunto $A = \{a, b, c\}$. (Observação: cada relação de ordem num conjunto finito pode ser definido por uma *cadeia*, por exemplo, $b \prec c \prec a$, $c \prec b \prec a$, etc.)

II. Determinar o número de relações de ordem que é possível definir num conjunto finito com *n* elementos.

3. **Conjuntos ordenados. Isomorfismos.** Chama-se *conjunto ordenado* todo o conjunto no qual se adopta uma determinada relação de ordem. Se designarmos esta relação pelo símbolo $\prec$ (que podemos ler 'precede'), o conjunto ordenado será precisamente o par $(U, \prec)$. Por exemplo, são conjuntos ordenados o conjunto $\mathbb{R}$ com a relação $<$ usual (ou com a sua inversa), o conjunto das palavras dum dicionário com a relação de ordem alfabética, etc.

Chama-se *isomorfismo* dum conjunto ordenado $(U, \prec)$ sobre um conjunto ordenado $(V, \prec)$ toda a aplicação f de U sobre V que respeita a relação de ordem, isto é, tal que

$$x \prec y \iff f(x) \prec f(y)$$

Facilmente se reconhece que *todo o isomorfismo de ordem é uma aplicação biunívoca, cuja inversa ainda é um isomorfismo* *de ordem.* E ainda: *o produto de dois isomorfismos de ordem ainda é um isomorfismo de ordem.*

Por exemplo, se for $U = \{1, 2, 3, 4\}$ com a relação $<$, $V = \{a, b, c, d\}$ com a relação 'precede no alfabeto' e

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

vê-se que f é um isomorfismo do primeiro conjunto ordenado no segundo, mas não g.

Analogamente a aplicação $x \leadsto -x$ é um isomorfismo de $(\mathbb{R}, <)$ sobre $(\mathbb{R}, >)$.

EXERCÍCIOS:

Indique quais das seguintes aplicações

$$x \leadsto x^2 \quad , \quad x \leadsto x^3 \quad , \quad x \leadsto 1/x \quad , \quad x \leadsto 10^x$$

são isomorfismos de $(\mathbb{R}, <)$ sobre $(\mathbb{R}, <)$, de $(\mathbb{R}^+, <)$ sobre $(\mathbb{R}^+, >)$ e de $(\mathbb{R}, <)$ sobre $(\mathbb{R}^+, <)$.

Que nome se dá a uma função que respeita a relação 'menor que'? E a uma função que muda $<$ em $>$?

4. **Relações de ordem lata.** Dada uma relação de ordem $\prec$ num conjunto U, podemos definir a partir desta uma outra relação, expressa pelo sinal $\preceq$ (ler 'precede ou é igual a'), do seguinte modo:

$$x \preceq y \Leftrightarrow x \prec y \vee x = y$$

Das propriedades da relação de ordem é fácil deduzir as seguintes, para a nova relação:

1) REFLEXIVA: $x \preceq x, \quad \forall x \in U$

2) ANTI-SIMÉTRICA LATA: $x \preceq y \wedge y \preceq x \Rightarrow x = y$

3) TRANSITIVA: $x \preceq y \wedge y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$

4) DICOTÓMICA: $\forall x, y \in U, \quad x \preceq y \vee y \preceq x$

Chama-se *relação de ordem lata* toda a relação que verifique estas condições. Por vezes, chamam-se *relações de ordem estrita* as relações de ordem (tais como as definimos atrás) para as distinguir das anteriores.

Assim, a toda a relação de ordem estrita corresponde uma relação de ordem lata. Reciprocamente, a toda a relação de ordem lata R correspondente a relação de ordem estrita R* assim definida:

$$xR^*y \Leftrightarrow xRy \wedge x \neq y$$

Portanto, dar uma relação de ordem estrita equivale sempre a dar uma relação de ordem lata.

NOTA. Num conjunto singular a relação de identidade é manifestamente uma relação de ordem lata. A relação de ordem estrita correspondente é a relação binária vazia. Assim, um conjunto singular pode sempre considerar-se ordenado: tem um *primeiro* elemento, que é também o *último*.

5. **Relações de ordem parcial.** Consideremos a relação 'descendente' (filho, neto, bisneto, etc.) no universo dos seres humanos. É uma relação anti-reflexiva, anti-simétrica estrita e transitiva, e o mesmo sucede com a sua inversa, a relação 'ascendente' (ou 'antepassado'). Mas não é tricotómica (porquê?).

Dum modo geral, chamam-se *relações de ordem parcial (estrita)* as relações anti-reflexivas, anti-simétricas estritas e transitivas (podendo ser ou não tricotómicas). As relações de ordem, tais como atrás foram definidas, também, por vezes, são chamadas *relações de ordem total*, para evitar confusões ([1]).

São ainda exemplos de relações de ordem parcial estrita:

I. A relação 'divisor próprio' no universo IN. Diz-se que a é divisor próprio de b, se a divide b e $a \neq b$.

([1]) Alguns autores chamam **relações de ordem** precisamente às que chamamos aqui **relações de ordem parcial** e que incluem as de ordem total como caso particular.

II. A relação 'contido estritamente', no universo dos subconjuntos dum conjunto dado.

É claro que, a toda a relação de ordem parcial estrita, corresponde uma *relação de ordem parcial lata* (isto é, reflexiva, anti-simétrica lata e transitiva) e reciprocamente.

Por exemplo, a relação 'divide', a relação $\subset$, etc., são relações de ordem parcial lata.

A primeira, no universo $\mathbb{N}$, não é uma relação de ordem total (lata): por exemplo, 3 não divide 5 e 5 não divide 3 (falha portanto a dicotomia). Mas a sua restrição ao conjunto das potências dum número já é uma relação de ordem total (lata).

Por sua vez, a relação $\subset$ no conjunto

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

não é uma relação de ordem total, visto que

$$\{1\} \not\subset \{2\} \quad \text{e} \quad \{2\} \not\subset \{1\}$$

Mas já o é a sua restrição ao conjunto

$$\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

EXERCÍCIOS:

I. Classifique as relações R, S, T assim definidas em $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \Longleftrightarrow a < c \land b < d$$

$$(a, b)\ S\ (c, d) \Longleftrightarrow a \leqslant c \land b \leqslant d$$

$$(a, b)\ T\ (c, d) \Longleftrightarrow a < c \lor (a = c\ /\ b < d)$$

Será S a relação de ordem parcial lata associada a R?

II. Como classifica a relação *'precede'* no conjunto dos *instantes* (ou *épocas*) relativas a um dado lugar da Terra? E no conjunto dos instantes relativos a lugares considerados em diferentes astros? (Segundo a *Teoria da Relatividade*, esta relação não é *tricotómica* no 2.º caso.)

NOTA. Como, daqui por diante, trataremos exclusivamente de *relações de ordem total estrita*, omitiremos o qualificativo *'total estrita'*, por já não haver qualquer possibilidade de confusão.

6. **Relação 'situado entre' associada a uma relação de ordem.** Consideremos uma relação de ordem $\prec$ num conjunto U. A partir desta define-se uma relação ternária do seguinte modo:

(1) $$x \text{ está entre } a \text{ e } b \Leftrightarrow a \prec x \prec b \vee b \prec x \prec a$$

Esta relação ternária é chamada a *relação 'situado entre' associada à relação* $\prec$. Mas é evidente que a mesma está associada à relação de ordem inversa:

$$x \textit{ está entre } a \textit{ e } b \Leftrightarrow a \succ x \succ b \vee b \succ x \succ a$$

(O sinal $\succ$ pode ler-se 'segue', enquanto o sinal $\prec$ se lê 'precede').

Por sua vez as relações $\prec$ e $\succ$ dizem-se ambas *subordinadas* à relação 'situado entre', que se definiu.

EXERCÍCIOS — I. Considere num conjunto $U = \{a, b, c, d\}$ a seguinte relação ternária:

$$T = \{acd\ ,\ adc\ ,\ acb\ ,\ abc\ ,\ dcb\ ,\ dbc\ ,\ dab\ ,\ dba\}$$

e interprete a expressão T (x, y, z) como abreviatura de 'x *está entre* y *e* z'. Determine então as relações de ordem subordinadas a T, se porventura existem. [Observação: usamos a notação 'acd' como abreviatura de '(a, c, d)'.]

II. Quantas relações 'situado entre' se podem definir num conjunto finito com *n* elementos?

(Ver respostas no final do número seguinte.)

7. Relações de ordem subordinadas à relação 'situado entre' numa recta. Põe-se agora naturalmente a seguinte pergunta:

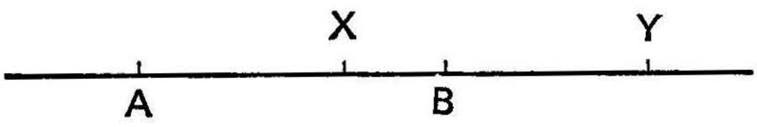
Será possível introduzir na recta uma relação de ordem que esteja subordinada à relação 'situado entre' lá existente?

A resposta é afirmativa.

TEOREMA. *Numa recta é sempre possível introduzir (de dois modos diferentes) uma relação de ordem que fique subordinada à relação geométrica 'situado entre'.*

Demonstração:

Sejam A e B dois pontos distintos da recta e *convencionemos* por exemplo que $A \prec B$.



Então, dados dois pontos X e Y quaisquer da recta escreveremos $X \prec Y$, se os pontos X, Y são distintos e as semi-rectas $\dot{A}B$ e $\dot{X}Y$ estão voltadas para o mesmo lado; isto é, simbolicamente:

$$X \prec Y \Leftrightarrow X \neq Y \wedge (\dot{X}Y \subset \dot{A}B \vee \dot{A}B \subset \dot{X}Y)$$

Então, é fácil ver, aplicando a PROPOSIÇÃO 1 do n.º 1, que a relação $\prec$ assim definida é de facto uma relação de ordem subordinada à relação geométrica 'situado entre'. Pois bem:

DEFINIÇÃO. *Chamam-se* sentidos *duma recta as duas relações de ordem subordinadas à sua relação 'situado entre'. Uma recta diz-se* orientada, *quando nela se define um sentido.*

Segundo o que vimos na demonstração anterior, para definir um sentido numa recta, basta dar um par ordenado (A, B) de pontos que verifique esse sentido ou (o que é equivalente) dar a semi-recta $\dot{A}B$.

Na prática, o sentido pode ser indicado intuitivamente por meio de uma seta paralela à recta ou mesmo incorporada na própria recta.

A origem intuitiva desta noção está no conceito físico de *sentido dum movimento.* Notemos a propósito que, segundo esta terminologia, a designação *'direcção proibida'*, tal como se usa entre nós em regras de trânsito está incorrectamente aplicada. Deveria dizer-se, nesses casos, *'sentido proibido'*. O significado de *'direcção proibida'* deveria ser o de *'trânsito proibido nos dois sentidos'*.

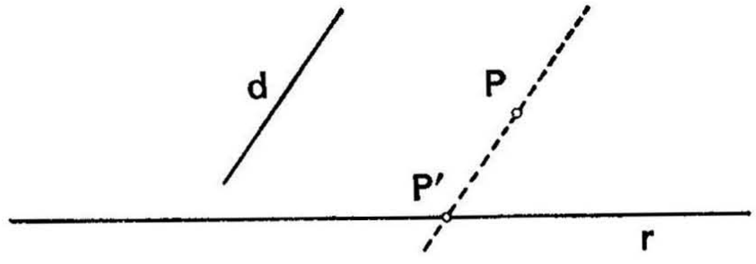
Recordemos que se chama *direcção duma recta* r à propriedade comum a todas as rectas paralelas a r. A noção de sentido pode ser estendida a todas as rectas com a mesma direcção. Mas, para isso, precisamos de utilizar *projecções paralelas.*

RESPOSTAS AOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

I. $c \prec a \prec d \prec b$ e inversa. II. $\frac{n!}{2}$ se $n > 1$; 1 se $n = 1$.

8. **Projecções paralelas. Extensão do conceito de sentido.** Consideremos num plano α duas rectas *r* e *d* concorrentes, e seja P um ponto qualquer do plano. Chama-se *projecção de* P *sobre* r *paralelamente a* d ao ponto P′ da intersecção de r com a recta que passa por P e é paralela a d. Fica assim definida uma apli-

cação (não biunívoca) do plano α sobre r, chamada *projecção paralela.* A projecção diz-se *ortogonal,* sse $d \perp r$.



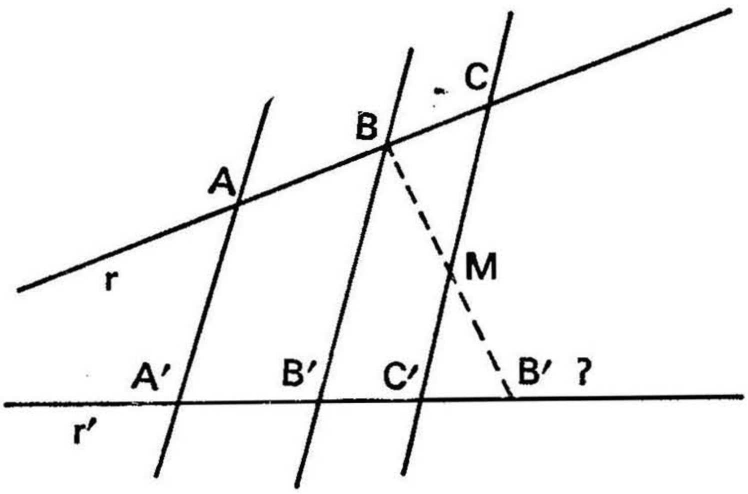
Analogamente se define projecção paralela (e *projecção ortogonal*) do espaço sobre um plano.

LEMA 1. *Sejam* r, r′ *duas rectas quaisquer dum plano e* d *uma outra recta do plano concorrente com as primeiras. Então, a projecção paralelamente a* d *define uma aplicação biunívoca de* r *sobre* r′ *que respeita a relação 'situado entre'. Quer dizer: se forem* A, B, C *três pontos quaisquer de* r *e* A′, B′, C′, *respectivamente as projecções de* A, B, C *sobre* r′, *tem-se:*

B *está entre* A *e* C $\Leftrightarrow$ B′ *está entre* A′ *e* C′

Demonstração:*

A projecção paralela a *d* define manifestamente uma aplicação biunívoca de r sobre r′: a sua inversa é a projecção dos pontos de r′ sobre r paralelamente a *d.*



Sejam agora A, B, C três pontos de r tais que B esteja entre A e C. Suponhamos que B′ *não* está entre A′ e C′, e que, por exemplo, C′ está entre A′ e B′. Então A′ e B′ pertencem a dois semiplanos diferentes de fronteira CC′. Mas A e B estão no mesmo semiplano de fronteira CC′ (porquê?). Logo $\overline{BB'}$ intersecta CC′ num ponto M (porquê?) o que é impossível (porquê?). Portanto C′ não pode estar entre A′ e B′. Analogamente se prova que A′ não pode estar entre B′ e C′. Como B′ não pode ser A′ nem C′, conclui-se que B′ está entre A′ e C′.

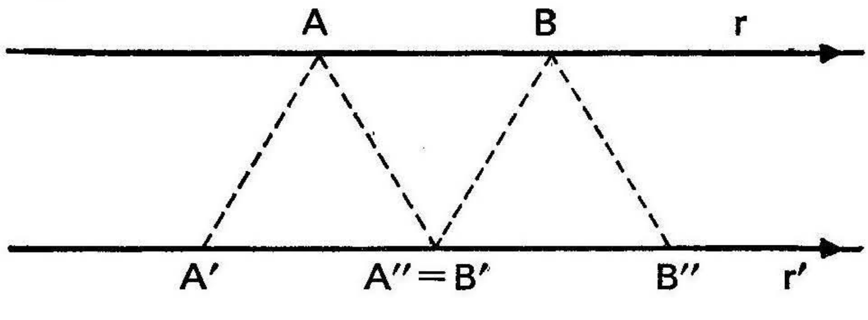
A recíproca fica provada pelo mesmo raciocínio e assim termina a demonstração.

Note-se que este lema é necessário para a demonstração do *teorema de Tales,* no caso em que os segmentos considerados numa das rectas são incomensuráveis.

LEMA 2. *Sejam* r, r′ *duas rectas paralelas dum plano e* d *uma outra recta do plano, concorrente com as primeiras. Se as rectas* r, r′ *estiverem orientadas, e se a projecção de* r *sobre* r′ *paralelamente a* d *respeita o sentido, a projecção de* r *sobre* r′ *paralelamente a qualquer outra recta* d′ *também respeita o sentido* (isomorfismo de ordem).

Demonstração:*

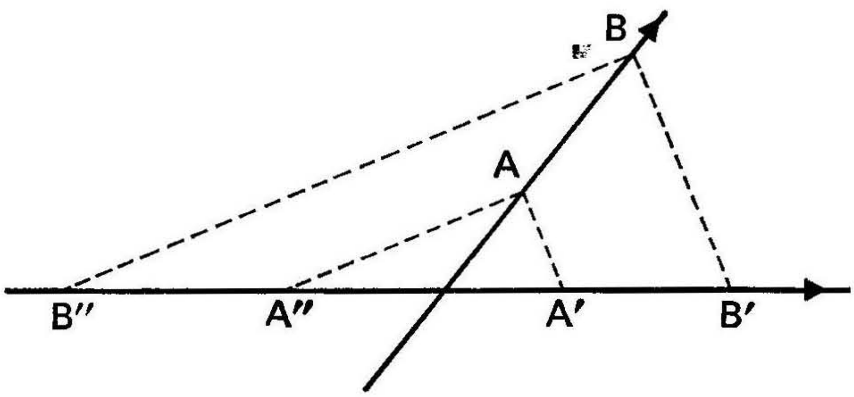
Seja A um ponto qualquer de r, A′ a sua projecção sobre r′ paralelamente a d e A″ a sua projecção sobre r′ paralelamente a outra recta d′. Designemos por B a projecção de A″ sobre r paralelamente a d′. Então A″ coincide com a projecção B′ de B sobre r′ paralelamente a d. Suponhamos que $A \prec B$ e $A' \prec B'$, segundo os critérios adoptados. Pretende-se provar que também $A'' \prec B''$.



Notemos que A′ e B estão em semiplanos opostos de fronteira AA″ (porquê?) e que B e B″ estão no mesmo semiplano de fronteira AA″ (porquê?). Logo A″ (ou seja B′) está entre A′ e B″ (porquê?). E, como A′ ≺ B′ (por hipótese), daqui se conclui que A″ ≺ B″,

q. e. d.

Convém notar que, se as rectas forem concorrentes, existe sempre uma projecção paralela que respeita e outra que não respeita os sentidos, como se pode inferir da figura junta.



DEFINIÇÃO 1. *Dadas duas rectas paralelas orientadas,* r *e* r′, *diz-se que* r concorda *com* r′, *sse qualquer projecção paralela de* r *sobre* r′ *respeita o sentido.*

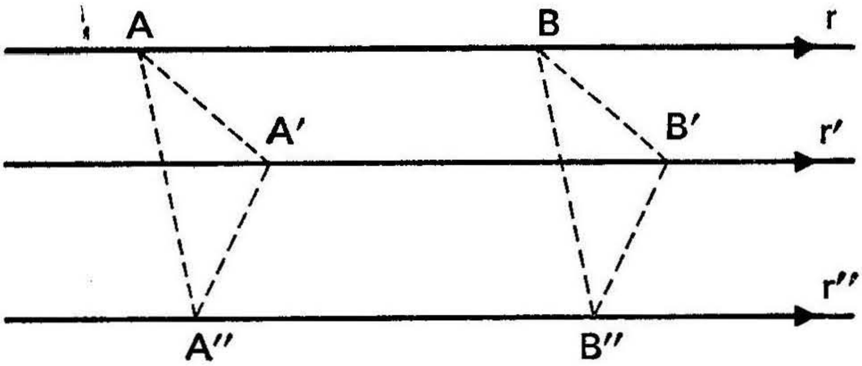
TEOREMA. *A relação de concordância assim definida é uma relação de equivalência.*

Demonstração:*

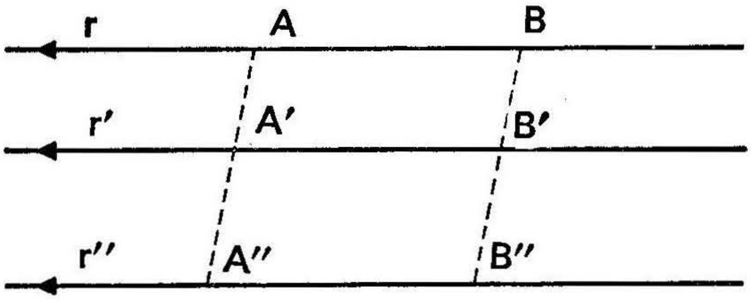
Imediatamente se reconhece que a relação é reflexiva e simétrica.

Sejam agora r, r′, r″ três rectas orientadas paralelas entre si, e suponhamos que r concorda com r′ e r′ concorda com r″. Trata-se de provar que r concorda com r″.

Suponhamos que as rectas não são complanares. Sejam: A, B dois pontos distintos de r; A′, B′ respectivamente as projecções de A, B sobre r′ paralelamente a uma recta d; e A″, B″ respectivamente as projecções de A′, B′ sobre r″ paralelamente a uma recta d′. Então os planos AA′ A″ e BB′ B″ são paralelos (porquê?). Logo as rectas AA″ e BB″ são paralelas (porquê?). Por outro lado, se A $\prec$ B, também A′ $\prec$ B′ e A″ $\prec$ B″ (porquê?) ([1]). Logo a projecção de r sobre r″ paralelamente a d′ respeita o sentido, o que significa que r concorda com r″.



Se as três rectas r, r′, r″ são complanares, basta considerar as projecções de r sobre r′ e de r′ sobre r″ *paralelamente a uma mesma recta*, para chegar trivialmente à mesma conclusão.



DEFINIÇÃO 2. *Diz-se que duas rectas orientadas paralelas* têm o mesmo sentido, *sse são concordantes. Se não são concordantes, diz-se que* têm sentidos contrários.

Deste modo chegamos, por abstracção, ao conceito generalizado de sentido.

Sentido duma recta orientada r é a propriedade comum a todas as rectas orientadas que concordam com r (do mesmo modo que a direcção duma recta é a propriedade comum a todas as rectas que lhe são paralelas).

([1]) Quando dois planos paralelos são cortados por um terceiro...

Do exposto se conclui que:

Toda a direcção no espaço tem dois sentidos contrários.

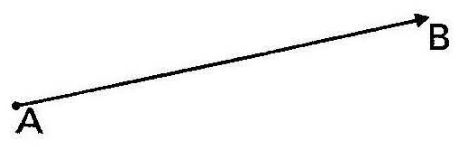
Para representar um sentido, basta dar um par ordenado de pontos distintos ou uma semi-recta que tenha esse sentido, do mesmo modo que, para representar uma direcção, basta dar uma recta que tenha essa direcção.

DEFINIÇÃO 3. *Chama-se* segmento orientado *qualquer segmento de recta, ao qual se atribui um sentido. Se os extremos do segmento são pontos distintos, o segmento fica orientado quando se estabelece que um dos extremos precede o outro extremo: então o primeiro chama-se* origem *e o segundo* extremidade *do segmento orientado. Se os extremos são coincidentes (segmento nulo), o segmento considera-se sempre orientado, de acordo com a nota final do n.º 4; mas diz-se que tem* direcção e sentido indeterminados (*ou* arbitrários).

Sendo A e B dois pontos quaisquer, o símbolo

$$[A, B]$$

designará o *segmento orientado de origem* A e *extremidade* B (mesmo que seja A=B).



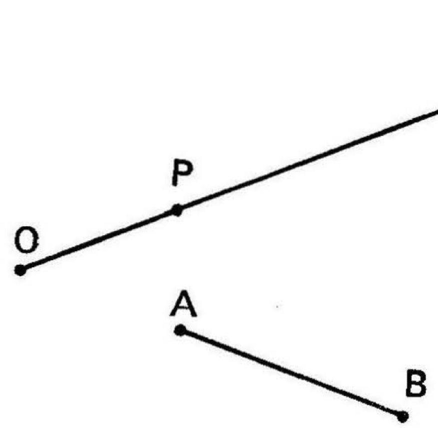
9. **Conceito de vector.** Em física apresentam-se entidades de diversas naturezas, constituídas pela associação duma grandeza absoluta a uma direcção e a um sentido no espaço. Essas entidades são chamadas *grandezas vectoriais* ou *vectores.* Por exemplo, quando se diz que a velocidade dum ponto material em dado instante é de 3 m/s (grandeza absoluta), isso não basta, muitas vezes, para definir inteiramente o estado de movimento do ponto nesse instante: é necessário associar àquela grandeza a direcção e o sentido do movimento, e esta associação

de dados é chamada *velocidade vectorial* do ponto no instante considerado. Situações análogas se apresentam a respeito de acelerações, forças, campos eléctricos ou magnéticos, etc.

Recordemos que toda a grandeza absoluta pode ser definida por um número real não negativo, que é a sua *medida* em relação à grandeza da mesma espécie tomada para *unidade*. Assim, no exemplo anterior, a unidade é o m/s e a medida é 3.

Deste modo, toda a grandeza absoluta, qualquer que seja a sua natureza, pode ser representada por um segmento de recta, uma vez fixada uma unidade de comprimento. E, assim, toda a grandeza vectorial pode ser representada por um segmento orientado, em virtude do seguinte

TEOREMA. *Dados um comprimento, uma direcção e um sentido, existe sempre, pelo menos, um segmento orientado, que tem esse comprimento, essa direcção e esse sentido.*



Demonstração:

Como vimos, a direcção e o sentido podem ser representados por uma semi-recta $\dot{O}M$ e o comprimento por segmento de recta $\overline{AB}$. Então, segundo um dos axiomas da geometria euclidiana, existe um (e um só) ponto P de $\dot{O}M$ tal que $\overline{OP} \cong \overline{AB}$. Ora é evidente que o segmento orientado [O, P] tem o comprimento, a direcção e o sentido que foram dados.

DEFINIÇÃO. *Diz-se que dois segmentos orientados são equipolentes sse têm o mesmo comprimento, a mesma direcção e o mesmo sentido. Em particular, são equipolentes todos os segmentos nulos.*

É desde logo evidente que:

A relação de equipolência, assim definida, é uma relação de equivalência.

DEFINIÇÃO 2. *Diz-se que dois segmentos orientados representam o* mesmo vector, *sse são equipolentes.*

Assim, *o vector representado por um segmento orientado* [A, B] aparece-nos como a *conjunção* dos três atributos: o comprimento, a direcção e o sentido de [A, B] (1). E o mesmo vector pode ser representado indistintamente por *qualquer* segmento orientado equipolente a [A, B] (do mesmo modo que a direcção duma recta *r* pode ser representada indistintamente por qualquer recta paralela a *r* ou o *metro* pode ser representado indistintamente por qualquer segmento com o comprimento de um metro).

Chama-se *comprimento, direcção* e *sentido* dum vector, respectivamente, o comprimento, a direcção e o sentido de qualquer dos segmentos orientados que o representam. Chama-se *vector nulo* o vector de comprimento nulo (representado por qualquer segmento [A, A] de extremos coincidentes).

Os segmentos orientados também por vezes são chamados *vectores aplicados.* Neste caso, os vectores são chamados *vectores livres* (isto é, com origem *livre*) para se distinguirem dos primeiros. Recordemos que, na física, é necessário um vector aplicado para representar uma força, visto que não bastam a *direcção,* o *sentido* e a *intensidade* para definir a força: é necessário dar ainda o *ponto de aplicação,* que é precisamente a origem do correspondente vector aplicado.

No entanto, quando se trata de forças aplicadas a sólidos, o ponto de aplicação da força *pode ser substituído* por outro ponto do sólido situado na mesma recta do segmento representativo. Daqui a noção de 'vector deslizante'.

Diz-se que dois segmentos orientados representam o mesmo vector *deslizante,* sse são equipolentes *e* pertencem à mesma recta.

---

(1) Também pode ser considerado como a **classe** dos segmentos orientados equipolentes a [A, B].

Como, daqui por diante, não precisaremos das expressões 'vector aplicado' e 'vector deslizante', diremos sempre 'vector' com o significado de 'vector livre'.

10. **Soma de um ponto com um vector.** O vector representado por um segmento orientado [A, B] será designado pela notação $\overrightarrow{AB}$. Quando não for preciso fazer alusão directa ao segmento representativo, os vectores serão designados, em geral, por letras minúsculas encimadas de setas, como por exemplo:

$$\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{a}\ ,\ \vec{b}\ ,\ \vec{x}\ ,\ \vec{y}\ ,\ \text{etc.}$$

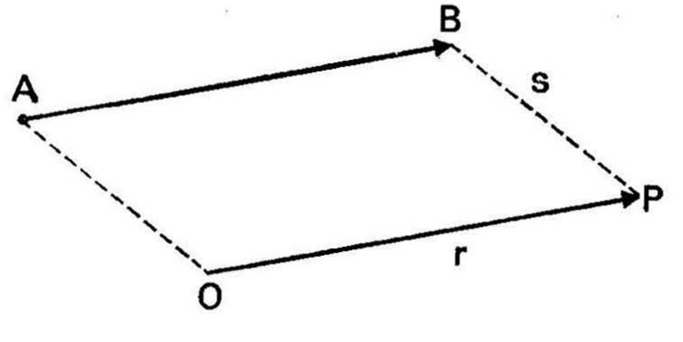
O vector nulo será designado pelo símbolo $\vec{0}$.

Importa salientar que *qualquer ponto do espaço pode ser tomado para origem do segmento representativo de um dado vector.* Com efeito:

TEOREMA. *Dados um ponto* O *e um segmento* [A, B], *existe sempre um e um só ponto* P *tal que* [O, P] *é equipolente a* [A, B].

Demonstração:

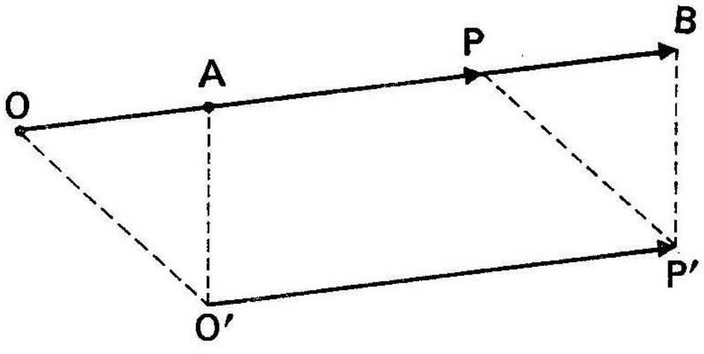
Suponhamos dados, arbitrariamente, O e [A, B]. Dois casos se podem verificar:



1.° caso. O ponto O não pertence à recta AB. Consideremos a recta r que passa por O e é paralela a AB, e a recta s que passa por B e é paralela a AO. Ora estas rectas encontram-se num ponto *único* P (porquê?) e [O, P] é equipolente a AB (porquê?).

Seja agora, reciprocamente, Q um ponto tal [O, Q] é equipolente a [A, B]. Então OQ// AB, BQ// AO (porquê?), donde

OQ = OP, BQ = BP (porquê?) e portanto P = Q. Logo existe um ponto único que verifica a condição indicada.



2.° caso. O ∈ AB. Este caso pode ser reduzido ao anterior, considerando um ponto O′ fora de AB e aplicando a transitividade da relação de equipolência, como se indica na figura supra.

Em termos de vectores, o teorema demonstrado pode ser traduzido do seguinte modo:

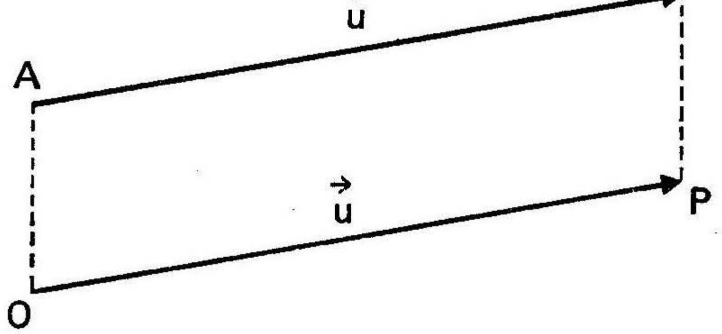
Dados um ponto O *e um vector* $\vec{u}$, *existe sempre um e só um ponto* P *tal que* [O, P] *representa o vector* $\vec{u}$.

DEFINIÇÃO. *Chama-se* soma do ponto O com o vector $\vec{u}$ *o ponto* P *a que se refere o teorema anterior, isto é, a* extremidade *do segmento orientado de origem* O *que representa o vector* $\vec{u}$. Escreve-se então:

$$P = O + \vec{u}$$

Também se diz neste caso que o vector $\vec{u}$ é a *diferença entre o ponto* P *e o ponto* O, e escreve-se

$$\vec{u} = P - O$$



Assim, temos duas maneiras diferentes de designar o mesmo vector: a expressão $\overrightarrow{OP}$ e a expressão P − O. Se for [A, B] outro segmento orientado representativo de $\vec{u}$, podemos escrever

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = P - O = B - A$$

Note-se, porém, que esta última igualdade *não* nos habilita a escrever:

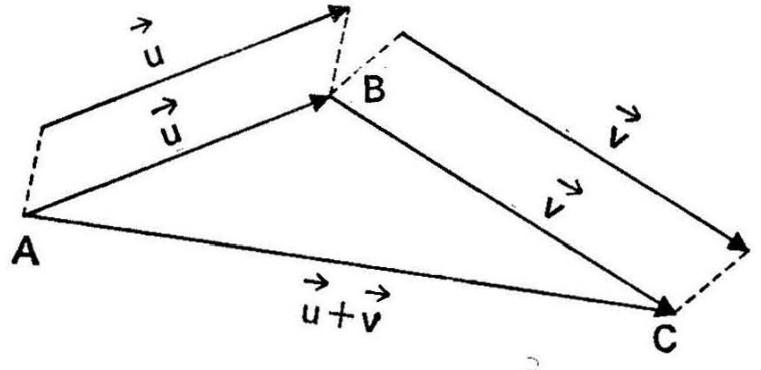
$$A + P = B + O$$

Habitualmente, não faz sentido falar de 'soma de dois pontos', embora, como acabamos de ver, se possa falar da diferença entre um ponto B e um ponto A, como sendo o vector representado por [A, B].

EXERCÍCIO. Represente no papel um vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, com lápis azul, e desenhe, também a azul, um losango [ABCD] cujos lados e cujas diagonais não tenham a direcção de $\vec{u}$. Posto isto, desenhe a vermelho a figura [A'B'C'D'] que se obtém adicionando $\vec{u}$ aos pontos da primeira (linhas auxiliares a tracejado, com lápis preto). Que conclui, comparando a figura obtida com a dada?

11. **Soma de dois vectores.** Suponhamos dados dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e seja A um ponto qualquer do espaço. Somemos A com $\vec{u}$ e seja B o resultado:

$$B = A + \vec{u}$$



Somemos agora B com $\vec{v}$ e seja

$$C = B + \vec{v}$$

Então C = $(A + \vec{u}) + \vec{v}$ e somos tentados a escrever

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}),$$

onde

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

e chamar a $\vec{u} + \vec{v}$ *soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$.

Somos assim conduzidos naturalmente à seguinte

DEFINIÇÃO. *Dados dois vectores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *diz-se que um vector* $\bar{s}$ *é soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$, *sse existem três pontos* A, B, C *tais que:*

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \quad e \quad \vec{s} = \overrightarrow{AC}$$

Desde logo se vê que:

I. *Quaisquer que sejam os vectores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *existe (pelo menos) um vector que é soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$.

Com efeito, escolhido um ponto A, existe o ponto $B = A + \vec{u}$, o ponto $C = B + \vec{v}$ e, portanto, se designarmos por $\vec{s}$ o vector $\overrightarrow{AC}$ tem-se:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \quad e \quad \vec{s} = \overrightarrow{AC}$$

Vamos, agora, ver que a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é *unica*, isto é, não depende do ponto A escolhido.

II. *Quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não existe mais de um vector que seja soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.*

Demonstração:

Suponhamos que $\vec{s}$ e $\vec{s}'$ são soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$. Quer isto dizer que existem dois ternos de pontos (A, B, C) e (A′, B′, C′) tais que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \quad , \quad \vec{s} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{A'B'} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{B'C'} \quad , \quad \vec{s} = \overrightarrow{A'C'}$$

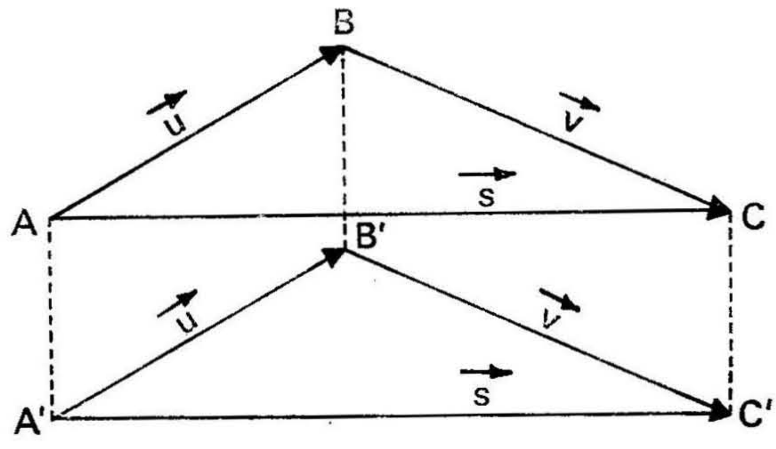
Queremos provar que $\vec{s} = \vec{s}'$. Dois casos se podem dar:

1.° caso. A, B, C *não são colineares*. Então A, B, C definem um plano, ABC. Podemos, agora, distinguir duas hipóteses:

1) $A' \notin ABC$. Tem-se então $A'B' // AB$ e $B'C' // BC$ (porquê?). Logo os planos $A'B'C'$ e ABC são paralelos e distintos (porquê?). Por sua vez

$AA' // BB' // CC'$ (porquê?). Logo $A'C' // AC$ (porquê?) (¹) e $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ (porquê) ou seja $\vec{s} = \vec{s}'$.

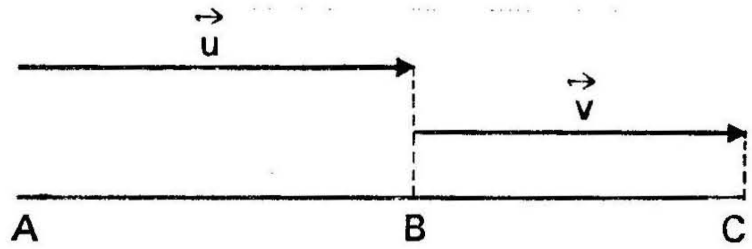
2) $A' \in ABC$. Esta hipótese reduz-se à anterior, considerando um ponto $A'' \notin ABC$. Basta então passar sucessivamente de A para A′ e de A′ para A″, e aplicar a transitividade da equipolência.



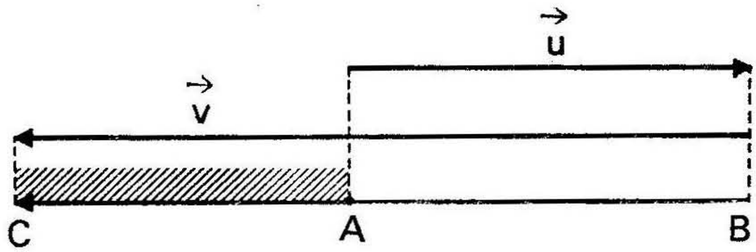
(¹) Quando dois planos paralelos são cortados por um terceiro...

2.° caso. A, B, C *são colineares.* Neste caso, é fácil ver que:

1) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ têm o mesmo sentido, o vector $\vec{s}$ tem a direcção e o sentido dos vectores dados, e o seu comprimento é igual à soma dos comprimentos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como sucede o mesmo com $\vec{s}'$, tem-se $\vec{s} = \vec{s}'$.

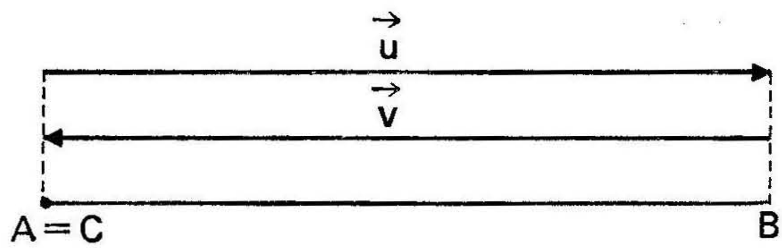


2) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ têm sentidos contrários e comprimentos diferentes, $\vec{s}$ tem a direcção de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o sentido do vector com maior comprimento e o seu comprimento é a diferença entre o maior e o menor dos comprimentos dados. O mesmo para $\vec{s}'$.

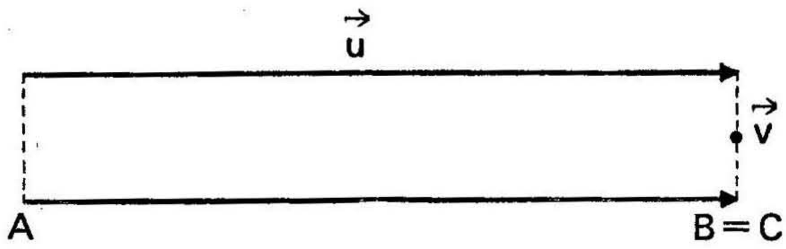


3) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ têm sentidos contrários e o mesmo comprimento, então

$$\vec{s} = \vec{s}' = \vec{0}$$



4) Se um dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ é nulo, então $\vec{s}$ é igual ao outro vector dado e o mesmo sucede com $\vec{s}'$.



Como não há nenhuma outra hipótese a considerar, o *teorema fica demonstrado.*

DEFINIÇÃO 2. *Dados dois vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$, *designa-se por* $\vec{u} + \vec{v}$ *a soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$, *cuja existência e unicidade acaba de ser provada.*

DEFINIÇÃO 3. *Diz-se que dois vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *são* colineares, *sse podem ser representados por segmentos orientados duma mesma recta.*

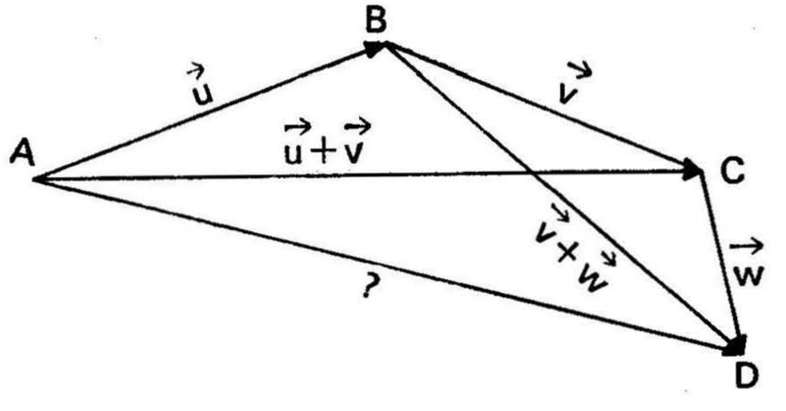
Equivale isto a dizer que os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *têm a mesma direcção ou um deles pelo menos é nulo.*

Segundo o que se viu na demonstração do teorema anterior (2.º caso):

A soma de dois vectores colineares pode ser obtida por meio de regras semelhantes às que são usadas para a adição de grandezas relativas — em particular, para a adição de números reais.

É fácil ver ainda que a adição de vectores tem as seguintes propriedades:

III. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *(associatividade)*



Demonstração:

Seja A um ponto qualquer do espaço e ponhamos

$$B = A + \vec{u} \quad , \quad C = B + \vec{v} \quad , \quad D = C + \vec{w}$$

Então

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC} \text{ e } \vec{w}=\overrightarrow{CD}$$

donde

(1) $$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\overrightarrow{AD}$$

Por outro lado, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{BD}$, donde

(2) $$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{AD}$$

De (1) e (2) conclui-se o que se pretende.

IV. *A adição tem elemento neutro (o vector nulo).*

Com efeito, tem-se, como vimos:

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u} \quad , \quad \forall \vec{u}$$

V. *Todo o vector* $\vec{u}$ *tem elemento simétrico.*

Com efeito, se $\vec{u} \neq \vec{0}$, o vector que tem o comprimento de $\vec{u}$, a direcção de $\vec{u}$ e sentido contrário ao de $\vec{u}$, é o simétrico de $\vec{u}$ ou seja $-\vec{u}$:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

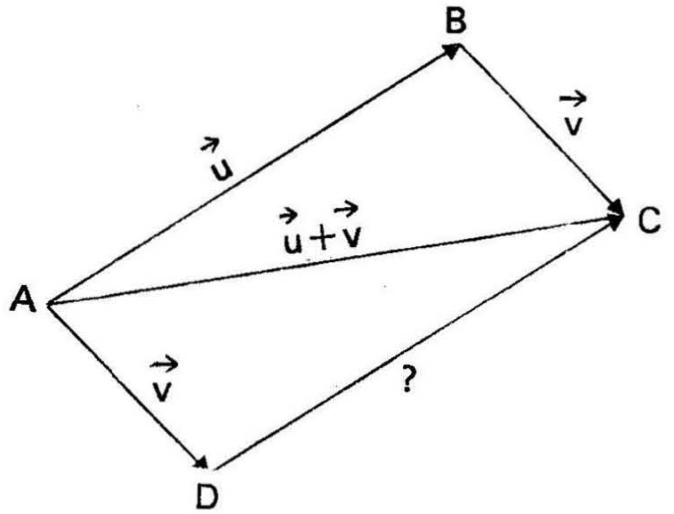
Se $\vec{u} = \vec{0}$, então $-\vec{u} = \vec{0}$, como é fácil ver.

VI. *A adição de vectores é comutativa.*

Demonstração:

Dois casos se podem dar:

1.º caso. *Os vectores* $\vec{u}, \vec{v}$ *não são colineares.*



Seja A um ponto qualquer e ponhamos

$$B = A + \vec{u} \quad , \quad C = B + \vec{v} \quad , \quad D = A + \vec{v}$$

Então A, B, C não são colineares (porquê?) e AD//BC (porquê?), donde DC//AB (porquê?). Portanto

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u} \text{ (porquê?) e assim } \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

2.º caso. *Os vectores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são colineares.* Neste caso, como vimos, $\vec{u} + \vec{v}$ pode ser obtido segundo regras semelhantes às da adição de números reais — regras que não dependem da ordem dos vectores, isto é, tem-se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Esta demonstração põe em evidência o seguinte facto:

Quando os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *não são colineares — e só nesse caso — a soma de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$ *pode ser obtida pela REGRA DO PARALELOGRAMO, que se indica na física, para a composição de forças.*

Notemos, finalmente, que a conjunção das propriedades I-VI pode enunciar-se resumidamente do seguinte modo:

TEOREMA. *O conjunto de todos os vectores do espaço é um grupo comutativo a respeito da adição (portanto um módulo).*

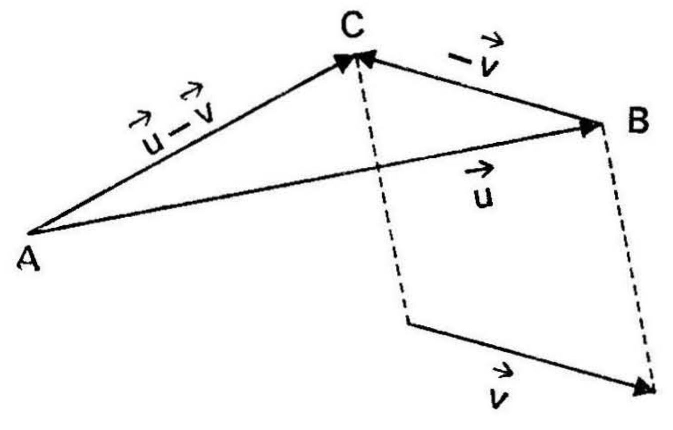
Daqui se deduz, desde logo:

COROLÁRIO. *Dados dois vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$, *existe sempre um e um só vector* $\vec{x}$ *tal que* $\vec{v} + \vec{x} = \vec{u}$. *Este vector (que se chama diferença entre* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *e se representa por* $(\vec{u} - \vec{v})$ *é igual a* $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Será, portanto

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

isto é: subtrair $\vec{v}$ de $\vec{u}$ equivale a somar a $\vec{u}$ o simétrico de $\vec{v}$.



EXERCÍCIOS. I. Marque no papel três pontos A, B, C não colineares e determine os pontos assim definidos:

$$M = A + (B - A) + (C - A) \quad , \quad N = M + \overrightarrow{AC} \quad , \quad P = B - \overrightarrow{AN}$$

Relacione $\overrightarrow{NB}$ com $\overrightarrow{AC}$ e calcule $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN}$.

II. Demonstre que se tem, quaisquer que sejam os pontos A, B e os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$:

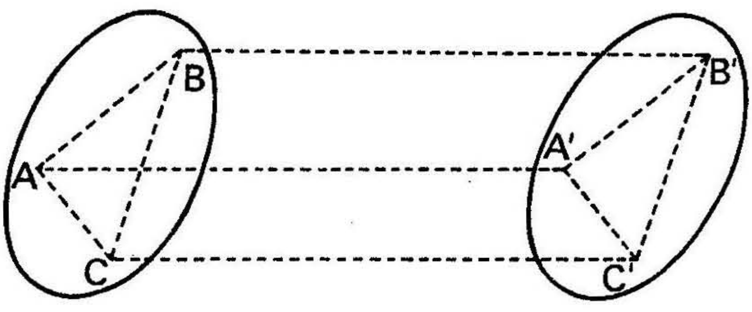
$$(A + \vec{u}) - (B + \vec{v}) = (A - B) + (\vec{u} - \vec{v})$$

(Sugestão: escreva o 1.° membro igual a $\vec{w}$).

III. Demonstre que se tem, quaisquer que sejam os pontos A, B, C, D:

$$(A - B) + (C - D) = (A - D) - (B - C)$$

12. **Translações.** Chama-se *movimento de translação* todo o movimento de um sólido, tal que as direcções das rectas ligadas ao sólido se mantêm invariáveis durante o movimento.



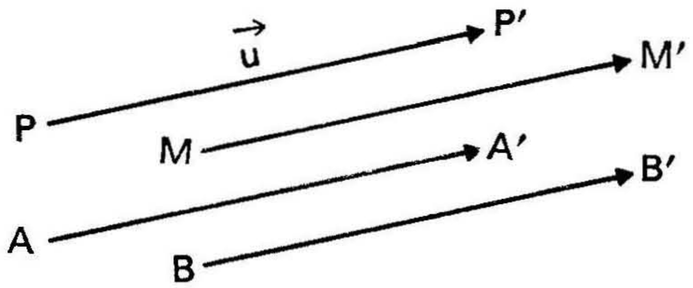
Se, além disso, o movimento é *rectilíneo* e *uniforme*, os pontos materiais do sólido descrevem segmentos paralelos, de igual comprimento e orientados todos no mesmo sentido — isto é, *segmentos orientados equipolentes*.

Assim, o conceito físico de 'movimento de translação' (em que intervém a ideia de 'tempo') sugere o seguinte conceito puramente geométrico, que se reduz a uma correspondência entre pontos:

DEFINIÇÃO. *Dado um vector* $\vec{u}$, *chama-se* translação definida *por* $\vec{u}$ *a aplicação*

$$P \mapsto P + \vec{u}$$

que faz corresponder a cada ponto P *do espaço* $\mathcal{E}$ *o ponto* $P' = P + \vec{u}$ *do mesmo espaço.*



Desde logo se verifica o seguinte

TEOREMA. *O produto (ou a resultante) de duas translações ainda é uma translação, cujo vector é a soma dos vectores que definem as translações dadas.*

Com efeito, sejam U, V duas translações, definidas respectivamente pelos vectores $\vec{u}, \vec{v}$. Então, para todo o $P \in \mathcal{E}$ virá

$$U(P) = P + \vec{u} \quad , \quad V(U(P)) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$$

donde, aplicando à esquerda a definição de 'produto de operadores' e à direita a definição de 'soma de vectores':

$$(V \cdot U)\ (P) = P + (\vec{u} + \vec{v}), \qquad \text{q.e.d}$$

Por outro lado, é de notar o seguinte:

Vectores diferentes definem translações diferentes.

Com efeito, seja $\vec{u} \neq \vec{v}$. Então, pondo $P' = P + \vec{u}$ e $P'' = P + \vec{v}$, tem-se $P'' \neq P$ (porquê?) e portanto as aplicações $P \rightsquigarrow P'$ e $P \rightsquigarrow P''$ assim definidas são distintas.

Posto isto, designemos por $\mathcal{V}$ o *conjunto de todos os vectores do espaço* e por $\mathcal{T}$ o *conjunto das translações do espaço.* Então, do teorema anterior e da nota que se lhe segue, deduz-se o seguinte:

A aplicação $\vec{u} \rightsquigarrow U$, que associa a cada vector $\vec{u}$ a translação definida por $\vec{u}$ é um isomorfismo de $(\mathcal{V}, +)$ sobre $(\mathcal{T}, .)$.

E daqui por sua vez resulta, pelo PRINCÍPIO DE ISOMORFIA:

O conjunto das translações é um grupo comutativo a respeito da multiplicação, isomorfo ao módulo dos vectores.

Assim, a linguagem aditiva em termos de vectores pode ser traduzida integralmente na *linguagem multiplicativa* em termos de *translações.* Em particular, ao vector $\vec{0}$ corresponde a *translação* I (aplicação identidade). Por outro lado:

A translação definida por um vector $\vec{u}$ qualquer é uma aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{E}$ sobre si mesmo. A sua inversa é definida por $-\vec{u}$.

EXERCÍCIO — I. Sendo T a translação definida por um vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ e sendo r uma recta com a direcção de $\vec{a}$, determine T(r). (Ver resposta no final do número seguinte.)

13. **Produto de um número real por um vector.** O comprimento dum vector $\vec{u}$ é representado habitualmente pela notação $|\vec{u}|$ e também se lhe chama 'módulo de $\vec{u}$'. Quando se adopta uma unidade de comprimento, é costume identificar o módulo de $\vec{u}$ com o número real que é a sua medida relativamente à unidade adoptada.

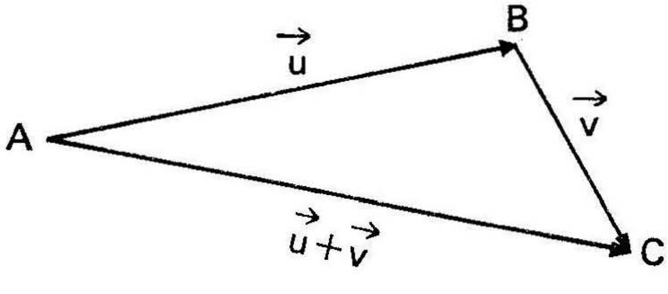
Convém, desde já, registar a seguinte importante PROPRIEDADE DO MÓDULO DA SOMA:

$$(1) \qquad |\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}| \quad , \ \forall\, \vec{u}, \vec{v}$$

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, a demonstração reduz-se à da correspondente propriedade para números reais.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, a propriedade (1), como se pode inferir da figura junta, é consequência imediata do seguinte teorema, bem conhecido, de geometria euclidiana:

Qualquer lado dum triângulo é menor que a soma dos outros dois.



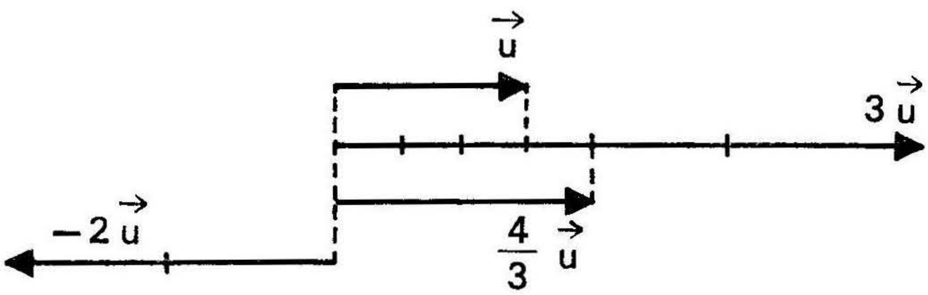
Posto isto, suponhamos dados um número real α e um vector $\vec{u}$:

DEFINIÇÃO. *Se* $\alpha \neq 0$ *e* $\vec{u} \neq \vec{0}$, *chama-se* produto de α por $\vec{u}$, *o vector cujo comprimento é o produto de* $|\alpha|$ *por* $|\vec{u}|$, *cuja direcção é a direcção de* $\vec{u}$ *e cujo sentido é o sentido de* $\vec{u}$ *ou o sentido contrário, conforme* $\alpha > 0$ *ou* $\alpha < 0$. *Se* $\alpha = 0$ *ou* $\vec{u} = \vec{0}$, *chama-se produto de* α *por* $\vec{u}$ *o vector* $\vec{0}$.

O produto de α por $\vec{u}$ representa-se por $\alpha\vec{u}$ ou $\alpha \cdot \vec{u}$. Assim, por definição, tem-se:

$$|\alpha\vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}| \quad , \quad \vec{0} \cdot u = \vec{0} \quad , \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathcal{V}$.



Na figura junta são indicados os produtos dos números

$$3, \quad \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad -2$$

por um vector $\vec{u}$.

Em particular, tem-se:

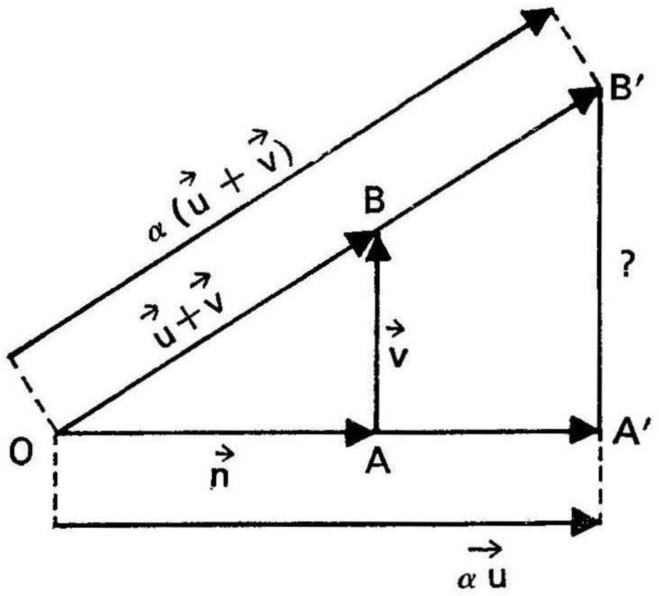
$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \quad , \quad (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u} \quad , \quad \text{para todo o } \vec{u} \in \mathcal{V}.$$

É fácil estabelecer as seguintes propriedades:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} \\ \text{II.} & \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ \text{III.} & \alpha(\beta u) = (\alpha \cdot \beta)\vec{u} \end{array}\right\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$$

chamadas, respectivamente, *distributividade à esquerda, distributividade à direita* e *associatividade.*

Estas são consequências simples da definição, excepto a propriedade II, no caso em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.



Tomemos, neste caso, um ponto O qualquer do espaço e seja

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = \vec{v}$$

donde

$$\overrightarrow{OB} = \vec{u} + \vec{v}$$

Seja ainda

$$(1) \qquad \overrightarrow{OA'} = \alpha\vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{OB'} = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$$

Suponhamos $\alpha > 0$. Então

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|} = \alpha \text{ (porquê?)}$$

$$\dot{O}A' = \dot{O}A \quad , \quad \dot{O}B' = \dot{O}B \text{ (porquê?)}$$

Logo, aplicando o recíproco do TEOREMA DE THALES, vem

$$A'B' \,//\, AB \quad \text{e} \quad |A'B'| = \alpha |AB|$$

Além disso, $\dot{A}B$ e $\dot{A}'B'$ têm o mesmo sentido (porquê?). Logo

$$(2) \qquad \overrightarrow{A'B'} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha \vec{v}$$

Mas $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$. Portanto, atendendo a (1) e (2),

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$$

A demonstração é análoga no caso em que $\alpha < 0$.
Se $\alpha = 0$, tem-se trivialmente $0(\vec{v} + \vec{v}) = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Assim, em resumo:

Além da operação $+$, definida no conjunto $\mathcal{V}$ *(operação binária interna)*, apresenta-se a operação $\cdot$, que, a cada par ordenado $(\alpha, \vec{u})$, tal que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathcal{V}$, faz corresponder um e um só elemento $\alpha \vec{u}$ de $\mathcal{V}$. A respeito da primeira, $\mathcal{V}$ é um grupo comutativo, portanto um *módulo.* A segunda operação tem as propriedades I-III e ainda a propriedade $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$.

Exprime-se a conjunção de todos estes factos dizendo que $\mathcal{V}$ é um *espaço vectorial sobre o corpo* $\mathbb{R}$, ou um *espaço vectorial real.* Mas note-se: o terno $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ *não é um anel,* visto que a operação $\cdot$ *não é interna,* quer dizer, não é uma aplicação de $\mathcal{V}^2$ em $\mathcal{V}$, mas sim uma aplicação de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$, tendo-se $\mathbb{R} \not\subset \mathcal{V}$.

Dum modo geral:

Diz-se que um conjunto S de elementos u, v,... quaisquer é um *espaço vectorial sobre um dado corpo* K, sse são definidas duas operações $+$ e $\cdot$ tais que:

1) S é um grupo comutativo a respeito da adição $(+)$.

2) A operação $\cdot$ associa a cada par (a, u) de elementos, *a* de K e *u* de S, um elemento au de S, de tal modo que:

$$(a+b)u = au + bu \quad , \quad a(u+v) = au + av,$$
$$a(bu) = (ab)u \quad \text{e} \quad 1 \cdot u = u \quad , \quad \forall a, b \in K;\ u, v \in S$$

Nestas condições, os elementos de S chamam-se *vectores* e os elementos de K chamam-se *escalares*. Veremos adiante exemplos de espaços vectoriais diferentes de $\mathcal{V}$.

EXERCÍCIOS — I. Marque no papel 4 pontos, O, A, B, C, não colineares 3 a 3 (a azul), e trace os lados dum triângulo [ABC] (a azul). Em seguida desenhe a vermelho o triângulo cujos vértices são:

$$A' = O + 3(A - O) \quad , \quad B' = O + 3(B - O) \quad , \quad C' = O + 3(C - O)$$

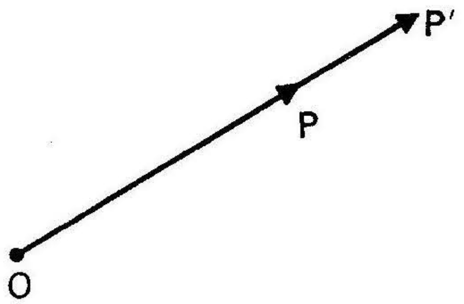
II. Exercício análogo, substituindo 3 por $-5/4$.

RESPOSTA AO EXERCÍCIO DO NÚMERO ANTERIOR:

$$T(r) = r.$$

14. **Homotetias.** Comece por resolver o exercício anterior. Feito isto, suponhamos dados em geral um ponto O e um número real $r \neq 0$. Seja agora P um ponto qualquer do espaço e ponhamos:

$$P' = O + r\,(P - O)$$



Tem-se, pois:

$$\overrightarrow{OP'} = r \cdot \overrightarrow{OP}$$

Se $r > 0$ e $P \neq O$, então P' é o ponto da semi-recta $\dot{O}P$, tal que $|OP'| = r|OP|$.

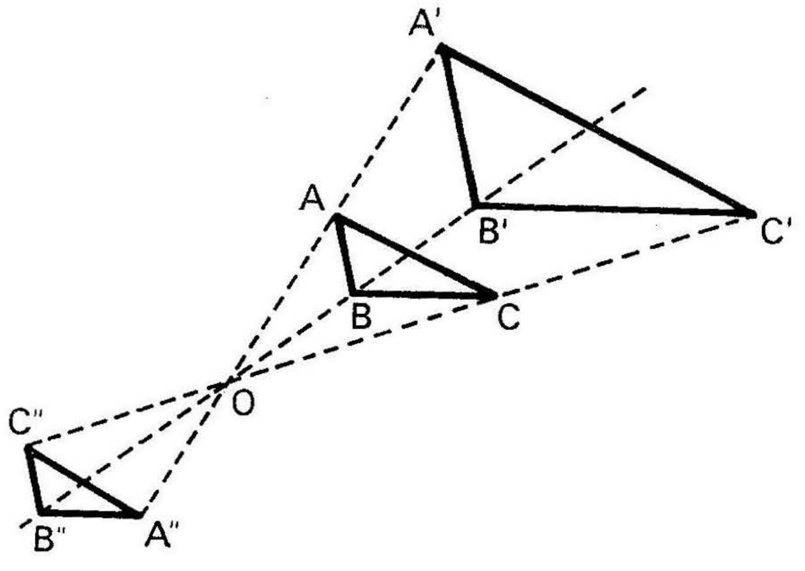
Se $r < 0$ e $P \neq O$, a única diferença é que P' pertence à semi-recta oposta.

Se $P = O$, tem-se $P' = P = O$.

DEFINIÇÃO. *Chama-se* homotetia de centro O e razão r *a aplicação que faz corresponder a cada ponto* P *de* $\mathcal{E}$ *o ponto*

$$P' = O + r\,(P-O)$$

A homotetia chama-se *directa* ou *inversa*, conforme $r > 0$ ou $r < 0$.



Na figura junta apresentam-se os transformados do triângulo [ABC] pelas homotetias de razões 2 e $-2/3$.

Em qualquer caso, uma homotetia é uma *transformação de semelhança:* uma *ampliação* se $|r| > 1$, uma *redução* se $|r| < 1$

e uma *igualdade* se $|r| = 1$. Assim, a homotética duma figura $\mathcal{F}$ é sempre uma figura *semelhante* a $\mathcal{F}$. Em particular, se $r = 1$ a homotetia reduz-se a I e se $r = -1$ a homotetia é a *simetria de centro* O.

Uma máquina de projecção é exemplo intuitivo de um aparelho que efectua uma homotetia sobre a figura que é projectada no alvo, ampliando-a consideravelmente.

A propriedade III enunciada no número anterior mostra-nos imediatamente que:

O produto de duas homotetias de centro O *é ainda uma homotetia de centro* O, *cuja razão é o produto das razões das primeiras.*

E, como duas homotetias de razões r_1 e r_2 distintas são aplicações distintas, segue-se que:

O conjunto das homotetias de centro O *é um grupo multiplicativo isomorfo ao grupo multiplicativo dos números reais diferentes de zero.*

Como corolário:

A homotetia de centro O *e razão* r *é uma aplicação biunívoca do espaço* $\mathcal{E}$ *sobre si mesmo. A sua inversa é a homotetia de centro* O *e razão* $1/r$.

EXERCÍCIOS:

I. Sendo A e B dois pontos distintos, identifique os conjuntos de pontos P que verificam as seguintes condições:

a) $\exists t \geqslant 0 : P = A + t(B-A)$

b) $\exists t \leqslant 0 : P = A + t(B-A)$

c) $\exists t \in \mathbb{R} : P = A + t(B-A)$

d) $\exists t \in \mathbb{R} : P = A + t(B-A) \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

II. Sendo A, B, C três pontos não colineares, identifique os conjuntos de pontos definidos pelas seguintes condições em **P**, pondo $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$:

a) $\exists\, y \in \mathbb{R} : P = A + 3\vec{u} + y\vec{v}$

b) $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : P = A + x\vec{u} + y\vec{v}$

c) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0 : P = A + x\vec{u} + y\vec{v}$

d) $\exists\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 : P = A + x\vec{u} + y\vec{v}$

e) $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : P = A + x\vec{u} + y\vec{v},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

f) $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : P = A + x\vec{u} + y\vec{v},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

g) $\exists\, x, y \in \mathbb{R} : P = A + x\vec{u} + y\vec{v},\quad x \geqslant 0,\quad y \geqslant 0,\quad x + y \leqslant 1$

NOTA: Para simplificar, substituimos o sinal $\wedge$ por vírgulas. (Ver soluções no final do número seguinte.)

15. **Vectores colineares e vectores complanares.** Como já vimos atrás, diz-se que dois vectores são *colineares*, sse são representáveis por segmentos orientados duma mesma recta r. Também se diz neste caso que são *vectores da recta* r (ou de qualquer outra recta paralela a r).

Consideremos dois vectores $\vec{u}$, $\vec{e}$. Da definição de 'produto dum número real *a* por $\vec{e}$' resulta imediatamente o seguinte:

(1) $$\vec{u} = a\vec{e} \Rightarrow \vec{u} \text{ é colinear com } \vec{e}$$

Por outro lado:

TEOREMA 1. *Se* $\vec{e} \neq \vec{0}$, *então, para todo o vector* $\vec{u}$ *colinear com* $\vec{e}$, *existe um e um só número real* a *tal que* $\vec{u} = a\vec{e}$.

A demonstração é bem simples. Se $\vec{u}$, $\vec{e}$ são colineares e $\vec{e} \neq \vec{0}$, o número *a* que satisfaz à referida condição será

$$a = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{e}|}, \quad a = -\frac{|\vec{u}|}{|\vec{e}|} \quad \text{ou } a = 0,$$

conforme $\vec{u}$ tem o sentido de $\vec{e}$, o sentido de $-\vec{e}$ ou é igual a $\vec{0}$.

Portanto, atendendo a (1):

COROLÁRIO. *Se* $\vec{e} \neq \vec{0}$, *a fórmula* $\vec{u} = a\vec{e}$ *estabelece uma correspondência biunívoca* $a \rightarrow \vec{u}$ *entre os números reais* a *e os vectores* $\vec{u}$ *colineares com* $\vec{e}$.

Simbolicamente:

$$\vec{u} \text{ é colinear com } \vec{e} \wedge \vec{e} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \exists^1\, a \in \mathbb{R}\colon\ \vec{u} = a\vec{e}$$

DEFINIÇÃO. *Diz-se que três vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *são* complanares, *sse podem ser representados por segmentos orientados dum mesmo plano* π. *Neste caso também se diz que* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *são* vectores do plano π *(ou de qualquer outro plano paralelo a* π*)* (¹).

Consideremos três vectores $\vec{u}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$. Das definições de 'soma de dois vectores' e de 'produto de um escalar por um vector', resulta o seguinte:

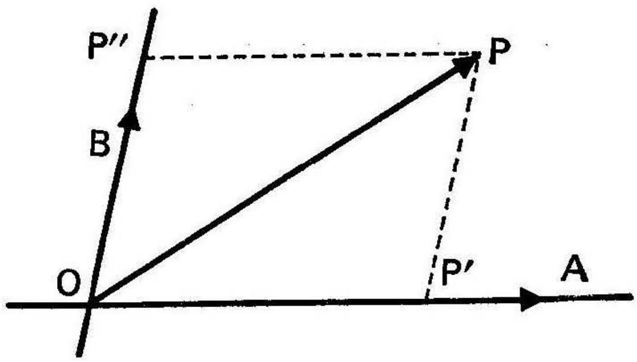
(2) $\vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f} \Rightarrow \vec{u}$ *é complanar com* $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$.

(¹) É claro que os **vectores dum plano** π não são elementos de π: os elementos do plano π são **pontos**.

Por outro lado:

TEOREMA 2. *Se os vectores* $\vec{e}$, $\vec{f}$ *não são colineares, então, para todo o vector* $\vec{u}$ *complanar com* $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$, *existe um e um só par ordenado* (a, b) *de números reais tal que*

$$\vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f}$$



Demonstração:

Suponhamos verificada a hipótese e seja $\vec{e} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{f} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$. Então os pontos O, A, B não são colineares e P ∊ AOB.

Seja P′ a projecção de P sobre OA paralelamente a OB e P″ a projecção de P sobre OB paralelamente a OA. Então $\overrightarrow{OP'}$ é colinear com $\overrightarrow{OA} = \vec{e}$ e $\overrightarrow{OP''}$ é colinear com $\overrightarrow{OB} = \vec{f}$. Portanto, como $\vec{e}$, $\vec{f}$ não são nulos (porquê?), existem, pelo teorema 1, dois números reais a, b tais que

$$\overrightarrow{OP'} = a\vec{e} \quad , \quad \overrightarrow{OP''} = b\vec{f}$$

Além disso $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}$ e $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$. Logo

$$\vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f}$$

Reciprocamente, seja (a′, b′) um par de números reais, tal que

$$\vec{u} = a'\vec{e} + b'\vec{f}$$

Então vem $a\vec{e} + b\vec{f} = a'\vec{e} + b'\vec{f}$, donde

$$(a - a')\vec{e} + (b - b')\vec{f} = \vec{0} \text{ (porquê?)}$$

Se fosse $a \neq a'$, seria $a - a' \neq 0$ e portanto

$$\vec{e} = \frac{b - b'}{a' - a}\vec{f}$$

Deste modo $\vec{e}$ seria colinear com $\vec{f}$, o que é contra a hipótese. Analogamente se prova que não pode ser $b \neq b'$.

Logo tem-se necessariamente $a = a'$ e $b = b'$, o que termina a demonstração.

Dum modo geral, chama-se *combinação linear de dois vectores* $\vec{u}, \vec{v}$ toda a expressão da forma $a\vec{u} + b\vec{v}$, em que a, b são números reais *(coeficientes da combinação linear)*. Posto isto, o teorema 2 pode assim enunciar-se:

'Se $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$ *não são colineares, todo o vector* $\vec{u}$ *complanar com* $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$ *pode exprimir-se, e de um só modo, como combinação linear de* $\vec{e}$ *e* $\vec{f}$.

Deste teorema deduz-se, atendendo a (2):

COROLÁRIO. *Se* $\vec{e}, \vec{f}$ *são vectores não colineares dum plano* π, *a fórmula* $\vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f}$ *define uma correspondência biunívoca* $\vec{u} \leftrightarrow (a, b)$ *entre os vectores* $\vec{u}$ *do plano* π *e os pares* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Diz-se então que o par $(\vec{e}, \vec{f})$ é uma base do conjunto dos vectores do plano, e que os números a, b são as *componentes* do vector $\vec{u}$ nessa base: respectivamente a *1.ª componente* e a *2.ª componente.*

Consideremos, agora, dois vectores do plano π:

$$(3) \qquad \vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f} \quad , \quad \vec{v} = c\vec{e} + d\vec{f}$$

Então

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + c)\vec{e} + (b + d)\vec{f} \qquad \text{(porquê?)}$$

Assim, a adição de dois vectores $\vec{u}, \vec{v}$ *traduz-se pela adição ordenada das componentes de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$. Simbolicamente:

$$\vec{u} \rightsquigarrow (a, b) \wedge \vec{v} \rightsquigarrow (c, d) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \rightsquigarrow (a + c, b + d)$$

Seja agora r um número real qualquer. Então de (3) vem

$$r\vec{u} = (ra)\vec{e} + (rb)\vec{f} \qquad \text{(porquê?)}$$

Assim

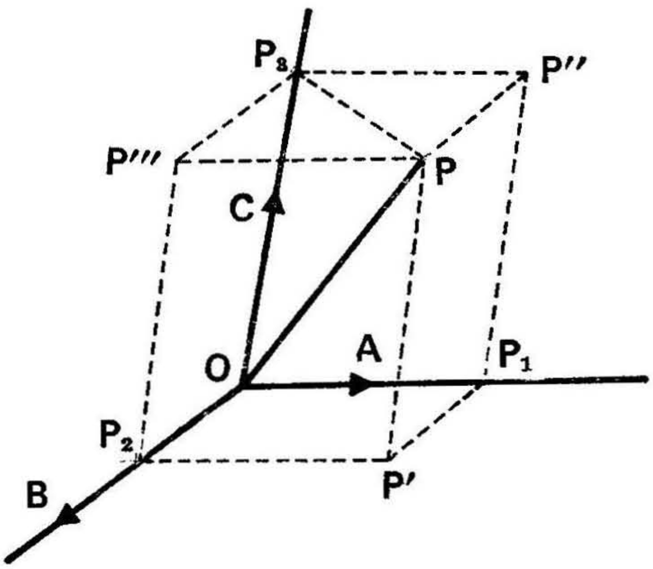
$$\vec{u} \rightsquigarrow (a, b) \Rightarrow r\vec{u} \rightsquigarrow (ra, rb) \quad , \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

DEFINIÇÃO. *Diz-se que um vector* $\vec{u}$ *é* unitário *sse* $|\vec{u}|$ *é a unidade de comprimento. Diz-se que uma base* $(\vec{u}, \vec{v})$ *é* ortonormal, *sse os vectores* $\vec{u}, \vec{v}$ *são unitários e perpendiculares entre si.*

Os resultados anteriores podem estender-se a vectores do espaço.

TEOREMA 3. *Se* $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ *são três vectores não complanares, então, para todo o vector* $\vec{u}$ *do espaço, existe um e um só terno* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$(4) \qquad \vec{u} = a\vec{e} + b\vec{f} + c\vec{g}$$



Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor, apresentando, para sugestão, a figura junta em que supomos $\overrightarrow{OA} = \vec{e}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{f}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{g}$ e $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$.

Por conseguinte:

Se $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ *não são complanares, a fórmula* (4) *estabelece uma correspondência biunívoca* $\vec{u} \leadsto (a, b, c)$ *entre os vectores do espaço e os elementos de* $\mathbb{R}^3$.

Diz-se então que o terno ordenado $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma *base* do espaço vectorial $\mathcal{V}$ e que os números a, b, c são os *componentes* de $\vec{u}$ nesta base. Além disso:

A adição de vectores traduz-se na adição ordenada dos componentes e analogamente para a multiplicação dum número real por um vector.

EXERCÍCIOS:

I. Considere os vectores representados como se segue, relativamente a uma base $(\vec{e}, \vec{f})$ do plano:

$\vec{u} \leadsto (3, -5)$, $\vec{v} \leadsto (-1, 5/3)$, $\vec{w} \leadsto (0,3)$, $\vec{0} \leadsto (0,0)$

a) Indique, entre estes, os pares de vectores colineares e indique um par ordenado que possa ser tomado para nova base.

b) Determine as componentes (x, y) e (x', y') de $\vec{e}$ e $\vec{f}$ na nova base. [Sugestão: comece por achar as componentes de $\vec{e}$ e $\vec{f}$ na base $(\vec{e}, \vec{f})$].

II. Considere os vectores representados pelos ternos ordenados

$$(6, 2, -1) \quad , \quad (-9, -3, 3/2) \quad , \quad (1, 0, -1) \quad , \quad (0, 2, -1)$$

relativamente a uma base $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ e designe-os respectivamente por $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$.

a) Exprima as componentes de $\vec{u} = x\,\vec{p} + y\,\vec{r}$ como funções de x, y e determine-as em seguida para $x = 1/2$, $y = 3$.

b) Indique entre os vectores dados os pares de vectores colineares, os ternos de vectores complanares e um terno ordenado que possa ser tomado para nova base. [Sugestão: para saber se três vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são complanares, considere por exemplo a fórmula $\vec{u} = x\,\vec{v} + y\,\vec{w}$, traduza-a num sistema de três equações lineares em x, y utilizando as componentes dos vectores e veja se essas equações são compatíveis].

(Ver soluções no final do n.º 15.)

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

I. a) $\dot{A}B$; b) semi-recta $\dot{A}C$ oposta a $\dot{A}B$; c) AB; d) $\overrightarrow{AB}$.

II. a) recta que passa por $A+3\vec{u}$ e é paralela a $\vec{v}$; b) ABC; c) $\overrightarrow{ABC}$; d) $B\hat{A}C$; e) faixa entre duas paralelas; f) paralelogramo [ABCD], com $D = A + \vec{u} + \vec{v}$; g) triângulo [ABC].

NOTA. Os factos anteriores sugerem as seguintes definições em |R (sendo *n* um número natural qualquer):

1) Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

2) Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Por exemplo, com $n = 4$:

$$(2, 0, -1, 1/2) + (0, 2, 1, -1/2) = (2, 2, 0, 0)$$
$$4 \,.\, (2, 0, -1, 1/2) = (8, 0, -4, 2)$$

Posto isto, é fácil ver que $\mathbb{R}^n$ é *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$, relativamente às operações definidas (cf. n.° 13, final).

É ainda de notar que *o conjunto dos vectores dum plano ou o conjunto dos vectores duma recta são espaços vectoriais, relativamente às operações definidas de 'soma' e de 'produto por um número real'*. Dizem-se *subespaços vectoriais de* $\mathcal{V}$.

16. **Referenciais cartesianos em forma vectorial.** Consideremos um ponto O dum plano π e dois vectores $\vec{e}, \vec{f}$ não colineares desse plano. Então é fácil ver que:

Para todo o ponto P *de* π *existe um e um só par* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$P = O + x\vec{e} + y\vec{f} \tag{1}$$

Basta notar que $P - O$ é complanar com $\vec{e}, \vec{f}$ e aplicar o teorema 2 do número anterior.

Por conseguinte:

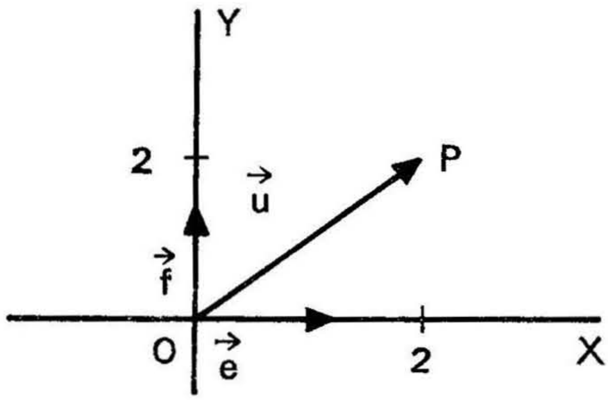
A fórmula (1) *estabelece uma correspondência biunívoca* $P \leftrightarrow (x, y)$ *entre os pontos* P *de* π *e os pares* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Diz-se então que o terno ordenado $(O, \vec{e}, \vec{f})$ é um *referencial cartesiano* do plano π e que os números x, y são as *coordenadas* de P nesse referencial: respectivamente a 1.ª *coordenada* (ou *abcissa*) e a 2.ª *coordenada* (ou *ordenada*).

Em vez do terno $(O, \vec{e}, \vec{f})$ poderíamos utilizar o terno de pontos (O, A, B) tal que $\overrightarrow{OA} = \vec{e}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{f}$. Então a fórmula (2) assume o aspecto:

$$P = O + x(A - O) + y(B - O)$$

O referencial $(O, \vec{e}, \vec{f})$ diz-se *ortonormal*, sse os vectores $\vec{e}, \vec{f}$ são unitários e perpendiculares entre si. Desde logo se vê que este conceito equivale ao de *'referencial cartesiano ortogonal e monométrico'* a que nos temos referido em geometria analítica: os eixos coordenados são agora as rectas que passam por O e têm a direcção e o sentido, respectivamente, de $\vec{e}$ e de $\vec{f}$; a unidade de comprimento é $|\vec{e}| = |\vec{f}|$.



Importa ainda observar o seguinte:

Uma vez adoptado um ponto O do plano para *origem* (ou *ponto* de referência), a fórmula $\vec{u} = P - O$ estabelece uma correspondência biunívoca $P \leftrightarrow \vec{u}$ entre os pontos P e os vectores $\vec{u}$ do plano. Se além disso for dada uma base $(\vec{e}, \vec{f})$, as *coordenadas* de P coincidem, respectivamente, com as *componentes* do vector $\vec{u}$.

Mas é óbvio que, mudando O, muda o vector $\vec{u}$ associado ao ponto P – chamado *vector de posição* de P (relativamente a O).

As considerações deste número estendem-se obviamente ao espaço tridimensional $\mathcal{E}$.

EXERCÍCIOS:

I. Sejam A e $\vec{u}$, respectivamente, um ponto e um vector do plano, tais que

$$A \rightarrowtail (-1, 3) \quad , \quad \vec{u} \rightarrowtail (2, -5)$$

num referencial cartesiano. a) Determine as coordenadas dos pontos $M = A - 2\vec{u}$, $N = A + \frac{1}{2}\vec{u}$ e as componentes do vector $\overrightarrow{MN}$.
b) Ache a equação cartesiana da recta de *equação vectorial* $P = A + t\vec{u}$ [Sugestão: $P \rightarrowtail (x, y)$, $x = \ldots$, $y = \ldots$]

II. Dados num referencial cartesiano os pontos

$$A \rightarrowtail (0, 0) \quad , \quad B \rightarrowtail (1, 2) \quad , \quad C \rightarrowtail (-2\ 0) \quad , \quad D \rightarrowtail (-4, 2)$$

verifique quais das proposições são verdadeiras: AB//CD, AC//BD.

III. Considere no espaço, em relação a um referencial cartesiano:

$$A \rightarrowtail (0, 0, 0) \quad , \quad B \rightarrowtail (-1, 2, 0) \quad , \quad C \rightarrowtail (2, 3, -1),$$
$$D \rightarrowtail (0, -1, 1)$$

a) Verifique se $D \in ABC$, averiguando se $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ são complanares.

b) Escreva a equação cartesiana do plano de *equação vectorial* $P = A + s(B - A) + t(C - A)$.

(Sugestão: elimine *s* e *t* entre as três *equações paramétricas* a que esta dá lugar, passando às coordenadas.)

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

I. a) $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{w})$; b) $\vec{e} = x\vec{u} + y\vec{w}$, $\vec{f} = x'\vec{u} + y'\vec{w}$, donde $x = 1/3$, $y = 5/9$, $x' = 0$, $y' = 1/3$.

II. a) $6x + y$, $2x$, $-x - y$; b) $(\vec{p}, \vec{q})$, $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$, $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{s})$.

Índice

Composto e impresso na
Imprensa Portuguesa — Porto
e concluiu-se
em Outubro de 1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA