J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

3.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

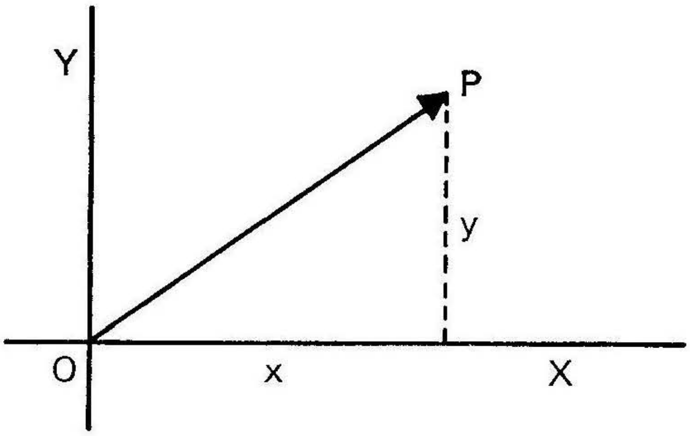
CAPÍTULO II

NÚMEROS COMPLEXOS EM FORMA TRIGONOMÉTRICA

1. **Representação geométrica dos números complexos.** Consideremos um número complexo

$$z = x + iy \quad (\text{com } x, y \in \mathbb{R})$$

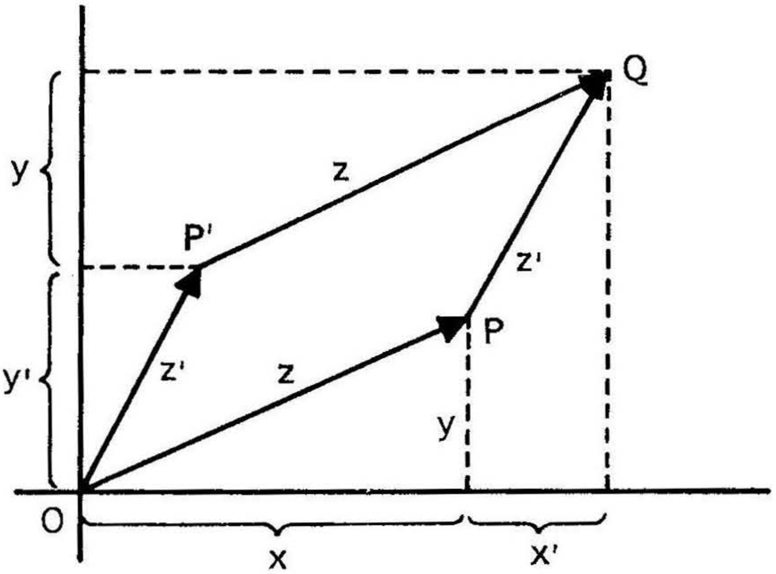
e suponhamos fixado num plano um referencial cartesiano ortogonal. Então, como é sabido, o número z é representado pelo ponto P do plano, cuja abcissa é x e cuja ordenada é y.



Ora, segundo a observação final do número anterior, o número z pode igualmente ser representado pelo vector do plano, cujas componentes são, ordenadamente, x e y.

Vamos desde já reconhecer uma das vantagens desta representação. Consideremos um segundo número complexo

$$z' = x' + iy' \quad (\text{com } x'\ y' \in \mathbb{R})$$



Então, como é sabido, $z + z' = (x + x') + i(y + y')$, isto é:

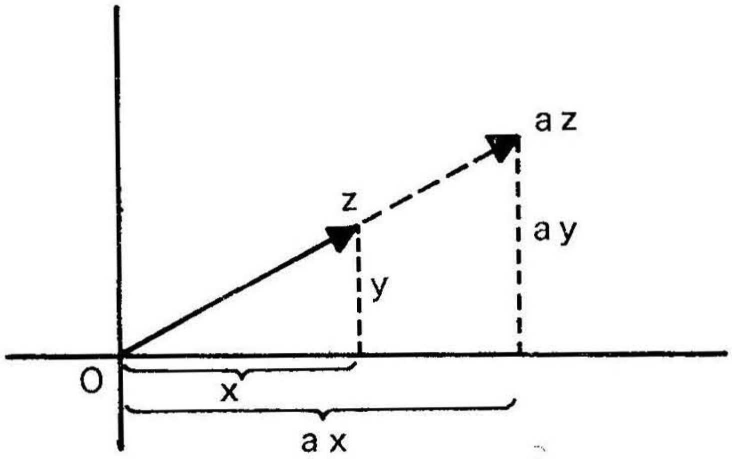
$$z \curvearrowright (x, y) \wedge z' \curvearrowright (x', y') \Rightarrow z + z' \curvearrowright (x + x', y + y')$$

donde, atendendo ao que foi estabelecido no Cap. I, n.º 15:

I. *O vector correspondente à soma de dois números complexos é a soma dos vectores correspondentes a esses números.*

Visto que a correspondência estabelecida entre números complexos e vectores do plano é bijectiva, podemos afirmar:

O grupo aditivo dos números complexos é isomorfo ao grupo aditivo dos vectores do plano.



Por outro lado, se *a* é um número real, tem-se:

$$az = (ax) + i(ay), \text{ isto é:}$$

$$z \rightsquigarrow (x, y) \Rightarrow az \rightsquigarrow (ax, ay)$$

donde:

II. *O vector correspondente ao produto dum número real a por um número complexo z é o produto de a pelo vector correspondente a z.*

A conjunção deste facto com o anterior exprime-se dizendo:

O conjunto $\mathbb{C}$ *dos números complexos é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$, *isomorfo ao espaço vectorial constituído pelos vectores do plano.*

Mas note-se que $\mathbb{C}$ é um corpo, onde é portanto definido o produto de dois elementos *quaisquer* de $\mathbb{C}$, como sendo ainda um elemento de $\mathbb{C}$ (operação interna), o que já não sucede com os vectores do plano no sentido usual.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

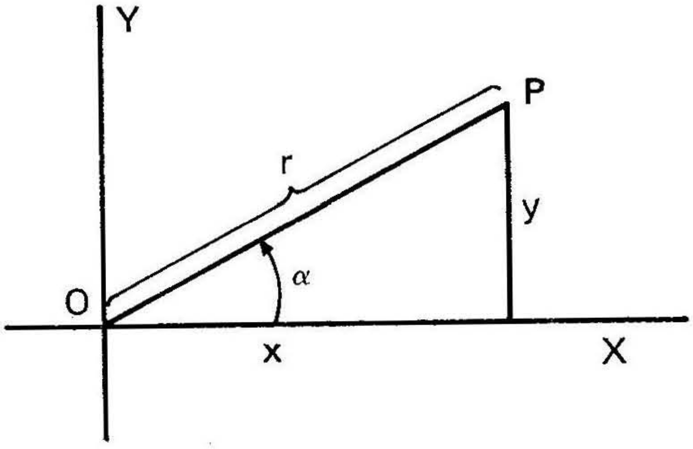
I. a) $(-5, 13)$, $(0, 1/2)$, $(5, -25/2)$;
   b) $5(x + 1) + 2(y - 3) = 0$.

II. AC//BD. III. a) $D \notin ABC$; b) $2x+y+7z=0$.

2. **Representação trigonométrica dos números complexos.** Consideremos de novo o número complexo

$$z = x + iy$$

representado pelo ponto P do plano cartesiano.



Chama-se *módulo do número* z, e representa-se *por* $|z|$, o módulo do vector $\overrightarrow{OP}$ correspondente, ou seja a distância do ponto P, representativo de z, ao ponto O, origem dos eixos [1]. Na figura, o módulo de z é designado por r. Será, pois

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Imediatamente se reconhece que

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

O que se disse atrás sobre o *módulo da soma de dois vectores permite também reconhecer que*

$$\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \quad , \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}}$$

Por outro lado, supondo $z \neq 0$, chama-se *argumento de* z a qualquer medida α, em radianos, do ângulo $X\hat{O}P$, cujo primeiro lado é o semi-eixo positivo $\dot{O}X$ e cujo segundo lado é a semi-recta $\dot{O}P$. Desde logo se vê que:

---

(1) Como já sabemos, em geometria analítica identificam-se os comprimentos (ou distâncias) com os números reais que são as suas medidas.

Um número complexo $z \neq 0$ *tem uma infinidade de argumentos, que diferem todos entre si por múltiplos inteiros de* 2π. Chama-se *argumento principal* de z o argumento α de z tal que

$$0 \leqslant \alpha < 2\pi$$

(Se $z = 0$, diz-se que z tem *argumento arbitrário*).

Posto isto, deduz-se imediatamente da figura anterior que

$$r = r \cos \alpha \quad , \quad b = r \operatorname{sen} \alpha$$

e, como $z = x + iy$, tem-se

$$(1) \qquad \boxed{z = r\,(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}$$

A expressão $r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ é chamada *forma trigonométrica* do número complexo z, enquanto a expressão $x + iy$ é chamada *forma algébrica de* z.

Para comodidade de escrita, usaremos daqui por diante o símbolo $E(\alpha)$ como abreviatura da expressão $\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$. Assim, a fórmula (1) passa a escrever-se

$$\boxed{z = r\,E(\alpha)}$$

Em particular, se $|z| = 1$ (isto é, se $r = 1$), tem-se $z = E(\alpha)$. Deste modo, a expressão geral dos números complexos de módulo 1 será

$$E(\alpha) \equiv \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

Recordemos o *critério de igualdade de dois números complexos na forma algébrica:*

$$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y' \quad (x,\ y,\ x',\ y' \in \mathbb{R})$$

Consideremos, agora, dois números complexos *não nulos* na forma trigonométrica

$$z = r\ E(\alpha) \quad , \quad z' = r'\ E(\alpha')$$

É óbvio que

$$(2) \qquad z = z' \Rightarrow r = r'$$

Mas, como vimos há pouco, um número complexo tem uma infinidade de argumentos e não podemos afirmar: $z = z' \Rightarrow \alpha = \alpha'$, mas apenas:

$$(3) \quad z = z' \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \alpha - \alpha' = 2n\pi \qquad (\text{se } z \neq 0)$$

Exprime-se esta última condição dizendo que α é *congruente com* α' *módulo* 2π e escrevendo

$$\alpha \equiv \alpha' \pmod{2\pi}$$

Reciprocamente, é óbvio que a conjunção de (2) com (3) implica $z = z'$. Assim, o *critério de igualdade de dois números complexos não nulos na forma trigonométrica* será:

$$r\ E(\alpha) = r'\ E(\alpha') \Leftrightarrow r = r' \wedge \alpha \equiv \alpha' \pmod{2\pi}$$

Em linguagem comum:

Dois números complexos não nulos são iguais, se e só se têm módulos iguais e os seus argumentos diferem por um múltiplo inteiro de 2π.

EXERCÍCIOS:

I. Represente graficamente os seguintes números complexos

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad 5, \quad -3, \quad 2i, \quad -\frac{2}{3}i,$$

$$1+i, \quad -i, \quad -1+i, \quad 1-i, \quad \sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

e ache as respectivas formas trigonométricas.

II. Represente sob forma algébrica os seguintes números complexos:

$$\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\;, \quad 2\,E\left(\frac{2}{3}\pi\right)\;, \quad 4\,E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{2}\,E\left(\frac{\pi}{4}\right)\;, \quad E\left(\frac{3}{4}\pi\right)\;, \quad E\left(\frac{5}{4}\pi\right)$$

NOTA. Também se pode chamar argumento dum número complexo ao próprio ângulo cuja medida é dada em radianos e que pode exprimir-se noutras unidades. Por exemplo, o primeiro número do exemplo anterior poderá também escrever-se:

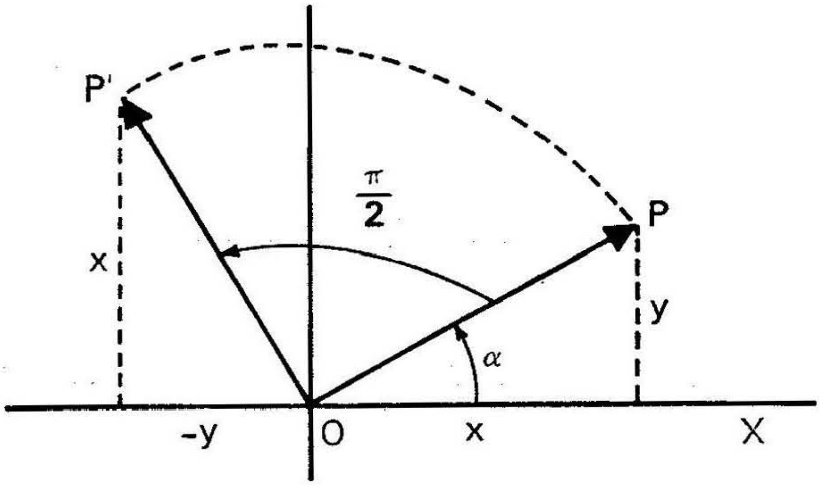
$$\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ,$$

mas é claro que, neste caso, se trata de *funções trigonométricas de ângulo (ou arco)* e não de funções trigonométricas de números reais.

3. **Interpretação geométrica da multiplicação de números complexos.** Comecemos pelo seguinte caso particular:

Produto do número i *por um número complexo qualquer,*

$$z = x + iy \quad (x,\ y \in \mathbb{R}).$$



Basta considerar o caso em que $z \neq 0$. Temos:

$$iz = -y + ix$$

$$|iz| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Seja $r = |z|$, α o argumento principal de z e α' o argumento principal de iz. Virá, então:

$$\cos \alpha' = -\frac{y}{r} = -\operatorname{sen} \alpha \quad , \quad \operatorname{sen} \alpha' = \frac{x}{r} = \cos \alpha,$$

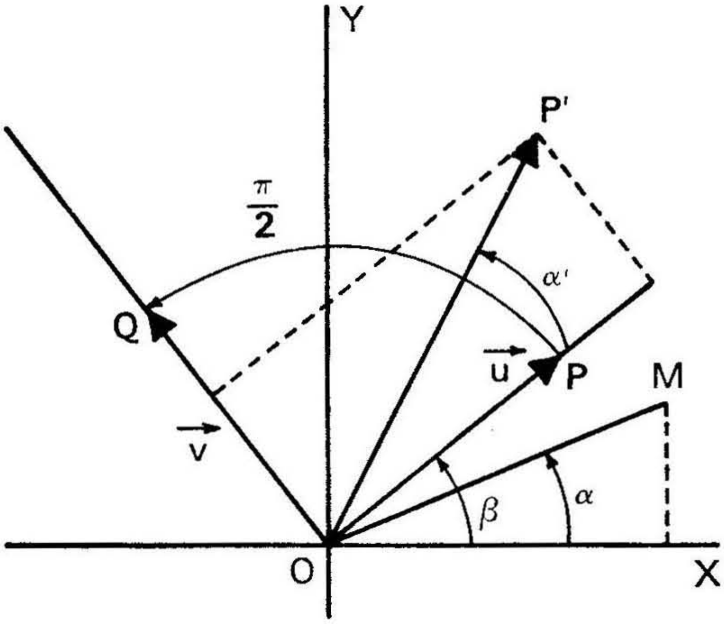
donde

$$\alpha' \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Por conseguinte: *a operação* $z \rightarrow iz$ (*multiplicação por* i) *traduz-se geometricamente pela rotação de* 90° *no sentido positivo.* (No caso da figura o sentido positivo é, como habitualmente, o sentido anti-horário.)

Podemos, agora, passar ao caso geral:

Produto de um número complexo $z = x + iy$ *por outro número complexo,* $w = u + iv$ $(\forall\, x, y, u, v \in \mathbb{R})$.



Basta considerar o caso em que $z \neq 0$ e $w \neq 0$. Suponhamos que se tem, na forma trigonométrica:

$$(1) \qquad z = r\, E(\alpha) \quad , \quad w = \rho E(\beta)$$

(α, β argumentos principais)

Sejam M, P, P', Q os pontos que representam z, w, zw, iw, respectivamente, e ponhamos

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$$

Então $\vec{v}$ resulta de $\vec{u}$ por uma rotação de 90° no sentido positivo. Ora

$$zw = (x + iy)\, w = xw + y(iw) \qquad \text{(porquê?)}$$

Logo, segundo o estabelecido no n.° 1:

$$(2) \qquad \overrightarrow{OP'} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$$

Além disso

$$(3) \qquad \left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right| = \left|\vec{w}\right|$$

Consideremos agora o referencial cujo 1.° eixo é a recta OP orientada de O para P, cujo 2.° eixo é a recta OQ orientada de O para Q e cuja unidade de comprimento é igual à do primeiro referencial. Então de (2) e (3) resulta que a abcissa e a ordenada de P′ no novo referencial são, respectivamente,

$$x' = x\rho \quad , \quad y' = y\rho$$

donde $\quad |OP'| = \sqrt{(x\rho)^2 + (y\rho)^2} = \rho\sqrt{x^2 + y^2} = \rho\, r$

ou seja $\quad |zw| = r\rho$

Por outro lado, *se for* α' *a medida principal do ângulo orientado* $P\hat{O}P'$, tem-se

$$\cos \alpha' = \frac{x\rho}{r\rho} = \frac{x}{r} = \cos \alpha \quad , \quad \text{sen } \alpha' = \frac{y\rho}{r\rho} = \frac{y}{r} = \text{sen } \alpha$$

donde

$$\alpha' = \alpha$$

Ora

$$(4) \qquad X\hat{O}P' = X\hat{O}P + P\hat{O}P' \qquad \text{(ângulos orientados)}$$

Como o segundo referencial está orientado no mesmo sentido que o primeiro (sentido anti-horário na figura), deduz-se de (4) que *um dos argumentos de* zw — medida do ângulo orientado $X\hat{O}P'$ — será o número

$$\beta + \alpha' = \alpha + \beta$$

Assim, em conclusão:

(5) $$zw = (r\rho)\ E\ (\alpha + \beta)$$

Comparando (1) e (5), chegamos à seguinte

REGRA. *O produto de dois números complexos tem por módulo o produto dos módulos dos factores e por argumento (entre outros) a soma dos argumentos dos factores.*

É claro que esta regra também é válida se um dos factores é 0 (argumento arbitrário).

Em particular, mantém-se a PROPRIEDADE DO MÓDULO DO PRODUTO:

$$\boxed{|zw| = |z| \cdot |w| \quad , \quad \forall z, w \in \mathbb{C}}$$

que já se verificava em $\mathbb{R}$, tal como a PROPRIEDADE DO MÓDULO DA SOMA (n.° 2).

Geometricamente, vimos que se passa do vector $\overrightarrow{OP}$, representativo de w, para o vector $\overrightarrow{OP'}$, representativo de zw, efectuando a rotação de amplitude α e em seguida a homotetia de razão r (ou vice-versa). Assim:

A aplicação $w \rightsquigarrow zw$ *(multiplicação pelo número complexo* z*) traduz-se por uma transformação de semelhança: produto da rotação de amplitude* α *(argumento de* z*) pela homotetia de razão* r *(módulo de* z*).*

EXERCÍCIOS — I. Desenhe o triângulo cujos vértices são as imagens dos números

$$1 \quad , \quad 2 + 2i \quad , \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e, em seguida, o triângulo cujos vértices correspondem aos produtos destes números por $-\sqrt{2}(1 + i)$ (dados a azul e resultados a vermelho).

II. Mostre que os números complexos z tais que $|z| = 1$ formam um grupo multiplicativo isomorfo ao grupo multiplicativo das rotações do plano e ao grupo aditivo das classes de congruência de números reais para o módulo 2π.

III. Mostre que os conjuntos $\{1, i, -1, -i\}$ e

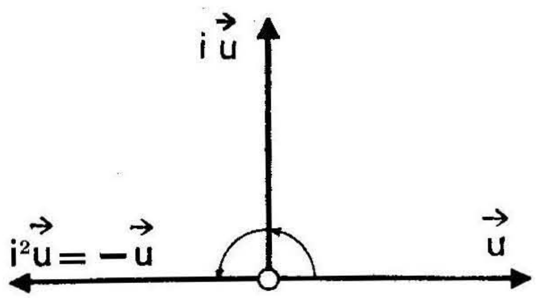
$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

são subgrupos multiplicativos do grupo anterior.

(Sugestão: nestes três exercícios convém usar a forma trigonométrica.)

NOTA IMPORTANTE. Os factos anteriores mostram que os números complexos podem ser interpretados como *operadores sobre vectores do plano*. Nesta ordem de ideias, o símbolo $E(\alpha)$ representa o operador *rotação de amplitude* α. Em particular, o número i é a rotação de 90° (no sentido positivo) e portanto o número $i^2 = i \cdot i$ é a rotação de 180°:

$$i^2\vec{u} = i(i\,\vec{u}) = -\vec{u} = (-1)\,\vec{u}$$



Assim obtemos uma interpretação intuitiva da fórmula:

$$i^2 = -1$$

4. **Divisão de números complexos na forma trigonométrica.** Como já é sabido, dados dois números complexos z_1, z_2, sendo $z_2 \neq 0$ existe um e um só número complexo ζ tal que

$$(1) \qquad z_2 \zeta = z_1$$

Este número ζ é o quociente de z_1 por z_2 ou seja $\zeta = z_1/z_2$. Ponhamos

$$z_1 = r_1 \; E(\alpha_1) \quad , \quad z_2 = r_2 \; E(\alpha_2) \quad , \quad \zeta = \rho \, E(\varphi)$$

Então, segundo a regra da multiplicação, (1) equivalia

$$(1') \qquad (r_2 \, \rho) \; E(\alpha_2 + \varphi) = r_1 \; E(\alpha_1)$$

donde, aplicando o critério de igualdade (n.º 2):

$$(2) \qquad r_2 \, \rho = r_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 + \varphi \equiv \alpha_1 \; (\text{mod } 2\pi)$$

ou seja

$$\rho = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{e} \quad \varphi \equiv \alpha_1 - \alpha_2 \; (\text{mod } 2\pi)$$

Por conseguinte:

$$\frac{r_1 \; E(\alpha_1)}{r_2 \; E(\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2} \; E(\alpha_1 - \alpha_2)$$

isto é:

REGRA. *O quociente de* z_1 *por* z_2 *(supondo* $z_2 \neq 0$*) tem por módulo o quociente de* $|z_1|$ *por* $|z_2|$ *e por argumento a diferença entre um argumento de* z_1 *e um argumento de* z_2.

5. **Potências de números complexos na forma trigonométrica.** A regra da multiplicação estabelecida no n.° 3 estende-se imediatamente a produtos de mais de dois factores. Assim, se forem dados *n* números

$$z_1 = r_1\ E(\alpha_1) \quad , \quad z_2 = r_2\ E(\alpha_2) \quad , \quad \ldots \quad , \quad z_n = r_n\ E(\alpha_n)$$

tem-se, manifestamente:

$$z_1\ z_2 \ldots z_n = (r_1\ r_2 \ldots r_n)\ E(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

ou seja

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right) E\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$$

Em particular, os factores podem ser todos iguais:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n$$

Designemo-los por z e seja $z = r\ E(\alpha)$. Então virá

$$\boxed{z^n = [r\ E(\alpha)]^n = r^n\ E(n\ \alpha)}$$

6. **Radiciação no corpo complexo.** Suponhamos que é *dado* um número complexo $z \neq 0$ e que se *procura* ζ tal que

$$(1) \qquad \zeta^n = z$$

Ponhamos

$$z = r\ E(\alpha) \quad , \quad \zeta = \rho\ E(\varphi)$$

Então, segundo a regra anterior, tem-se:

$$\zeta^n = z \iff \rho^n\ E(n\ \varphi) = r\ E(\alpha),$$

donde, pelo critério de igualdade,

$$\zeta^n = z \iff \rho^n = r \wedge n\,\varphi \equiv \alpha \pmod{2\,\pi}$$

Ora

$$\rho^n = r \iff \rho = \sqrt[n]{r} \quad (\text{em } \mathbb{R}^+)$$

Por outro lado:

$$n\,\varphi = \alpha \pmod{2\,\pi} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}:\ n\,\varphi = \alpha + 2\,k\,\pi$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}:\ \varphi = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\,\pi}{n}$$

Por conseguinte, as soluções da equação (1) em ζ serão *todos* os números dados pela fórmula

$$(2) \qquad \zeta = \sqrt[n]{r}\ E\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\,\pi}{n}\right), \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

Os valores possíveis de k serão pois $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ *Mas os valores assim obtidos para ζ não são todos distintos.* Com efeito, consideremos dois inteiros relativos k_1, k_2 e seja

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{n} + k_1 \cdot \frac{2\,\pi}{n} \quad , \quad \varphi_2 = \frac{\alpha}{n} + k_2 \cdot \frac{2\,\pi}{n}$$

Então

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k_1 - k_2}{n} \cdot 2\,\pi$$

Isto mostra que $\varphi_1 - \varphi_2$ *é múltiplo inteiro de* $2\,\pi$, sse $k_1 - k_2$ *é múltiplo inteiro de* n. Quer dizer:

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\,\pi} \iff k_1 \equiv k_2 \pmod{n}$$

Por conseguinte, se forem ζ_1 e ζ_2 os valores de ζ correspondentes a k_1 e k_2 segundo (2), será

$$\zeta_1 = \zeta_2 \Leftrightarrow k_1 \equiv k_2 \pmod{n}$$

Ora, qualquer inteiro relativo k *é congruente com um dos números*

$$0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \qquad \pmod{n}$$

e estes não congruentes entre si (módulo n).

Logo:

A equação (1) *tem exactamente* n *soluções. Essas soluções (chamadas 'raízes de índice* n *de z') são dadas pela fórmula*

$$\zeta = \sqrt[n]{r}\ E\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

atribuindo a k *todos os valores inteiros de* 0 *a* $n-1$.

Se $z = 0$, é claro que z tem uma única raiz de índice n, que é 0.

Fica assim confirmado o que já tínhamos anunciado no 6.° ano, quanto a existência e número de raízes de índice n de um número complexo.

EXERCÍCIOS:

I. Determine as raízes quadradas de i, primeiro na forma trigonométrica e depois na forma algébrica, e represente-as graficamente.

II. Idem para as raízes cúbicas de -8.

III. Idem para as raízes sextas e raízes oitavas de 1.

IV. Determine as raízes cúbicas de $4(1 + i\sqrt{3})$, primeiro na forma trigonométrica e depois na forma algébrica, com a aproximação que lhe permitirem as tábuas de funções naturais. Faça a sua representação gráfica.

V. Idem para as raízes cúbicas de $\frac{3+4i}{5}$.

7. **Fórmulas trigonométricas de adição de ângulos.** Sejam α e β as medidas em radianos de dois ângulos quaisquer.

Tem-se então, como vimos,

$$(1) \qquad E(\alpha + \beta) = E(\alpha) \, . \, E(\beta)$$

Ora

$$E(\alpha) = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad E(\beta) = \cos \beta + i \operatorname{sen} \beta$$

e

$$E(\alpha + \beta) = \cos (\alpha + \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$$

Ponhamos

$$(2) \qquad x = \cos \alpha \quad , \quad y = \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad x' = \cos \beta \quad , \quad y' = \operatorname{sen} \beta$$

Ora $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + (xy' + x'y)\, i$. Então de (1) vem

$$\cos (\alpha + \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)\, i$$

donde

$$\cos (\alpha + \beta) = xx' - yy' \quad , \quad \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = xy' + x'y$$

ou seja, atendendo a (2)

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \end{cases}$$

Estas são as *fórmulas do seno e do coseno da soma.* Mudando β em $-\beta$, destas se deduzem facilmente as *fórmulas do seno e do coseno da diferença:*

$$\begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \end{cases}$$

lembrando que $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$.

Por outro lado, tem-se

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha}$$

Daqui, dividindo ambos os termos da última fracção por $\cos\alpha \cos\beta$, deduz-se facilmente a *fórmula da tangente da soma:*

$$(2) \qquad \operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\beta}$$

Em particular pode ser $\alpha = \beta$ e portanto $\alpha + \beta = 2\alpha$. Assim, de (2) deduzem-se as fórmulas:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha,$$
$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha},$$

que, como as anteriores, convém decorar.

É claro que, em vez das letras α, β, podemos usar nestas fórmulas outras quaisquer, visto que se trata de *variáveis aparentes* (submetidas ao quantificador universal).

8. **Múltiplos de ângulos e potências de senos e cosenos.** Podemos obter fórmulas gerais para sen n α e cos n α, com n $\in$ IN, utilizando a identidade

$$E(n\,\alpha) = [E(\alpha)]^n$$

e a fórmula do binómio aplicada ao desenvolvimento

$$[E(\alpha)]^n = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^n$$

Por exemplo, tem-se

$$\begin{aligned} E(3\,\alpha) &= (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^3 \\ &= \cos^3\alpha + 3\,i\,\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 3\,i^2\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha + i^3\,\text{sen}^3\alpha \end{aligned}$$

donde, lembrando que $E(3\,x) = \cos 3\,\alpha + i\,\text{sen}\,3\,\alpha$:

$$\begin{aligned} \cos 3\,\alpha &= \cos^3\alpha - 3\,\text{sen}^2\alpha\cos\alpha \\ \text{sen}\,3\,\alpha &= 3\,\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha \end{aligned}$$

Em muitos problemas, o que interessa não é exprimir os senos e os cosenos de múltiplos de ângulos a partir de potências de senos e cosenos — mas exactamente o inverso. Para isso notemos que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \begin{cases} E(x) = \cos x + i\,\text{sen}\,x \\ E(-x) = \cos x - i\,\text{sen}\,x \end{cases}$$

visto que $\cos(-x) = \cos x$, $\text{sen}(-x) = -\,\text{sen}\,x$. Daqui, por adição e por subtracção ordenada, resultam as fórmulas:

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{E(x) + E(-x)}{2} \\[2ex] \text{sen}\,x = \dfrac{E(x) - E(-x)}{2\,i} \end{cases}$$

a que podemos chamar FÓRMULAS DE EULER, pelas razões que serão indicadas adiante.

Destas se deduz, por exemplo:

I) $$\cos^2 x = \frac{1}{4}\,[E(2\,x) + 2\,E(x)\;E(-x) + E(-2x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{E(2\,x) + E(-2x)}{2} + E(0)\right]$$

ou seja

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos\,2\,x}{2}}$$

II) $$\operatorname{sen}^2 x = -\,\frac{1}{4}\,[E(2\,x) - 2\,E(0) + E(-2x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{E(2\,x) + E(-2\,x)}{2}\right]$$

ou seja

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos\,2\,x}{2}}$$

III) $$\cos^3 x = \frac{1}{8}\,[E(3\,x) + 3\,E(x) + 3\,E(-x) + E(-3\,x)]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{E(3\,x) + E(-3\,x)}{2} + 3\,.\,\frac{E(x) + E(-x)}{2}\right]$$

ou seja

$$\cos^3 x = \frac{\cos\,3\,x + 3\,\cos\,x}{4},$$

e assim por diante.

NOTA. Em matemática superior, a expressão E(x) é identificada com e^{ix}, que também se escreve exp(ix) (ler 'exponencial de ix'). Assim, as fórmulas (1) assumem a forma

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

e é com este aspecto que são habitualmente chamadas 'fórmulas de Euler', em homenagem ao grande matemático a quem são atribuídas.

9. **Fórmulas de transformação logarítmica. Derivadas das funções circulares.** Sobre este assunto, ver o compêndio de trigonometria adoptado.

Quanto a fórmulas de bissecção, basta registar as seguintes, que se deduzem imediatamente das anteriores:

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Índice

Págs.

Capítulo V. ÁLGEBRAS DE APLICAÇÕES LINEARES E ÁLGEBRAS DE MATRIZES

Composto e impresso na
Imprensa Portuguesa — Porto
e concluiu-se
em Outubro de 1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA