J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

3.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

CAPÍTULO III

TRANSFORMAÇÕES AFINS E APLICAÇÕES LINEARES

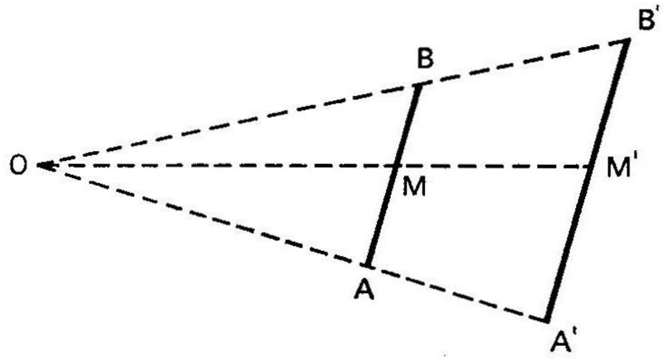
1. **Transformações de semelhança e isometrias.** Sendo *r* um número real positivo, chama-se *transformação de semelhança de razão* r (ou apenas *semelhança de razão* r) toda a aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{E}$ sobre si mesmo, que transforma cada segmento de recta $\overline{AB}$ num segmento de recta $\overline{A'B'}$, cujo comprimento é o produto de r pelo comprimento do primeiro, isto é, tal que

$$|A'B'| = r\,|AB|$$

A transformação de semelhança chama-se uma *ampliação,* uma *redução* ou uma *isometria,* conforme $r > 1$, $r < 1$ ou $r = 1$. Por exemplo:

a) *Toda a homotetia de razão* ρ *(número real, positivo ou negativo) é uma semelhança de razão* $|\rho|$.

b) *Toda a translação é uma isometria.*



Estes dois factos podem ser facilmente demonstrados, como exercícios de aplicação do cálculo vectorial. Considerem-se três pontos A, B, M e os respectivos transformados A', B', M'. Por exemplo, na homotetia de centro O e razão ρ, tem-se

$$A'=O+\rho(A-O) \quad , \quad B'=O+\rho(B-O) \quad , \quad M'=O+\rho(M-O)$$

Trata-se de provar: 1.° $M \in \overline{AB} \Longleftrightarrow M' \in \overline{A'B'}$; 2.° $|A'B'|=|\rho|.|AB|$

Para as translações, a demonstração é mais fácil.

É também fácil de reconhecer que:

I. *O produto de duas semelhanças de razões* r *e* s *é uma semelhança de razão* r . s.

Por outro lado:

II. *A aplicação inversa de uma semelhança de razão* r *é uma semelhança de razão* 1/r.

Demonstração:

Seja Φ uma semelhança de razão r e consideremos dois pontos P e Q quaisquer do espaço. Trata-se de provar que Φ^{-1} transforma o segmento $\overline{PQ}$ num segmento $\overline{P'Q'}$ tal que $|\overline{P'Q'}| = 1/r \,.\, |PQ|$.

Seja pois $P' = \Phi^{-1}(P)$, $Q' = \Phi^{-1}(Q)$. Então $P = \Phi(P')$, $Q = \Phi(Q')$ e portanto

$$\Phi(\overline{P'Q'}) = \overline{PQ} \quad , \quad |PQ| = r\,|P'Q'| \qquad \text{(porquê)}$$

donde

$$\overline{P'Q'} = \Phi^{-1}(\overline{PQ}) \quad , \quad |P'Q'| = \frac{1}{r}\,|PQ|,$$

q. e. d.

Das propriedades I e II resulta imediatamente que:

As transformações de semelhança de $\mathcal{E}$ formam um grupo multiplicativo.

Este é chamado o *grupo das semelhanças* (ou *grupo euclidiano*).

Consideremos, agora, uma semelhança qualquer Θ de razão r e seja Φ uma homotetia de razão 1/r (de centro arbitrário). Se efectuarmos sucessivamente Θ e Φ, a aplicação resultante

(1) $$\Psi = \Phi\,\Theta$$

será uma semelhança de razão $r \cdot (1/r) = 1$, portanto uma isometria. Ora de (1) vem

$$\Phi = \Psi\,\Theta^{-1} \qquad \text{(porquê?)}$$

Por conseguinte:

Toda a semelhança pode ser obtida por meio de uma homotetia seguida de uma isometria (ou vice-versa).

Assim, as homotetias permitem reduzir as semelhanças a isometrias.

Por outro lado, das propriedades I e II deduz-se imediatamente o seguinte facto:

As isometrias do espaço formam um grupo multiplicativo, portanto um subgrupo do grupo das semelhanças.

Chamar-lhe-emos *grupo das isometrias* ou *grupo métrico.*

DEFINIÇÃO 1. *Dadas duas figuras* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *(conjuntos de pontos), diz-se que* $\mathcal{F}$ é semelhante a $\mathcal{G}$*, e escreve-se* $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$*, sse existe pelo menos uma transformação de semelhança* Φ *que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$*, isto é, tal que* $\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{G})$.

Desta definição e das propriedades anteriores resulta que:

1) $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F}$. Com efeito, existe pelo menos uma transformação de semelhança que aplica $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{F}$ (qual é?).

2) $\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \sim \mathcal{F}$. Com efeito, se existe uma semelhança Φ tal que $\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{G})$, também existe uma semelhança Ψ tal que $\mathcal{G} = \Psi(\mathcal{F})$ (qual é?).

3) $\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \wedge \mathcal{G} \sim \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{H}$. Com efeito, se existem semelhanças Φ e Ψ tais que $\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{G})$ e $\mathcal{G} = \Psi(\mathcal{H})$, também existe uma semelhança Θ tal que $\mathcal{F} = \Theta(\mathcal{H})$ (qual é?).

Em conclusão:

A relação de semelhança (expressa pelo sinal $\sim$*) é uma relação de equivalência.*

Segundo o raciocínio anterior, este facto é uma consequência do facto de as transformações de semelhança formarem um grupo.

Diz-se que duas figuras têm a mesma *forma,* sse são semelhantes. A *forma* é pois a propriedade das figuras que é conservada pelas transformações de semelhança.

DEFINIÇÃO 2. *Dadas duas figuras* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$*, diz-se que* $\mathcal{F}$ *é* isométrica *a* $\mathcal{G}$ *sse existe pelo menos uma isometria que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$.

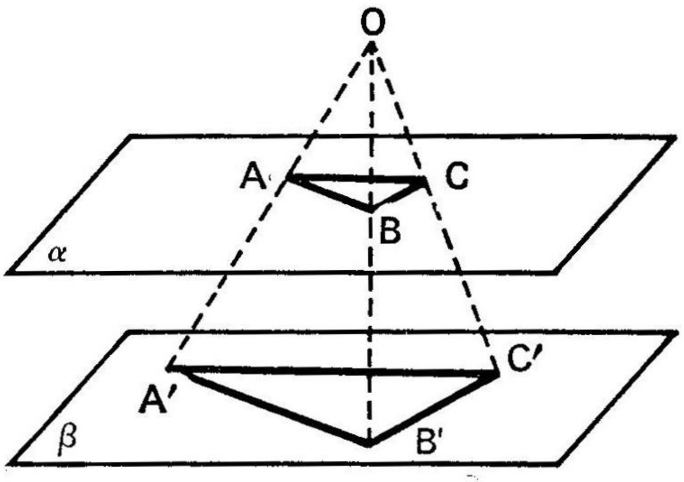
Como as isometrias formam um grupo, conclui-se, tal como para a relação de semelhança, que:

A relação de isometria é uma relação de equivalência.

As isometrias conservam não só a *forma,* como também as *dimensões* da figura.

Convém ainda salientar o seguinte facto:

As transformações de semelhança e as isometrias podem também ser definidas, de modo análogo, como aplicações biunívocas dum plano α sobre um plano β ou duma recta r sobre uma recta s (podendo ser em particular $\alpha = \beta$ ou r = s).



Consideremos, por exemplo, dois planos α, β paralelos e um ponto O fora de α e de β.

A aplicação que faz corresponder a cada ponto P de α o ponto P′ de intersecção de OP com β é manifestamente uma semelhança de α sobre β — aliás restrição duma homotetia espacial ao plano α (é o caso da projecção de um filme sobre um *écran*).

EXERCÍCIOS:

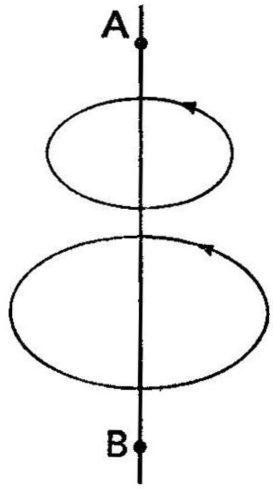
I. Considere um ponto P, o seu transformado P′ por meio da homotetia de centro O e razão ρ, e o transformado P″ de P′ pela translação definida por $\vec{u}$. Exprima P″ como função de P (por cálculo vectorial). Proceda depois em ordem inversa, considerando primeiro a translação e depois a homotetia. Que teorema deduz assim?

II. Problema análogo com duas homotetias de centro O_1, O_2 e razões ρ_1, ρ_2 quaisquer.

III. Prove que a reunião do conjunto de todas as translações com o conjunto de todas as homotetias é um grupo (não comutativo).

(Ver respostas no final do número seguinte.)

2. **Rotações do plano e do espaço.** Todos conhecem o seguinte facto, induzido da experiência quotidiana:



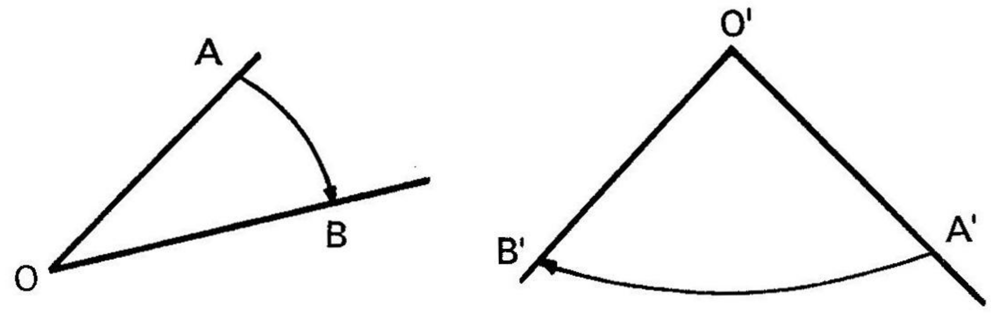
Quando dois pontos distintos A e B dum corpo sólido estão fixos, o corpo só pode ter movimentos de uma espécie: *os movimentos de rotação.* Durante um tal movimento não só os pontos materiais, A, B, mas todos os pontos do sólido situados na recta AB (eixo de rotação) se mantêm fixos; qualquer outro ponto do sólido é obrigado a mover-se sobre uma circunferência situada num plano perpendicular ao eixo e com o centro no eixo.

O conceito físico de *movimento de rotação* sugere o conceito geométrico de *rotação* (caso particular das isometrias). Este, por sua vez, está intimamente relacionado com o de *ângulo orientado,* que já foi estudado em trigonometria.

Um ângulo não nulo fica orientado quando se estabelece que um dos seus lados precede o outro lado. O lado que precede é o *lado antecedente* (ou *primeiro lado*); o outro é o *lado consequente* (ou *segundo lado*). Todo o ângulo nulo se considera orientado.

Será talvez conveniente, daqui por diante, designar pela notação $\hat{O}AB$ o ângulo orientado cujo primeiro lado é $\dot{O}A$ e cujo segundo lado é $\dot{O}B$.

Dados dois ângulos orientados — *no mesmo plano ou em planos paralelos* — é fácil distinguir à vista se têm o mesmo sentido ou sentidos contrários (ângulos não nulos) (¹).



Por exemplo, os ângulos orientados $\hat{O}AB$ e $\hat{O}'A'B'$ têm o mesmo sentido, enquanto o ângulo $\hat{O}BA$ tem sentido contrário: o dos dois primeiros é o *sentido horário* e o do segundo *o sentido anti-horário* (em relação ao leitor).

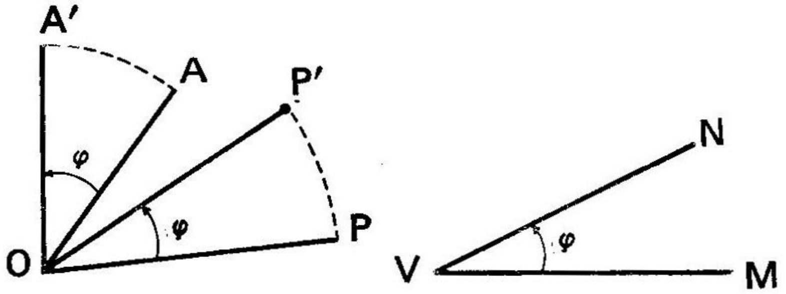
(¹) Abstemo-nos de fazer aqui o estudo rigoroso do sentido dos ângulos orientados (mais difíceis que o do sentido dos segmentos orientados).

Há ainda outro modo intuitivo de distinguir os dois sentidos de rotação no plano:

Por exemplo, um observador colocado sobre a face visível do plano, junto ao vértice do ângulo $\hat{O}AB$, vê o segundo lado *à direita* do primeiro. Por isso, o sentido horário também é chamado *dextrorso* (de 'dextra', que significa 'direita'), enquanto o sentido anti-horário é chamado *'sinistrorso'* (de 'sinistra', 'esquerda').

Diz-se que dois ângulos orientados, do mesmo plano ou de planos paralelos, são *equipolentes*, sse têm o mesmo sentido e a mesma grandeza absoluta.

Posto isto, podemos começar por definir *'rotações do plano'* (ou *'de um plano'*).



Cada rotação Φ do plano pode ser dada por um ponto O *(centro de rotação)* e por um ângulo orientado $\hat{V}MN$, do seguinte modo:

É a aplicação que deixa fixo o ponto O [isto é, $\Phi(O) = O$] e faz corresponder a cada ponto P do plano distinto de O o ponto P' tal que:

$$|OP| = |OP'| \text{ e } \hat{O}PP' \text{ é equipolente a } \hat{V}MN$$

Facilmente se reconhece que dois ângulos orientados do plano definem a mesma rotação de centro O, sse são equipolentes (também podemos dizer neste caso que definem o mesmo *vector-ângulo*).

Sendo assim, é claro que uma rotação Φ do plano também pode ser definida pelos seguintes dados:

1) um ponto (centro da rotação);

2) um sentido de rotação considerado como *positivo;*

3) um número real φ e uma unidade de medida de ângulos.

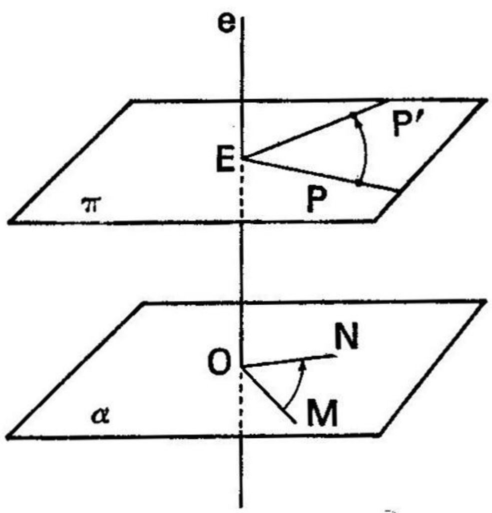
Neste caso, Φ é a rotação de centro O, definida por qualquer ângulo orientado cuja medida seja φ, relativamente à unidade e ao sentido de rotação adoptados. Diremos então que Φ é a *rotação de φ unidades em torno de* O (por exemplo, a rotação de 90°, a rotação de $-\pi/3$ rad., etc.). Em particular, se $\varphi = 0$, a rotação reduz-se à aplicação idêntica e o seu centro torna-se arbitrário.

Tornam-se agora intuitivos os seguintes factos:

I. *Toda a rotação do plano é uma isometria.*

II. *O conjunto das rotações do plano com um mesmo centro é um grupo multiplicativo, isomorfo ao grupo aditivo das classes de congruência dos números reais módulo* $m \neq 0$ (*por exemplo,* $m = 2\pi$ *ou* $m = 360$).

Passemos, agora, às *rotações do espaço:*



Cada rotação Φ do espaço pode ser definida por uma recta e (eixo da rotação) e por um ângulo orientado $\hat{O}MN$ num plano perpendicular a e do seguinte modo:

Φ é a aplicação que deixa fixos os pontos de e e faz corresponder a cada ponto P fora de e o ponto P′ tal que, sendo E a projecção ortogonal de P sobre e, se tem (1):

$$|EP| = |EP'| \text{ e } \hat{O}PP' \text{ equipolente a } \hat{O}MN.$$

Uma rotação Φ do espaço também pode ser definida pelos seguintes dados:

1) uma recta e (eixo da rotação);

2) um sentido de rotação considerado como positivo (nos planos perpendiculares a e);

3) um número real φ e uma unidade de medida de ângulo.

Então Φ é a rotação dada por e e por qualquer ângulo orientado cuja medida seja φ, relativamente à unidade e ao sentido de rotação adoptados.

Posto isto, tornam-se intuitivos os seguintes factos:

I. *Toda a rotação é uma isometria do espaço.*

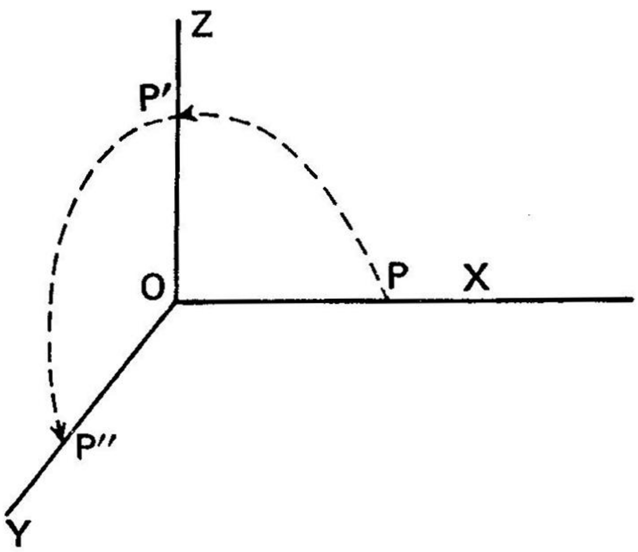
II. *O conjunto das rotações com um mesmo eixo é um grupo multiplicativo (portanto um subgrupo do grupo das isometrias) isomorfo ao grupo aditivo das classes de congruência de números reais módulo* $m \neq 0$ *(por exemplo* $m = 2\pi$ *ou* $m = 360$*).*

Um tal grupo é portanto comutativo.

---

(1) Chama-se projecção ortogonal de P sobre e o ponto de intersecção com e do plano π que passa por P e é perpendicular a e.

Veremos mais adiante que *o conjunto de todas as rotações cujos eixos passam por um mesmo ponto* O *também é um grupo.* Mas esse grupo já não é comutativo!



Com efeito, consideremos três rectas OX, OY, OZ perpendiculares entre si e sejam: Φ a rotação em torno de OY que leva $\dot{O}X$ para $\dot{O}Z$, e Ψ a rotação em torno de OX que leva $\dot{O}Z$ para $\dot{O}Y$.

Seja agora P um ponto de OX distinto de O, $P' = \Phi(P)$ e $P'' = \Psi(P')$. Tem-se pois

$$P'' = (\Psi\,\Phi)\ (P)$$

Mas $\Psi(P) = P$ (porquê?) e portanto

$$(\Phi\,\Psi)(P) = P' \neq P'' \qquad \text{(porquê?)}$$

e assim

$$\Phi\,\Psi \neq \Psi\,\Phi \qquad \text{(porquê?)}$$

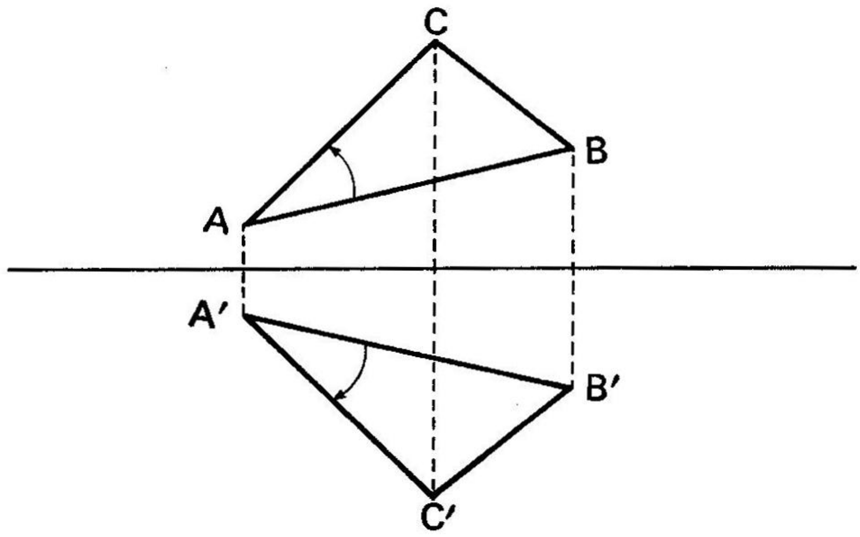
RESPOSTAS AOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

I. Uma translação e uma homotetia distintas da identidade nunca são permutáveis, mas o seu produto é sempre uma homotetia.

II. Duas homotetias distintas da identidade e de centros distintos nunca são permutáveis entre si; o seu produto é uma homotetia ou uma translação, conforme $\rho_1 \rho_2 \neq 1$ ou $\rho_1 \rho_2 = 1$.

3. **Reflexões. Deslocamentos e isometrias negativas.** Comecemos pelo caso do plano:

Dada uma recta r, chama-se *simetria em relação a* r a aplicação Φ que deixa fixos os pontos de r e faz corresponder, a cada ponto P do plano fora de r, o ponto P′ tal que a recta *r* é a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$.



As simetrias em relação a rectas também se chamam *reflexões.*

É evidente que:

Toda a simetria Φ em relação a uma recta é uma simetria cuja inversa é a própria aplicação Φ, isto é, $\Phi = \Phi^{-1}$ (ou seja $\Phi^2 = I$).

Na figura supra está desenhado um triângulo [ABC] e o seu simétrico [A′B′C′] em relação a uma recta r. Mas note-se: o ângulo orientado $\hat{A}BC$ é transformado pela simetria no ângulo $\hat{A}'B'C'$ *orientado em sentido inverso* (e o mesmo para qualquer outro ângulo orientado).

Tal não sucede porém com as translações e as rotações: *estas não mudam o sentido dos ângulos orientados.*

DEFINIÇÃO 1. *Uma isometria do plano diz-se* positiva *ou* negativa, *conforme conserva ou muda o sentido dos ângulos orientados. As isometrias positivas também são chamadas* deslocamentos do plano.

É bem fácil ver que:

I. *Os deslocamentos do plano formam um grupo multiplicativo — portanto um subgrupo do grupo das isometrias planas.*

II. *O produto de duas isometrias negativas é uma isometria positiva.*

DEFINIÇÃO 2. *Dadas duas figuras isométricas* $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ *do plano, diz-se que são* positivamente isométricas, *sse existe pelo menos um deslocamento plano que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$*; caso contrário, diz-se que são* negativamente isométricas.

Por exemplo, os dois triângulos escalenos da figura anterior são negativamente isométricos (no plano).

Da propriedade I resulta imediatamente que *a relação de isometria positiva é uma relação de equivalência.*

Seja agora Φ uma isometria negativa e Θ uma simetria em relação a uma recta. Então, segundo II, a aplicação $\Psi = \Theta\,\Phi$ é uma isometria positiva. Ora

$$\Phi = \Theta^{-1}\,\Psi = \Theta\,\Psi$$

Por conseguinte:

III. *Toda a isometria negativa é o produto duma reflexão por um deslocamento.*

Havemos de demonstrar mais adiante que *todo o deslocamento plano é uma translação ou uma rotação.*

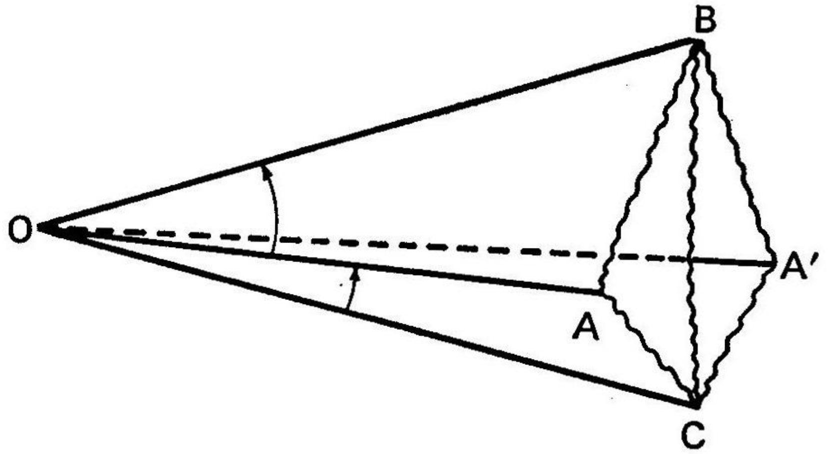
Podemos agora passar ao caso do espaço $\mathcal{E}$:

Dado um plano π, chama-se *simetria em relação a* π a aplicação Φ que deixa fixos os pontos de π e faz corresponder a cada ponto P fora de π o ponto P′ tal que π é o plano mediador do segmento $\overline{PP'}$.

As simetrias em relação a planos também são chamadas *reflexões*, atendendo a que a imagem de um objecto por reflexão num espelho plano é a figura simétrica do objecto em relação ao plano do espelho.

Para estender ao espaço noções de isometria positiva e de isometria negativa, há que introduzir a noção de *triedro orientado:*

Diz-se que um triedro está *orientado*, quando as suas faces (que são ângulos) estão orientadas de tal modo que o primeiro lado de cada face coincide com o segundo lado de uma face contígua.



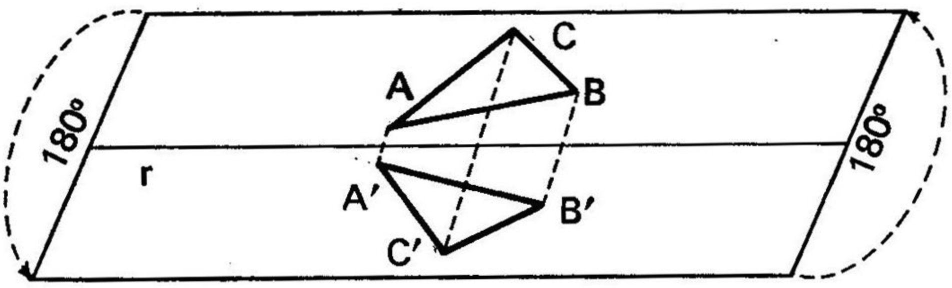
Por exemplo, na figura junta considera-se um triedro orientado, cujas faces são os ângulos orientados $\hat{O}AB$, $\hat{O}BC$ e $\hat{O}CA$. Intuitivamente, podemos dizer que este triedro está orientado no *sentido horário*, porque um observador voltado para o vértice vê os pontos A, B, C sucederem-se no sentido horário ou (o que é equivalente) um observador colocado ao longo de qualquer aresta com os pés no vértice vê a face oposta orientada no sentido horário.

Mas consideremos agora, por exemplo, o triedro $\hat{O}A'BC$, que é o simétrico do primeiro em relação ao plano OBC. É visível que esse triedro está orientado no sentido anti-horário. Assim:

As reflexões mudam o sentido dos triedros orientados, o que não sucede com as translações e as rotações (espaciais).

A partir deste momento, as definições 1 e 2, assim como as propriedades I, II e III podem ser formuladas e estabelecidas de modo análogo, substituindo o plano pelo espaço. Mas convém notar o seguinte:

DEFINIÇÃO 3. *Diz-se que duas figuras* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *são* geometricamente iguais, *e escreve-se* $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$, *sse são positivamente isométricas no espaço, isto é, sse existe pelo menos um deslocamento que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$.



Por exemplo, dois triângulos escalenos dum plano α, que sejam simétricos entre si em relação a uma recta r de α, são *negativamente isométricos no plano, mas positivamente isométricos no espaço.* Com efeito, prova-se que não existe nenhum deslocamento do plano que transforme um no outro, mas basta a rotação espacial de 180° em torno de r para aplicar um sobre o outro. São dois *geometricamente iguais* (também podemos dizer apenas 'iguais'). Por isso em geometria plana, em vez de 'positivamente isométrico' e 'negativamente isométrico', podemos dizer, respectivamente, *'directamente igual'* e *'inversamente igual'.*

Pelo contrário, dois triedros escalenos que sejam simétricos entre si em relação a um plano — ou mesmo em relação a um ponto, por exemplo o vértice (triedros verticalmente opostos) — são negativamente isométricos no espaço: *não são geometricamente iguais.*

Como se vê, a noção de igualdade geométrica é-nos sugerida pela nossa experiência quotidiana com os corpos sólidos. Diz-se que um corpo é *sólido* (ou rígido), quando não é susceptível de mudar de forma nem de dimensões, mas apenas de posição (em relação a outro sólido). Essa mudança de posição realiza-se em *movimentos,* que são compostos de uma *infinidade contínua de deslocamentos, no decorrer do tempo.* Deste modo, um sólido representa sempre figuras geométricas iguais nas suas diferentes posições — e dois sólidos serão iguais, sse puderem ocupar exactamente o mesmo lugar no espaço, *um após o outro* (ao mesmo tempo é impossível, segundo o PRINCÍPIO DA IMPENETRABILIDADE DA MATÉRIA).

NOTA. É preciso não esquecer que, em rigor, não existem corpos sólidos, mas apenas corpos a que podemos chamar 'sólidos' em determinadas circunstâncias, sem que daí resulte erro apreciável. Por exemplo, uma barra de ferro, em condições normais de pressão e temperatura, é *aproximadamente* sólida. Mas já sabemos que a temperatura ambiente nunca é rigorosamente constante — e o ferro dilata-se ou contrai-se consoante a temperatura aumenta ou diminui (tal como o mercúrio num termómetro). Mais ainda: a barra de ferro não é um *todo contínuo,* mas antes uma espécie de *nevoeiro de átomos,* em constante movimento uns em relação aos outros, de modo que as suas distâncias mútuas aumentam quando a temperatura sobe.

Normalmente não nos apercebemos destes factos devido à imperfeição dos nossos sentidos. *Por conseguinte, é a essa imperfeição que devemos afinal a noção de corpo sólido.* O mais curioso é que tal noção (ilusória até certo ponto, como todas as nossas noções acerca do mundo externo) é na realidade valiosíssima. Foi essa visão imperfeita dos objectos — como a de um quadro impressionista — que levou o homem a conceber a geometria euclidiana, cuja utilidade, no seu devido âmbito, se manifesta nos mais variados ramos da ciência e da técnica, incluindo as recentes explorações cósmicas.

E, vendo bem, foram também os corpos sólidos, com seus contornos nítidos e cortantes, que sugeriram ao homem a *lógica* *bivalente* — a lógica do 'ser ou não ser', do 'sim ou não', sem nebulosidades ou esfumaturas.

Mas, quando se trata de aplicar a matemática, há que saber transigir, fazendo um pouco *vista grossa,* à maneira dos artistas — isto é, há que ter o *sentido físico da aproximação e da contingência,* contrabalançado com o *rigor lógico da matemática pura.*

EXERCÍCIOS — I. Desenhe a azul dois triângulos escalenos directamente iguais e determine, se possível, o centro de uma rotação que transforme um no outro. Em que caso é possível o problema e em que caso não é? E, quando não é possível, que deslocamentos permitem transformar um triângulo no outro?

II. Considere no espaço dois triângulos escalenos iguais e prove que é sempre possível transformar um no outro, mediante uma translação seguida de uma rotação. Idem para dois tetraedros iguais.

III. Quantos deslocamentos transformam um triângulo equilátero em si mesmo? E um quadrado? E um rectângulo não quadrado?

IV. Quantas semelhanças permitem transformar um no outro dois triângulos equiláteros? E dois quadrados? E dois cubos? E dois círculos? E duas esferas? E duas elipses de excentricidade 1/2?

4. **Transformações afins.** Consideremos por exemplo dois planos α, β, não paralelos nem perpendiculares entre si, e seja Φ a operação de *projecção ortogonal* dos pontos de α sobre os pontos de β. Põem-se três perguntas:

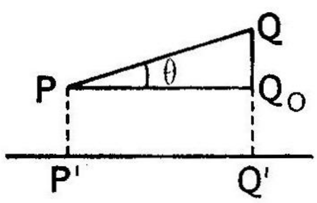
1) Será Φ uma aplicação biunívoca de α sobre β?

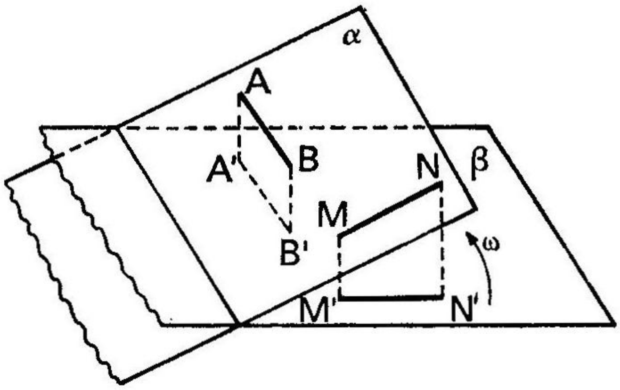
2) Φ transforma segmentos de recta em segmentos de recta?

3) Será Φ uma transformação de semelhança?

A resposta às duas primeiras perguntas é, manifestamente, afirmativa. Quanto à terceira, consideremos um segmento qualquer $\overline{PQ}$ de α; seja $\overline{P'Q'}$ a sua projecção ortogonal sobre β e seja θ o ângulo de PQ com β isto é, o menor dos ângulos formados pelas rectas PQ e P'Q'. Então virá (ver figura da esquerda):

$$|P'Q'| = |PQ_0| = |PQ| \cos \theta$$





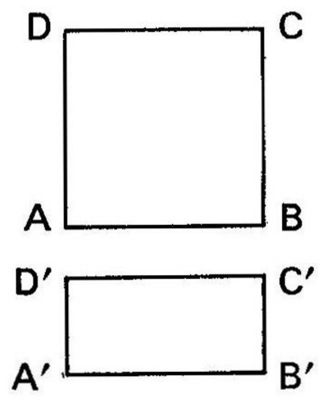
Assim, a aplicação Φ transforma cada segmento de recta num segmento de recta, *cujo comprimento é o produto do comprimento do primeiro pelo número* cos θ. Então Φ é uma transformação de semelhança? Claro que não. Porquê?

Porque o número cos θ *não é o mesmo para todos os segmentos.* Com efeito, θ depende da direcção do segmento: o seu valor mínimo é 0 (quando a direcção é paralela a β) e o seu máximo é o ângulo ω dos dois planos (quando a direcção é perpendicular à anterior). Deste modo, o máximo de cos θ é 1 e o mínimo é cos ω.

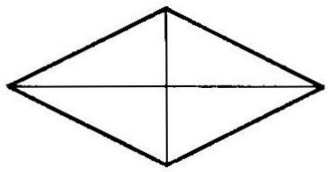
Por conseguinte, a projecção Φ produz nos comprimentos uma contracção, cujo coeficiente, cos θ, é *variável de* 1 *a* cos ω.

Seja por exemplo $\omega = 60°$. Então cos $\omega = 1/2$.

Consideremos no plano α um quadrado com dois lados paralelos a β. Então a projecção do quadrado será um rectângulo, com um dos lados igual aos do quadrado e outro lado igual a metade do primeiro.



Se o quadrado não tiver nenhum lado paralelo a β, a projecção será um paralelogramo não rectângulo — e será um losango, se uma das diagonais do quadrado for paralela a β.



Consideremos agora no plano α uma *circunferência*. Então a projecção desta sobre β será uma *elipse*, cujo eixo menor é *metade* do eixo maior (podemos prová-lo por meio da geometria analítica).

Vimos que Φ é uma aplicação biunívoca de α sobre β. Qual é a sua inversa? A projecção de β sobre α, segundo a direcção perpendicular a β. É claro que Φ^{-1} produz nos comprimentos uma *dilatação*, cujo coeficiente é sec θ, *variável* de 1 a sec ω.

Podíamos, mais geralmente, considerar uma projecção de α sobre β segundo uma direcção qualquer, não paralela a nenhum dos planos. As conclusões serão análogas: os comprimentos resultam multiplicados por um número positivo, variável com a direcção.

Vejamos agora um exemplo relativo ao espaço. Suponhamos fixado um referencial cartesiano ortogonal e seja Φ a aplicação que faz corresponder a cada ponto $P \rightarrow (x, y, z)$ o ponto $P' \rightarrow (x', y', z')$ tal que $x' = x$, $y' = y$ e $z' = z/2$. Quer dizer: a abcissa e a ordenada são conservadas; a cota é reduzida a metade.

Facilmente se reconhece o seguinte: Φ é uma aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{E}$ sobre si mesmo, que transforma cada segmento de recta num segmento de recta, cujo comprimento é o do primeiro multiplicado por um número variável de 1/2 a 1. Portanto, também neste caso não se trata de uma transformação de semelhança. Por exemplo:

Um *cubo* será transformado num *paralelepípedo,* que nem sequer será rectângulo se não tiver arestas paralelas aos eixos coordenados.

Uma esfera será transformada num *elipsóide de revolução achatado,* sendo 1/2 o coeficiente de achatamento, etc.

Estes exemplos conduzem-nos à seguinte definição geral:

DEFINIÇÃO. *Chama-se* transformação afim *toda a aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{E}$ sobre si mesmo, ou de um plano α sobre um plano β (podendo ser $\alpha = \beta$), que transforma segmentos de recta em segmentos de recta.*

As transformações afins também são chamadas *afinidades.*

Desde logo se reconhece que:

São afinidades todas as transformações de semelhança (em particular, as homotetias, as translações, as rotações e as simetrias).

Mas, segundo mostram os exemplos anteriores, existem afinidades que não são semelhanças. Essas afinidades produzem deformações, chamadas *deformações afins.*

Também é muito fácil provar que:

I. *O produto de duas afinidades é uma afinidade.*

II. *A inversa duma afinidade é uma afinidade.*

Por conseguinte:

O conjunto de todas as transformações afins do espaço é um grupo multiplicativo, de que é subgrupo o grupo das semelhanças.

DEFINIÇÃO. *Dadas duas figuras* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$, *diz-se que* $\mathcal{F}$ *é* afim *a* $\mathcal{G}$, *sse existe pelo menos uma transformação afim que aplica* $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathcal{F}$.

Das propriedades I e II resulta que:

A relação de afinidade, entre figuras geométricas, é uma relação de equivalência.

Por exemplo, prova-se que as figuras afins a um quadrado são todos os paralelogramos, as figuras afins a uma circunferência são todas as elipses, etc.

O mundo físico oferece-nos várias concretizações do conceito de afinidade:

— a sombra produzida no chão por uma figura existente numa janela por onde entra sol (porquê?);

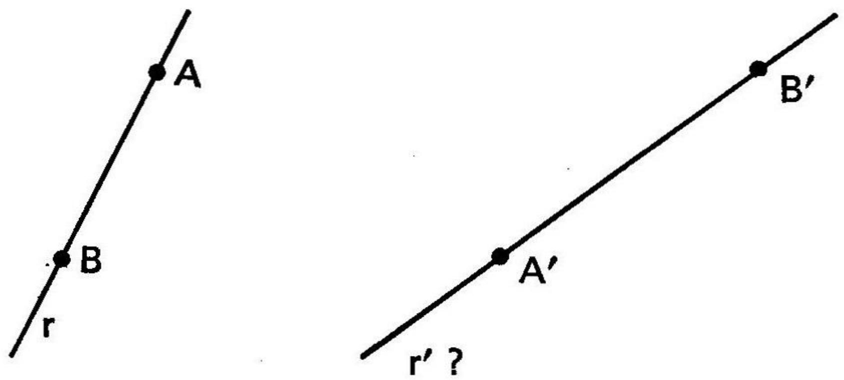
— a imagem produzida por certos espelhos cilíndricos que tornam as pessoas comicamente mais gordas ou mais magras (ao contrário dos espelhos esféricos, que aumentam ou diminuem sem deformar sensivelmente, em certas condições);

— a compressão ou dilatação dum corpo elástico segundo uma determinada direcção;

— a deformação de uma rede articulada, etc.

5. **Efeito das transformações afins sobre rectas paralelas e sobre vectores.** Começaremos por demonstrar os dois seguintes lemas:

LEMA 1. *Toda a transformação afim transforma rectas em rectas.*



Demonstração:

Seja Φ uma transformação afim e r uma recta contida no domínio de Φ (que pode ser o espaço ou um plano). Ponhamos $\Phi(r) = r'$. Pretende-se provar que r' é uma recta.

Para isso consideremos dois pontos distintos A, B de r e seja $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$. Então

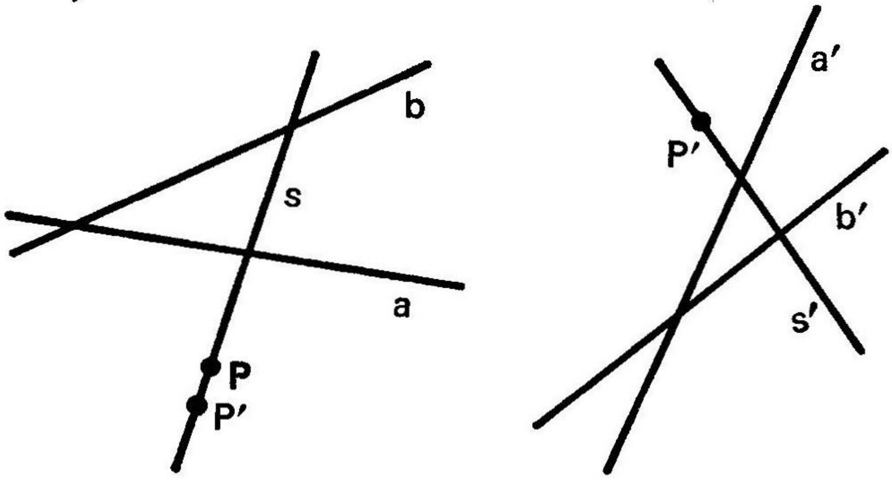
$$\Phi(\overline{AB}) = \overline{A'B'} \qquad \text{(porquê?)}$$

Seja agora P um ponto qualquer e ponhamos $P' = \Phi(P)$. Três casos se podem dar: ou $P \in \overline{AB}$ ou $B \in \overline{AP}$ ou $A \in \overline{BP}$. No 1.° caso tem-se $P' \in \overline{A'B'}$, no 2.° tem-se $B' \in \overline{A'P'}$ e no 3.° tem-se $A' \in \overline{B'P'}$. *Em qualquer dos casos tem-se* $P' \in A'B'$ e assim:

$$(1) \qquad P \in r \Rightarrow P' \in A'B'$$

O mesmo raciocínio com Φ^{-1} mostra que, para todo o $P' \in A'B'$, existe $P \in AB$, tal que $\Phi(P) = P'$. Ora este facto, aliado a (1), mostra que $\Phi(r) = A'B' = r'$ que portanto r' é uma recta.

LEMA 2. *Toda a transformação afim do espaço transforma planos em planos.*



Demonstração:*

Seja Φ uma transformação afim do espaço e seja α um plano. Consideremos duas rectas concorrentes a, b contidas em α e seja $a' = \Phi(a)$, $b' = \Phi(b)$. Então a′ e b′ também são concorrentes (porquê?).

Seja agora P um ponto qualquer de α e $P' = \Phi(P)$. Então existe pelo menos uma recta de α que passa por P e encontra *a* e *b* em dois pontos *distintos* (porquê?). Seja *s* uma tal recta e $s' = \Phi(s)$. Então s′ encontra a′ e b′ em dois pontos distintos e portanto P′ pertence ao plano α' definido por a′ e b′.

O mesmo raciocínio com Φ^{-1} mostra que, para todo o $P' \in \alpha'$ existe $P \in \alpha$ tal que $\Phi(P) = P'$.

Portanto Φ transforma o plano α num plano α'.

Destes dois lemas deduz-se:

TEOREMA 1. *Toda a transformação afim transforma rectas paralelas em rectas paralelas.*

Demonstração:

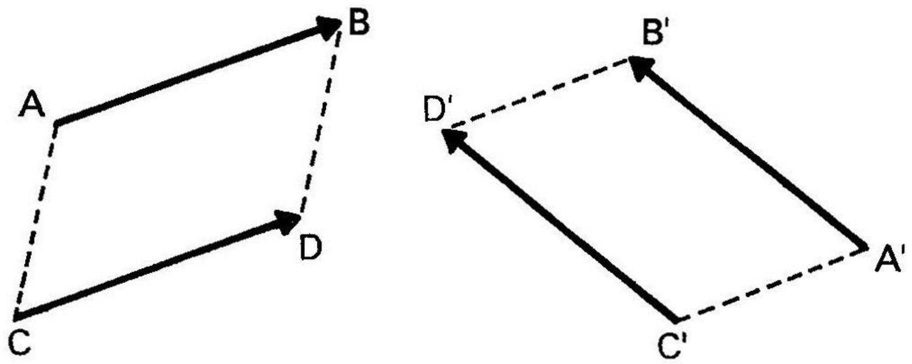
Seja Φ uma afinidade. Consideremos duas rectas paralelas r, s contidas no domínio de Φ e ponhamos $r' = \Phi(r)$, $s' = \Phi(s)$. Pretende-se provar que $r' // s'$.

Se $r = s$, também $r' = s'$ e a tese está provada.

Seja agora $r \neq s$. Então r, s são complanares e $r \cap s = \phi$. Logo r′, s′ também são complanares (porquê?) e $r' \cap s' = \phi$.

Com efeito, se existisse pelo menos um ponto $P' \in r' \cap s'$, o ponto $P = \Phi^{-1}(P')$ pertenceria a $r \cap s$ e, deste modo, seria $r \cap s \neq \phi$, contrariamente à hipótese.

COROLÁRIO. *Toda a afinidade transforma segmentos orientados equipolentes em segmentos orientados equipolentes.*



Demonstração:

Consideremos uma afinidade Φ. Sejam [A, B], [C, D] dois segmentos orientados equipolentes contidos no domínio de Φ e seja $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$ e $D' = \Phi(D)$.

Pretende-se provar que [A', B'] é equipolente a [C', D'].

Três casos se podem dar:

1.º caso. $A = B$. Então $C = D$, $A' = B'$, $C' = D'$ e assim a tese fica provada.

2.º caso. $A \neq B$ e $AB \neq CD$. Então $A' \neq B'$, $A'B' \neq C'D'$ e, como $AB // CD$, $AC // BD$, também $A'B' // C'D'$, $A'C' // B'D'$, o que mostra que [A', B'] é aquipolente a [C', D'].

3.º caso. $A \neq B$ e $AB = CD$. Reduz-se ao anterior, considerando um terceiro segmento [M, N] equipolente a [A, B] e tal que $MN \neq AB$.

Assim o corolário fica demonstrado.

Este pode ainda enunciar-se do seguinte modo:

Uma transformação afim transforma todos os segmentos orientados representativos de um mesmo vector $\vec{u}$ *nos segmentos orientados representativos de um mesmo vector* $\vec{v}$.

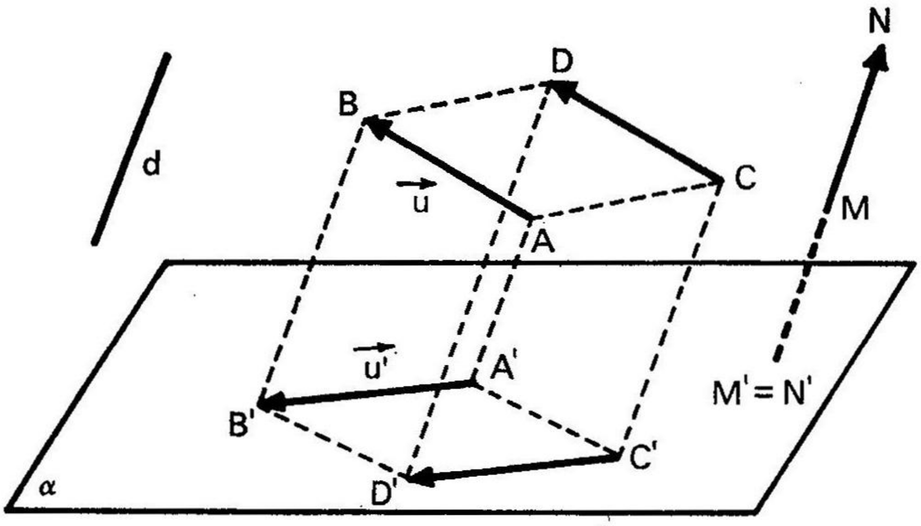
Por conseguinte, toda a transformação afim Φ determina deste modo uma correspondência unívoca $\vec{u} \to \vec{v}$ entre vectores. Designaremos esta aplicação por Φ_0. Ter-se-á pois, *por definição:*

$$(2) \qquad \boxed{\Phi_0(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} = \Phi(B) - \Phi(A)}$$

para todo o par de pontos A, B do domínio de Φ. Então, se for $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, será $B = A + \vec{u}$ e portanto:

$$(3) \qquad \boxed{\Phi(A + \vec{u}) = \Phi(A) + \Phi_0(\vec{u})}$$

6. **Aplicações lineares.** Consideremos agora um plano α, uma recta d não paralela a α e seja Φ a aplicação que faz corresponder a cada ponto P do espaço a sua projecção P' sobre α, paralelamente a d. É claro que se trata de uma aplicação do espaço $\mathcal{E}$ em si mesmo, *mas não de $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{E}$*: o contradomínio da aplicação é o plano α. Além disso, a aplicação Φ *não é biunívoca:* todos os pontos de uma recta que seja paralela a d são transformados por Φ num único ponto de α. Porém, é fácil ver que Φ *transforma segmentos de recta em segmentos de recta,* tal como as transformações afins. Não podemos dizer que transforma rectas em rectas, porque transforma em pontos as rectas paralelas a d. *Mas, exceptuado este caso, transforma rectas paralelas em rectas paralelas.*



Então, raciocinando como na demonstração anterior, vê-se que Φ transforma segmentos orientados equipolentes em segmentos orientados equipolentes: *a única diferença está em que pode transformar segmentos não nulos (paralelos a* d*) em segmentos nulos.*

Podemos chamar *afinidades degeneradas* às aplicações Φ nestas condições. Tal como as transformações afins (bijectivas ao contrário desta), Φ determina uma aplicação Φ_o sobre vectores:

$$\Phi_o(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

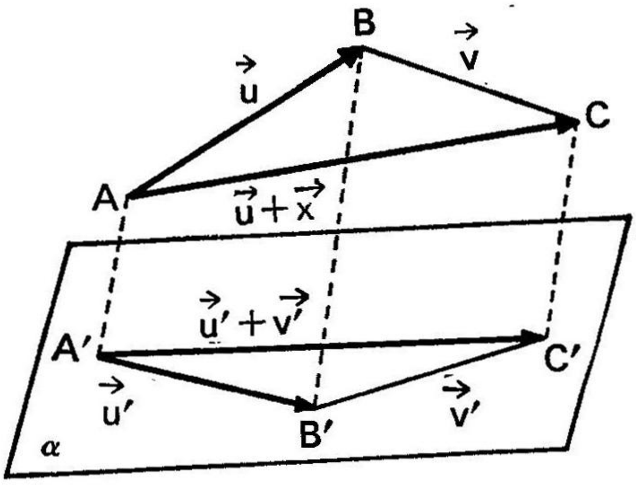
Diremos que o vector $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$ é a *projecção do vector* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *sobre o plano* α *paralelamente a* d.

Já vimos que se designa por $\mathcal{V}$ o conjunto dos vectores do espaço. Designaremos por $\mathcal{V}_\alpha$ o conjunto dos vectores do plano α. Tanto $\mathcal{V}$ como $\mathcal{V}_\alpha$ são *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{R}$ (ver pág. 44).

Portanto Φ_o é uma aplicação de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{V}_\alpha$. Mas esta aplicação tem duas propriedades importantes que vamos estudar.

Consideremos dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e as suas projecções

$$\vec{u}' = \Phi_o(\vec{u}) \quad , \quad \vec{v}' = \Phi_o(\vec{v}).$$



Se tomarmos

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC},$$

será $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \vec{u}' + \vec{v}'$

isto é:

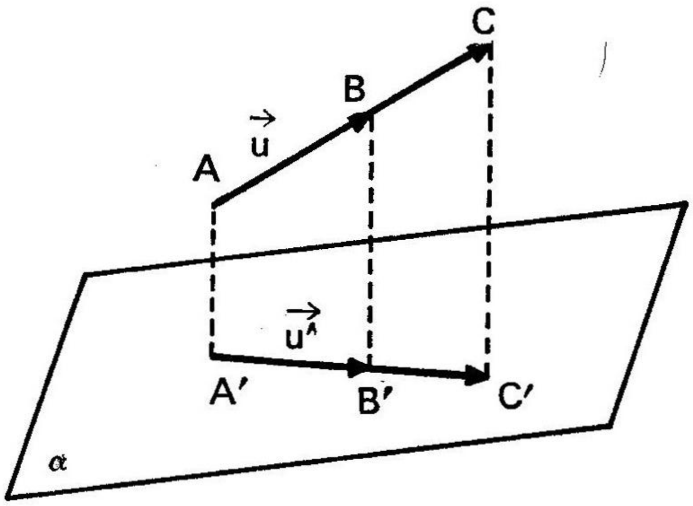
A projecção da soma $\vec{u} + \vec{v}$ *é igual à soma* $\vec{u}' + \vec{v}'$ *das projecções.*

Simbolicamente:

$$\text{I.} \quad \Phi_o(\vec{u} + \vec{v}) = \Phi_o(\vec{u}) + \Phi_o(\vec{v}) \quad , \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$$

Consideremos, agora, um vector $\vec{u}$ e um número real α. Seja

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad \alpha\vec{u} = \overrightarrow{AC}$$



Então, aplicando o TEOREMA DE THALES, vê-se que

$$\overrightarrow{A'C'} = \alpha \cdot \overrightarrow{A'B'} = \alpha\,\vec{u}'$$

isto é:

A projecção do produto de um escalar α *por um vector* $\vec{u}$ *é igual ao produto de* α *pela projecção de* $\vec{u}$ ([1]).

Simbolicamente:

$$\text{II.} \quad \Phi_o(\alpha\vec{u}) = \alpha\Phi_o(\vec{u}) \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u \in \mathcal{V}$$

Pois bem, exprimem-se as propriedades I e II, dizendo que a aplicação Φ_o *respeita a adição de vectores e a multiplicação de vectores por escalares;* ou ainda, dizendo que Φ_o é uma *aplicação linear.* Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Dados dois espaços vectoriais* S *e* S′ *sobre* IR, *diz-se que uma aplicação* f *de* S *em* S′ *é linear sse tem as duas seguintes propriedades* ([2]):

1) $f(u + v) = f(u) + f(v) \quad , \quad \forall u, v \in S$

2) $f(au) = af(u) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R},\ u \in S$

(Mais geralmente ainda, podíamos considerar, em vez de IR, um corpo K qualquer.)

Desde logo se reconhece que, se f *é uma aplicação linear de* S *sobre* S′, *então:*

3) $f(au + bv) = af(u) + bf(v) \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{R};\ u, v \in S$

Tem-se, com efeito:

$$f(au + bv) = f(au) + f(bv) = af(u) + bf(v)$$

([1]) Recordemos que, quando se trata do um espaço vectorial S sobre um corpo K, os elementos de S chamam-se **vectores,** enquanto os de K se chamam **escalares.** Neste caso, os escalares são os **números reais.**

([2]) Sempre que não haja risco de confusão, podemos deixar de usar setas sobre letras que representam vectores.

Mais geralmente, tem-se, na mesma hipótese:

4) $f(a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + \ldots + a_n f(u_n)$,

quaisquer que sejam $u_1, \ldots, u_n \in S$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

TEOREMA. *Toda a afinidade Φ determina uma aplicação linear Φ_o (bijectiva) no conjunto dos vectores situados no domínio de Φ.*

Demonstração:

a) Seja Φ uma transformação afim de espaço $\mathcal{E}$. Então, como vimos no número anterior, Φ determina uma aplicação Φ_o de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$ segundo a fórmula:

$$\Phi_o(\overrightarrow{AB}) = \Phi(B) - \Phi(A) \quad , \quad \forall A, B \in \mathcal{E}$$

É claro que Φ_o é bijectiva, tendo-se

$$\Phi_o^{-1}(\overrightarrow{AB}) = \Phi^{-1}(B) - \Phi^{-1}(A).$$

Para simplificar a escrita, vamos pôr $\Phi_o = f$ *e omitir as setas sobre as letras* u, v,..., *o que não traz perigo de confusão.*

Consideremos dois vectores u, v quaisquer e seja $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$, $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$. Então:

$$u + v = \overrightarrow{AC} \qquad \text{e} \qquad f(u + v) = \overrightarrow{A'C'}$$

e como $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = f(u) + f(v)$, vem

$$(1) \qquad f(u + v) = f(u) + f(v)$$

Em particular, se $v = -u$, tem-se $f(u + v) = f(0) = 0$ e portanto

$$(2) \quad f(u) + f(-u) = 0 \text{ ou seja } f(-u) = -f(u)$$

Consideremos agora um vector u e um número real a. Se $a = 0$ ou $u = 0$, tem-se obviamente $f(au) = af(u) = 0$. Se $a \neq 0$ e $u \neq 0$, verifica-se um dos seguintes casos:

1.° caso: a *é um número natural* n. Se $n = 1$, tem-se obviamente $f(au) = af(u)$. Se $n > 1$, tem-se

$$au = u + \ldots + u \ (n \text{ vezes})$$

e, aplicando (1) repetidamente, vem

$$f(au) = f(u) + \ldots + f(u) \ (n \text{ vezes}) \text{ e portanto } f(au) = af(u).$$

2.° caso: a *é um número fraccionário* > 0. Seja $a = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e ponhamos

$$v = \frac{1}{n} u$$

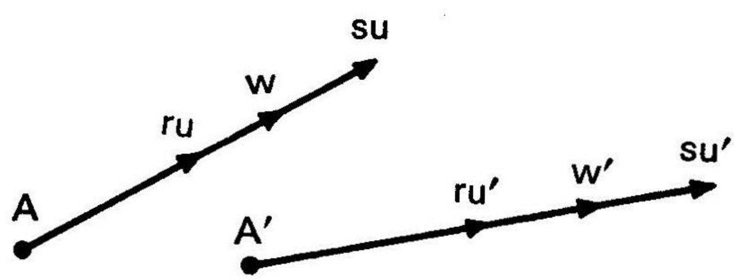
Então $u = n\,v$, $a\,u = m\,v$ donde

$$f(u) = n\,f(v), \quad f(au) = m\,f(v)$$

e portanto

$$f(au) = \frac{m}{n} f(u) = a\,f(u)$$

3.° caso: a *é um número irracional* > 0. Seja $w = au$, $u' = f(u)$, $w' = f(w)$. Então w' é colinear com u' (porquê) e existe portanto um número a' tal que $w' = a'u'$.



Sejam agora r, s dois números racionais quaisquer tais que (2) $r < a < s$.

Então $r|u| < a|u| < s|u|$ ou seja $r|u| < |w| < s|u|$ Daqui se deduz

$$r|u'| < |w'| < s|u'|$$

ou seja $r|u'| < a'|u'| < s|u'|$, donde

$$r < a' < s$$

Daqui e de (2) resulta que $|a - a'| < s - r$. Como $s - r$ pode ser tão pequeno quanto se queira, tem-se necessariamente $a = a'$ e portanto $f(au) = a\,f(u)$.

4.° caso: *a é negativo.* Então $au = |a|(-u)$ e, como $|a| > 0$, estamos num dos casos anteriores. Portanto

$$f(au) = f[|a|(-u)] = |a|f(-u)$$

donde, atendendo a (2):

$$f(au) = -|a|\,f(u) = af(u)$$

Assim, em qualquer dos casos, verifica-se a condição (2) da definição anterior de aplicação linear.

Logo f (ou seja Φ_0) *é uma aplicação linear do espaço vectorial* $\mathcal{V}$ *sobre si mesmo.*

b) Seja agora Φ uma afinidade dum plano α sobre um plano β (podendo ser $\alpha = \beta$). Demonstra-se como anteriormente que Φ determina uma aplicação linear Φ_0 (biunívoca) de $\mathcal{V}_\alpha$ sobre $\mathcal{V}_\beta$.

7. **Determinação de todas as possíveis afinidades entre dois planos ou do espaço.** Vamos começar por estudar o seguinte

PROBLEMA. *São dados:* 1) *dois planos* α, β *(distintos ou coincidentes)*; 2) *três pontos* A, B, C *não colineares de* α; 3) *três pontos* A′, B′, C′ *não colineares de* β. *Determinar uma afinidade* Φ *de* α *sobre* β *que transforme* A *em* A′, B *em* B′ *e* C *em* C′.

Recordemos (ver Cap. 1, n.° 16) que, para todo o ponto P de α existe um par (x, y) de números reais tais que

$$P = A + x\ (B - A) + y\ (C - A)$$

Então, se Φ é uma afinidade de α sobre β, virá

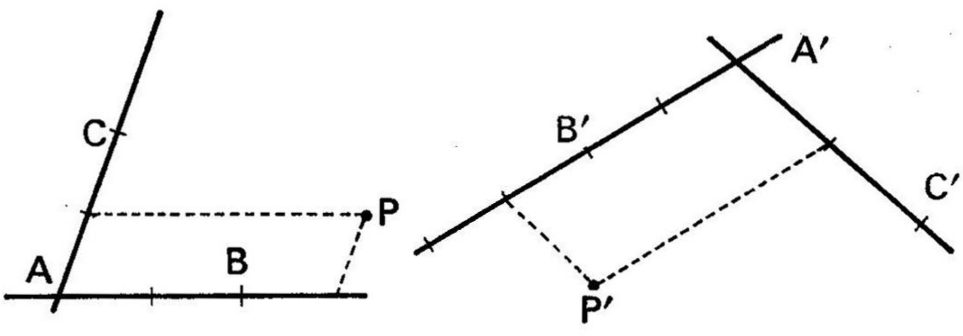
$$\begin{aligned}\Phi(P) &= \Phi(A) + \Phi_0[x(B - A) + y(C - A)]\\ &= \Phi(A) + x\,\Phi_0(B - A) + y\,\Phi_0(C - A)\end{aligned}$$

em que Φ_0 é aplicação linear definida para Φ.

Logo, *se existe* uma afinidade Φ que transforma A em A′, B em B′ e C em C′, *só pode ser* a que é dada pela fórmula

(1) $P' = A' + x(B' - A') + y(C' - A')$, sendo $P' = \Phi(P)$.

(Por exemplo, na figura seguinte, tem-se $x = 3/2$, $y = 1/2$)



Vamos agora ver que a fórmula (1) define realmente uma afinidade $P \rightarrow P'$ de α sobre β, que transforma A em A′, B em B′ e C em C′.

Em primeiro lugar, Φ é bijectiva. Com efeito, Φ resulta das aplicações bijectivas $P \rightarrow (x, y)$ e $(x, y) \rightarrow P'$ respectivamente de α sobre $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^2$ sobre β.

Em segundo lugar, é fácil ver que $\Phi(A) = A'$ $(x = y = 0)$, $\Phi(B) = B'(x = 1,\ y = 0)$, $\Phi(C) = C'$ $(x = 0,\ y = 1)$.

Resta provar que Φ *transforma segmentos de recta em segmentos de recta.* Sejam M, N dois pontos quaisquer de α e M′, N′ os seus transformados por Φ. Então

$$P \in MN \Leftrightarrow \exists\, t\colon P = M + t(M - N) \wedge 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Ora

$$\Phi(P) = \Phi(M) + t\, \Phi_0(M - N) \qquad \text{(porquê?)}$$

ou seja

$$P' = M' + t(M' - N')$$

Portanto

$$P = M + t(M - N) \Leftrightarrow P' = M' + t(M' - N'), \text{ donde}$$
$$P \in \overline{MN} \Leftrightarrow P' \in \overline{M'N'}$$

o que significa que $\Phi(\overline{MN}) = \overline{M'N'}$,

q.e.d.

Assim, como se vê, o problema é *sempre possível* e *determinado,* isto é:

TEOREMA 1. *Dados dois planos α, β e dois ternos de pontos não colineares*

$$(A, B, C) \quad , \quad (A', B', C')$$

respectivamente em α *e em* β*, existe sempre uma e uma só afinidade que transforma* (A, B, C) *em* (A′, B′, C′). *Essa afinidade é a aplicação* Φ *que faz corresponder a cada ponto* P *de* α *o ponto* P′ *de* β *cujas coordenadas no referencial* (A′, B′, C′) *são idênticas às coordenadas de* P *no referencial* (A, B, C), isto é:

$$P = A + x(B - A) + y(C - A) \Rightarrow P' = A' + x(B' - A') + y(C' - A')$$

É bem fácil estender este teorema ao caso de afinidades espaciais:

TEOREMA 2. *Dados em* $\mathcal{E}$ *dois quaternos ordenados de pontos não complanares*

$$(A, B, C, D) \ , \ (A', B', C', D')$$

existe sempre uma e uma só afinidade espacial que transforma (A, B, C, D) em (A′, B′, C′, D′). *Essa afinidade é a aplicação* Φ *que faz corresponder a cada ponto*

$$P = A + x(B - A) + y(C - A) + z(D - A)$$

o ponto

$$P' = A' + x(B' - A') + y(C' - A') + z(D' - A')$$

Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor.

NOTA SOBRE A TERMINOLOGIA. É evidente que, sendo f uma aplicação qualquer de um conjunto D num conjunto E, chamamos *transformado de um par ordenado* (a, b) por f (sendo a, b $\in$ D) o par ordenado (f(a), f(b)). E analogamente para ternos ordenados, quaternos ordenados, etc. — dum modo geral para sequências quaisquer. Nesta ordem de ideias, sendo *n* um número natural qualquer e R um subconjunto de D^n (relação n-ária), chamaremos *transformada de* R *por* f e representaremos por f(R), o conjunto dos transformados de todos os elementos de R por f.

Até aqui temos chamado *figuras geométricas* apenas aos conjuntos de pontos. Mais geralmente, podemos chamar figuras geométricas a sequências, a conjuntos de sequências de pontos, a conjuntos de conjuntos de pontos ou de sequências de pontos, etc., etc. Por exemplo, uma recta orientada (ou um segmento orientado), será uma figura geométrica, pois pode ser considerada como um conjunto de pares ordenados (a relação de ordem definida na recta). Analogamente, um vector será uma figura geométrica, pois pode ser considerado como um conjunto de segmentos orientados.

Aos conjuntos de pontos chamaremos *lugares geométricos* (ou simplesmente *lugares*), para os distinguir das outras figuras geométricas. Assim, por exemplo, o conjunto das geratrizes de uma superfície cónica (conjunto de tipo 2) será uma figura geométrica, mas não um lugar geométrico — ao passo que a superfície cónica será o lugar geométrico correspondente, isto é, *a reunião de todos os conjuntos de pontos constituída pelas geratrizes.*

EXERCÍCIO. Marque a azul no papel dois ternos ordenados de pontos (A, B, C) e (A′, B′, C′) tais que

$$|AB| = 3 \text{ cm} \quad , \quad |AC| = 4{,}5 \text{ cm} \quad , \quad AB \perp AC$$

$$|A'B'| = 6 \text{ cm} \quad , \quad |A'C'| = 9 \text{ cm} \quad , \quad A'B' \perp A'C'$$

Represente a tracejado e a preto as rectas AB, AC, A′B′, A′C′ e construa (também a tracejado e a preto) dois quadriculados constituídos pelas referidas rectas e outras paralelas a estas, dispostas entre si às distâncias mínimas de 0,5 cm e de 1 cm, respectivamente. Os quadriculados devem ter respectivamente a dimensão 5 cm × 5 cm e 10 cm × 10 cm. Posto isto, desenhe a azul uma figura simples (imitando um mapa) que cubra grande parte do 1.º quadriculado, e desenhe em seguida a vermelho (aproximadamente) a imagem dessa figura pela afinidade que transforma (A, B, C) em (A′ B′, C′). Que relação verifica entre as duas figuras?

Feito isto, marque num outro papel (a azul) um terceiro terno ordenado (A″, B″, C″) tal que

$$|A''B''| = 4 \text{ cm} \quad , \quad |A''C''| = 8 \text{ cm} \quad , \quad |A\hat{B}C| = 60^\circ$$

e desenhe a vermelho a imagem da primeira figura, pela afinidade que transforma (A, B, C) em (A″, B″, C″). Que relação verifica entre estas duas figuras? (*Observação:* Para melhor distinguir as rectas auxiliares a tracejado, use algarismos escritos à margem, para as rectas com uma das direcções, e letras a, b,... para as rectas com a outra direcção, pondo além disso plicas nos algarismos e letras correspondentes, relativas à 2.ª e à 3.ª figuras.)

8. **Determinação de todas as possíveis semelhanças, isometrias e deslocamentos, entre dois planos ou do espaço.** Para melhor compreensão do que vai seguir-se, é aconselhável começar por resolver o exercício anterior.

Posto isto, considerem-se dois ternos ordenados de pontos não colineares, (A, B, C) e (A′, B′, C′), respectivamente em dois planos α e β (podendo ser $\alpha = \beta$). Pergunta-se:

A que condição devem obedecer estes dois ternos, para que a afinidade Φ que transforma o primeiro no segundo seja uma semelhança?

Uma condição necessária é evidentemente a seguinte:

Os dois ternos devem ser semelhantes.

Esta condição pode ser traduzida simbolicamente, de três modos diversos, equivalentes entre si:

(1) $$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

(2) $$A\hat{B}C \cong A'\hat{B}'C' \wedge C\hat{A}B \cong C'\hat{A}'B'$$

(3) $$C\hat{A}B \cong C'\hat{A}'B' \wedge \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

Pergunta-se agora:

É esta condição suficiente para que a afinidade Φ seja uma semelhança?

Vamos ver que sim. Suponhamos verificada esta condição e consideremos dois pontos de α:

$$P = A + x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} \quad , \quad Q = A + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC},$$

assim como os seus transformados por Φ:

$$P' = A' + x \cdot \overrightarrow{A'B'} + y \cdot \overrightarrow{A'C'} \quad , \quad Q' = A' + u \cdot \overrightarrow{A'B'} + v \cdot \overrightarrow{A'C'}$$

Trata-se de provar o seguinte:

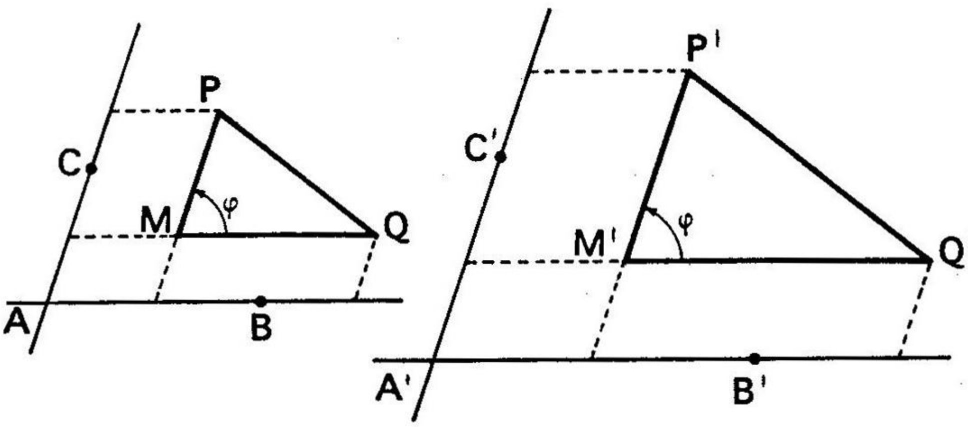
$$(1) \qquad \frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

Se $v = y$, tem-se evidentemente

$$Q - P = (u - x)\overrightarrow{AB} \quad , \quad Q' - P' = (u - x)\overrightarrow{A'B'}$$

e portanto $|PQ| = |u - x| \cdot |AB|$, $|P'Q'| = |u - x| \cdot |A'B'|$, donde se conclui (1). Analogamente, se $x = u$.

Seja agora $x < u \wedge y > v$. Então, as rectas que passam respectivamente por P e Q e são paralelas a AC e AB encon-



tram-se num ponto M, e tem-se, evidentemente:

$$M = A + x \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC}$$

donde

$$P - M = (y - v)\overrightarrow{AC} \quad , \quad Q - M = (u - x)\overrightarrow{AB}$$

e analogamente

$$P' - M' = (y - v)\overrightarrow{A'C'} \quad , \quad Q' - M' = (u - x)\overrightarrow{A'B'}$$

Daqui se deduz, por um lado:

$$\frac{|M'P'|}{|MP|} = \frac{|M'Q'|}{|MQ|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

Por outro lado, como $y - v > 0$ e $u - x > 0$, vê-se que os ângulos $\hat{M}QP$ e $\hat{A}BC$ têm os lados *paralelos e orientados no mesmo sentido,* sendo portanto equipolentes, e que o mesmo sucede com os ângulos $\hat{M}'Q'P'$ e $\hat{A}'B'C'$. Logo os ângulos convexos $P\hat{M}Q$ e $P'\hat{M}'Q'$ são iguais e assim, por semelhança de triângulos, verifica-se (1), isto é:

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$$

Se $x > u \wedge y < v$, basta trocar os papéis de P e Q.

Se $x > u \wedge y > v$ ou $x < u \wedge y < v$, a demonstração é análoga, com a diferença de que os ângulos $\hat{M}QP$ e $\hat{A}BC$ são suplementares.

E como não resta nenhuma outra hipótese a considerar, fica provado o seguinte:

TEOREMA 1. *Dados dois ternos ordenados de pontos não colineares* (A, B, C) *e* (A', B', C'), *respectivamente em dois* *planos α e β, a afinidade que transforma o primeiro no segundo é uma semelhança, sse os dois ternos são semelhantes.*

Deste teorema se deduz imediatamente, como corolário, uma condição necessária e suficiente para que a afinidade considerada seja uma isometria: *é que os dois ternos ordenados de pontos sejam isométricos, isto é, que*

$$|A'B'| \doteq |AB| \quad , \quad |A'C'| \doteq |AC| \quad , \quad |B'C'| \doteq |BC|$$

Se, além disso, os dois planos coincidem (isto é, se $\alpha = \beta$), uma condição necessária e suficiente para que a afinidade seja um deslocamento é que *os dois ternos ordenados de pontos sejam positivamente isométricos,* isto é, *que* $|A'B'| \doteq |AB|$, $|A'C'| \doteq |AC|$ *e os ângulos orientados* $\hat{A}BC$ *e* $\hat{A}'B'C'$ *sejam equipolentes.*

O teorema 1 estende-se facilmente a $\mathcal{E}$:

TEOREMA 2. *Dados dois quaternos ordenados de pontos não complanares* (A, B, C, D) *e* (A', B', C', D'), *a afinidade que transforma o primeiro no segundo é uma semelhança, sse os dois quaternos são semelhantes, isto é, sse*

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|A'D'|}{|AD|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|B'D'|}{|BD|} = \frac{|C'D'|}{|CD|}$$

Quanto a isometrias e deslocamentos, as considerações são análogas às que fizemos no caso dos planos.

EXERCÍCIOS. Atendendo aos teoremas anteriores e às conclusões a que conduzem os exercícios do n.º 3, prove os seguintes factos:

I. Todo o deslocamento do plano é uma rotação ou uma translação.

II. Um deslocamento do plano é uma translação, sse não deixa fixo nenhum ponto ou deixa fixos todos os pontos do plano.

III. Uma semelhança negativa do plano que deixe fixos dois pontos distintos A, B só pode ser a simetria em relação a AB.

IV. Um deslocamento do plano que deixe fixos dois pontos distintos só pode ser a aplicação identidade.

V. Todo o deslocamento do espaço pode ser obtido como produto de uma rotação por uma translação, que pode ser sempre escolhida com direcção paralela ao eixo de rotação.

VI. Uma semelhança negativa do espaço que deixe fixos três pontos A, B, C não colineares só pode ser a simetria em relação ao plano ABC.

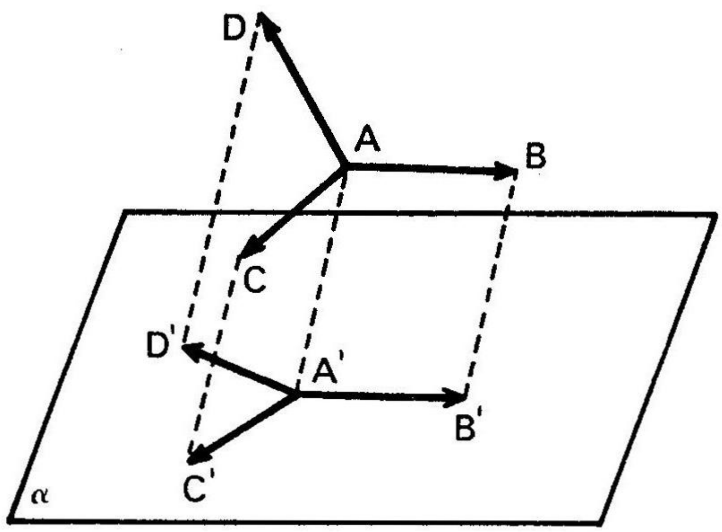
VII. Um deslocamento do espaço que deixe fixos três pontos A, B, C não colineares só pode ser a aplicação identidade.

VIII. Um deslocamento do espaço que deixe fixo um ponto A é uma rotação em torno de um eixo que passa por A.

IX. O produto de duas reflexões do plano é uma rotação ou uma translação. Reciprocamente, toda a rotação ou translação do plano pode ser obtida como produto de duas reflexões.

X. Idem para o espaço.

9. **Aplicações afins*.** Tornemos ao exemplo anterior da projecção Φ dos pontos do espaço $\mathcal{E}$ sobre um plano α paralelamente a uma recta d (não paralela a α). Vimos que Φ é uma aplicação de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}$ (mas não sobre $\mathcal{E}$), que transforma segmentos de recta em segmentos de recta, mas que transforma as rectas paralelas a d em pontos. Dissemos que se trata de uma *afinidade degenerada.*



Sejam A, B, C, D quatro pontos de $\mathcal{E}$ não complanares e A', B', C', D' respectivamente as suas projecções sobre α paralelamente a d. É evidente que A', B', C', D' são complanares, embora não colineares (porquê?) e, a cada ponto

$$P = A + x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} + z \cdot \overrightarrow{AD}$$

de $\mathcal{E}$, corresponderá o ponto

$$P' = A' + x \cdot \overrightarrow{A'B'} + y \cdot \overrightarrow{A'C'} + z \cdot \overrightarrow{A'D'}$$

de α (e portanto de $\mathcal{E}$).

Dum modo geral, chamaremos *aplicação afim* do espaço $\mathcal{E}$ em si mesmo toda a aplicação da forma

$$P = O + x\vec{e} + y\vec{f} + z\vec{g} \rightsquigarrow P' = O' + x\vec{e}\,' + y\vec{f}\,' + z\vec{g}\,',$$

em que O e O' são pontos arbitrários de $\mathcal{E}$, $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ *vectores não complanares de* $\mathcal{E}$ (elementos de $\mathfrak{V}$) e $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ *vectores arbitrários de* $\mathcal{E}$.

Em particular, se $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ são não complanares, a aplicação Φ é bijectiva e portanto uma *transformação afim* (ou *afinidade*).

Mas, se $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ são complanares, a aplicação Φ já não é bijectiva e diz-se uma *afinidade degenerada*. Nesta hipótese, ainda há a distinguir dois casos:

1.°. *Os vectores* $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ *não são colineares* (embora sejam complanares). Neste caso, o contradomínio de Φ é um plano, como no exemplo anterior.

2.°. *Os vectores* $\vec{e}\,', \vec{f}\,', \vec{g}\,'$ *são colineares*. Neste caso, o contradomínio de Φ é uma recta. Exemplo: a projecção de $\mathcal{E}$ sobre um plano α, seguida da projecção de α sobre uma recta $r \subset \alpha$.

É claro que a definição anterior se estende ao caso de planos ou rectas. Por exemplo:

Dadas duas rectas r, s (distintas ou coincidentes) chama-se *aplicação afim de* r *em* s toda a aplicação Φ da forma

$$P = O + x\vec{e} \rightsquigarrow P' = O' + x\vec{e}'$$

em que O e O′ são pontos arbitrários respectivamente de *r* e *s*, $\vec{e}$ um *vector não nulo de* r e $\vec{e}'$ *um vector qualquer de* s. Se $\vec{e}' = \vec{0}$, é claro que o contradomínio de Φ se reduz ao ponto O′. Se $\vec{e}' \neq 0$, Φ é bijectiva e podemos chamar-lhe uma *transformação afim* (ou *afinidade*). Mas facilmente se vê que, neste caso, Φ é uma semelhança de *r* sobre *s*. Assim:

No caso unidimensional (aplicações entre rectas) não há distinção entre afinidades e semelhanças.

Índice

Composto e impresso na
Imprensa Portuguesa — Porto
e concluiu-se
em Outubro de 1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA