J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

3.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

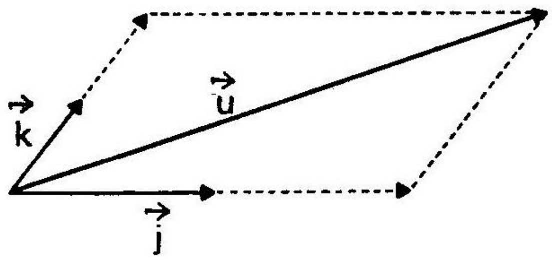
Edição GEP

LISBOA

CAPÍTULO IV

REPRESENTAÇÃO ANALÍTICA DE APLICAÇÕES LINEARES E TRANSFORMAÇÕES AFINS

1. **Aplicações lineares e matrizes.** Consideremos o conjunto $\mathcal{V}_\alpha$ dos vectores de um plano α. Já sabemos que $\mathcal{V}_\alpha$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\vec{j}$, $\vec{k}$ dois vectores não colineares de $\mathcal{V}_\alpha$.



Então, como vimos, a fórmula

$$(1) \qquad \vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k}$$

estabelece uma correspondência bijectiva $\vec{u} \rightarrow (x, y)$ entre os vectores $\vec{u} \in \mathcal{V}_\alpha$ e os pares $(x, y) \in \mathbb{R}$.

Posto isto, seja F uma aplicação linear do espaço vectorial $\mathcal{V}_\alpha$ *em si mesmo*, isto é, uma aplicação de $\mathcal{V}_\alpha$ em $\mathcal{V}_\alpha$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}) \\ F(a\vec{u}) = a\,F(\vec{u}) \end{array}\right\} \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_\alpha;\ a \in \mathbb{R}$$

Então, aplicando F a ambos os membros de (1), vem

$$F(\vec{u}) = x\,F(\vec{j}) + y\,F(\vec{k}) \quad , \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$$

ou seja, pondo $F(\vec{u}) = \vec{u}'$, $F(\vec{j}) = \vec{j}'$, $F(\vec{k}) = \vec{k}'$:

$$(2) \qquad \vec{u}' = x\,\vec{j}' + y\,\vec{k}'$$

Reciprocamente, sendo j′, k′ *dois vectores arbitrários de* $\mathcal{V}_\beta$, a aplicação F que faz corresponder a cada vector $\vec{u}$ dado por (1) o vector $\vec{u}'$ dado por (2) é linear. Com efeito, se considerarmos dois vectores

$$\vec{u}_1 = x_1\vec{j} + y_1\vec{k} \quad , \quad \vec{u}_2 = x_2\vec{j} + y_2\vec{k}$$

tem-se

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2)\vec{j} + (y_1 + y_2)\vec{k}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} F(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) &= (x_1 + x_2)\vec{j}' + (y_1 + y_2)\vec{k}' \\ &= (x_1\vec{j}' + y_1\vec{k}') + (x_2\vec{j}' + y_2\vec{k}') \\ &= F(\vec{u}_1) + F(\vec{u}_2) \end{aligned}$$

Analogamente se prova que $F(a\,\vec{u}) = a\,F(\vec{u})$, $\forall a \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathcal{V}_\alpha$.

Suponhamos agora dadas as componentes dos vectores $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ na base $(\vec{j}, \vec{k})$. Seja:

$$\vec{j}' = a\,\vec{j} + b\,\vec{k} \quad , \quad \vec{k}' = c\,\vec{j} + d\,\vec{k},$$

ou, abreviadamente,

$$j' \rightsquigarrow (a, b) \quad , \quad k' \rightsquigarrow (c, d)$$

Procuremos então as componentes do vector

$$\vec{u}' = x\,\vec{j}' + y\,\vec{k}' = F(\vec{u})$$

na base $(\vec{j}, \vec{k})$, Tem-se:

$$(3) \qquad \vec{u}' = x(a\,\vec{j} + b\,\vec{k}) + y(c\,\vec{j} + d\,\vec{k})$$

$$= (ax + cy)\vec{j} + (bx + dy)\vec{k}$$

Por conseguinte, se designarmos por x', y' ordenadamente as componentes de $\vec{u}'$ na base $(\vec{j}, \vec{k})$, isto é, se pusermos

$$\vec{u}' = x'\vec{j} + y'\vec{k}$$

virá, por comparação com (3),

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases} \qquad \text{(porquê?)}$$

Assim, dar a aplicação linear $F: \vec{u} \rightsquigarrow \vec{u}'$ de $\mathcal{V}_\alpha$ em $\mathcal{V}_\alpha$ equivale a dar a aplicação $(x, y) \rightsquigarrow (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, definida pelo sistema (4).

Por sua vez, dar este sistema de equações equivale a dar o quadro dos seus coeficientes, assim indicado

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Chama-se *matriz quadrada de ordem* 2 todo o quadro deste tipo.

Os pares ordenados (a, c) e (b, d) são as *linhas* da matriz: respectivamente a *1.ª linha* e a *2.ª linha.*

Os pares ordenados (a, b) e (c, d) são as *colunas* da matriz: respectivamente a *1.ª coluna* e a *2.ª coluna — representativas dos vectores* $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

Reciprocamente, sendo a, b, c, d números reais arbitrariamente dados, a matriz (4) define uma aplicação linear F de $\mathcal{V}_\alpha$ em $\mathcal{V}_{\alpha'}$, por intermédio do sistema (5), sendo

$$\vec{j}' = a\vec{j} + b\vec{k} = F(\vec{j}) \quad , \quad \vec{k}' = c\vec{j} + d\vec{k} = F(\vec{k})$$

Em conclusão:

TEOREMA 1. *Adoptada uma base* $(\vec{j}, \vec{k})$ *em* $\mathcal{V}_{\alpha'}$, *o sistema* (4) *estabelece uma correspondência bijectiva*

$$F \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

entre as aplicações lineares F *de* $\mathcal{V}_\alpha$ *em* $\mathcal{V}_\alpha$ *e as matrizes quadradas de ordem* 2 *de números reais. Neste caso* F *é a aplicação que transforma os vectores* $\vec{j}$, $\vec{k}$ *respectivamente nos vectores*

$$\vec{j}' = a\vec{j} + b\vec{k} \quad , \quad \vec{k}' = c\vec{j} + d\vec{k}$$

Estas considerações podem generalizar-se ao espaço vectorial $\mathcal{V}$, constituído pelos vectores do espaço pontual $\mathcal{E}$.

Chama-se *matriz quadrada de ordem* 3 todo o quadro do tipo

$$\begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

com 3 *linhas* (a, a′, a″), (b, b′, b″) e (c, c′, c″), respectivamente 1.ª, 2.ª e 3.ª linhas, e três *colunas* (a, b, c), (a′, b′, c′), (a″, b″, c″), respectivamente 1.ª, 2.ª e 3.ª colunas. Os símbolos a, b, c, a′,... podem designar entes das mais diversas naturezas *(elementos da matriz)*. No estudo que vamos fazer, interessam-

-nos apenas matrizes reais, isto é, *matrizes cujos elementos são números reais.*

Posto isto, sejam $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$ três vectores não complanares de $\mathcal{V}$. Como sabemos, a fórmula

$$(6) \qquad \vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{m}$$

estabelece uma correspondência bijectiva $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y, z)$ entre os elementos $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$ e os elementos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. Posto isto, seja F uma aplicação linear de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{V}$ e ponhamos $\vec{u}' = F(\vec{u})$, $\vec{j}' = F(\vec{j})$, $\vec{k}' = F(\vec{k})$, $\vec{m}' = F(\vec{m})$. Então, raciocinando como no caso do plano, vê-se que

$$(7) \qquad \vec{u}' = x\vec{j}' + y\vec{k}' + z\vec{m}'$$

Reciprocamente, sendo $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, $\vec{m}'$ três vectores de $\mathcal{V}$ *dados arbitrariamente,* a aplicação F, que faz corresponder a cada vector dado por (6) o vector $\vec{u}'$ dado por (7), é linear.

Seja agora

$$(8) \qquad \begin{cases} \vec{j}' = a\vec{j} + b\vec{k} + c\vec{m} \\ \vec{k}' = a'\vec{j} + b'\vec{k} + c'\vec{m} \\ \vec{m}' = a''\vec{j} + b''\vec{k} + c''\vec{m} \end{cases}$$

e

$$\vec{u}' = x'\vec{j} + y'\vec{k} + z'\vec{m}$$

Então, é fácil ver, como no caso anterior, que

$$(9) \qquad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases}$$

E chega-se agora ao seguinte

TEOREMA 2. *Adoptada uma base* (j, k, m) *em* $\mathcal{V}$, *o sistema* (9) *estabelece uma correspondência bijectiva*

$$F \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

entre as aplicações lineares F *de* $\mathcal{V}$ *em* $\mathcal{V}$ *e as matrizes quadradas reais de ordem* 3. *Neste caso* F *é a aplicação linear de* $\mathcal{V}$ *em* $\mathcal{V}$ *que transforma os vectores de base* $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$ *respectivamente nos vectores* $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, $\vec{m}'$ *dados por* (8).

EXERCÍCIOS:

I. Sendo $(\vec{j}, \vec{k})$ uma base ortogonal no plano, designe por $\vec{j}'$ o vector representativo do número complexo $3 + 4i$ e seja $\vec{k}' = i\,\vec{j}'$. Posto isto, determine a matriz da aplicação linear que transforma $(\vec{j}, \vec{k})$ em $(\vec{j}', \vec{k}')$ e a matriz da aplicação inversa.

II. Dada uma base (j, k, m) de $\mathcal{V}$ e os vectores

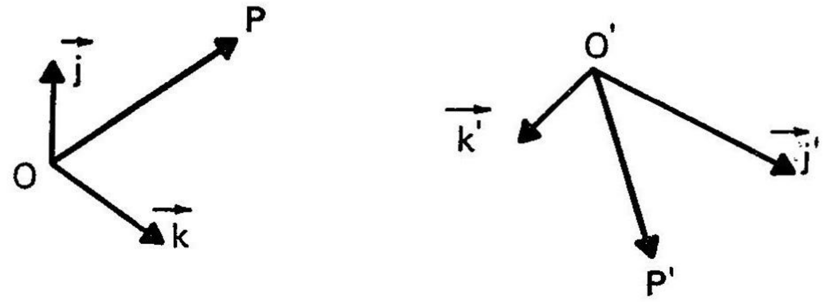
$$\vec{u} \rightsquigarrow (0,\ 1,\ -2) \quad , \quad \vec{v} \rightsquigarrow (-1,\ 0,\ 1) \quad , \quad \vec{w} \rightsquigarrow (2,\ -1,\ 1)$$

determine as componentes dos transformados de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ pela aplicação linear F de matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 9/2 & -6 \\ 1 & -3/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Que relação verifica entre os vectores obtidos? Qual é então o contradomínio de F?

2. **Representação analítica das afinidades de um plano ou do espaço.** Consideremos *num mesmo plano* π dois referenciais cartesianos $(\vec{O}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{O}', \vec{j}', \vec{k}')$. Portanto O e O′ são dois pontos quaisquer do plano, $(\vec{j}\ , \vec{k})$ e $(\vec{j}'\ , \vec{k}')$ dois pares quaisquer de vectores não colineares (bases de $\mathcal{V}_\pi$).



Segundo o estabelecido no Captíulo III, n.º 7 (pág. 111), existe uma e uma só afinidade Φ do plano que transforma $(\vec{O}, \vec{e}, \vec{f})$ em $(\vec{O}', \vec{e}', \vec{f}')$ (¹). Seja P um ponto qualquer do plano. Então

$$\Phi(P) = \Phi(O) + \Phi_o\,(P - O) \qquad \text{ou seja}$$

$$(1) \qquad P' = O' + \Phi_o(\overrightarrow{OP}) \qquad \text{ou ainda}$$

$$(2) \qquad \overrightarrow{O'P'} = \Phi_o(\overrightarrow{OP})$$

em que $P' = \Phi(P)$ e Φ_o é a aplicação linear definida por Φ em $\mathcal{V}_\pi$. Suponhamos agora que se tem, no 1.º referencial:

$$O' \rightsquigarrow (p, q) \quad , \quad \vec{j}' \rightsquigarrow (a, b) \quad , \quad \vec{k}' \rightsquigarrow (c, d)$$

$$P \rightsquigarrow (x, y) \quad , \quad P' = \Phi(P) \rightsquigarrow (x', y')$$

(¹) É claro que, em vez dos ternos $(O, \vec{j}, \vec{k})$, $(O', \vec{j}', \vec{k}')$, podemos considerar dois ternos de pontos (O, A, B), (O′, A′, B′), tais que $\overrightarrow{OA} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{k}$, $\overrightarrow{O'A'} = \vec{j}'$, $\overrightarrow{O'B'} = \vec{k}'$.

Então, pelo que se viu no número anterior, a fórmula

$$\overrightarrow{O'P'} = \Phi\ (\overrightarrow{OP})$$

equivale ao sistema de equações

$$(3) \qquad \begin{cases} x' - p = ax + cy \\ y' - q = bx + dy \end{cases}$$

ou seja

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

Será esta pois a representação analítica da transformação Φ considerada. Como se vê, esta é definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{representativa de } \Phi_o$$

e pelo par ordenado (p, q), representativo do vector $\overrightarrow{OO'}$ (que define uma translação de O para O').

Assim, a afinidade Φ aparece decomposta numa afinidade que deixa fixo o ponto O e na translação que leva O para O'. A primeira pode ser identificada com a aplicação linear Φ_o visto que, uma vez escolhida a origem O, cada ponto P do plano pode ser identificado com o seu vector de posição $\overrightarrow{OP}$.

Estas considerações estendem-se imediatamente ao espaço $\mathcal{E}$. Consideremos dois referenciais:

$$(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m}) \text{ e } (O', \vec{j}', \vec{k}', \vec{m}')$$

Então a afinidade Φ que transforma o primeiro no segundo é definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + p \\ y' = bx + b'y + b''z + q \\ z' = cx + c'y + c''z + r \end{cases}$$

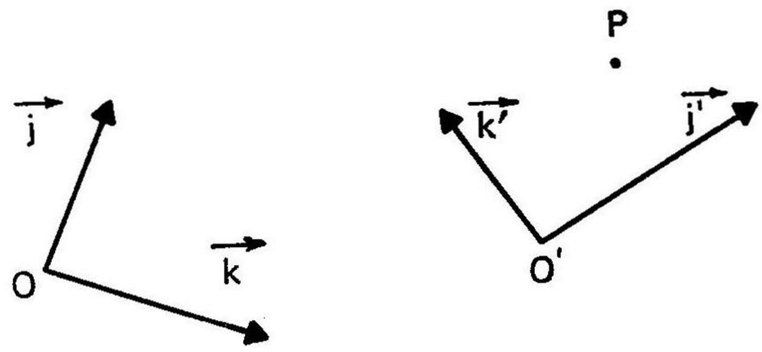
em que se tem, relativamente ao 1.° referencial:

$$(a,\ b,\ c) \curvearrowright \vec{j}' \quad , \quad (a',\ b',\ c') \curvearrowright \vec{k}' \quad , \quad (a'',\ b'',\ c'') \curvearrowright \vec{m}'$$

$$(x,\ y,\ z) \curvearrowright P \quad , \quad (x',\ y',\ z') \curvearrowright P' = \Phi(P)$$

O problema da representação analítica das afinidades equivale de certo modo, como vamos ver, ao PROBLEMA DA MUDANÇA DE COORDENADAS, quando se passa de um referencial para outro.

Comecemos pelo caso do plano:



Dadas no plano as coordenadas x, y *dum ponto* P *num referencial* $(O, \vec{j}, \vec{k})$, *determinar as coordenadas* x′, y′ *do mesmo ponto num outro referencial* $(O', \vec{j}', \vec{k}')$.

Então

$$P = O + x\vec{j} + y\vec{k} \tag{5}$$

Procuram-se x′, y′ tais que

$$P = O' + x'\vec{j}' + y'\vec{k}' \tag{6}$$

Seja $\vec{j}' = a\vec{j} + b\vec{k}$, $k' = c\vec{j} + d\vec{k}$, $O' = O + p\vec{j} + q\vec{k}$
Então (6) equivale a

$$P = O + (ax' + cy' + p)\vec{j} + (bx' + dy' + q)\vec{k},$$

donde, por comparação com (5):

$$(7) \qquad \begin{cases} x = ax' + cy' + p \\ y = bx' + dy' + q \end{cases}$$

Assim, como se vê, as equações que dão a mudança de coordenadas têm a mesma forma das equações (4), mas com as variáveis trocadas. No problema anterior tratava-se de coordenadas de dois pontos P e P′ no primeiro referencial. Agora trata-se de coordenadas de *um mesmo ponto* P em dois referenciais diferentes. Mas note-se ainda:

Para determinar as novas coordenadas x′, y′ *a partir das primitivas* x, y, *há que resolver o sistema* (7) *em relação a* x′, y′.

Analogamente para o espaço $\mathcal{E}$.

Um problema inteiramente análogo é o da mudança de base num espaço vectorial.

EXERCÍCIOS:

I. Considere a afinidade Φ dada no plano pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y - 1 \\ y' = 4x + 3y + 1 \end{cases}$$

relativamente a um referencial ortonormal. Posto isto:

a) Determine os transformados por Φ dos pontos

$$A \rightarrow (0, 0) \quad , \quad B \rightarrow (1, 0) \quad , \quad C \rightarrow (1/2, 1)$$

b) Desenhe o triângulo [ABC] e o seu transformado por Φ. Que espécie de afinidade é Φ?

c) Dada a recta r de equação $x + 2y = 1$, ache uma equação da recta $r' = \Phi(r)$. (*Sugestão:* convém resolver o sistema anterior em relação a x, y.)

d) Represente analiticamente Φ^{-1}.

II. Determine as transformadas das figuras de equação $x^2 - y^2 = r^2$ (com $r \in \mathbb{R}$) pelas afinidades da forma [1]

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx + ay \end{cases} \quad , \qquad \text{com } a^2 - b^2 = 1$$

III. Dada a equação

$$m^2x^2 - n^2y^2 = 1$$

num referencial ortonormal, achar a equação correspondente num referencial em que os novos eixos coincidam com as assímptotas da hipérbole representada por aquela equação. (*Sugestão:* no novo referencial as equações das assímptotas deverão ser $x' = 0$, $y' = 0$, enquanto no primeiro são $mx + ny = 0$, $mx - ny = 0$).

3. **Produto interno de dois vectores.** Para poder decidir se uma afinidade representada analiticamente é uma isometria ou uma semelhança, o processo mais elegante e mais cómodo baseia-se na noção de *produto interno de dois vectores.*

Consideremos, por exemplo, num plano dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e seja

$$\vec{u} \rightsquigarrow (x, y) \quad , \quad \vec{v} \rightsquigarrow (x', y')$$

relativamente a um referencial ortonormal do plano. Posto isto, procuremos *relacionar o quadrado do módulo da soma* $\vec{u} + \vec{v}$ *com os módulos de* $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Como

$$\vec{u} + \vec{v} \rightsquigarrow (x + x', y + y'),$$

---

[1] Este exemplo tem especial interesse por estar intimamente relacionado com a teoria da relatividade.

tem-se

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$$

$$= (x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) + 2(xx' + yy')$$

e portanto

$$(1) \qquad |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2(xx' + yy')$$

donde

$$xx' + yy' = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2)$$

O 2.º membro mostra que o valor da expressão $xx' + yy'$ não depende da base adoptada (desde que esta seja ortonormal!), mas apenas dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Esse valor (número real) é chamado *produto interno de* $\vec{u}$ *por* $\vec{v}$ e representado por qualquer das notações $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\vec{u} | \vec{v}$ (ler '$\vec{u}$ interno $\vec{v}$').

Ter-se-á pois, *por definição:*

$$(2) \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2)$$

Em particular, se $\vec{u} = \vec{v}$, vem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(4|\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}|^2) = |\vec{u}|^2,$$

o que induz a escrever, mais simplesmente,

$$\vec{u}^2 \text{ em vez de } |\vec{u}|^2$$

Assim, a fórmula (1) assume o aspecto sugestivo:

$$(3) \qquad \boxed{(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

Como se vê, a *expressão cartesiana do produto interno* num referencial ortonormal do plano é

$$(4) \qquad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Analogamente se vê que no espaço é

$$(5) \qquad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'} \ ,$$

supondo $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y, z)$ e $\vec{v} \rightsquigarrow (x', y', z')$ num referencial ortonormal.

Desta expressão cartesiana (ou da definição adoptada), imediatamente se inferem as seguintes

PROPRIEDADES DO PRODUTO INTERNO

I. *Comutatividade:* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \ \forall \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathcal{V}$

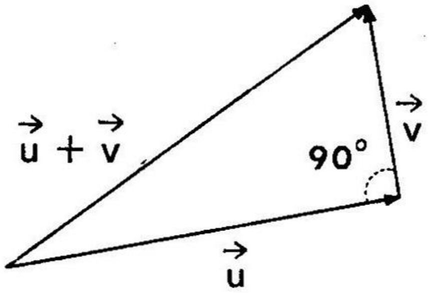
II. *Distributividade:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \ \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$

III. *Homogeneidade:* $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{u}), \ \forall \vec{u}, \ \vec{v} \in \mathcal{V}, \ a \in \mathbb{R}$

IV. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \quad , \quad \forall \vec{u} \in \mathcal{V}$

V. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \perp \vec{v}$

Esta última propriedade, muito importante (PROPRIEDADE DO ANULAMENTO DO PRODUTO INTERNO), deduz-se facilmente da fórmula (3), quer no caso em que um pelo menos dos vectores é nulo, *quer no caso em que são ambos não nulos e perpendiculares entre si* ($\vec{u} \perp \vec{v}$).



Com efeito, neste caso, a definição de soma $\vec{u} + \vec{v}$ e o TEOREMA DE PITÁGORAS dão imediatamente

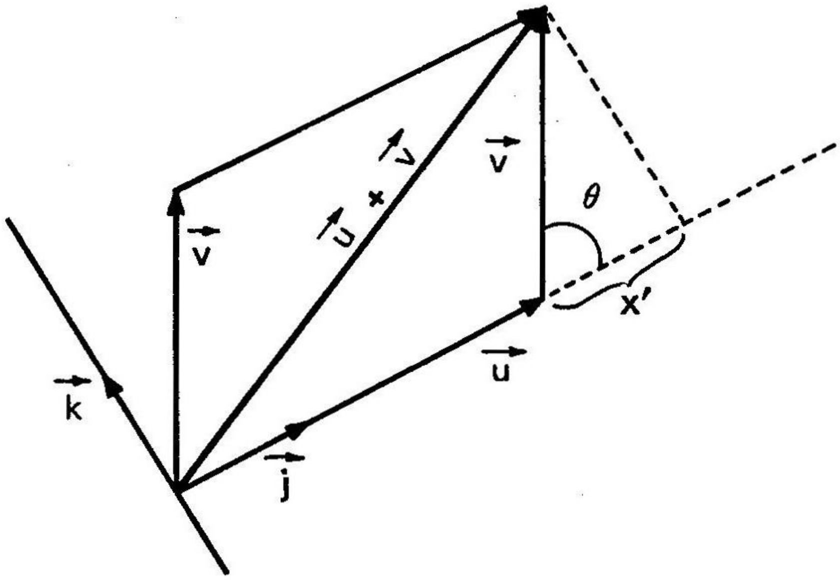
$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2, \text{ donde } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

NOTA SOBRE A TERMINOLOGIA. Em matemática moderna, é costume chamar 'operação interna' (ou 'lei de composição interna') num conjunto A, a toda a operação binária Φ que faz corresponder, a cada par ordenado (a, b) de elementos de A (a que se possa aplicar) um elemento $a \, \Phi \, b$, *também de* A. Ora, segundo esta definição, a operação de produto interno *não é uma operação interna*, pois faz corresponder a cada par ($\vec{u}$, $\vec{v}$) de *vectores* — normalmente elementos de $\mathcal{V}$ — um *escalar* (isto é, um número real) e *não um vector*. Como, no entanto, a tradição já tinha consagrado a designação 'produto interno' para este caso, continua a ser usada essa designação, embora não seja coerente com a terminologia moderna da álgebra geral.

Muitas vezes, em vez de 'produto interno' diz-se *'produto escalar'*, atendendo a que o resultado da operação é um escalar.

4. **Nova definição geométrica de produto interno.** Procuremos agora um significado geométrico da noção de produto interno, que faça intervir o ângulo dos vectores dados. Para isso, consideremos um plano π em que os dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ possam

ser representados e adoptemos aí uma base ortonormal $(\vec{j}, \vec{k})$ tal que $\vec{u}$ seja colinear com $\vec{j}$ e do mesmo sentido (se $\vec{u} \neq \vec{0}$).



Então, se pusermos

$$\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = x'\vec{j} + y'\vec{k},$$

terá de ser $y = 0$ e $x \geqslant 0$ (porquê?). Logo

$$(1) \qquad \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \\ \quad x = |\vec{u}| \end{cases}$$

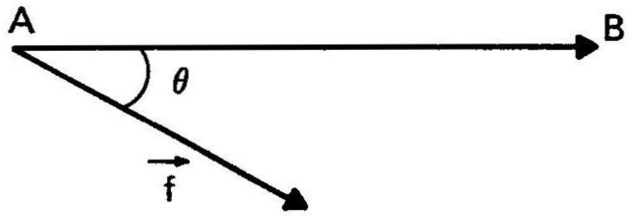
Para determinar x' designemos por θ o ângulo dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, isto é, o ângulo convexo formado por duas semi-rectas quaisquer com as direcções e sentidos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (se um dos vectores é nulo, considera-se θ arbitrário). Então θ é também o ângulo que $\vec{v}$ forma com o vector $\vec{j}$ e portanto

$$x' = |\vec{v}| \cos \theta$$

donde, por substituição em (1):

$$(2) \qquad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}| \cos (\vec{u}, \vec{v})}$$

onde $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\theta$. Esta fórmula é a que se adopta habitualmente para definir 'produto interno' (em vez da fórmula (2) do número anterior) e aplica-se em inúmeras questões de física.



Por exemplo, quando se tem uma força aplicada a um objecto material, diz-se que a força *produz trabalho*, sempre que se desloca o seu ponto de aplicação. Ora, se o deslocamento é rectilíneo e a força se mantém *constante em direcção, sentido e intensidade*, o trabalho produzido pela força é, por definição, a grandeza escalar dada pela fórmula

$$(3) \qquad w = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = |\vec{f}| \cdot |AB| \cdot \cos\theta$$

sendo $\vec{f}$ o vector correspondente à força, $\overrightarrow{AB}$ o vector correspondente ao deslocamento e θ o ângulo dos dois vectores. A medida do trabalho, w, depende evidentemente do sistema de unidades adoptado: por exemplo, se a força é expressa em quilogramas e o deslocamento em metros, o trabalho vem expresso em *quilogrâmetros* (trabalho produzido por um quilograma-força, cujo ponto de aplicação se desloca um metro na direcção e no sentido da força).

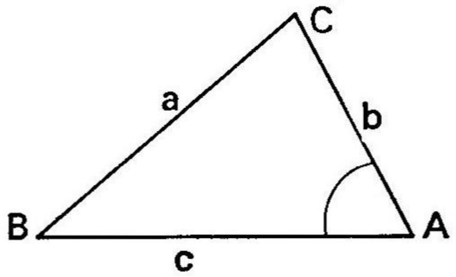
Ao aplicar a fórmula (3) três casos se podem dar:

1) $\vec{f} \neq \vec{0} \wedge \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \wedge 0 \leqslant \theta < 90°$. Então $w > 0$: *trabalho positivo* (ou *potente*).

2) $\vec{f} \neq \vec{0} \wedge \overrightarrow{AB} \neq 0 \wedge 90° < \theta \leqslant 180°$. Então $w < 0$: *trabalho negativo* (ou *resistente*).

3) $\vec{f} = \vec{0} \vee \overrightarrow{AB} = \vec{0} \vee \theta = 90°$. Então $w = 0$: *trabalho nulo.*

O significado geométrico do produto interno segundo a fórmula (3) tem ainda uma aplicação importante em trigonometria:



Consideremos um triângulo qualquer [ABC] e designemos, como é hábito, a medida de cada um dos seus lados, pela letra minúscula correspondente à letra maiúscula que designa o vértice oposto, e cada ângulo interno do triângulo pela mesma letra que designa o vértice ([1]). Então, aplicando a fórmula (3) do número anterior, virá, por exemplo:

$$(4) \qquad \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Mas $\overrightarrow{BC}^2 = a^2 \quad , \quad \overrightarrow{BA}^2 = b^2 \quad , \quad \overrightarrow{AC}^2 = c^2$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \qquad \text{(porquê?)} \\ &= -\,bc \cos (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= -\,bc \cos A \end{aligned}$$

e assim, por substituição em (4):

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A}$$

Como se vê, esta fórmula *generaliza o teorema de Pitágoras* (correspondente ao caso $A = 90°$) e pode ser traduzida do seguinte modo, em linguagem comum:

([1]) Trata-se, é claro, de um **abuso cómodo de escrita,** que se pode usar quando não haja perigo de confusão.

TEOREMA DO CO-SENO (ou TEOREMA DE CARNOT). *Em qualquer triângulo, o quadrado de cada um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto desses dois lados pelo co-seno do ângulo oposto ao primeiro.*

Um outro teorema importante de trigonometria é o TEOREMA DOS SENOS, que o aluno encontrará exposto e demonstrado no seu *Compêndio de Trigonometria* (tem interesse ver a demonstração deste teorema).

É nestes dois teoremas, bem como nas fórmulas trigonométricas deduzidas atrás (Capítulo II), que se baseia a *resolução de triângulos obliquângulos.* As respectivas fórmulas resolutivas, adaptadas a cálculo logarítmico, encontram-se não só no referido *Compêndio,* como ainda nas próprias tábuas de logaritmos mais conhecidas. *Basta pois ter uma ideia de como se utilizam essas fórmulas, cujo interesse principal reside nas aplicações à Topografia.*

5. **Aplicações do produto interno em geometria analítica.** Da fórmula (2) do número anterior (definição clássica de produto interno) deduz-se:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

sendo $\vec{u}, \vec{v}$ dois vectores *não nulos.* Suponhamos que se tem $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y)$, $\vec{v} \rightsquigarrow (x', y')$, relativamente a um *referencial ortonormal* no plano. Então o co-seno do ângulo θ de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é dado pela fórmula:

$$(1) \quad \cos\theta = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Em particular tem-se

$$(2) \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

É claro que, se um pelo menos dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ for nulo, também será $xx'+yy'=0$. *Por comodidade de linguagem, diz-se ainda neste caso que os vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *são perpendiculares (ou ortogonais). Portanto a fórmula* (2) *exprime a condição necessária e suficiente de ortogonalidade de dois vectores, quando se adopta um referencial ortonormal do plano.*

Analogamente, no espaço, o ângulo θ de dois vectores não nulos é dado pela fórmula

$$(3) \qquad \cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

e, em particular, tem-se a *condição de ortogonalidade*

$$(4) \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

que é válida mesmo no caso em que um, pelo menos, dos vectores é nulo, segundo a convenção anterior.

Estas fórmulas (que podem sem dificuldade ser generalizadas ao caso de referenciais cartesianos não ortonormais) prestam-se comodamente a muitas aplicações em geometria analítica:

I. Suponhamos, por exemplo, que são dados no plano três pontos distintos, pelas suas coordenadas (num referencial ortonormal):

$$A \rightarrow (x_0, y_0) \quad , \quad B \rightarrow (x_1, y_1) \quad , \quad C \rightarrow (x_2, y_2)$$

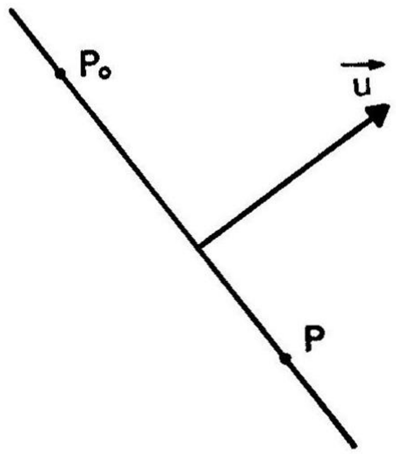
Então, a amplitude θ do ângulo $B\hat{A}C$ será dada pela fórmula

$$\cos\theta = \frac{(x_1 - x_0)\ (x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)\ (y_2 - y_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}}$$

Analogamente para o espaço, aplicando a fórmula (3).

II. Consideremos agora o problema:

Conduzir por um ponto $P_o \hookrightarrow (x_o, y_o)$ *uma recta perpendicular a um vector não nulo* $\vec{u} \hookrightarrow (a, b)$.



Seja $P \hookrightarrow (x, y)$ um ponto qualquer de recta.
Então o vector $\overrightarrow{P_oP}$ é perpendicular a $\vec{u}$ (ou é nulo). Tem-se pois sempre

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{P_oP} = \vec{0}$$

o que, segundo (2), se traduz analiticamente por

$$a(x-x_o) + b(y-y_o) = 0$$

Será pois esta uma equação da recta pedida.
Reciprocamente:
Dada uma recta qualquer de equação

$$(5) \qquad ax + by + c = 0,$$

os coeficientes a, b, *respectivamente de* x *e* y, *são as componentes de um vector não nulo perpendicular à recta.*

Com efeito, o vector (a, b) não é nulo (porquê?) e, se (x_0, y_0) for um determinado ponto da recta, já sabemos que a equação (5) é equivalente à seguinte:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

Ora isto mostra que, sendo (x, y) um ponto de r distinto de (x_0, y_0), o vector $(x-x_0, y-y_0)$ é perpendicular ao vector (a, b) e portanto este é perpendicular a r.

Como é sabido, chama-se *ângulo de duas rectas do plano* à menor das amplitudes dos ângulos em que as rectas dividem o plano (se são concorrentes) ou o ângulo nulo (se são paralelas). Nestas condições, o ângulo θ de duas rectas *r, s,* de equações

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0$$

será igual ao ângulo dos vectores (a, b) e (a′, b′), normais às rectas, ou igual ao *suplementar* desse ângulo. Tem-se, pois, em qualquer dos casos:

$$\cos\theta = \left| \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}} \right|$$

Esta fórmula dá, portanto, o *ângulo θ das duas rectas definidas pelas equações anteriores.*

Em particular, será

$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow aa' + bb' = 0}$$

Recordemos que, por outro lado, se tem

$$r \,//\, s \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$$

Isto também pode escrever-se:

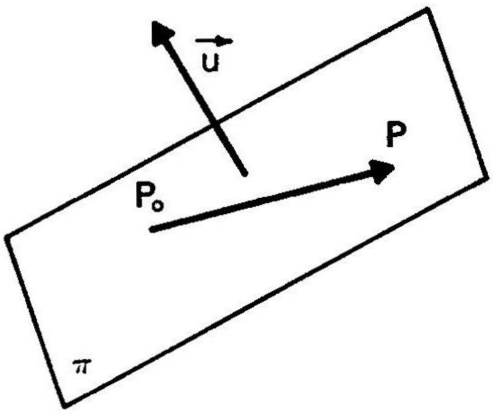
$$r \mathbin{//} s \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

no caso em que $a' \neq 0 \wedge b' \neq 0$. E poderemos usar esta fórmula, mesmo no caso em que um dos denominadores é nulo, *convencionando que, nesse caso, o numerador correspondente também terá de ser nulo* (1).

III. Estes resultados são facilmente generalizáveis ao espaço. Assim:

O plano que passa por um dado ponto (x_0, y_0, z_0) *e é perpendicular a um dado vector* (a, b, c) *não nulo, é definido pela equação:*

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$



Reciprocamente, dada a equação de um plano qualquer

$$ax + by + cz + d = 0$$

esta pode sempre escrever-se sob a forma

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0,$$

(1) É claro que se trata aqui apenas de uma **regra prática.** Quando são nulos os dois termos duma fracção, esta reduz-se a um símbolo de indeterminação e, portanto, não verifica em rigor a igualdade indicada.

sendo (x_0, y_0, z_0) *um ponto qualquer do plano. Portanto os coeficientes* a, b, c *são as componentes de um vector* $\vec{u}$ *não nulo normal ao plano.*

Isto permite, por exemplo, achar o *ângulo* θ de dois *planos* π, μ de equações

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Com efeito, θ será um ângulo do 1.° quadrante, igual ao ângulo dos vectores (a, b, c), (a', b', c') ou *suplementar* desse. Tem-se pois:

$$\cos\theta = \left| \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \right|$$

Em particular, tem-se a CONDIÇÃO DE PERPENDICULARIDADE:

$$\boxed{\pi \perp \mu \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0}$$

Por outro lado, já sabemos que se tem a CONDIÇÃO DE PARALELISMO:

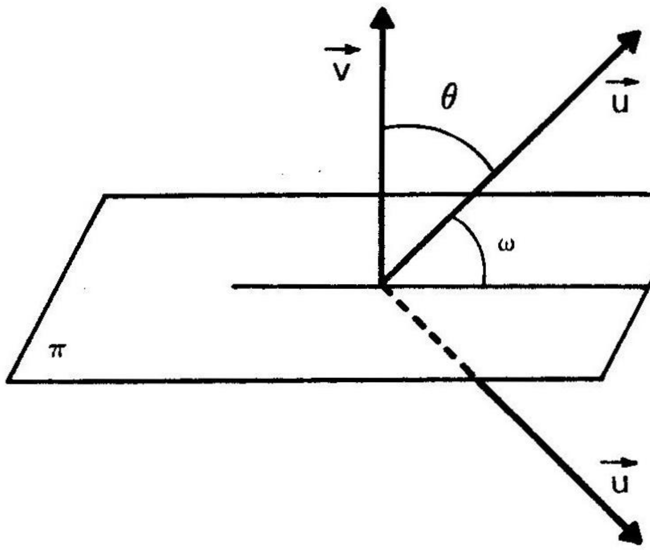
$$\boxed{\pi // \mu \Longleftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}\ ,$$

em que se mantém a convenção anterior: *quando um dos denominadores for nulo, o numerador correspondente terá de ser também nulo.*

IV. Suponhamos agora dados *um plano* π de equação

$$ax + by + cz + d = 0$$

e um vector não nulo $\vec{u}_{\hookrightarrow}(a', b', c')$.



Então, se designarmos por ω o ângulo de $\vec{u}$ com π e por θ o ângulo de $\vec{u}$ com o vector $\vec{v}_{\hookrightarrow}(a, b, c)$, normal ao plano, será

$$\omega = 90° - \theta \quad \text{ou} \quad \omega = \theta - 90°$$

Em qualquer dos casos:

$$\text{sen}\ \omega = |\cos \theta|$$

Portanto o ângulo do vector $\vec{u}$ com o plano π é dado pela fórmula

$$(6) \qquad \text{sen}\ \theta = \left| \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \right|$$

Em particular, tem-se:

$$(7) \qquad \begin{cases} \vec{u} \,//\, \pi \iff aa' + bb' + cc' = 0 \\ \vec{u} \perp \pi \iff \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \end{cases}$$

A fórmula (6) permite achar o ângulo de uma recta AB com o plano π. Com efeito, sendo A e B pontos distintos, o ângulo da recta AB com o plano π é igual ao ângulo do vector $\overrightarrow{AB}$ ou do vector $\overrightarrow{BA}$ com π. Portanto, se tivermos

$$A \hookrightarrow (x_0, y_0, z_0) \quad , \quad B \hookrightarrow (x_1, y_1, z_1),$$

bastará, na fórmula (6), tomar

$$a' = x_1 - x_0 \quad , \quad b' = y_1 - y_0 \quad , \quad c' = z_1 - z_0$$

Analogamente para as condições (7) de paralelismo e perpendicularidade.

V. Dum modo geral, a recta que passa por dois pontos distintos $A \hookrightarrow (x_0, y_0, z_0)$ e $B \hookrightarrow (x_1, y_1, z_1)$, é definida pela *equação vectorial*

$$P = A + t(B - A),$$

onde t é um *parâmetro,* variável em $\mathbb{R}$. Esta equação traduz-se analiticamente pelo *sistema de equações paramétricas da recta:*

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

Eliminando t e pondo $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$, $c = z - z_0$, vem

$$(8) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

que são *equações cartesianas da recta que passa pelos pontos* A e B (ou que passa pelo ponto A e tem a direcção do vector $\overrightarrow{AB}$). Note-se que a fórmula (8) fornece *no máximo* duas equações independentes.

Reciprocamente, é sempre possível reduzir à forma (8) um sistema de equações de uma recta no espaço. Seja por exemplo o sistema

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3z = 2 \end{cases}$$

Resolvendo ambas as equações em ordem a *x*, vem

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y + 1}{2} \\ x = -3z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y + 1}{2} \\ x = \dfrac{z - 2/3}{-1/3} \end{cases}$$

Portanto, o sistema é equivalente à *dupla equação:*

$$x = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2/3}{-1/3}$$

A recta representada passa pois pelo ponto (0, − 1, 2/3) *e tem a direcção do vector* (1, 2, − 1/3).

Seja, agora, o sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ z + 5 = 0 \end{cases}$$

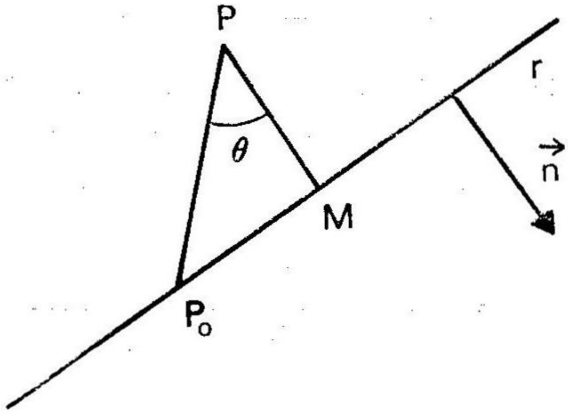
Este pode ser considerado equivalente à dupla equação

$$x = \frac{y + 3}{2} = \frac{z + 5}{0},$$

pois que, segundo a convenção anterior, o último denominador obriga a ser $z + 5 = 0$. Trata-se, pois, da recta que passa pelo ponto (0, — 3, — 5) e tem a direcção do vector (1, 2, 0) (recta de nível).

VI. Como última aplicação do produto interno, vamos deduzir uma fórmula que dá, no plano, a *distância de um ponto* $P \rightsquigarrow (x_1, y_1)$ *a uma recta* r *de equação*

(10) $$ax + by + c = 0$$



Seja M o *ponto de* r *mais próximo de* P e seja $P_0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$ um ponto arbitrário de r. Então a distância procurada será $|PM|$ e a equação (10) será equivalente a

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad (c = - ax_0 - by_0)$$

Ora

(11) $$|PM| = |P_0P| \cos \theta,$$

onde θ é a amplitude do ângulo $P_0\hat{P}M$, que é igual ao ângulo do vector $\overrightarrow{P_0P}$ com o vector $\vec{n} \rightsquigarrow (a, b)$ ou ao suplementar desse ângulo. Será pois

$$\cos \theta = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{|P_0P| \cdot |\vec{n}|}$$

donde, por substituição em (11) e notando que $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$|PM| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Finalmente, lembrando que $-ax_0 - by_0 = c$, obtemos a fórmula que dá a distância δ procurada:

$$\boxed{\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Analogamente se vê que a *distância de um ponto* $P \rightsquigarrow (x_1, y_1, z_1)$ *do espaço a um plano de equação* $ax + by + cz + d = 0$ *é dada pela fórmula*

$$\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Com as fórmulas anteriores podem resolver-se comodamente diversos tipos de problemas de geometria analítica, no plano ou no espaço, relativos a rectas e a planos.

6. **Representação analítica das isometrias e das semelhanças.** Comecemos pelo caso bidimensional. Consideremos *num mesmo plano* dois referenciais

$$(O, \vec{j}, \vec{k}) \quad , \quad (O', \vec{j}' \ \vec{k}')$$

Já sabemos que existe uma e uma só afinidade Φ que transforma o primeiro no segundo e que é definida analiticamente pelo sistema de equações:

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

onde $(a, b) \rightsquigarrow \vec{j}'$, $(c, d) \rightsquigarrow \vec{k}'$, $(p, q) \rightsquigarrow O'$, $(x, y) \rightsquigarrow P$ e $(x', y') \rightsquigarrow P'$ (no primeiro referencial), sendo P um ponto qualquer do plano e $P' = \Phi(P)$.

Mas, para que Φ seja uma isometria, é necessário (e suficiente) que o segundo referencial seja isométrico ao primeiro, isto é, que

$$|\vec{j}'| = |\vec{j}| \quad , \quad |\vec{k}'| = |\vec{k}| \quad , \quad \cos(\vec{j}', \vec{k}') = \cos(\vec{j}, \vec{k})$$

ou seja, em termos de 'produto interno':

$$(2) \qquad \vec{j}'^2 = \vec{j}^2 \quad , \quad \vec{k}'^2 = \vec{k}^2 \quad , \quad \vec{j}' \cdot \vec{k}' = \vec{j} \cdot \vec{k}$$

Em particular, se o primeiro é ortonormal, o segundo também o deve ser, isto é, as condições (2) *reduzem-se a*

$$(3) \qquad \vec{j}'^2 = \vec{k}'^2 = 1 \quad , \quad \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0$$

Por sua vez, estas traduzem-se analiticamente pelas seguintes:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \quad , \quad ac + bd = 0$$

Assim, na matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

devem ser iguais a 1 *as somas dos quadrados dos elementos em cada coluna e igual a zero a soma dos produtos dos termos homólogos das duas colunas* (veremos depois que o mesmo facto se verifica para as linhas).

Seria natural exprimir este facto dizendo que a matriz é *ortonormal*, mas estalebeceu-se infelizmente o hábito de dizer, neste caso, que a matriz é *ortogonal* e não iremos aqui contra o uso. Também se pode indicar o mesmo facto dizendo que a matriz é *unitária*, o que já é mais coerente.

Em conclusão:

TEOREMA 1. *Condição necessária e suficiente para que a afinidade Φ representada pelo sistema* (1), *em referencial ortonormal, seja uma isometria, é que a matriz do sistema seja ortogonal (ou unitária).*

Analisemos, agora, mais de perto o significado geométrico das matrizes ortogonais de 2.ª ordem. Para isso comecemos por observar o seguinte:

LEMA. *Em referencial ortonormal, cada componente de um vector $\vec{u}$ é o produto interno de $\vec{u}$ pelo vector de base relativo a essa componente.*

Seja com efeito $\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k}$. Então virá

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = x\vec{j}^2 + y(\vec{k} \cdot \vec{j}) \qquad \text{(porquê?)}$$

donde

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = x \qquad \text{(porquê?)}$$

Analogamente se vê que $\vec{u} \cdot \vec{k} = y$.

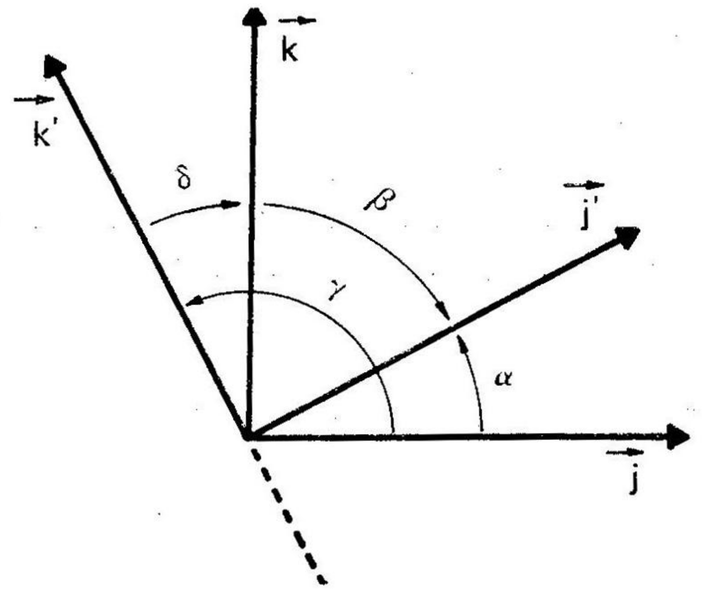
Em particular:

Se $\vec{u}$ é unitário, cada componente de $\vec{u}$ é o co-seno do ângulo de $\vec{u}$ com o vector de base relativo a essa componente (chamado 'co-seno director' de $\vec{u}$).

Com efeito, se $\vec{u}$ é unitário, tem-se

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = |\vec{u}|\,|\vec{j}| \cos(\vec{j}, \vec{u}) = \cos(\vec{j}, \vec{u})$$

e analogamente para $\vec{u} \cdot \vec{k}$.



Posto isto, consideremos novamente a matriz

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

e suponhamos que esta é ortogonal (sendo ortonormal o primeiro referencial). Então, designando por α, β, γ, δ, respectivamente, os ângulos de $\vec{j}'$ com $\vec{j}$ e com $\vec{k}$, e de $\vec{k}'$ com $\vec{j}$ e com $\vec{k}$, tem-se:

$$a = \cos\alpha \quad , \quad b = \cos\beta \quad , \quad c = \cos\gamma \quad , \quad d = \cos\delta$$

Por outro lado é fácil ver que

$$\beta = 90° - \alpha \quad , \quad \delta = \gamma - 90°$$

donde $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\delta = \operatorname{sen}\gamma$.

Posto isto, dois casos se podem dar:

1.° caso: os dois referenciais são positivamente isométricos (caso da figura). Então $\gamma = 90° + \alpha$ e portanto

$$\cos\gamma = -\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad \operatorname{sen}\gamma = \cos\alpha$$

Assim

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Portanto, neste caso, a isometria Φ, definida *por* (1), *é um deslocamento, composto da rotação* Φ_0 *de amplitude* α *em torno de* O *e da translação* $\overrightarrow{OO'}$.

2.° *caso: os dois referenciais são negativamente isométricos.* Neste caso tem-se, como é fácil ver,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Vê-se então que Φ é uma isometria negativa, composta de um deslocamento (como o anterior) e de uma simetria.

Vejamos, agora, *como se determina a transformação inversa da afinidade Φ, definida pelo sistema:*

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

Este é o equivalente ao seguinte

$$\begin{cases} ax + cy = x' - p \\ bx + dy = y' - q \end{cases},$$

o qual, resolvido em relação a x, y conduz a um sistema equivalente, da forma:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = a'(x' - p) + c'(y' - q) \\ y = b'(x' - p) + d'(y' - q) \end{cases}$$

Resta pois determinar os coeficientes a', b', c', d', pois que os termos independentes são $-a'p - c'q$, $-b'p - d'q$. Mas é claro que a', b' são agora as componentes do vector $\vec{j}$ na base (j', k'), enquanto c', d' são as componentes do vector $\vec{k}$ na referida base. *Ora, sendo Φ uma isometria e sendo os referenciais ortonormais, estas componentes estão automaticamente determinadas.* Com efeito, tem-se:

$$\cos(\vec{j}, \vec{j}') = \cos(\vec{j}', \vec{j}) = a \quad , \quad \cos(\vec{j}, \vec{k}') = \cos(\vec{k}', \vec{j}) = c$$

$$\cos(\vec{k}, \vec{j}') = \cos(\vec{j}', \vec{k}) = b \quad , \quad \cos(\vec{k}, \vec{k}') = \cos(\vec{k}', \vec{k}) = d$$

	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{j}'$	a	c
$\vec{k}'$	b	d

A situação está evidenciada no quadro da página anterior, em que, nas colunas, se indicam as componentes de $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ no 1.° referencial e, nas linhas, as componentes de $\vec{j}$, $\vec{k}$ no 2.° referencial. Em conclusão, tem-se na referida hipótese:

$$\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

isto é: a matriz do sistema (5) resulta da matriz do sistema (4), trocando alternadamente linhas com colunas. Exprime-se este facto dizendo que a 2.ª matriz é a *transposta* da 1.ª (e vice-versa). Por conseguinte:

TEOREMA 2. *Quando se adoptam referenciais ortonormais, a matriz da transformação inversa, Φ^{-1}, de uma isometria Φ, é a transposta da matriz de Φ.*

Em particular, verifica-se o facto já enunciado:

COROLÁRIO. *A transposta de uma matriz ortogonal ainda é uma matriz ortogonal.*

Assim, no caso anterior, ter-se-á:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \quad , \quad ab + cd = 0,$$

como consequência das relações análogas entre colunas.

Note-se que estas considerações se aplicam, na sua essência, ao problema equivalente de *mudança de coordenadas*. Já vimos como o sistema

$$\begin{cases} x = ax' + cy' + p \\ y = bx' + dy' + q \end{cases}$$

permite passar das coordenadas x, y de um ponto P no referencial $(O, \vec{j}, \vec{k})$ para as coordenadas x′, y′ do *mesmo ponto* no referencial $(O', \vec{j}', \vec{k}')$. *Se ambos os referenciais são ortonormais,* o problema simplifica-se, visto que a matriz do sistema é ortogonal: a matriz do sistema inverso é simplesmente a transposta da primeira.

Passemos, agora, ao caso das *transformações de semelhança.* Como vimos atrás, a afinidade Φ que transforma o referencial $(O, \vec{j}, \vec{k})$ no referencial $(O', \vec{j}', \vec{k}')$ é uma semelhança, sse o 2.° referencial é semelhante ao primeiro. Ora, se este é ortonormal, o segundo será semelhante ao primeiro, sse verificar as condições

$$\vec{j}'^2 = \vec{k}'^2 = r^2 \quad , \quad \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0 \; ,$$

(sendo *r* a *razão de semelhança*) ou o que é equivalente:

$$\left(\frac{1}{r}\vec{j}'\right)^2 = \left(\frac{1}{r}\vec{k}'\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{1}{r}\vec{j}'\right) \cdot \left(\frac{1}{r}\vec{k}'\right) = 0$$

Mas isto equivale a dizer que a matriz

$$\begin{bmatrix} a/r & c/r \\ b/r & d/r \end{bmatrix}$$

é ortogonal (ou unitária). Chama-se *produto de uma matriz* A *por um número* r, e representa-se por r A, a matriz que resulta de A multiplicando cada um dos seus elementos por r. Podemos então escrever:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} a/r & c/r \\ b/r & d/r \end{bmatrix}$$

e concluir:

TEOREMA 3. *Condição necessária e suficiente para que uma afinidade* Φ *seja uma semelhança de razão* r *é que a sua matriz seja igual ao produto de* r *por uma matriz unitária.*

Em particular, se Φ é uma semelhança positiva, ter-se-á, pelo que vimos atrás,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

sendo α o ângulo de $\vec{j}'$ com $\vec{j}$. Neste caso, segundo o exposto no Capítulo II, a semelhança Φ_o pode ser identificada com o número complexo

$$r\,E(\alpha) = r\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Finalmente, as considerações anteriores podem ser estendidas sem dificuldade ao caso tridimensional. Consideremos dois referenciais cartesianos

$$(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m}) \quad , \quad (O', \vec{j}', \vec{k}', \vec{m}')$$

e a afinidade Φ que transforma o primeiro no segundo. Então, se tivermos, relativamente ao 1.° referencial,

$$\vec{j}' \rightsquigarrow (a, b, c) \quad , \quad \vec{k}' \rightsquigarrow (a', b', c'),$$

$$\vec{m}' \rightsquigarrow (a'', b'', c'') \quad , \quad O' \rightsquigarrow (p, q, s)$$

a aplicação Φ transforma cada ponto $P \rightsquigarrow (x, y, z)$ no ponto $P' \rightsquigarrow (x', y', z')$ tal que

$$(6) \qquad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + p \\ y' = bx + b'y + b''z + q \\ z' = cx + c'y + c''z + s \end{cases}$$

A matriz deste sistema

$$\begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

diz-se *ortogonal* (ou *unitária*), sse

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

e

$$aa' + bb' + cc' = aa'' + bb'' + cc'' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

Como no caso bidimensional, conclui-se o seguinte:

TEOREMA 4. *Se o 1.° referencial é ortonormal, então* Φ *é uma isometria, sse o 2.° referencial também for ortonormal, o que equivale a dizer que a matriz de* Φ *é ortogonal. Então a aplicação inversa,* Φ^{-1}, *é definida, em relação ao 2.° referencial, pelo sistema*

$$(7)\qquad \begin{cases} x = a\,(x' - p) + b\,(y' - q) + c\,(z' - s) \\ y = a'(x' - p) + b'(y' - q) + c'(z' - s) \\ z = a''(x' - p) + b''(y' - q) + c''(z' - s) \end{cases}$$

sendo a sua matriz a transposta da matriz de Φ.

É claro que este teorema se aplica, *mutatis mutandis*, ao problema da mudança de coordenadas.

Por outro lado:

TEOREMA 5. *Na mesma hipótese,* Φ *é uma semelhança de razão* r, *sse a sua matriz é igual ao produto de* r *por uma matriz unitária.*

Resta ver como, no caso tridimensional, se consegue averiguar analiticamente se uma dada isometria ou semelhança é positiva ou negativa. Para isso está naturalmente indicado o *conceito de determinante*, de que vamos tratar, em estreita ligação com o de *produto externo de dois vectores.*

7. **Produto externo de dois vectores do plano*.** Suponhamos adoptado no plano um sentido positivo de rotação, por exemplo o sentido anti-horário. Posto isto, chama-se *produto*

externo de dois vectores $\vec{u}, \vec{v}$ do plano, e representa-se por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ler '$\vec{u}$ externo $\vec{v}$') o número real assim definido

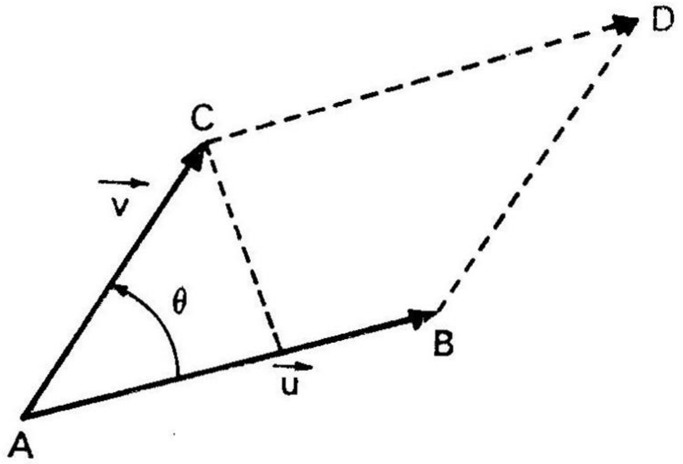
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}| \text{ sen } (\vec{u}, \vec{v})$$

Aqui, sen $(\vec{u}, \vec{v})$ representa, naturalmente, o seno do ângulo orientado de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ — portanto positivo ou negativo, conforme este ângulo tiver o sentido positivo (anti-horário) ou o negativo.

Para interpretar geometricamente a definição anterior, convém distinguir dois casos:

1.° caso: *os vectores* $\vec{u}, \vec{v}$ *são colineares.* Então sen $\theta = 0$ e portanto $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

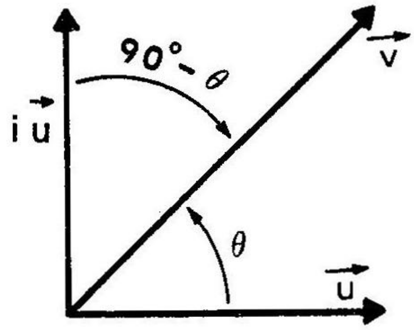
2.° caso: *os vectores* $\vec{u}, \vec{v}$ *não são colineares.*



Tomemos então três pontos A, B, C tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e seja $D = B + \vec{v} = C + \vec{u}$. Então $|\vec{u}|$ é medida de um dos lados do paralelogramo [ABCD] e $|\vec{v}|\ |\text{sen } \theta|$ é a medida da altura do paralelogramo relativamente a esse lado. Por conseguinte:

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ *é a medida da área do paralelogramo,* com o sinal + ou − conforme o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é positivo ou negativo (positivo no caso da figura, adoptando o sentido anti-horário).

Convém desde já notar que a noção de produto externo pode ser dada a partir da de produto interno, utilizando números imaginários.



Tem-se, com efeito

$$(i\vec{u}) \cdot \vec{v} = |i\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos (i\vec{u}, \vec{v})$$

e como $|i\vec{u}| = |\vec{u}|$, $\cos (i\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{sen} (\vec{u}, \vec{v})$, tem-se

1) $$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = (i\vec{u}) \cdot \vec{v}}$$

Posto isto, é bem fácil estabelecer as seguintes propriedades do produto externo, em que, para comodidade de escrita, se omitem as setas sobre as letras:

PROPRIEDADES DO PRODUTO EXTERNO

I. $u \wedge v = - v \wedge u \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_\pi$

II. $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w \quad , \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V}_\pi$

III. $u \wedge (av) = a(u \wedge v) \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_\pi ; \; a \in \mathbb{R}$

IV. $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow u, v$ *são colineares*

V. $j \wedge k = 1$, se (j, k) *é uma base ortonormal* [1].

---

[1] Quando nada se diz em contrário, subentende-se que a base adoptada tem o sentido positivo, neste caso o sentido anti-horário ou sinistrorso (isto é, k deve estar à esquerda de j).

As propriedades I, III, IV e V são consequência imediata da definição. Quanto à propriedade II, resulta imediatamente de (1) e da propriedade correspondente para o produto interno.

Como se vê, *o produto externo, ao contrário do produto interno, não é comutativo (ou simétrico)*. Exprime-se a propriedade I, dizendo que o produto externo é *anti-simétrico.*

De I e II deduz-se imediatamente que o produto externo não só é *distributivo à esquerda* (o que se indica em II), como também é *distributivo à direita.* Por sua vez, de I e III, deduz-se que também:

$$\text{III}'. \quad (au) \wedge v = a(u \wedge v) \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_\pi;\ a \in \mathbb{R}$$

A conjunção da distributividade (bilateral) com as propriedades III e III' exprime-se dizendo que o produto externo $u \wedge v$ é *bilinear* (isto é, linear à direita e à esquerda) [1].

Suponhamos agora fixado no plano uma base ortonormal (j, k) *e seja*

$$u = aj + bk \quad , \quad v = cj + dk$$

Procuremos a expressão analítica de $u \wedge v$. Tem-se

$$(aj + bk) \wedge (cj + dk) = aj \wedge (cj + dk) + bk \wedge (cj + dk)$$

$$= ac \cdot j \wedge j + ad \cdot j \wedge k + bc \cdot k \wedge j + bd \cdot k \wedge k \qquad \text{(porquê?)}$$

Mas $j \wedge j = k \wedge k = 0 \quad , \quad j \wedge k = -k \wedge j = 1$ (porquê?)

Logo

$$\boxed{u \wedge v = ad - bc}$$

Ao mesmo tempo, vê-se que a operação de produto externo fica completamente determinada pela conjunção das suas propriedades I-V.

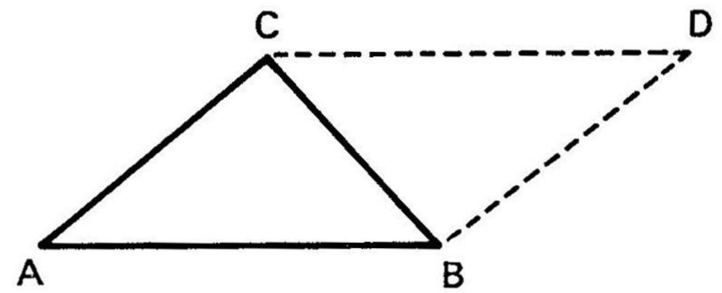
---

(1) Note-se que o produto interno também é **bilinear.** Mas enquanto este é **simétrico,** o produto externo é **anti-simétrico.**

O produto externo $u \wedge v$ (no plano) também é chamado *determinante dos vectores* u, v, por esta ordem, e escreve-se

$$u \wedge v = \det(u, v) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \text{ (na base adoptada)}$$

Uma primeira aplicação do produto externo encontra-se no cálculo de áreas de figuras poligonais do plano.



Por exemplo, se tivermos, relativamente a um referencial ortonormal,

$$A \curvearrowright (x_0, y_0) \quad , \quad B \curvearrowright (x_1, y_1) \quad , \quad C \curvearrowright (x_2, y_2)$$

sendo A, B, C não colineares, *a área do triângulo* [ABC] *será metade do módulo de* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Como

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix},$$

segue-se que a área do triângulo é

$$S = \frac{1}{2} \left| (x_1 - x_0)\ (y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)\ (y_1 - y_0) \right|$$

Uma outra aplicação refere-se ao estudo da isometria Φ definida por um sistema

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy + p \\ y' = bx + dy + q \end{cases}$$

transformando o referencial ortonormal (O, j, k) num referencial ortonormal (O′, j′, k′). É claro que:

O segundo referencial é positivamente isométrico ao primeiro, sse j′ $\wedge$ k′ > 0 *relativamente ao 1.º referencial, isto é, sse*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} > 0$$

Será, pois, esta uma condição necessária e suficiente para que Φ *seja um deslocamento.* Aliás temos neste caso (e só neste):

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Diz-se que este é o *determinante do sistema* (2), ou o *determinante da respectiva matriz* (ou ainda, o *determinante de* Φ *no 1.º referencial*).

Analogamente se reconhece se uma dada semelhança (ou mesmo uma afinidade qualquer) é positiva ou negativa.

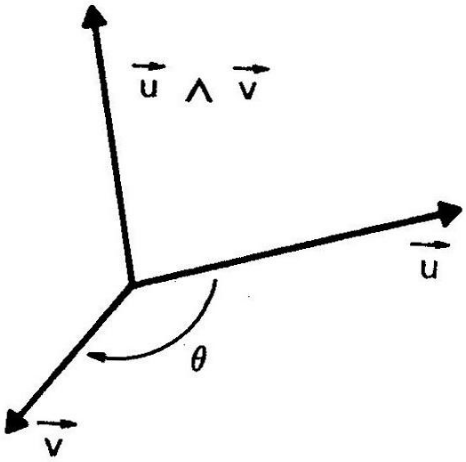
8. **Produto externo de dois vectores do espaço.** Suponhamos fixado no espaço $\mathcal{E}$ *um sentido positivo para triedros* — normalmente o sentido horário ou dextrorso (ver pág. 93) ([1]). Posto isto, chama-se *produto externo* de dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, e representa-se por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, o vector $\vec{p}$ que verifica as seguintes condições:

1) $$|\vec{p}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\operatorname{sen}\,(\vec{u}, \vec{v})|$$

2) se $\vec{u}$, $\vec{v}$ não são colineares, $\vec{p}$ é *perpendicular* a ambos os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e o seu sentido é tal que o terno $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{p})$ tem

([1]) O contrário do que sucede no plano, em que o sentido adoptado é normalmente o sinistrorso.

o *sentido positivo*, isto é, $\vec{v}$ fica à direita de $\vec{u}$ em relação a $\vec{p}$ (se o sentido adoptado for, como é habitualmente, o sentido horário ou dextrorso).



Na prática, pode usar-se neste caso a seguinte regra intuitiva:

Se, na mão esquerda, o dedo médio representa $\vec{u}$ *e o polegar o vector* $\vec{v}$*, então o indicador dá o sentido de* $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Como se vê, o produto externo de dois vectores do espaço é um vector do espaço e não um número. Por isso o produto externo de dois vectores do espaço é também chamado *produto vectorial*. Trata-se pois de uma *operação interna em* $\mathcal{V}$, ao contrário do que sugere a designação (já atrás apontámos o desacordo entre a terminologia tradicional e a moderna).

As PROPRIEDADES FORMAIS DO PRODUTO EXTERNO NO ESPAÇO são idênticas às do conceito correspondente no plano, excepto a última (omitimos as setas para simplificar):

I. $u \wedge v = -v \wedge u \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$

II. $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w \quad , \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V}$

III. $u \wedge (av) = a(u \wedge v) \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{V};\ a \in \mathbb{R}$

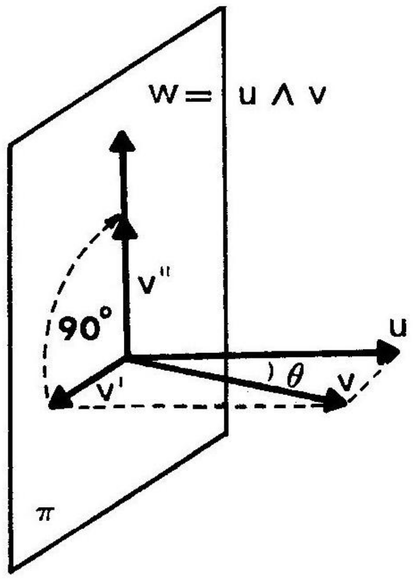
IV. $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow u$ *é colinear com* v

V. $j \wedge k = m \quad , \quad k \wedge m = j \quad , \quad j \wedge m = -k \quad ,$ se (j, k, m) *é uma base ortonormal* [1].

---

[1] Quando nada se diz em contrário, subentende-se que o sentido da base é positivo (normalmente dextrorso).

Todas estas propriedades são consequência imediata da definição, excepto a segunda. Quanto a esta, comecemos por notar que a conjunção das propriedades II e III equivale a dizer que *a aplicação* $v \rightsquigarrow u \wedge v$ *é linear, para todo o* u e $\mathcal{V}$. Daqui e de I deduz-se imediatamente que *a aplicação* $u \rightsquigarrow u \wedge v$ *também é linear.* E a conjunção destes dois factos exprime-se dizendo que o produto externo $u \wedge v$ é *bilinear.*



Seja então *u* um vector qualquer do espaço. Para demonstrar que a aplicação $v \rightsquigarrow u \wedge v$ é linear, consideremos um plano π perpendicular a u e seja:

v' a projecção ortogonal do vector *v* sobre o plano π;
v'' o vector de π que se obtém dando a *v'* uma rotação de 90° no sentido positivo (dextrorso, na figura) em relação ao vector *u*;
w o produto de $|u|$ por v''.

Facilmente se reconhece então que:

1) $|v'| = |v|\,|\text{sen}\ \theta|$, sendo θ o ângulo $\widehat{uv}$;

2) $|w| = |u|\,|v|\,|\text{sen}\ \theta|$;

3) o terno (u, v, w) tem o sentido positivo.

Logo $w = u \wedge v$.

Por outro lado, é fácil ver também que cada uma das aplicações $v \rightsquigarrow v'$ (projecção ortogonal sobre π), $v' \rightsquigarrow v''$ (rotação de 90° no plano π, no sentido positivo em relação a u) e $v'' \rightarrow w$ (multiplicação por $|u|$) são todas três lineares. Logo, a aplicação composta destas,

$$v \rightarrow w = u \wedge v,$$

também é linear, como se pretendia demonstrar.

Posto isto, suponhamos fixada no espaço uma base ortonormal (j, k, m) *e seja*

$$u = aj + bk + cm \quad , \quad v = a'j + b'k + c'm$$

Procuremos a expressão cartesiana de $u \wedge v$. Visto que o *produto externo é bilinear,* virá então:

$$(aj + bk + cm) \wedge (a'j + b'k + c'm) =$$
$$= ab' \cdot j \wedge k + ac' \cdot j \wedge m + a'b \cdot k \wedge j + bc' \cdot k \wedge m + a'c \cdot m \wedge j +$$
$$+ b'c \cdot m \wedge k,$$

visto que $j \wedge j = k \wedge k = m \wedge m = 0$.

Por outro lado, como

$j \wedge k = m \quad , \quad j \wedge m = -k \quad , \quad k \wedge j = -m \quad , \quad k \wedge m = j \quad ,$

$m \wedge j = k \quad , \quad m \wedge k = -j$ (porquê?), virá finalmente

$$\boxed{u \wedge v = (bc' - b'c)j - (ac' - a'c)k + (ab' - a'b)m}$$

ou seja, usando determinantes:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} m$$

Como mnemónica, convém notar que estes determinantes se deduzem da *matriz rectangular*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix},$$

suprimindo, respectivamente, as colunas 1, 2 e 3.

A noção de produto externo no espaço tem numerosas aplicações em física. Mas encontra, igualmente, várias aplicações interessantes em matemática pura, nomeadamente em geometria analítica.

Por exemplo, se tivermos, num referencial ortonormal,

$$A \rightarrowtail (x_0, y_0, z_0) \ , \ B \rightarrowtail (x_1, y_1, z_1) \ , \ C \rightarrowtail (x_2, y_2, z_2),$$

sendo A, B, C não colineares, a área do triângulo [ABC] será metade do módulo de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Ora, as componentes deste produto externo são

$$X = \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

$$Y = -\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}$$

$$Z = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

e a área do triângulo será pois,

$$\frac{1}{2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Analogamente se determinam as áreas de paralelogramos e de outras figuras poligonais.

Outros exemplos de aplicação:

I. *Por um ponto dado* (x_0, y_0, z_0), *conduzir uma recta perpendicular a duas rectas dadas:*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad , \quad \frac{x - x_2}{a'} = \frac{y - y_2}{b'} = \frac{z - z_2}{c'}$$

Visto que as rectas têm a direcção dos vectores $\vec{u} \rightarrowtail (a, b, c)$, $\vec{v} \rightarrowtail (a', b', c')$, a recta pedida deverá ter a direcção do vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Logo, esta recta será representada analiticamente pelas equações:

$$\frac{x-x_0}{bc'-b'c} = \frac{y-y_0}{a'c-ac'} = \frac{z-z_0}{ab'-a'b}$$

II. *Por um ponto dado* (x_0, y_0, z_0) *conduzir um plano perpendicular a dois planos dados:*

$$ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad a'x + b'y + c'z + d = 0.$$

É fácil ver que o plano pedido tem por equação

$$(bc'-b'c)\ (x-x_0)+(a'c-a'c)\ (y-y_0)+(bc'-b'c)\ (z-z_0)=0$$

Analogamente se resolvem os seguintes problemas:

III. *Por um ponto, conduzir uma recta perpendicular a uma recta dada e paralela a um plano dado.*

IV. *Por um ponto, conduzir um plano perpendicular a um plano dado e paralelo a uma recta dada.*

V. *Determinar analiticamente o plano que passa por três pontos dados.*

NOTA SOBRE AS PROPRIEDADES DO PRODUTO EXTERNO NO ESPAÇO. Como vimos, para cada par (u, v) de elementos de $\mathcal{V}$ existe sempre um e um só elemento de $\mathcal{V}$, que se chama produto externo de u por v e se representa por $u \wedge v$. Logo o par $(\mathcal{V}, \wedge)$ é um grupóide. Pergunta-se:

1) Será este grupóide comutativo?

2) Será associativo?

3) Terá elemento neutro?

Facilmente se reconhece que as respostas a estas três perguntas são negativas. Para reconhecer, por exemplo, que a operação $\wedge$ não é associativa, basta notar que, sendo (j, k, m) uma base ortonormal, se tem

$$(j \wedge k) \wedge k = -j \quad , \quad j \wedge (k \wedge k) = 0$$

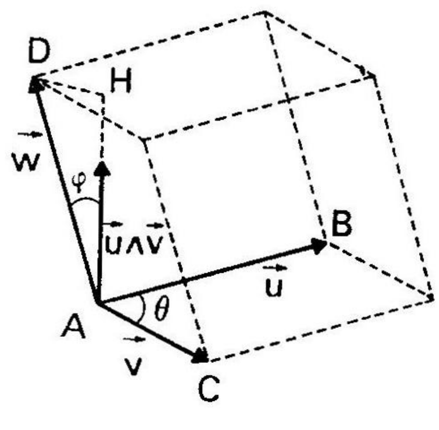
Vimos também que o produto externo é distributivo e mesmo bilinear. Mas o terno $(\mathcal{V}, +, \wedge)$ não é um anel. Porquê?

9. **Produto misto*.** Chama-se *produto misto de três vectores* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (ou *determinante de* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) e representa-se por $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ o número $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Tem-se pois, por definição:

$$(1) \qquad \boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}}$$

É fácil encontrar o significado geométrico do produto misto, quando $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ não são complanares.



Consideremos quatro pontos A, B, C, D, tais que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v} \quad , \quad \overrightarrow{AD} = \vec{w}$$

e seja $\mathscr{P}$ o paralelepípedo que admite $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ como arestas. Então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dá-nos a área da face de $\mathscr{P}$ que admite $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ como lados. Por sua vez, a altura de $\mathscr{P}$ relativa a esta face (representada na figura por $\overline{AH}$) é igual a $|\vec{w}| \cos \varphi$, sendo φ o ângulo de $\vec{w}$ com $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Logo o volume de $\mathscr{P}$ é dado por

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \varphi = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Quanto ao sinal do produto misto, será + ou −, conforme o terno $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ for positivo ou negativo.

Para obter a representação analítica do produto misto, consideremos uma base ortonormal (j, k) e seja

$$\vec{u} \rightsquigarrow (a, b, c) \quad , \quad \vec{v} \rightsquigarrow (a', b', c') \quad , \quad \vec{w} \rightsquigarrow (a'', b'', c'')$$

Então é fácil ver atendendo a (1), que

$$(2) \quad \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (bc' - b'c')\, a'' - (ac' - a'c)\, b'' + (ab' - a'b) c'',$$

o que também se escreve abreviadamente do seguinte modo:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

Esta última expressão é chamada *determinante de 3.ª ordem* (com 3 linhas e 3 colunas). A fórmula (2) dá o *desenvolvimento do determinante segundo os elementos da 3.ª coluna.*

Da definição e do significado geométrico deduzem-se as seguintes

PROPRIEDADES DO PRODUTO MISTO:

I. *O produto misto é linear em relação a cada um dos factores.*

Por exemplo:

$$\det(u_1 + u_2, v, w) = \det(u_1, v, w) + \det(u_2, v, w)$$

$$\det(au, v, w) = a \det(u, v, w) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

II. *O produto misto é anti-simétrico, isto é, toma o valor simétrico quando se trocam entre si dois quaisquer dos factores.*

Por exemplo:

$$\det(v, u, w) = -\det(u, v, w)$$

III. $\det(j, k, m) = 1$

As propriedades I e II exprimem-se dizendo que o produto misto é uma *forma trilinear anti-simétrica.*

Da propriedade II (ou da própria definição de 'produto misto') resulta que o *produto misto é nulo,* se dois dos factores são iguais.

Por exemplo:

$$u = v \Rightarrow \det(u, v, w) = 0$$

É claro que as propriedades anteriores podem ser traduzidas em *termos de colunas,* para determinantes.

Por exemplo:

Trocando entre si duas colunas de um determinante, este toma o valor simétrico.

Se duas colunas de um determinante são iguais, o determinante é nulo.

Etc.

Por outro lado, é fácil ver que:

O valor de um determinante não muda quando se trocam ordenadamente as suas linhas com as suas colunas, isto é:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Com efeito, desenvolvendo um e outro segundo os elementos da 3.ª coluna, obtém-se:

$$\begin{aligned} &(bc' - b'c)a'' - (ac' - a'c)b'' + (ab' - a'b)c'' = \\ = &(a'b'' - a''b')c - (ab'' - a''b)c' + (ab' - a'b)c'' = \\ = &ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ac'b'' - a'bc'' \end{aligned}$$

Este facto permite traduzir as propriedades anteriores em *termos de linhas, para determinantes.*

Chama-se *menor complementar* de um elemento qualquer de um determinante ao determinante que dele se obtém suprimindo a linha e a coluna que cruzam nesse elemento. E chama-se *complemento algébrico* dum elemento dum determinante ao seu menor complementar multiplicado por $(-1)^{r+s}$, em que r e s são os números de ordem da linha e da coluna a que pertence esse elemento.

Das propriedades anteriores resulta que:

O valor de um determinante é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos complementos algébricos.

Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

$$= -b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \text{etc.}$$

A noção de produto misto tem várias aplicações. Vamos indicar as principais, em geometria analítica.

Em primeiro lugar, o produto misto permite calcular facilmente o volume de um paralelipípedo (segundo o significado geométrico atrás indicado), bem como de outros domínios poliédricos.

Por outro lado, o produto misto permite saber se uma isometria Φ definida por um sistema

$$\begin{cases} x = ax + a'y + a''z + p \\ y = bx + b'y + b''z + q \\ z = cx + c'y + c''z + r \end{cases}$$

é positiva ou negativa. Supondo que Φ transforma um referencial ortonormal (O, j, k, m) num referencial ortonormal (O′, j′, k′, m′), é claro que:

O segundo referencial é positivamente isométrico ao primeiro, sse $\det(j', k', m') > 0$ *relativamente ao 1.° referencial isto é, sse*

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} > 0$$

Aliás é fácil ver, atendendo à propriedade III (aplicável agora à 2.ª base) que o valor do determinante neste caso é precisamente 1.

Analogamente se reconhece se uma dada semelhança (ou mais geralmente uma afinidade) é positiva ou negativa.

10. **Número de dimensões de um espaço vectorial*.** A noção geral de espaço vectorial — que já foi atrás definida — tem uma grande importância em matemática moderna e nas suas aplicações, nomeadamente à física, à engenharia, à estatística e à economia (por exemplo, na programação linear).

Seja V um espaço vectorial qualquer sobre um corpo K e suponhamos que existe uma sequência

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

de *n* vectores de V, que verifica as seguintes condições:

1) todo o vector *u* de V se pode exprimir como *combinação linear* dos primeiros, isto é, existem *n* elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de K tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

2) os vectores $u_1, \ldots u_n$ são *linearmente independentes,* isto é, são todos não nulos e nenhum deles se pode exprimir como combinação linear dos restantes [1].

Diz-se então que a sequência $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ é uma *base* do espaço V e prova-se que *qualquer outra base de* V *tem o mesmo número de elementos.* Esse número *n* é chamado o *número de dimensões* (ou simplesmente a *dimensão*) do espaço vectorial V.

Por exemplo, o conjunto $\mathcal{V}_r$ dos vectores duma recta r é um espaço vectorial (real) com *uma dimensão,* o conjunto $\mathcal{V}_\pi$ dos vectores dum plano π é um espaço vectorial com *duas dimensões,* o conjunto $\mathcal{V}$ dos vectores do espaço ordinário é um espaço vectorial com *três dimensões* (reais).

Outros exemplos:

O cojunto $\mathbb{R}^n$ de todas as sequências de *n* números reais, com as definições de 'soma' e de 'produto por escalares' introduzidas nas páginas 54 e 55, é um espaço vectorial (real) com *n* dimensões, qualquer que seja o número natural *n.* Por exemplo, uma das bases do espaço $\mathbb{R}^4$ é constituída pelos vectores

$$e_1 = (1, 0, 0, 0)\ ,\ e_2 = (0, 1, 0, 0)\ ,\ e_3 = (0, 0, 1, 0)\ ,\ e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

---

(1) Se $n = 1$, a sequência reduz-se ao vector u_1 e diz-se **linearmente independente,** sse $u_1 \neq 0$.

Com efeito, estes vectores são linearmente independentes, como facilmente se verifica, e tem-se

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \quad , \quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Analogamente se reconhece que o conjunto $\mathbb{C}^n$ de todas as sequências de *n* números complexos é um espaço vectorial (complexo) com *n* dimensões.

Por sua vez, o conjunto de todos os polinómios com x

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

relativos a um corpo K qualquer e de *grau* $\leqslant n-1$ (isto é, podendo ser $a_1 \neq 0$ ou $a_1 = 0$) é um espaço vectorial sobre K com n *dimensões* e facilmente se vê que uma das suas bases é precisamente a sequência de *n* polinómios

$$x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^2, x, 1$$

Convenciona-se ainda dizer que um espaço vectorial V sobre um corpo K tem *zero dimensões* (ou *dimensão nula*) sse V se reduz ao vector nulo, 0, isto é, sse $V = \{0\}$.

Quando V não tem dimensão nula e não existe uma sequência (finita) de vectores que verifique as condições 1), 2) atrás indicadas, diz-se que V tem uma *infinidade de dimensões* (ou *dimensão infinita*). Mas, mesmo neste caso, existe uma definição que generaliza as anteriores e que atribui a cada espaço vectorial V, um determinado número cardinal infinito ν, chamado o *número de dimensões de* V.

Por exemplo, o conjunto dos *polinómios em* x *de coeficientes reais e de todos os graus possíveis* é, como se vê facilmente, um espaço vectorial real de dimensão infinita, E, segundo a referida definição (que não vale a pena reproduzir aqui), o seu número de dimensões é o cardinal χ_0. Uma base deste espaço é precisamente a *sucessão* de polinómios

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

Por sua vez, o conjunto $\mathbb{R}^{\infty}$, constituído por todas as sucessões

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

de números reais (aplicações de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$) é também um espaço vectorial de dimensão infinita; mas, segundo a referida definição, o número de dimensões de $\mathbb{R}^{\infty}$ é a potência do *contínuo* — e não a do *numerável*. Mas já tem dimensão $\aleph_0$ o subespaço de $\mathbb{R}^{\infty}$ constituído pelas *sucessões de números reais que se anulam todos a partir de certa ordem (ordem esta variável de sucessão para sucessão)*. Aliás, é fácil ver que este último espaço é *isomorfo* ao espaço dos polinómios em x reais de todos os graus (isto é, existe uma aplicação *linear biunívoca* de um dos espaços sobre o outro).

Considerações análogas para o espaço $\mathbb{C}^{\infty}$.

Finalmente, note-se que o conjunto $\mathcal{F}_I$ de *todas as funções reais definidas num intervalo* I *da recta* é também um espaço vectorial real de dimensão infinita (relativamente às noções usuais de 'soma de duas funções' e de 'produto de uma função por um número real'). O número de dimensões de $\mathcal{F}_I$ é a potência do contínuo — e o mesmo sucede com o subespaço de $\mathcal{F}_I$ constituído por *todas as funções reais contínuas em* I. (Por que razão este conjunto é um subespaço vectorial de $\mathcal{F}_I$? Leia a nota final deste número.)

Deve-se registar por último o seguinte facto:

As considerações relativas a espaços vectoriais de dimensões infinitas intervêm hoje cada vez mais nas aplicações da matemática à física (nomeadamente à física do átomo), bem como a outros domínios.

NOTA. Seja V um espaço vectorial sobre um corpo K. Diz-se que um subconjunto U de V é um *subespaço vectorial de* V, quando constitui ainda um espaço vectorial sobre K, relativamente às operações de 'soma' e de 'produtos por escalares' do espaço V, *restringidas* a elementos de U. Em particular, U será, neste caso, *submódulo de* V. Facilmente se reconhece o seguinte *teorema:*

Um subconjunto U *de* V *é um subespaço vectorial de* V, *sse verifica as duas condições seguintes:*

$$1)\quad u,\ v \in U \Rightarrow u + v \in U$$

$$2)\quad \alpha \in K \wedge u \subset U \Rightarrow \alpha u \in U$$

11. **Noção geral de espaço afim.** Seja K um corpo qualquer (na prática, K é geralmente o corpo real ou o corpo complexo). Chama-se *espaço afim sobre* K todo o conjunto E, constituído por elementos a, b,... de natureza qualquer (a que se convenciona chamar *'pontos'*) ao qual está associado um espaço vectorial V sobre K, de modo a serem verificadas as seguintes condições:

A1. A cada par ordenado (a, b) de elementos de E (pontos) corresponde um e um só elemento *u* de V (vector) que designaremos por $\overrightarrow{ab}$.

A2. $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$, $\forall a,\ b \in E$

A3. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$, $\forall a,\ b,\ c \in E$

A4. Dados um ponto *a* em E e um vector *u* em V, existe um e um só ponto *b* em E, tal que

$$\overrightarrow{ab} = u$$

O ponto b que verifica esta condição é chamado *'soma de a com* u', e escreve-se

$$b = a + u$$

Na mesma hipótese se diz que o vector *u* (ou seja o vector $\overrightarrow{ab}$) é a diferença entre b e a, escrevendo-se então:

$$u = b - a$$

O número de dimensões do espaço vectorial V também é chamado número de dimensões do *espaço afim* E, a que V está associado.

Desde logo se reconhece que o espaço $\mathcal{E}$ usual é um *espaço afim (real) com três dimensões*, visto que lhe está associado, de harmonia com as condições A1-A4, o espaço vectorial real $\mathcal{V}$, que tem 3 dimensões. Analogamente: um plano é um espaço afim real bidimensional; uma recta é um espaço afim unidimensional; um conjunto reduzido a um ponto é um espaço afim com *zero dimensões* (correspondendo-lhe o espaço $\{O\}$).

Note-se que faz sentido falar de 'soma de dois vectores', mas não de 'soma de dois pontos' (apenas de 'diferença de dois pontos').

O conjunto de todos os possíveis *instantes* (ou *épocas*) relativos a um dado lugar, o conjunto de todos os possíveis potenciais eléctricos num dado ponto, etc. são *espaços afins reais de dimensão* 1. Com efeito, as diferenças entre dois instantes são elementos de um espaço vectorial com uma dimensão (o espaço dos *tempos decorridos* entre os instantes considerados); mas os instantes não são propriamente vectores, pois não faz sentido falar da 'soma de dois instantes': estes são apenas *pontos* de um espaço afim (e analogamente para potenciais) ([1]).

A TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA apresenta-nos um exemplo interessantíssimo de espaço afim real com 4 dimensões: o *espaço-tempo de Minkowski.* Cada *ponto* deste espaço é um *acontecimento elementar*, cujas coordenadas x, y, z, t, definem, respectivamente, a posição (x, y, z) e o instante t em que se verifica o acontecimento, *relativamente a um dado referencial de espaço e tempo* (constituído por exemplo por um ponto e três vectores não complanares, fixos em relação a um dado sólido ou sistema rígido, e por um *relógio*, fixo no mesmo sistema, que pode ser por exemplo a Terra, uma carruagem, uma nave espacial, etc.). Aliás, na teoria da relatividade, espaço e tempo são

---

([1]) Note-se que o **espaço afim dos instantes** está naturalmente **orientado,** no sentido do passado para o futuro; e que, por isso, os tempos são mais do que vectores: são **grandezas relativas.**

propriedades *relativas* dos acontecimentos, e não inteiramente *discerníveis* entre si.

Note-se também desde já o seguinte facto:

Todo o espaço vectorial V *pode ser considerado como espaço afim, desde que se faça corresponder a cada par ordenado* (u, v) *de elementos* u, v *de* V *o vector* v − u *de* V, *que poderíamos também designar por* $\overrightarrow{uv}$. *Com efeito, facilmente se reconhece que, deste modo, são verificadas as condições* A1 — A4, *estando* V *simultaneamente no papel de* E *e de* V. *Nesta ordem de ideias, os elementos de* V *podem ser chamados 'pontos' em vez de 'vectores'.*

Por exemplo, os elementos de $\mathbb{R}^n$ (sequências de *n* números reais) podem ser chamados 'vectores' ou 'pontos', conforme estivermos a considerar $\mathbb{R}^n$ como espaço vectorial ou como espaço afim.

Mas note-se que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira, como mostram os exemplos precedentes.

Um facto análogo se verifica na distinção entre 'grandeza' e 'número real'.

Todo o número real é uma grandeza, mas há grandezas de muitas espécies (p. ex. os comprimentos, os volumes, as massas, os tempos, etc.) que não podem ser considerados *naturalmente* como números reais (porquê?).

12. **Noções de recta, plano, conjunto convexo, etc. num espaço afim qualquer*.** Consideremos um espaço afim E sobre um corpo K e seja V o espaço vectorial que lhe está associado. Diz-se que um subconjunto D de E *é um subespaço afim de* E, sse o conjunto de todos os vectores $\overrightarrow{ab}$ definidos por pontos a, b de D é um subespaço vectorial U de V.

Por outros termos, o conjunto D é um subespaço afim de E, sse existe um subespaço vectorial U de V tal que:

1) $$a, b \in D \Rightarrow b - a \in U$$

2) $$a \in D \wedge u \in U \Rightarrow a + u \in D$$

É claro que, neste caso (e só neste), o conjunto D constitui um espaço afim, relativamente à aplicação $(a, b) \rightsquigarrow \overrightarrow{ab}$ restringida a pares de pontos de D (por isso mesmo se lhe chama o subespaço afim de E). O espaço vectorial que lhe está associado é o subespaço U de V.

Entre os subespaços afins de E figuram sempre os de *dimensão nula*, isto é, os que se reduzem a pontos. Chamam-se *rectas* e *planos* de E os subespaços afins de E de dimensões 1 e 2 respectivamente (quando existam). Mas note-se que, se a dimensão de E é superior a 2, existem subespaços afins de E de dimensão $\geqslant 3$, que não são portanto rectas nem planos. Em particular, se E tem dimensão finita, *n*, chamam-se *hiperplanos* de E os subespaços afins de E de dimensão $n-1$ ([1]).

Das condições A1—A4 (consideradas como *axiomas*) deduzem-se as seguintes proposições (neste caso *teoremas*):

Dados dois pontos distintos a, b *de* E *existe sempre uma recta de* E, *e uma só, a que pertencem os pontos* a, b. *Essa recta é definida pela equação paramétrica*

$$p = a + t(b-a) \quad , \quad \textit{sendo } t \textit{ variável em } K$$

Dados três pontos a, b, c *de* E *não colineares (isto é, não pertencentes a uma mesma recta), existe sempre um plano de* E, *e um só, a que pertencem* a, b, c. *Esse plano é definido pela equação paramétrica*

$$p = a + t(b-a) + u(c-a) \quad , \quad \text{com } t, u \in K$$

E ainda se pode definir a relação de paralelismo entre duas rectas, entre dois planos, entre um plano e uma recta, ou, mais geralmente, entre dois subespaços afins quaisquer de E, e generalizar a este caso as habituais proposições de paralelismo.

Suponhamos, a partir de agora, que K *é o corpo real.*

([1]) A noção de hiperplano pode ser estendida a espaços de dimensão infinita.

Chama-se *segmento de recta de extremos* a, b, e representa-se por $\overline{ab}$, o conjunto dos pontos p de E tais que

$$p = a + t(b - a),$$

sendo t um número real do intervalo [0,1].

Posto isto, diz-se que um subconjunto M de E é *convexo,* sse verifica a condição:

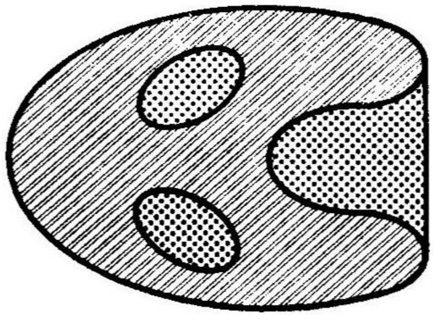
$$a, b \in M \Rightarrow \overline{ab} \subset M$$

Desde logo se reconhece que *todo o subespaço afim de* E *é um conjunto convexo.*

Também é fácil ver o seguinte:

A intersecção de conjuntos convexos, em número finito ou infinito, é sempre um conjunto convexo. (Já o mesmo não sucede com a reunião!)

Seja então A um subconjunto qualquer de E (convexo ou não). Existe pelo menos um conjunto convexo que contém A: o próprio espaço E. Designemos por $\hat{A}$ a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm A. Segundo a proposição anterior, $\hat{A}$ é um conjunto convexo: precisamente *o conjunto convexo mínimo que contém* A. Pois bem, diz-se que $\hat{A}$ é o *invólucro convexo de* A.



Na figura junta indica-se, a tracejado, um conjunto de pontos do plano que não é convexo; para obter o invólucro convexo, é necessário juntar-lhe o conjunto que se indica a ponteado (fronteira incluída).

É claro que, num espaço afim E, real ou complexo, podemos definir *semi-recta, semiplano, ângulo convexo, triângulo, polígono convexo, poliedro convexo*, etc., tal como no espaço usual. Por exemplo, sendo *a, b, c* três pontos não colineares de E, o invólucro convexo do conjunto $\{a, b, c\}$ é o triângulo de vértices *a, b, c;* sendo *a, b, c, d* quatro pontos não complanares, o invólucro convexo de $\{a, b, c, d\}$ é o tetraedro de vértices *a, b, c, d*, etc. ([1]).

Já no 6.º ano foi salientada a importância do conceito de conjunto convexo em PROGRAMAÇÃO LINEAR.

NOTAS:

I. A noção de conjunto convexo estende-se, de modo análogo, a espaços afins complexos.

II. Pode-se definir 'espaço afim real', tomando como primitivas as noções de 'recta' e de 'situado entre' (ou, o que é equivalente, a de 'segmento de recta') e adoptando um sistema de axiomas, semelhantes aos axiomas da geometria elementar que envolvem apenas essas noções. Neste caso, a noção de 'vector' poderá ser definida exactamente como fizemos no caso elementar, a partir da relação de equipolência entre segmentos orientados. A diferença essencial em relação ao caso elementar refere-se ao número de dimensões, que pode agora ser qualquer. Um conjunto D de pontos de E é um **subespaço afim de** E, sse, quaisquer que sejam os pontos a, b de D, sendo $a \neq b$, a recta ab está contida em D.

13. **Noções gerais de espaço métrico euclidiano e de espaço métrico*.** Seja V um espaço vectorial real com *n* dimensões. Diz-se que V é um *espaço métrico euclidiano (vectorial)*, sse, a cada par ordenado (u, v) de vectores de V, está associado um número real, que se chama *produto interno de* u *por* v e se

---

([1]) Aqui 'triângulo' designa portanto um conjunto convexo e não a reunião de 3 segmentos de recta. Analogamente para o 'tetraedro'.

representa por $u \cdot v$ (ler 'u *interno* v'), de acordo com as seguintes condições:

E1. $u \cdot v = v \cdot u \quad , \quad \forall u, v \in V$
E2. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad , \quad \forall u, v, w \in V$
E3. $(au) \cdot v = a(u \cdot v) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R};\ u, v \in V$
E4. $u \cdot u \geqslant 0 \quad , \quad \forall u \in V$
E5. $u \cdot u = 0 \Rightarrow u = 0$

Portanto $u \cdot v$ é uma função *real dos vectores* u, v. Segundo E1, esta função é *simétrica* (ou *comutativa*). De E1 e E2 resulta ainda que tal função é *bilinear.* Ora todos estes factos (função real simétrica e bilinear) exprimem-se dizendo que $u \cdot v$ é uma *forma bilinear simétrica (real).*

A conjunção das propriedades E4 e E5 com as primeiras exprime-se dizendo que a forma bilinear $u \cdot v$ é *definida positiva* (1).

Posto isto, podemos definir *módulo de um vector* u do espaço métrico euclidiano V, mediante a fórmula

$$(1) \qquad |u| = \sqrt{u \cdot u}$$

em que $|u|$ designa o 'módulo de u' (também chamado 'norma de u'). De E4 e E5 deduz-se desde logo:

N1. $|u| \geqslant 0 \quad , \quad \forall u \in V$
N2. $|u| = 0 \Rightarrow u = 0$

Por outro lado, convencionando escrever u^2 como abreviatura de $u \cdot u$, tira-se de E1 e E2:

$$(2) \qquad (u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2\,u \cdot v$$

---

(1) Se fosse sempre $u \cdot u \leqslant 0$, e, além disso, fosse verificada a condição $u \cdot u = 0 \Rightarrow u = 0$, diríamos que a forma era **definida negativa.** Se fosse umas vezes $u \cdot u > 0$, outras $u \cdot u < 0$ e outras $u \cdot u = 0$, diríamos que a forma era **indefinida.** Se fosse **sempre** $u \cdot u \geqslant 0$ ou **sempre** $u \cdot u \leqslant 0$, podendo ser $u \cdot u = 0$ com $u \neq 0$, diríamos que a forma era **semidefinida,** respectivamente **positiva ou negativa.**

Além disso, demonstra-se que

(3) $$|u \cdot v| \leqslant |u|\,|v| \quad , \quad \forall\, u, v \in V$$

Esta fórmula importante (chamada *desigualdade de Cauchy-Schwarz*) permite definir *ângulo θ de dois vectores* u, v de V, mediante a fórmula

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$

Diz-se que u é *ortogonal* a v, e escreve-se $u \perp v$, sse $\theta = \pi/2$ ou um, pelo menos, dos vectores u, v é nulo.

Por sua vez, de (2) e (3) deduz-se facilmente

N3. $$|u + v| \leqslant |u| + |v| \quad , \quad \forall\, u, v \in V$$

Finalmente, de E3 resulta:

N4. $$|\alpha u| \leqslant |\alpha|\,|u| \quad , \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ u \in V$$

Chama-se *base ortonormal* de V toda a base de V constituída por vectores *unitários* (isto é, de módulo 1) e ortogonais entre si.

Por exemplo, no espaço $\mathbb{R}^4$, uma das definições de *produto interno de dois vectores*

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad , \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

é a dada pela fórmula

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

Então o módulo de x será

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

e *uma das bases ortonormais de* $\mathbb{R}^4$ será constituída pela sequência de vectores

$$(1, 0, 0, 0) \quad , \quad (0, 1, 0, 0) \quad , \quad (0, 0, 1, 0) \quad , \quad (0, 0, 0, 1)$$

Analogamente para $\mathbb{R}^5$, para $\mathbb{R}^6$, etc.

Seja agora E *um espaço afim real com* n *dimensões.* Diz-se que E é um *espaço métrico euclidiano (pontual)*, sse o espaço vectorial V que lhe está associado é um espaço métrico euclidiano (vectorial) (1). Nestas condições, chama-se distância de dois pontos a, b de E, e representa-se por $\delta(a, b)$, o módulo do vector $\overrightarrow{ab}$, isto é, em fórmula

$$\delta(a, b) = |b-a| \quad , \quad \forall\, a, b \in E$$

Das propriedades N1 — N4 dos módulos e da função anterior deduzem-se as seguintes propriedades da função *'distância'*:

M1. $\delta(a, b) \geqslant 0 \quad , \quad \forall\, a, b \in E$

M2. $\delta(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$

M3. $\delta(a, b) = \delta(b, a) \quad , \quad \forall\, a, b \in E$

M4. $\delta(a, b) \leqslant \delta(a, c) + \delta(c, b) \quad , \quad \forall\, a, b, c \in E$

Esta última fórmula é chamada *desigualdade triangular*, por estar relacionada com uma conhecida propriedade dos triângulos.

Mais geralmente ainda:

Diz-se que um conjunto S, constituído por elementos a, b... de natureza qualquer, é um *espaço métrico*, sse, a cada par (a, b) de elementos de S, é associado um número real $\delta(a, b)$ (*distância entre* a *e* b), de modo que sejam verificadas as condições M1 — M4.

Convém desde já notar que um espaço métrico não é necessariamente euclidiano. Por exemplo, seja S uma superfície esférica e convencionemos chamar *distância entre dois pontos* a *e* b de S o menor dos comprimentos dos arcos de círculo máximo de

(1) Em particular, segundo uma observação do n.º 11, todo o **espaço métrico euclidiano vectorial** pode ser considerado como **espaço métrico euclidiano pontual**. Mas a recíproca não é verdadeira.

extremos a, b. Então é bem fácil que S é um espaço métrico, mas não um espaço métrico euclidiano (não é sequer um espaço afim).

Num espaço métrico euclidiano, podemos definir *medida de um ângulo convexo* bâc, como sendo igual à do ângulo dos vectores $\vec{ab}$ e $\vec{ac}$. Se a medida de bâc é $\pi/2$ (em radianos), o ângulo bâc diz-se *recto* e as rectas ab, ac dizem-se *perpendiculares entre si.* Daqui decorrem imediatamente as noções de triângulo rectângulo, de quadrado, etc. exactamente como no caso elementar.

O teorema de Pitágoras e, mais geralmente, o teorema de Carnot, são válidos em qualquer espaço métrico euclidiano. E o mesmo para qualquer outro teorema da geometria euclidiana elementar em que não intervenha o facto de o espaço $\mathcal{E}$ ter três dimensões.

Note-se que as noções de circunferência, de círculo, de cónica, de esfera, etc., etc. se generalizam a qualquer espaço métrico euclidiano, onde aliás nos aparecem novas noções (por exemplo a de hipercubo, a de hiperesfera, etc., etc.) e portanto novos teoremas.

Dados dois espaços métricos S, S′ e um número real $r > 0$, chama-se *semelhança de razão* r entre S e S′ toda a aplicação biunívoca f de S sobre S′, tal que

$$\delta(f(a), f(b)) = r\,\delta(a, b) \quad , \quad \forall a, b \in S$$

Chamam-se *isometrias* as semelhanças de razão 1.

Em particular, se S e S′ são espaços métricos euclidianos de dimensão superior a 1, prova-se que toda a semelhança entre S e S′ é uma *afinidade,* isto é, uma aplicação biunívoca de S sobre S′ que transforma segmentos de recta em segmentos de recta (e, por isso, rectas em rectas, planos em planos, subespaços afins de S em subespaços afins de S′, conjuntos convexos em conjuntos convexos, etc.). Se S e S′ são espaços euclidianos unidimensionais (portanto isomorfos às rectas de $\mathcal{E}$), não há distinções entre semelhanças e afinidades.

NOTAS:

I. Geralmente, por comodidade, diz-se apenas 'espaço euclidiano' em vez de 'espaço métrico euclidiano', embora haja uma distinção a fazer entre os dois conceitos (aliás de pouca importância na prática). Por exemplo, o espaço usual $\mathcal{E}$ é um *espaço euclidiano* (é mesmo o *protótipo dos espaços euclidianos*) mas não é um *espaço métrico*, por não estar nele definida, naturalmente, a noção de distância como *número*. Com efeito, não faz sentido dizer, por exemplo, que a distância entre dois pontos do espaço é 3 – a não ser que se tenha fixado previamente uma unidade de comprimento, cuja escolha é, como se sabe, arbitrária. No entanto, como se vê, o espaço $\mathcal{E}$ torna-se um *espaço métrico*, e portanto um *espaço métrico euclidiano*, desde que se adopte uma unidade de comprimento.

II. A noção do 'produto interno de dois vectores' pode ser estendida a um espaço vectorial V, *real* ou *complexo*, com qualquer número de dimensões (finito ou infinito).

Se V é um espaço vectorial complexo, as únicas modificações a fazer na definição anterior são as seguintes:

1) O produto interno $u \cdot v$ é uma função *complexa* dos vectores $u \cdot v$.

2) Em vez de E1 tem-se a condição:

$$u \cdot v = \overline{v \cdot u} \quad , \quad \forall\, u, v \in V,$$

em que $\overline{v \cdot u}$ representa o conjugado do número complexo $v \cdot u$ (se $u \cdot v$ é real, tem-se $\overline{v \cdot u} = v \cdot u = u \cdot v$).

Nestes termos, deduz-se de E3:

$$u \cdot (av) = \bar{a}(u \cdot v) \quad , \quad \forall\, a \in \mathbb{C};\ u, v \in V$$

e já não podemos dizer que a função $u \cdot v$ é bilinear (é no entanto distributiva, à direita e à esqeurda). Diz-se agora que $u \cdot v$ é uma *forma hermítica definida positiva* e o espaço V diz-se *hermítico* (é ainda um espaço métrico). Em particular, se V é um espaço hermítico real e tem um número finito de dimensões, então V é euclidiano.

Entre os espaços hermíticos com uma infinidade de dimensões, reais ou complexas, merecem especial menção os ESPAÇOS DE HILBERT, que desempenham um papel fundamental em *mecânica quântica* e, de modo geral, em toda a *física do átomo.*

III. No ESPAÇO—TEMPO DE MINKOWSKI, que designaremos aqui por $\mathcal{M}$, define-se uma noção de produto interno que não é uma forma definida positiva, mas sim indefinida, como vamos ver.

Suponhamos dado um referencial *de espaço* $(\vec{O}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m})$, ortonormal, fixo num sistema rígido S, por exemplo a Terra, e um relógio fixo no mesmo sistema. Fica assim definido um *referencial de espaço e tempo* $(\vec{O}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{m}, \vec{e})$ em S. Segundo a TEORIA DA RELATIVIDADE, a distância entre dois pontos materiais, assim como o tempo decorrido entre dois acontecimentos, *dependem do sistema* S (e até da posição do relógio em S). *Distância* e *tempo decorrido* são pois *propriedades relativas* (e não *propriedades absolutas*), pois que variam com o sistema S em que são medidos (não são por exemplo os mesmos na Terra ou em Marte), supondo, é claro, que se adoptam *as mesmas unidades de comprimento e de tempo.*

Seja agora $\vec{u}$ um *vector do espaço—tempo*, isto é, um elemento do espaço vectorial associado a $\mathcal{M}$. Dar um tal vector equivale a dar os 4 números reais x, y, z, t, que são, por exemplo, as *componentes* do vector no referencial de espaço e tempo fixado em S. Ter-se-á então

$$\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{m} + t\vec{e}$$

Posto isto, consideremos a função de $\vec{u}$ dada pela expressão:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2,$$

em que c é a medida da velocidade da luz no vazio, relativamente ao sistema de unidades adoptado (aproximadamente 300 000, se a unidade de comprimento é o quilómetro e a unidade de tempo é o segundo). Ora, em RELATIVIDADE RESTRITA, o valor desta expressão é *invariante,* isto é, não muda quando se passa de S para outro sistema S′, *animado de movimento de translação rectilíneo e uniforme em relação a* S. Isto sugere que se chame *quadrado do módulo de* $\vec{u}$ e se represente por $|\vec{u}|^2$ (ou simplesmente por $\vec{u}^2$) o valor de (1). Nesta ordem de ideias, é natural definir *produto interno* de dois vectores de espaço—tempo

$$\vec{u} \rightsquigarrow (x, y, z, t) \quad , \quad \vec{v} \rightsquigarrow (x', y', z', t')$$

mediante a fórmula

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' - c^2tt'$$

Facilmente se vê que, neste caso, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é uma *forma bilinear simétrica (real). Mas esta forma não é definida positiva.* Com efeito, por exemplo:

quando $\vec{u} = \vec{j}$, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 = 1 > 0$;
quando $\vec{u} = \vec{e}$, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{u} = -c^2 < 0$;
quando $\vec{u} = c\vec{j} + \vec{e}$, tem-se $\vec{u} \cdot \vec{u} = c^2 - c^2 = 0$.

A forma é pois *indefinida:* há vectores $\vec{u}$ tais que $\vec{u}^2 > 0$, vectores $\vec{u}$ tais que $\vec{u}^2 < 0$ e vectores $\vec{u}$ não nulos tais que $\vec{u}^2 = 0$.

Por conseguinte, $\mathcal{M}$ não é um espaço métrico euclidiano: diz-se que é um *espaço pseudo-métrico euclidiano* ou um espaço *pseudo-euclidiano.*

Sejam agora α e β dois acontecimentos definidos por dois pontos de $\mathcal{M}$, respectivamente $A \rightsquigarrow (x, y, z, t)$ e $B \rightsquigarrow (x', y', z', t')$ no referencial adoptado; isto é:

$$A = O + x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{m} + t\vec{e} \quad , \quad B = O + x'\vec{j} + y'\vec{k} + z'\vec{m} + t'\vec{e}$$

Já sabemos que a *distância* entre os dois pontos propriamente ditos (x, y, z) e (x′, y′, z′), bem como o tempo decorrido entre os instantes t e t′, dependem geralmente do sistema S e, portanto, do referencial de espaço—tempo adoptado. Mas, em RELATIVIDADE RESTRITA, é invariante o módulo do vector B—A, ou seja

$$|B-A| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - c^2\ (t-t')^2}$$

A este número é natural chamar *distância relativista* entre os pontos A e B (ou entre os acontecimentos α e β) (¹). Mas, pelos exemplos anteriores, desde já se vê que a distância relativista entre dois acontecimentos pode ser *real* (positiva), *imaginária* ou *nula* (mesmo que os acontecimentos sejam distintos). Isto basta para ver que o espaço-tempo $\mathcal{M}$, com tal noção de 'distância', não é um *espaço métrico*, segundo a definição anterior.

Deve ainda notar-se que muitos autores chamam *quadrado de um vector* $\vec{u} \rightarrow (x, y, z, t)$ ao valor da expressão $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, e não ao da expressão $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, simétrica da primeira. É claro que isto altera a definição de 'distância relativista', mas é indiferente uma ou a outra definição, para caracterizar a geometria do espaço pseudo-euclidiano $\mathcal{M}$. Primeiro que tudo, deve notar-se que o grupo das *isometrias* de $\mathcal{M}$ é o mesmo com qualquer das definições (chamando 'isometria' a toda a aplicação biunívoca de $\mathcal{M}$ sobre si mesmo que conserva as distâncias).

Entre as isometrias de $\mathcal{M}$ têm especial importância as *transformações de Lorentz*, que formam um subgrupo do anterior *(grupo de Lorentz)*. Concretamente, interpretadas como mudanças de coordenadas de espaço e tempo, as transformações de Lorentz são as mudanças que permitem passar das coordenadas relativas a um referencial de espaço—tempo fixo num sistema rígido S, para as coordenadas relativas a um referencial fixo num sistema S′, animado do movimento de translação rectilíneo e uniforme em relação a S (em dinâmica relativista, exige-se que os sistemas

(¹) Os físicos chamam-lhe habitualmente **intervalo** entre α e β.

considerados sejam de *inércia*, isto é, que 'não rodem em relação ao conjunto das estrelas'). Nestas mudanças, o tempo pode converter-se parcialmente em espaço e vice-versa.

O grupo de Lorentz está na base de toda a física relativista.

O físico LORENTZ chegou às transformações que têm o seu nome, procurando interpretar o resultado negativo das experiências de MICHELSON e MORLEY, que, juntamente com outros factos, conduziam a esta conclusão, aparentemente absurda:

A luz (e mais geralmente todas as ondas electromagnéticas) propaga-se no vazio com a mesma velocidade em relação a todos os corpos, apesar de estes estarem em movimento uns em relação aos outros.

Consideremos, por exemplo, um raio luminoso e uma partícula atómica que se move na mesma direcção e em sentido contrário ao da luz, com a velocidade de 100 000 km/s em relação à Terra (no vazio). Então a velocidade da luz em relação à partícula deveria ser, ao que parece,

$$300\,000 + 100\,000 = 400\,000 \ (\text{km/s})$$

Mas não: *a velocidade da luz em relação à partícula é sempre a mesma* (300 000 km/s), *qualquer que seja a velocidade da partícula bem como a sua direcção e sentido (em relação à Terra ou a qualquer outro sistema de referência).*

Isto mostrou que era preciso abandonar os conceitos tradicionais, ilusórios, de *espaço absoluto* e de *tempo absoluto*, e, em particular, a *fórmula clássica de composição de velocidades:*

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v},$$

quando alguma destas se aproxima da velocidade da luz.

O grupo de Lorentz define, precisamente, a geometria do espaço – tempo, que não só explica a *invariância da velocidade da luz relativamente aos diferentes referenciais*, como ainda, mais geralmente, *permite fundar uma nova mecânica, compatível com as leis do electromagnetismo* (ao contrário do que sucede com a mecânica clássica). A nova mecânica, fundada por EINSTEIN, conduz a conclusões revolucionárias, como por exemplo a LEI DA EQUIVALÊNCIA ENTRE A MASSA E A ENERGIA, que está na base *da produção da energia nuclear.* Segundo esta lei, deixa de haver uma distinção nítida entre matéria e energia:

1 g *de matéria equivale a cerca de* 25 000 000 kwh.

Índice

Composto e impresso na
Imprensa Portuguesa — Porto
e concluiu-se
em Outubro de 1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA