J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

3.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

CAPÍTULO V

ÁLGEBRAS DE APLICAÇÕES LINEARES E ÁLGEBRAS DE MATRIZES

O assunto de que vamos tratar é da máxima importância em matemática moderna. As suas aplicações à física, à química, à engenharia, à estatística, à economia, etc., são cada vez mais frequentes.

1. **Produto de duas aplicações lineares. Isomorfismos vectoriais.** Começaremos por provar o seguinte facto:

O produto de duas aplicações lineares é sempre uma aplicação linear.

Mais precisamente, vamos provar o seguinte:

TEOREMA 1. *Sejam* U, V, W *três espaços vectoriais sobre um mesmo corpo* K. *Se* f *é uma aplicação linear de* V *em* W *e* g *uma aplicação linear de* U *em* V, *então* fg (*'aplicação composta' ou 'produto' de* f *por* g) *é uma aplicação linear de* U *em* W.

Demonstração [1]:

Suponhamos verificada a hipótese e sejam u, v dois vectores quaisquer de U. Então será

$$g(u + v) = g(u) + g(v) \qquad \text{(porquê?)}$$

---

[1] A técnica desta demonstração, bem como de outras que se seguem, é muito semelhante às que foram usadas, no 6.º ano, para as demonstrações de teoremas sobre isomorfismos.

donde

$$(1) \qquad f(g(u+v)) = f(g(u)+g(v))$$

$$= f(g(u)) + f(g(v)) \qquad \text{(porquê?,}$$

Mas

$f(g(u+v)) = (fg)(u+v)$, $f(g(u)) = (fg)(u)$, $f(g(v)) = (fg)(v)$ (porquê?) e, portanto, de (1) vem

$$(2) \qquad (fg)(u+v) = (fg)(u) + (fg)(v)$$

Seja agora α um elemento qualquer de K (escalar) e u um vector qualquer de U. Então

$$g(\alpha\, u) = \alpha\, g(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

donde

$$f(g(\alpha\, u)) = f(\alpha\, g(u)) = \alpha\; f(g(u)) \qquad \text{(porquê?)}$$

donde finalmente

$$(3) \qquad (fg)(\alpha\, u) = \alpha (fg)(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

Ora a conjunção de (2) e (3) significa, precisamente, que fg é uma aplicação linear (de U em W).

Vamos agora provar o seguinte:

A inversa de uma aplicação linear biunívoca ainda é uma aplicação linear.

Mais precisamente:

TEOREMA 2. *Sejam* U *e* V *dois espaços vectoriais, sobre um mesmo corpo* K. *Se* f *é uma aplicação linear biunívoca de* U *sobre* V, *então* f^{-1} *é uma aplicação linear (biunívoca) de* V *sobre* U.

Demonstração:

Seja f uma aplicação linear biunívoca de U sobre V. Então f^{-1} é uma aplicação biunívoca de V sobre U. Queremos provar que f^{-1} também é linear.

Sejam u, v dois elementos quaisquer de V e ponhamos $u' = f^{-1}(u)$, $v' = f^{-1}(v)$. Então

$$u = f(u') \quad , \quad v = f(v') \quad , \quad u + v = f(u') + f(v')$$

e portanto

$$u + v = f(u' + v') \qquad \text{(porquê?)}$$

Ora daqui deduz-se

$$f^{-1}(u + v) = u' + v'$$

ou seja

$$(1) \qquad f^{-1}(u + v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$$

Seja agora α um elemento qualquer de K. Então

$$u = f(u') \quad , \quad \alpha u = \alpha f(u')$$

e portanto

$$\alpha u = f(\alpha u'),$$

donde

$$f^{-1}(\alpha u) = \alpha u'$$

ou seja

$$(2) \qquad f^{-1}(\alpha u) = \alpha f^{-1}(u)$$

A conjunção de (1) e (2) significa, precisamente, que f^{-1} é linear.

DEFINIÇÃO. *Sendo* U *e* V *dois espaços vectoriais sobre um corpo* K, *chama-se* isomorfismo *de* U *sobre* V *toda a aplicação linear biunívoca de* U *sobre* V. *Diz-se que* U *é* isomorfo *a* V, *sse existe pelo menos um isomorfismo de* U *sobre* V.

Tudo o que foi dito no vol. I, 2.° tomo, para isomorfismos entre grupóides, entre anéis, etc., estende-se agora, *mutatis mutandis*, a espaços vectoriais.

Em particular, chama-se *automorfismo dum espaço vectorial* U toda a aplicação linear biunívoca de U sobre si mesmo. Dos teoremas 1 e 2 resulta o seguinte

COROLÁRIO: *Os automorfismos de um espaço vectorial* U *formam um grupo multiplicativo.*

EXEMPLOS:

I. O conjunto $\mathcal{T}$ de todas as funções φ na forma

$$\varphi(x) \equiv a \cos x + b \operatorname{sen} x \quad , \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R},$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, relativamente às operações usuais de 'soma de duas funções' e de 'produto de uma função por um número real'. Suponhamos agora fixada num plano π uma base $(\vec{j}, \vec{k})$. Então, se fizermos corresponder, a cada vector $\vec{u} = a\vec{j} + b\vec{k}$ do plano π, precisamente a função $\varphi(x) \equiv a \cos x + b \operatorname{sen} x$, fica definida uma aplicação linear biunívoca $\vec{u} \rightarrow \varphi$ de $\mathcal{V}_\pi$ sobre $\mathcal{T}$ (prove por analogia com Capítulo IV, n.° 1). Logo estes dois espaços vectoriais são isomorfos.

Por outro lado, se fizermos corresponder a cada função $\varphi(x) \equiv a \cos x + b \operatorname{sen} x$, a função $\Psi(x) \equiv -b \cos x + a \operatorname{sen} x$, ficará definido um automorfismo $\varphi \rightarrow \Psi$ do espaço $\mathcal{T}$.

II. O conjunto $\mathcal{P}_3$ de todos os polinómios em x reais

$$ax^2 + bx + c$$

de grau $\leqslant 2$ ($a \neq 0$ ou $a = 0$) é um espaço vectorial real, relativamente às operações usuais de 'soma' e de 'produto por um número real'. Prove que $\mathcal{P}_3$ é isomorfo ao espaço $\mathcal{V}$ dos vectores do espaço ordinário.

NOTA. Dados dois espaços afins E, F sobre um mesmo corpo, chama-se *aplicação afim de* E em F toda a aplicação f de E em F que determina uma aplicação linear, f_0, do espaço vectorial associado a E no espaço vectorial associado a F, segundo a fórmula

$$f_0(\overrightarrow{ab}) = f(b) - f(a) \quad , \quad \forall a, b \in E$$

É fácil ver que o produto de duas aplicações afins também é uma aplicação afim e que a inversa de uma aplicação afim biunívoca também é uma aplicação afim. Os conceitos de isomorfismo, automorfismo, etc. estendem-se de modo trivial aos espaços afins.

2. **Soma de duas aplicações lineares.** Sejam U e V dois espaços vectoriais sobre um mesmo corpo K. O facto de estar definida uma noção de 'soma de dois vectores' em V (assim como em U) permite-nos definir 'soma de duas aplicações lineares de U em V':

DEFINIÇÃO. *Dadas duas aplicações lineares* f, g *de* U *em* V, *chama-se soma de* f *com* g, *e representa-se por* $f + g$, *a aplicação* h *de* U *em* V *assim definida*

$$h(u) = f(u) + g(u) \quad , \quad \forall u \in U$$

Ter-se-á, pois, *por definição:*

$$(2) \qquad (f + g)(u) = f(u) + g(u) \quad , \quad \forall u \in U$$

TEOREMA 1. *A soma de duas aplicações lineares também é uma aplicação linear.*

Demonstração:

Sejam f, g duas aplicações lineares de U em V e ponhamos h = f + g. Queremos provar que a aplicação h é linear.

Sejam u, v dois elementos quaisquer de U. Então

$$h(u+v) = f(u+v) + g(u+v) \qquad \text{(porquê?)}$$

$$= [f(u) + f(v)] + [g(u) + g(v)] \qquad \text{(porquê?)}$$

donde

$$h(u+v) = [f(u) + g(u)] + [f(v) + g(v)] \quad \text{e portanto}$$

(2) $$h(u+v) = h(u) + h(v) \qquad \text{(porquê?)}$$

Seja agora α um escalar qualquer. Então

$$h(\alpha u) = f(\alpha u) + g(\alpha u) \qquad \text{(porquê?)}$$

$$= \alpha f(u) + \alpha g(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

$$= \alpha[f(u) + g(u)] \qquad \text{(porquê?)}$$

donde

(3) $$h(\alpha u) = \alpha h(u)$$

De (2) e (3) conclui-se o que se pretendia.

Posto isto, designemos por L o *conjunto de todas as aplicações lineares de* U *em* V. Vamos demonstrar o seguinte:

TEOREMA 2. *O conjunto* L *é um grupo comutativo a respeito da adição (portanto um módulo).*

Demonstração:

Da definição (1) resulta imediatamente que a adição é universal e unívoca em L. Portanto (L, +) é um *grupóide*. Provemos que este é comutativo.

Sejam f, g dois elementos quaisquer de L (aplicações lineares de U em V) e seja *u* um elemento *arbitrário* de U. Então:

$$f(u) + g(u) = g(u) + f(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

e, como *u* é arbitrário, tem-se

$$f(u) + g(u) = g(u) + f(u) \quad , \quad \forall\, u \in U,$$

donde

$$(f + g)(u) = (g + f)(u) \quad , \quad \forall\, u \in U,$$

e portanto

$$f + g = g + f \qquad \text{(porquê?)}$$

Analogamente se prova que o grupóide (L, +) é associativo e portanto um semigrupo.

Além disso (L, +) tem elemento neutro, que é a *aplicação nula*, ou seja, a aplicação f definida por

$$f(u) = 0 \quad , \quad \forall u \in U$$

(faz corresponder a todo o vector u de U o vector nulo de V). Podemos designá-la ainda pelo símbolo 0.

Finalmente, qualquer que seja $f \in L$, a aplicação φ tal que

$$\varphi(u) = -\,f(u) \quad , \quad \forall u \in U,$$

é simétrica de f, isto é, tem-se $\varphi + f = 0$, como facilmente se reconhece, e podemos então escrever $\varphi = -\,f$.

E assim fica provado tudo o que se pretendia.

NOTA. Sendo E e F dois espaços afins sobre o mesmo corpo (por exemplo, E = $\mathcal{E}$ e F = $\mathcal{E}$ ou E = $\mathcal{E}$ e F um plano π) não se pode definir em geral 'soma de duas aplicações afins de E em F', precisamente porque não faz sentido, em geral, falar de 'soma de dois pontos de F'.

3. **Produto de uma aplicação linear por um escalar.** Consideremos novamente dois espaços vectoriais U e V sobre um corpo K.

DEFINIÇÃO. *Sejam dados um escalar α (isto é, um elemento de* K*) e uma aplicação linear* f *de* U *em* V. *Chama-se produto de α por* f, *e representa-se por α* f, *a aplicação* h *de* U *em* V *assim definida*

$$h(u) = \alpha f(u) \quad , \quad \forall u \in U,$$

Será pois, *por definição:*

$$(\alpha f)(u) = \alpha f(u) \quad , \quad \forall u \in U$$

TEOREMA 1. *Se* f *é uma aplicação linear de* U *em* V, *o produto de um escalar α qualquer por* f *ainda é uma aplicação linear de* U *em* V.

Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor, como exercício.

Continuemos a designar por L o conjunto de todas as aplicações lineares de U em V. Já vimos que L é um módulo. Mas podemos dizer mais do que isso:

TEOREMA 2. *O conjunto* L *é um espaço vectorial sobre* K *(relativamente às operações definidas de 'soma' e de 'produto por um escalar').*

É claro que para demonstrar este teorema resta só provar as seguintes propriedades:

1. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g \quad , \quad \forall\, \alpha \in K;\ f, g \in L$

2. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f \quad , \quad \forall\ \alpha,\ \beta \in K;\ f \in L$

3. $\alpha(\beta f) = (\alpha \beta)f \quad , \quad \forall\ \alpha \beta \in K;\ f \in L$

4. $1 \cdot f = f \quad , \quad \forall\ f \in L$

Todas essas demonstrações são muito simples e podem ficar ao cuidado do leitor.

4. **Anel das aplicações lineares de um espaço vectorial em si mesmo.** Temos até aqui designado por L o conjunto das aplicações lineares de U em V, sendo U e V espaços vectoriais sobre um mesmo corpo K, *distintos ou coincidentes.* Daqui por diante vamos supor U = V. *Assim,* L *designará o conjunto das aplicações lineares do espaço vectorial* U *em si mesmo.*

Segundo o que vimos no n.º 2 está definida em L uma adição. Por outro lado, segundo o estabelecido no n.º 1, também está definida em L uma multiplicação, que é a composição de aplicações no sentido usual. Em virtude do teorema 1 do n.º 1, o produto de dois elementos de L — isto é, de duas aplicações lineares de U em U — ainda é um elemento de L (neste caso tem-se U = V = W). Surge agora a pergunta:

Será (L, + , ·) *um anel?*

Ora já vimos que:

1) (L, +) *é um módulo.*

Por outro lado, é fácil ver que:

2) (L, ·) *é um semigrupo.*

Com efeito, já ficou provado que (L, ·) é um grupóide (em virtude do teorema 1 do n.º 1). Além disso, a multiplicação é associativa, por se tratar da composição de aplicações no sentido usual. Logo $(L, \cdot)$ é de facto um semigrupo.

Resta provar que:

3) *A multiplicação é distributiva a respeito da adição em* L.

Começaremos por provar a *distributividade à direita*. Sejam f, g, h elementos arbitrários de L e *u* um elemento arbitrário de U. Então

$$\begin{aligned}
[f(g+h)]\,(u) &= f\,[(g+h)u] && \text{(porquê?)}\\
&= f\,[g(u)+h(u)] && \text{(porquê?) (1)}\\
&= f\,(g(u))+f(h(u)) && \text{(porquê?) (2)}\\
&= (fg)(u)+(fh)(u) && \text{(porquê?)}\\
&= (fg+fh)(u) && \text{(porquê?) (3)}
\end{aligned}$$

Por conseguinte

$$[f(g+h)]\,(u) = (fg+fh)(u) \quad , \quad \forall\, u \in U,$$

o que significa que

$$f(g+h) = fg+fh \qquad \text{(porquê?)}$$

Fica assim provada *a distributividade à direita:*

$$\boxed{f(g+h) = fg+fh \quad , \quad \forall\, f, g, h \in L}$$

---

(1) Por definição de 'soma de aplicações lineares'.

(2) Porque f é uma aplicação linear.

(3) Por definição de 'soma de aplicações lineares'.

Demonstremos agora a *distributividade à esquerda.* Sejam ainda f, g, h elementos arbitrários de L e u em elemento arbitrário de U. Então

$$[(f+g)h]\,(u) = (f+g)(h(u)) \qquad \text{(porquê?)}$$

$$= f(h(u)) + g(h(u)) \qquad \text{(porquê?) (}^1\text{)}$$

$$= (fh)(u) + (gh)(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

$$= (fh+gh)(u) \qquad \text{(porquê?)}$$

Por conseguinte

$$[(f+g)h]\,(u) = (fh+gh)(u) \quad , \quad \forall\, u \in U$$

Fica assim provada a *distributividade à esquerda:*

$$\boxed{(f+g)h = fh + gh \quad , \quad \forall\, f, g, h \in L}$$

e portanto 3), o que acaba de provar que (L, + , •) *é de facto um anel.*

Convém, desde já, notar o seguinte:

O operador identidade, I, *é obviamente uma aplicação linear do espaço* U *em si mesmo e portanto elemento unidade do anel* L.

Assim, em conclusão:

TEOREMA. *O conjunto* L *das aplicações lineares de um espaço vectorial em si mesmo é um anel, relativamente às operações de soma e produto de aplicações lineares atrás definidas. Este anel tem elemento unidade que é a aplicação* I.

Veremos mais adiante que o *anel* L *não é comutativo, excepto no caso trivial em que o espaço* U *tem dimensão* 1.

Pode ainda perguntar-se:

Será L *um anel de divisão, tal como, por exemplo, o anel dos quaterniões?*

([1]) Por definição de 'soma de aplicações lineares'.

Como é sabido (vol. I, 2.º tomo, pág. 93, n.º 7) dizer que L é um anel de divisão equivale a dizer que toda a aplicação linear *não nula* de U em U é bijectiva. *Ora isto só é verdade, se U for unidimensional.*

Note-se finalmente que *o grupo dos automorfismos de* U (*aplicação linear biunívoca de* U *sobre* U) *não é um anel, mesmo que lhe juntemos a aplicação nula – a não ser que o espaço* U *seja unidimensional.*

5. **Conceito de álgebra.** Seja ainda U um espaço vectorial sobre um corpo K e seja L o conjunto das aplicações lineares de U em si mesmo. Acabámos de ver que L é um anel relativamente às operações + e . definidas. Mas já no n.º 3 tínhamos visto que L *também é um espaço vectorial sobre* K. Assim, em resumo:

1) L *é um espaço vectorial sobre* K *(a respeito das operações de 'soma de duas aplicações lineares' e de 'produto de um escalar por uma aplicação linear').*

2) L *é um anel (a respeito das operações de 'soma' e de 'produto de duas aplicações lineares').*

3) *As operações de 'produto de duas aplicações lineares' e de 'produto de um escalar por uma aplicação linear' têm as seguintes* PROPRIEDADES DE ENLACE:

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha f)g = \alpha(fg)\\ f(\alpha g) = \alpha(fg)\end{array}\right\} \forall \alpha \in K;\ f,\ g \in U$$

Ora exprime-se a conjunção de todos estes factos, dizendo que L *é uma álgebra sobre* K. Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. *Diz-se que um conjunto* $\mathcal{A}$ *de elementos* a, b,... *de natureza qualquer é uma álgebra sobre um corpo* K *(ou um sistema hipercomplexo sobre* K*), sse são verificadas as seguintes condições:*

A1. *Estão definidas operações de 'soma de dois elementos de* $\mathcal{A}$*' e de 'produto de um elemento de* K *por um elemento de* $\mathcal{A}$*',* a respeito dos quais $\mathcal{A}$ *é um espaço vectorial sobre* K.

A2. É além disso definida uma operação de *'produto de dois elementos de $\mathcal{A}$'*, de tal modo que $\mathcal{A}$ *é um anel a respeito da adição e da multiplicação definidas.*

A3. As operações de *'produto de dois elementos de* $\mathcal{A}$*'* e de *'produto de um elemento de* K *por um elemento de* $\mathcal{A}$*'* satisfazem às seguintes CONDIÇÕES DE ENLACE (¹):

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda a)b = \lambda(ab) \\ a(\lambda b) = \lambda(ab)\end{array}\right\} \quad \forall \lambda \in K;\ a,\ b \in \mathcal{A}$$

Assim, em particular:

TEOREMA. *O conjunto* L *das aplicações lineares do espaço* U *em si mesmo é uma álgebra sobre* K, *munida de elemento unidade.*

Podem dar-se inúmeros outros exemplos importantes de álgebras. Assim, o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é, em particular, uma álgebra comutativa sobre $\mathbb{R}$ (ou sobre $\mathbb{C}$); o conjunto $\mathbb{H}$ dos quaterniões de Hamilton é uma álgebra não comutativa sobre $\mathbb{R}$ (ou sobre $\mathbb{C}$); etc.

Note-se que, no espaço vectorial $\mathcal{V}$, com a operação do produto externo definida no n.º 8 do Capítulo IV (pág. 163), *só falta uma propriedade,* para que $\mathcal{V}$ seja uma álgebra sobre $\mathbb{R}$: a associatividade do produto.

EXERCÍCIOS:

I. Diga se é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$, a respeito das operações usuais:

a) *o conjunto* $\mathcal{P}_3$ *de todos os polinómios em* x *reais de grau inferior a* 3;

b) *o conjunto* $\mathcal{P}_\infty$ *dos polinómios em* x *reais de todos os graus;*

c) *o conjunto dos polinómios em* x *reais de todos os graus que se anulam para* $x = 0$.

(¹) Também poderíamos chamar-lhes 'propriedades associativas das duas multiplicações entre si'.

Indique quais das álgebras consideradas são comutativas e quais têm elemento unidade.

II. Sendo U um espaço vectorial sobre um corpo K e sendo L a álgebra das aplicações lineares de U em U, considere a aplicação

$$\alpha \hookrightarrow \alpha\, \mathrm{I} \qquad \text{de K em L}$$

Mostre que esta aplicação: 1) é biunívoca; 2) respeita as operações de 'soma' e 'produto'.

Podemos assim *identificar o corpo* K *a uma subálgebra* L * *de* L, *escrevendo* $\alpha = \alpha\, \mathrm{I}$, $\forall\, \alpha \in$ K. Em que caso é L * = L?

NOTA SOBRE A TERMINOLOGIA. O termo 'álgebra' tem sido usado com diversas acepções, o que por vezes pode dar lugar a equívocos. Primeiro que tudo, aparece-nos a *Álgebra*, como ramo da matemática que tem evoluído ao longo dos séculos e que, em nossos dias, é definida como sendo o estudo das *estruturas algébricas* (grupóides, semigrupos, grupos, quase-grupos, anéis, corpos, álgebras de Boole, espaços vectoriais, álgebras, etc.). Por outro lado, também se usa algumas vezes o termo 'álgebra' com significado de 'estrutura algébrica' (sinónimo de 'sistema algébrico' e 'espaço algébrico'). Mas, em sentido restrito, o termo 'álgebra' tem hoje, habitualmente, o significado que foi atrás definido (sinónimo de 'sistema hipercomplexo'). E é cada vez mais importante o estudo das *álgebras*, nesta acepção.

Mas é preciso notar que as *álgebras de Boole* não são álgebras segundo esta definição. Basta lembrar que as álgebras de Boole não são anéis, nem sequer módulos, como se viu no Capítulo VI, vol. I, 2.º tomo.

6. **Soma de duas matrizes quadradas.** Neste número e nos seguintes vamos ocupar-nos exclusivamente de matrizes quadradas de *2.ª ordem* com elementos reais. Mas as nossas conclusões estendem-se facilmente a matrizes quadradas de *qualquer ordem* e com *elementos num corpo* K *qualquer*.

Consideremos uma matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Seja π um plano qualquer [1] e suponhamos fixada em $\mathcal{V}_\pi$ uma base $(\vec{j}, \vec{k})$. Então, como sabemos, a matriz A define uma aplicação linear f do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo, dada pelo sistema:

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

A aplicação f faz precisamente corresponder a cada vector $u \rightarrowtail (x, y)$ o vector $\vec{u}' \rightarrowtail (x', y')$.

Consideremos agora outra matriz

$$B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}, \text{ com } a', b', c', d' \in \mathbb{R}$$

Então B define uma aplicação linear g do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo, dada pelo sistema

$$\begin{cases} x'' = a'x + c'y \\ y'' = b'x + d'z \end{cases}$$

e que faz corresponder a cada vector $\vec{u} \rightarrowtail (x, y)$ o vector $\vec{u}'' \rightarrowtail (x'', y'')$.

---

(1) Estamos a referir-nos a planos do espaço usual $\mathcal{E}$. Mas π pode ser **qualquer espaço afim real com 2 dimensões** (Capítulo IV, n.º 11). Por sua vez, no lugar de $\mathcal{V}_\pi$ podemos considerar **qualquer espaço vectorial real com 2 dimensões** (Capítulo IV, n.º 10). Com efeito, todos esses espaços afins, ou os respectivos espaços vectoriais são **isomorfos entre si.** Como protótipo de espaço vectorial (ou afim) real de dimensão 2, podemos tomar o espaço $\mathbb{R}^2$.

Ora a aplicação f + g faz corresponder ao vector $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y)$ o vector

$$\vec{u}' + \vec{u}'' \rightsquigarrow (x' + x'', y' + y'')$$

e é, portanto, dada pelo sistema

$$\begin{cases} x' + x'' = (a + a')x + (c + c')y \\ y' + y'' = (b + b')x + (d + d')y \end{cases}$$

Deste modo, a matriz que representa f + g será

$$\begin{bmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{bmatrix}$$

Será, pois, natural chamar a esta matriz a *soma das matrizes* A e B, e designá-las por A + B. Teremos, pois, por definição:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{bmatrix}$$

Mas já vimos no Capítulo IV, n.º 1 (teorema 1, págs. 126-127) que a correspondência $f \rightsquigarrow A$, entre as aplicações lineares f e as matrizes A que as representam, é bijectiva. Daqui e da definição de soma de matrizes conclui-se que:

O conjunto das matrizes quadradas reais de ordem 2 é um módulo, isomorfo ao módulo das aplicações lineares do espaço $\mathcal{V}_\pi$ *em si mesmo.*

Representaremos o conjunto dessas matrizes por $\mathcal{M}_2$ e o conjunto destas aplicações lineares por $\mathcal{L}_2$.

Note-se que, em particular, a *matriz nula* é a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de elementos todos nulos; e que a *simétrica da matriz* A é a matriz

$$-A = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}$$

7. **Produto de um escalar por uma matriz.** Suponhamos que se mantêm todas as convenções e as hipóteses anteriores. Como se disse, f é a aplicação linear definida pelo sistema

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases} \qquad (\text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Seja agora *r* um número real qualquer. Então rf, produto do escalar *r* pela aplicação linear $f \in \mathcal{L}_2$ (ver n.º 3, pág. 200), é a aplicação que faz corresponder a cada vector $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y)$ o vector $rf(\vec{u}) = r\vec{u}' \rightsquigarrow (rx', ry')$ dado pelo sistema

$$\begin{cases} rx' = (ra)x + (rc)y \\ ry' = (rb)x + (rd)y \end{cases}$$

Deste modo, a matriz que representa a aplicação rf será

$$\begin{bmatrix} ra & rc \\ rb & rd \end{bmatrix}$$

É, portanto, natural chamar a esta matriz *produto de* r *por* A e designá-la por rA. Assim, *por definição:*

$$r\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rc \\ rb & rd \end{bmatrix}$$

Por outro lado, atendendo mais uma vez a que a correspondência $f \rightsquigarrow A$ é bijectiva e à conclusão do número anterior, conclui-se:

O conjunto $\mathcal{M}_2$, das matrizes quadradas reais de ordem 2, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, *isomorfo ao espaço vectorial $\mathcal{L}_2$, das aplicações lineares do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo.*

8. **Produto de duas matrizes.** Consideremos novamente duas matrizes quadradas reais de 2.ª ordem

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$$

e suponhamos fixado, num plano π, uma base $(\vec{j}, \vec{k})$. Então A representa a aplicação linear f (de $\mathcal{V}_\pi$ em $\mathcal{V}_\pi$) que faz corresponder, a cada vector $\vec{u} \rightsquigarrow (x, y)$, o vector $\vec{u}' \rightsquigarrow (x', y')$ dado por

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

Por sua vez, a matriz B representa a aplicação linear g (de $\mathcal{V}_\pi$ em $\mathcal{V}_\pi$) que faz corresponder ao vector $\vec{u}' \rightsquigarrow (x', y')$ o vector $\vec{u}'' \rightsquigarrow (x'', y'')$ dado por

$$(2) \qquad \begin{cases} x'' = a'x' + c'y' \\ y'' = b'x' + d'y' \end{cases}$$

Ora a aplicação gf transforma directamente o vector $\vec{u}$ no vector $\vec{u}''$. É portanto dado pelo sistema que se obtém, substituindo x', y' em (2) pelas respectivas expressões dadas por (1):

$$\begin{cases} x'' = a'(ax + cy) + c'(bx + dy) \\ y'' = b'(ax + cy) + d'(bx + dy) \end{cases}$$

ou seja

$$(3) \qquad \begin{cases} x'' = (a'a + c'b)x + (a'c + c'd)y \\ y'' = (b'a + d'b)x + (b'c + d'd)y \end{cases}$$

Como se vê, a aplicação gf (produto de g por f) é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} a'a + c'b & a'c + c'd \\ b'a + d'b & b'c + d'd \end{bmatrix}$$

É portanto natural chamar a esta matriz *produto de* B *por* A e representá-la por BA. Assim, por definição:

$$\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a + c'b & a'c + c'd \\ b'a + d'b & b'c + d'd \end{bmatrix}$$

Como se vê, o produto de B por A é obtido por meio da seguinte

REGRA: *O elemento de* BA *situado na linha* r *e na coluna* s *é a soma dos produtos que se obtêm, multiplicando ordenamente os elementos da linha* r *em* B *pelos elementos da coluna* s *em* A.

Esta técnica de cálculo é abreviadamente designada pela expressão *'multiplicar linhas por colunas'*.

Analogamente será

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}$$

Por exemplo, o produto da linha (b, d) de A pela coluna (a', b') de B dá o elemento ba' + db' da linha 2 e da coluna 1 de AB.

Mas convém, desde já, notar que *não se tem necessariamente*

$$AB = BA$$

Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte: *a multiplicação de matrizes quadradas reais de ordem 2 não é comutativa.*

Diz-se que duas matrizes A e B são *permutáveis* sse AB = BA (e analogamente para as respectivas aplicações lineares).

Finalmente, atendendo mais uma vez a que a correspondência $f \rightsquigarrow A$ é bijectiva, conclui-se:

O conjunto $\mathcal{M}_2$ das matrizes quadradas reais de 2.ª ordem é uma álgebra (não comutativa): isomorfa à álgebra $\mathcal{L}_2$ das aplicações lineares do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo.

Em particular, o elemento unidade desta álgebra — a aplicação I — é dada pelo sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases},$$

ao qual corresponde a matriz

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É natural chamar-lhe *matriz unidade,* visto ser o elemento unidade da álgebra $\mathcal{M}_2$:

$$AE = EA \quad , \quad \forall\, A \in \mathcal{M}_2$$

Chama-se *matriz escalar* toda a matriz da forma

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = rE,$$

em que *r* é um número real qualquer [1]. De acordo com o que se pede para provar no exercício II do n.º 5, a aplicação

$$r \rightsquigarrow rE \text{ de } \mathbb{R} \text{ em } \mathcal{M}_2$$

é biunívoca e respeita às operações de 'soma' e de 'produto'; além disso, faz corresponder ao número 1 (elemento unidade do *corpo* $\mathbb{R}$) a *matriz* E (elemento unidade da *álgebra* $\mathcal{M}_2$). Por conseguinte:

As matrizes escalares formam uma subálgebra de $\mathcal{M}_2$ *que é isomorfa ao corpo* $\mathbb{R}$ *e que podemos identificar a este corpo, escrevendo*

$$rE = r \quad , \quad \forall\, r \in \mathbb{R}$$

Nesta ordem de ideias, será lícito escrever também

$$\mathbb{R} \subset \mathcal{M}_2$$

Convém notar que a aplicação linear correspondente à matriz rE é precisamente a *multiplicação por* r, isto é, a aplicação $\vec{u} \rightsquigarrow r\,\vec{u}$ do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo, definida pelo sistema

$$\begin{cases} x' = rx \\ y' = ry \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = rx + 0y \\ y' = 0x + ry \end{cases}$$

A este corresponde efectivamente, como se vê, a matriz escalar rE, que se identifica ao escalar *r*.

EXERCÍCIO. Mostre que, sendo *a* e *b* números reais, a aplicação

$$a + bi \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{C} \text{ em } \mathcal{M}_2$$

---

[1] Tal como se disse logo no início do n.º 6, todas estas considerações se estendem a matrizes quadradas de **qualquer ordem** e com **elementos num corpo** K **qualquer.**

é um isomorfismo do corpo $\mathbb{C}$ sobre uma subálgebra $\mathbb{C}^*$ de $\mathcal{M}_2$, transformando o número 1 na matriz unidade.

Depois disto, note que

$$(1) \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como vimos, a matriz unidade, E, pode ser identificada ao número 1. Por sua vez, a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

representa a aplicação linear definida pelo sistema: $x' = -y'$, $y' = x$. Ora esta aplicação linear é a *rotação de* 90° *no sentido positivo*, representada pelo número i. Assim, o facto demonstrado e a fórmula (1) permitem-nos fazer a *identificação*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a + bi$$

Podemos então escrever

$$\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_2$$

Note-se, porém, que existe uma infinidade de outras subálgebras de $\mathcal{M}_2$, que são *corpos isomorfos a* $\mathbb{C}$. A que indicámos aqui é precisamente constituda pelas matrizes que representam *semelhanças positivas do plano.*

9. **Inversão de matrizes.** Continuaremos a designar por $\mathcal{L}_2$ o conjunto das aplicações lineares do espaço $\mathcal{V}_\pi$ em si mesmo [1]. Vimos que $\mathcal{L}_2$ é uma álgebra isomorfa à álgebra $\mathcal{M}_2$ das matrizes quadradas reais de ordem 2. Um elemento f de $\mathcal{L}_2$ é *regular*, sse tem inverso no anel $\mathcal{L}_2$, ou (o que é equivalente) sse f é uma aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{V}_\pi$ sobre si mesmo.

---

[1] Convém rever a nota do n.º 6 a propósito de $\mathcal{V}_\pi$.

Na mesma hipótese se diz que a matriz A correspondente a f é *regular.* Portanto a matriz A é regular, sse existe uma matriz X tal que

$$(1) \qquad AX = XA = 1,$$

em que '1' designa a matriz unidade (também designada por 'E'). Mas, se existe pelo menos uma matriz X que verifica (1), só existe uma (porquê?) e essa matriz é designada por A^{-1}.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad (\text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Então A representa a aplicação linear f definida pelo sistema

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

que transforma cada vector $\vec{u} \rightarrowtail (x, y)$ no vector $\vec{u}' \rightarrowtail (x' \; y')$. A aplicação inversa, *se existe,* transforma o vector $\vec{u}' \rightarrowtail (x', y')$ no vector $\vec{u} \rightarrowtail (x, y)$. Como obter então o sistema de equações que define essa aplicação inversa? (Pense, antes de ler o que vem a seguir.)

É claro que se trata simplesmente de resolver o sistema (2) em relação às variáveis x, y, como funções de x', y'. Já sabemos que:

Quaisquer que sejam x', y' $\in \mathbb{R}$, *o sistema (2) de equações em* x, y *é possível e determinado, sse* $ad - bc \neq 0$. *Neste caso tem-se*

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = ax + cy \\ \\ y' = bx + dy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{dx' - cy'}{ad - bc} \\ \\ y = \dfrac{ay' - bx'}{ad - bc} \end{cases}$$

Por conseguinte, nesta hipótese (e só nesta), tem-se

$$\forall \vec{u}' \in \mathcal{V}_\pi \quad , \quad \exists^1 \vec{u} \in \mathcal{V}_\pi : \vec{u}' = f(\vec{u})$$

o que significa que f é uma aplicação biunívoca do espaço $\mathcal{V}_\pi$ sobre si mesmo. A aplicação inversa (também linear) é definida, segundo (3), pelo sistema:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{d}{ad - bx} x' - \dfrac{c}{ad - bc} y' \\[2ex] y = - \dfrac{b}{ad - bc} x' + \dfrac{a}{ad - bc} y' \end{cases}$$

Por outro lado, se $ad - bc = 0$, é fácil ver, pelo estudo feito no 6.° ano, que o sistema de equações (2) em x, y é umas vezes *impossível* e outras vezes *indeterminado*, conforme os valores de x′, y′. *Portanto* f *não é elemento regular de* $\mathcal{L}_2$, *se* $ad - bc = 0$.

Também já sabemos que se escreve, por convenção,

$$ad - bc = \det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

Então, no caso em que $ad - bc \neq 0$, o sistema (4) assume o aspecto

$$\begin{cases} x = \dfrac{d}{\det A} x' - \dfrac{c}{\det A} y' \\[2ex] y = - \dfrac{b}{\det A} x' + \dfrac{a}{\det A} y' \end{cases}$$

A matriz correspondente será portanto

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{d}{\det A} & - \dfrac{c}{\det A} \\[2ex] - \dfrac{b}{\det A} & \dfrac{a}{\det A} \end{bmatrix}$$

Mas esta é a matriz inversa de A (porquê?).

Por conseguinte:

TEOREMA. *A matriz* A *é regular, sse det* A $\neq$ 0. *Nesta hipótese, tem-se*

$$(5) \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO. Verificar directamente que a matriz (3) é a inversa de A, multiplicando-a à esquerda e à direita por A (supondo det A $\neq$ 0).

NOTAS

I. A matriz

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

é chamada a *adjunta de* A (matriz cujo produto por A é det A . E).

II. O conceito de 'determinante' pode ser generalizado a matrizes quadradas de ordem qualquer e com elementos em qualquer corpo. Bastará saber que se mantêm — com forma inteiramente análoga às que foram indicadas para determinantes de 3.ª ordem (Capítulo IV, n.º 8, págs. 161-167) — a noção de *'complemento algébrico'* e a regra do desenvolvimento dum determinante segundo os elementos de uma fila qualquer. Deste modo, por exemplo, o cálculo de um determinante de 4.ª ordem pode ser reduzido ao cálculo de determinantes de 3.ª ordem (há no entanto processos mais simples para o cálculo dos determinantes).

Posto isto, chama-se *adjunta de uma matriz* A, e designa-se por adj A, a matriz que se obtém, substituindo cada elemento de A pelo seu complemento algébrico e transpondo depois a matriz obtida (isto é, trocando nesta, ordenadamente, as linhas com as colunas).

Ora o teorema anterior, que demonstramos para *matrizes quadradas reais de 2.ª ordem,* estende-se a matrizes quadradas *de qualquer ordem e com elementos num corpo* K *qualquer,* bastando substituir a fórmula (4), pela fórmula mais geral

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

III. A fórmula anterior, para inversão de matrizes quadradas, tem *grande interesse teórico, mas diminuto interesse prático,* quando se trata de aplicá-la directamente à inversão de uma matriz quadrada de *ordem muito elevada.* Neste caso, os métodos habituais para resolução de sistemas de equações lineares (método da substituição, método da redução, etc.) deixam de ser aplicáveis e têm de ser substituídos *por métodos de aproximações sucessivas* (ou *métodos de iteração*). Aliás, estes mesmos métodos só podem ser geralmente aplicados *mediante computadores electrónicos,* que invertem matrizes quadradas com grande aproximação — permitindo por vezes calcular os elementos da matriz inversa com 12 algarismos decimais exactos.

A inversão de matrizes de ordem elevada é um problema que se põe com frequência a computadores (por exemplo em questões de programação linear). A potência de um computador costuma ser avaliada, precisamente, pela rapidez com que inverte uma matriz de ordem elevada.

Antes de existirem os computadores electrónicos, era geralmente impossível inverter, por exemplo, uma matriz quadrada de ordem 100. Basta lembrar que uma tal matriz tem $100^2 (= 10\,000)$ elementos e que o cálculo de cada um desses elementos é por si só laboriosíssimo.

10. **Matrizes singulares.** Recordemos as noções de 'elemento singular' e 'divisor de zero', num anel A qualquer:

Diz-se que um elemento *a* de A é *singular* sse *a* não é regular. Diz-se que *a* é *divisor de zero,* sse $a \neq 0$ e existe $b \neq 0$ tal que $ab = 0 \vee ba = 0$.

Vimos que *todo o divisor de zero é um elemento singular* (cf. 1.° vol., 2.° tomo, teorema 1, pág. 92). Mas a recíproca não é verdadeira, mesmo se nos limitarmos a elementos singulares não nulos:

Consideremos por exemplo o conjunto $\mathcal{C}$ de todas as funções reais definidas e contínuas em $\mathbb{R}$. Então $\mathcal{C}$ é um anel (comutativo) relativamente às operações usuais de 'soma' e 'produto'. Ora a função x, por exemplo, é um elemento singular deste anel (porquê?) [1]; mas este elemento de $\mathcal{C}$ não é um divisor de zero. Com efeito, seja f uma função tal que

$$f \in \mathcal{C} \wedge xf(x) \equiv 0$$

Então $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ (porquê?). Assim, $f(x) = 0$ para todo o $x \neq 0$ e, como f é contínua em $\mathbb{R}$, também $f(0) = 0$ (porquê?). Logo $f = 0$, o que prova que a função $x \rightsquigarrow x$ não é um divisor de zero (embora seja um elemento singular de $\mathcal{C}$).

No entanto prova-se o seguinte:

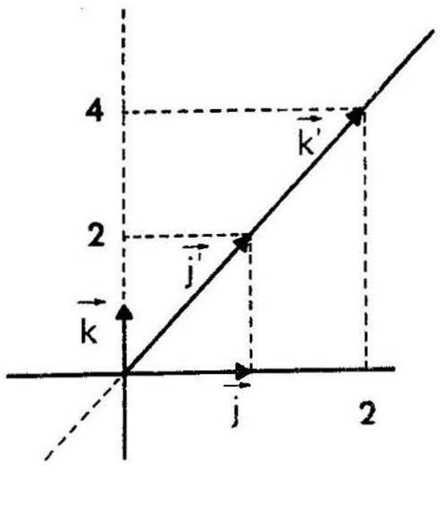
No anel $\mathcal{M}_2$ (e, mais geralmente, em qualquer anel de matrizes), todo o elemento singular não nulo é divisor de zero.

Não demonstraremos este teorema. Limitar-nos-emos a dar um exemplo, que contém a ideia da demonstração. Consideremos a matriz singular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (\det A = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0),$$

que representa a aplicação linear f definida pelo sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$$



[1] A função real $1/x$ não é definida em $\mathbb{R}$.

Ora esta aplicação transforma os vectores de base $\vec{j}$, $\vec{k}$, respectivamente nos vectores $\vec{j}' \rightsquigarrow (1, 2)$, $\vec{k}' \rightsquigarrow (2, 4)$ que *são colineares*

$$\vec{k}' = 2\vec{j}'$$

(por isso mesmo a matriz A é singular). Então f transforma cada vector $\vec{u} = x\vec{j} + y\vec{k}$ no vector

$$\vec{u}' = x\vec{j}' + y\vec{k}' = (x + 2y)\vec{j}'$$

Portanto f transforma todo o vector $\vec{u} \in \mathcal{V}_\pi$ num vector $\vec{u}'$ *colinear* com $\vec{j}'$ (o contradomínio de f não é pois $\mathcal{V}_\pi$; qual é então?).

Consideremos agora a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

que representa a aplicação linear definida pelo sistema

$$\begin{cases} x'' = 2x - y \\ y'' = -4x + 2y \end{cases}$$

Esta transforma o vector $\vec{j}' \rightsquigarrow (1, 2)$ no vector nulo: *foi escolhida precisamente com essa finalidade.* É portanto fácil ver *a priori* que

$$BA = 0 \quad , \quad \text{embora seja } A \neq 0 \text{ e } B \neq 0$$

Isto aliás pode ser confirmado efectuando o cálculo. Note-se entretanto que

$$AB \neq 0 \quad , \quad \text{apesar de ser } BA = 0.$$

Mas, seja como for, ficou provado que a matriz A é um divisor de zero, de acordo com a definição geral de 'divisor de zero', atrás recordada.

Analogamente, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

tem-se, como é fácil verificar

$$AB = 0, \text{ com } A \neq 0 \text{ e } B \neq 0, \text{ mas } BA \neq 0$$

Como se vê, as álgebras de aplicações lineares ou de matrizes, além das aplicações práticas importantíssimas que oferecem, constituem um manancial de exemplos sugestivos e variados, aptos a ilustrar a teoria geral das estruturas algébricas.

Fica ao mesmo tempo confirmado o interesse da teoria abstracta das estruturas algébricas, que permite uma extraordinária economia de pensamento. Este grande poder de síntese é um dos caracteres essenciais dos métodos axiomáticos da matemática moderna, que se tornaram indispensáveis, precisamente, para se poder hoje dominar a imensa variedade de teorias, muitas delas isomorfas entre si, que começaram a surgir desde o século passado.

Em poder de condensação, a matemática moderna está para a matemática de há 10 anos, como esta se apresentava em relação à matemática de PEDRO NUNES.

O *Livro de Álgebra* de Pedro Nunes, que, no seu género, foi um das obras mais notáveis da Europa, era um volumoso tratado, supra-sumo da ciência algébrica desse tempo, que não ía contudo além da equação do 2.° grau [1]. Mas o facto de não se ter introduzido ainda o método simbólico da álgebra, bem como a relutância do Autor em aceitar a existência dos números

[1] Pouco depois deram-se as descobertas dos grandes algebristas italianos relativas às equações do 3.º e do 4.º graus. Pedro Nunes refere-se a este facto num aditamento ao tratado.

relativos, e ainda a ausência de uma teoria simples dos números irracionais, obriga-o a expor em numerosas páginas, de leitura difícil, a teoria da equação do 2.° grau — que se pode hoje apresentar, com perfeito rigor, e sem dificuldade, em breves páginas, a alunos do ensino secundário.

EXERCÍCIO. Sendo f, g duas aplicações lineares dum espaço vectorial U em si mesmo, indique uma condição necessária e suficiente para que seja $fg = 0$. [Obs.: chama-se *núcleo de* f o conjunto dos vectores *u* de *U* tais que $f(u) = 0$].

Índice

Composto e impresso na
Imprensa Portuguesa — Porto
e concluiu-se
em Outubro de 1975

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA