

J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO
DO
COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA
(1.º volume)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

III

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA

(ASSUNTO NÃO TRATADO NO COMPÊNDIO)

1. A iniciação à geometria analítica deverá fazer-se bastante cedo, até para dar um bom suporte intuitivo à noção de produto cartesiano (haja em vista a origem da palavra 'cartesiano') e, em especial, às relações entre números reais.

Tal iniciação deverá ser tanto quanto possível elementar. *Não nos parece oportuno utilizar, desde já, o cálculo vectorial* ⁽¹⁾. O conceito de vector é um instrumento algo elaborado, que dificulta a aplicação do método heurístico.

2. Para evitar um hiato entre os Capítulos II e III do *Compêndio*, convirá dedicar três horas semanais ao estudo da geometria analítica e continuar na linha do *Compêndio* nas restantes três horas. Esta bifurcação terminará logo que cesse a introdução à geometria analítica.

3. Para apoio dos alunos, poderá seguir-se o livro adoptado de *Geometria Analítica Plana*.

Os assuntos expostos nos n.ºs 1, 2 e 3 não oferecem qualquer dificuldade, não só porque o aluno já recebeu uma iniciação intuitiva sobre este método nos anos anteriores, mas ainda porque está agora familiarizado com o conceito de 'par ordenado'. *O professor deverá coordenar o ensino de modo que, neste momento, o aluno já esteja esclarecido sobre o uso da expressão 'correspondência biunívoca', tal como esta aparece no início do Capítulo III.*

No n.º 1 indica-se, em pormenor, como se estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos duma recta r e os

(1) Se este assunto vier a ser introduzido no 2.º ciclo, como aliás é para desejar, é claro que a situação terá de ser revista quanto ao 3.º ciclo.

números reais, ou seja, uma correspondência biunívoca entre o *conjunto* r (de pontos) e o *conjunto* $\mathbb{R}$ (de números). Esta correspondência leva a dizer, por comodidade, 'o ponto 3' em vez de 'o ponto de abscissa 3', 'o ponto 0' em vez de 'o ponto de abscissa 0', etc. Mas é claro que uma coisa é um *ponto* da recta e outra coisa é o *número* que o representa — tanto mais que essa correspondência se pode estabelecer de uma infinidade de maneiras diferentes. Note-se entretanto que, pela referida circunstância, o conjunto $\mathbb{R}$ também é chamado '*recta numérica*' e, nesta ordem de ideias, os números reais podem ser chamados '*pontos*', por extensão de linguagem.

Analogamente, no n.º 2, é indicado como se estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dum plano α e os pares ordenados de números reais, portanto uma correspondência biunívoca entre o conjunto α (de pontos) e o conjunto $\mathbb{R}^2$ (quadrado cartesiano de $\mathbb{R}$, ou seja, o conjunto de todos os pares ordenados de números reais). Tal como no caso anterior, diz-se por comodidade 'o ponto (2, 3)' em vez de 'o ponto de abscissa 2 e ordenada 3', etc. Mas, evidentemente, uma coisa é um ponto do plano e outra coisa é o par ordenado que o representa. No entanto, pela referida circunstância, o conjunto $\mathbb{R}^2$ é chamado '*plano numérico*' e então os seus elementos (que são os pares ordenados de números reais) podem ser chamados '*pontos*', por extensão de linguagem.

4. É este um momento oportuno para um diálogo importante, relativo à *existência dos entes geométricos no mundo físico*. O diálogo poderá fazer-se noutra ocasião, mais cedo ou mais tarde, com diversas variantes, ao sabor das circunstâncias. Mas é necessário que o assunto seja debatido alguma vez com os alunos, para que estes não fiquem a ter ideias deformadas sobre um dos aspectos fundamentais da matemática: o das suas relações com a natureza.

O diálogo pode começar com a seguinte pergunta dirigida aos alunos:

Afinal o que é um ponto, o que é uma recta, o que é um plano — na verdadeira acepção destes termos?

Na melhor das hipóteses obtém-se a resposta cómoda habitual, aliás de acordo com o que foi lembrado no Capítulo I, n.º 17:

Trata-se aí de termos primitivos, isto é, de termos que não são definidos logicamente a partir de outros.

Mas o professor não deve de modo nenhum contentar-se com esta resposta. Deve sim voltar à carga:

Também os termos 'gato', 'rosa', etc. são termos primitivos, no mesmo sentido, e no entanto todos sabem reconhecer um gato, uma rosa, etc. Ora quem é que já viu um ponto, uma recta ou um plano?

Os alunos terão de admitir que *ninguém* viu tais coisas. Mas há que lembrar-lhes:

Também ninguém viu ou espera ver centauros, sereias ou dragões. Todos sabem que não existem seres vivos com os atributos que esses nomes invocam: trata-se de meras criações da fantasia humana. Pois serão as figuras geométricas, como os centauros e as sereias, nada mais do que produtos da nossa imaginação?

Os alunos hão-de talvez dizer que não se trata bem da mesma coisa. É preciso encorajá-los nesse sentido e observar:

A cada passo chamamos 'pontos', 'segmentos de recta', 'esferas', etc. a certos entes do mundo físico, tais como: o sinal deixado pela ponta dum lápis sobre o papel, um fio bem esticado, uma bola de bilhar, etc.

Mas haverá logo quem repare:

Pois sim, mas toda a gente sabe que essas coisas não são pontos, não são segmentos de recta, não são esferas.

Ao que o professor dirá:

Todavia essas coisas seriam pontos, segmentos de recta, esferas, etc. se verificassem determinadas condições, que são os axiomas e as definições da geometria de Euclides.

E perguntará logo em seguida:

Esses objectos do mundo físico não verificam as referidas condições?

Se adoptarmos a lógica bivalente, a resposta só pode ser 'verificam' ou 'não verificam'. O aluno escolhe provavelmente a segunda (a primeira é demasiado vulnerável). Logo:

Se essas coisas não verificam as referidas condições, a geometria é inaplicável ao mundo físico, não é verdade?

Mais uma vez a resposta terá de ser 'sim' ou 'não' e o aluno optará provavelmente pela negativa (a primeira é incompatível com a anterior resposta). Mas o professor deverá pôr novamente os alunos perante a realidade:

No entanto, se medirmos os três ângulos internos dum triângulo, verificamos que a soma dos três é igual a 180° ; se medirmos os três lados dum triângulo rectângulo, verificamos que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos — e assim por diante. A cada passo vemos confirmadas as previsões teóricas da geometria euclidiana, cujas aplicações são fundamentais na ciência e na técnica: os objectos de uso corrente, as máquinas, as pontes, as catedrais, os arranha-céus, os transatlânticos, as viagens aéreas ou cósmicas — tudo isso que o homem concebe e executa com tanto êxito é feito de acordo com as leis da geometria euclidiana. Parece pois que chegamos a uma conclusão absurda, desconcertante:

A GEOMETRIA É E NÃO É APLICÁVEL AO MUNDO FÍSICO.

Como pode isto ser?

Não será difícil ouvir dos alunos a resposta:

A GEOMETRIA APLICA-SE APROXIMADAMENTE AO MUNDO FÍSICO.

O professor deve então lembrar que, segundo o esquema da lógica bivalente, uma proposição ou é verdadeira ou é falsa: não se admitem proposições *aproximadamente verdadeiras*. Em que ficamos então? A conclusão só pode ser esta:

Quando se trata de aplicar a matemática ao mundo físico, chega um momento em que não podemos cingir-nos mais ao esquema rígido da lógica bivalente; nesse momento, é inevitável substituir o conceito de 'verdadeiro' pelo conceito de 'aproximadamente verdadeiro'.

Tornando ao exemplo anterior, convém ainda lembrar o seguinte:

As medições têm sempre carácter aproximado. Não podemos pois dizer que a soma dos ângulos internos dum triângulo é exactamente igual a 180° . O que verificamos na prática é o seguinte: quanto mais aquilo a que chamamos 'triângulo' parece aproximar-se daquilo que idealizamos com esse nome, mais a soma dos tais ângulos internos se aproxima de 180° — e mesmo

isso com as limitações próprias do método experimental, como se verá a propósito do cálculo das probabilidades.

Assim, uma coisa é a matemática pura, ciência dedutiva rigorosa, baseada na lógica bivalente, outra coisa é a matemática aplicada, isto é, a aplicação da primeira à realidade empírica.

E agora a discussão volta ao ponto de partida.

Afinal em que ficamos: existem ou não existem figuras geométricas no mundo empírico (1) ?

Uma resposta adequada será a seguinte:

Não existem como as pensamos, mas existem no mesmo sentido em que existem corpos *sólidos*, *água*, a *cor de verde*, etc.; isto é, existem coisas que se aproximam mais ou menos desses entes que idealizamos. O homem inventa palavras para descrever o que observa na natureza, mas esta é *infinitamente complexa e está sempre a mudar, de modo que a nossa linguagem só aproximadamente lhe é aplicável* (2).

Até com o exemplo anterior da palavra 'gato' e da palavra 'rosa' se verifica uma situação análoga. Qualquer de nós — e até o melhor especialista na matéria — poderá um dia encontrar-se perante um animal que *pareça ser e não ser um gato* ou perante uma flor que *pareça ser e não ser uma rosa*. A natureza está sempre a criar novas formas e assim, quer nos debrucemos sobre o passado, quer avancemos para o futuro, estão sempre a surgir-nos surpresas que obrigam a remodelar os nossos conceitos:

'Todo o mundo é composto de mudança,
Tomando sempre novas qualidades'

O diálogo sobre este tema poderia prolongar-se indefinidamente, mas convém suspendê-lo aqui. Talvez no 7.º ano venha a haver oportunidade para esclarecer o conceito de espaço físico no sentido relativista, libertando o espírito do aluno de alguns fantasmas seculares em que anda enredado o ensino. *Mas convém agora incitar vivamente os alunos a lerem a «Nota Histórica» do Capítulo IV*

(1) É claro que se pode pôr mais geralmente a pergunta: 'Existe o mundo empírico, isto é, existe alguma coisa fora de nós, como fazem crer os nossos sentidos — ou é tudo um sonho? Nós pelo menos existimos, segundo Descartes: *Cogito, ergo sum*. E para além de nós? Mas tudo isso transcende o âmbito da matemática e das suas aplicações.

(2) Escusado será dizer que a palavra 'aproximadamente' tem aqui significado indefinível: só a intuição nos pode guiar no seu uso.

(Funções de variável real) do Compêndio de Álgebra adoptado, sobretudo na parte respeitante a filósofos gregos.

5. Os n.ºs 3, 4 e 5 do livro de *Geometria Analítica Plana* serão omitidos. Quanto ao assunto do n.º 6 (distância entre dois pontos) convém introduzi-lo heurísticamente. Por exemplo, o professor começará por pedir aos alunos que determinem a distância entre dois pontos com a mesma ordenada, *partindo de casos concretos, acompanhados da respectiva representação gráfica:*

(2, 5) e (7, 5) ; (2, -3) e (-5, -3) ; (0, 0) e (-2, 0), etc.

Convidado um aluno a achar a expressão que dá em geral a distância de dois pontos (x_1, y) e (x_2, y) *com a mesma ordenada*, é provável que ele escreva:

$$x_1 - x_2$$

O professor perguntar-lhe-á então: '*Suponha que x_1 é menor que x_2 : está certa a expressão?*' Após uma *breve discussão*, em que podem intervir outros alunos, não é difícil chegar à expressão correcta ⁽¹⁾:

$$|x_1 - x_2|$$

Analogamente para o caso de dois pontos *com a mesma abcissa*.

Passa-se depois ao caso de dois pontos que não tenham a mesma abcissa nem a mesma ordenada, *partindo novamente de exemplos concretos, não limitados ao primeiro quadrante:*

(2, 1) e (6, 6) ; (-2, 5) e (3, -7);

(2, 0) e (0, 3) ; (0, 0) e (2, 3), etc.

Não será deste modo difícil levar a maioria dos alunos a redescobrir (com o mínimo de sugestões) a fórmula que dá a distância no caso geral.

Se mais tarde o professor pedir alguma vez a um aluno em chamada, a dedução dessa fórmula, este deverá proceder, mais ou menos, como vem indicado no livro, omitindo evidentemente o processo heurístico. Não esquecer que o método a seguir na exposição dum assunto já conhecido não é geralmente o mesmo que se adoptou na investigação.

(1) Verifica-se uma estranha resistência dos alunos ao emprego do sinal de *módulo*. Pela via aqui indicada será talvez mais fácil obter uma adesão espontânea ao uso desse sinal.

6. Os n.ºs 7 e 8 do livro poderão ser omitidos e entra-se então no Capítulo II do mesmo livro. A orientação, mais uma vez, deverá ter carácter heurístico, *partindo de exemplos tão simples e sugestivos quanto possível.*

Proponha-se por exemplo a equação

$$x = y \quad (\text{no universo } \mathbb{R})$$

Esta representa uma relação binária. Qual? Precisamente a relação $=$, isto é, a relação de identidade no universo considerado. Convide-se o aluno a indicar exemplos de pares ordenados que verificam a equação, tais como:

$$(2, 2) \quad , \quad (3, 3) \quad , \quad (0, 0) \quad , \quad (-1, -1) \quad , \quad \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \\ (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad , \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad , \quad \text{etc.}$$

e a representar geometricamente estes pares, uma vez fixado um referencial cartesiano. O aluno observa então que os pontos marcados pertencem todos a uma recta: *a bissectriz dos quadrantes ímpares.* Surgem assim três perguntas:

- 1) Quantos pares (x, y) verificam a equação $x = y$?
- 2) Todos os pontos da recta indicada correspondem a soluções dessa equação?
- 3) Todas as soluções da equação $x = y$ correspondem a pontos dessa recta?

O aluno observará que um ponto com coordenadas x, y iguais (portanto do mesmo sinal) só pode estar no 1.º quadrante ou no 3.º quadrante (ou em ambos). Por outro lado, se $x = y$, também $|x| = |y|$, quer dizer: esse ponto é *equidistante* dos eixos coordenados. Ora o aluno sabe que o *lugar geométrico* dos pontos do 1.º quadrante equidistantes dos eixos (isto é, o *conjunto* de todos os pontos do 1.º quadrante equidistantes dos eixos) é a bissectriz desse quadrante. Analogamente para o 3.º quadrante. Conclusão:

O conjunto de todos os pontos do plano, que representam soluções da equação $x = y$, é exactamente a recta bissectriz dos quadrantes ímpares. É natural então dizer que esta recta é a *imagem geométrica* (ou o *gráfico*) da equação $x = y$ ou de qualquer outra equação que lhe seja equivalente, como por exemplo

$$x - y = 0 \quad , \quad y - x = 0 \quad , \quad \text{etc.}$$

Também diremos que essa recta – a bissectriz dos quadrantes ímpares – é a *imagem geométrica* (ou o *gráfico*) da relação $=$.

Um segundo exemplo poderá ser a equação

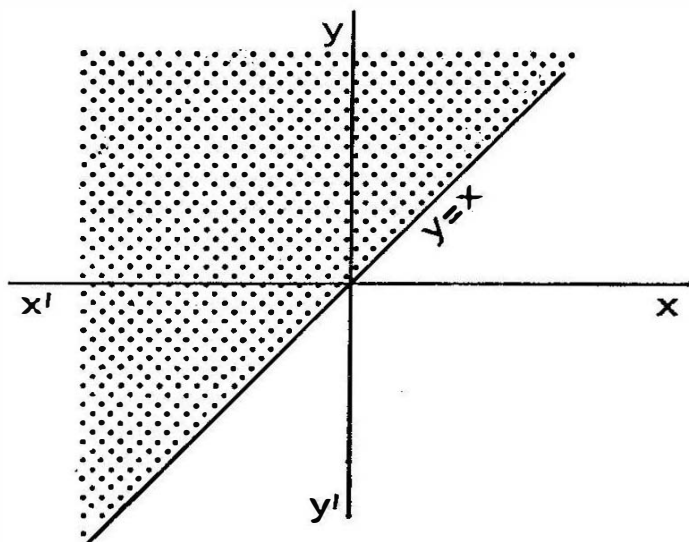
$$y = -x \text{ (equivalente a } x = -y, \text{ a } x + y = 0, \text{ etc.)}$$

que tem por gráfico a bissetriz dos quadrantes pares (trata-se agora da relação 'é simétrico de').

Mas nem todas as relações são representáveis por equações. Seja por exemplo a condição:

$$x \leq y$$

Quais os pontos representativos dos pares (x, y) que verificam



esta condição? São aqueles cuja abcissa, x , é inferior ou igual à sua ordenada, y . Uma vez marcados alguns desses pontos, a partir de exemplos numéricos, o aluno facilmente reconhece que o conjunto dos referidos pontos é o semiplano superior determinado pela bissetriz dos quadrantes ímpares. Este semiplano será pois a *imagem geométrica* (ou o *gráfico*) da condição $x \leq y$ ou de qualquer outra equivalente, por exemplo $y \leq x$, $x - y \leq 0$, etc. Também se dirá que é a *imagem geométrica* (ou o *gráfico*) da relação $\leq$.

Seja agora a condição

$$x < y$$

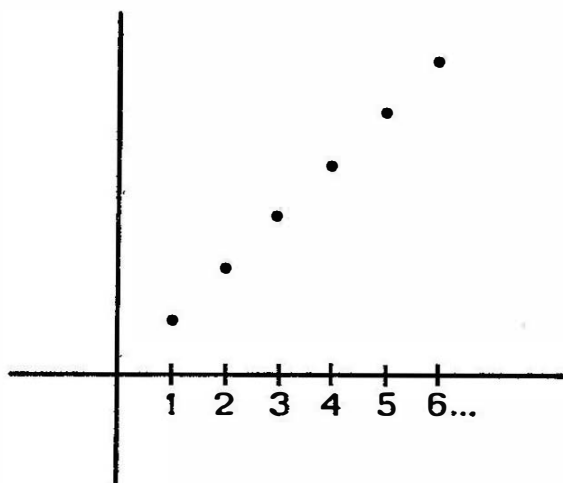
O gráfico desta não coincide com o da anterior ($x < y$ não é equivalente a $x \leq y$). O gráfico é agora o semiplano anterior *menos* a bissetriz dos quadrantes ímpares. Diremos pois também que é este o gráfico da relação $<$.

Consideremos ainda a condição

$$x = y \wedge x \in \mathbb{N}$$

(que define a restrição da relação $=$ ao conjunto $\mathbb{N}$). Neste caso, o estudo anterior permite facilmente reconhecer que o gráfico é

um conjunto *discreto* de pontos (isto é, de pontos *separados* entre si), constituído pelos pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares, cuja abcissa é um número natural (isto é, inteiro e positivo). Mas o gráfico é ainda neste caso um conjunto *infinito* de pontos.



Sejam agora as equações:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = -1$$

A primeira tem *uma só* solução: o par $(0, 0)$. O seu gráfico é um conjunto *com um só* ponto: a origem.

A segunda é *impossível*: o seu gráfico é portanto o *conjunto vazio*.

Por sua vez a condição $x + y = y + x$ é *universal*: o seu gráfico é o *plano inteiro*.

Estes exemplos já permitem formular uma síntese:

Cada relação binária ρ entre números reais é, por definição, um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, isto é, um conjunto de pares ordenados de números reais. Desde que se estabelece uma correspondência biunívoca entre estes pares e os pontos do plano, fica estabelecida, automaticamente, uma correspondência biunívoca entre as referidas relações binárias e os conjuntos de pontos do plano. Cada um destes conjuntos será chamado imagem geométrica (ou gráfico) da relação correspondente ou de qualquer das condições equivalentes que definem essa relação.

Quanto à designação tradicional '*lugar geométrico*', ela equivale, como se diz no livro, à designação moderna '*conjunto de pontos*'. Como ainda não caiu inteiramente em desuso, convém que o aluno também a registre.

7. Os exemplos dos n.ºs 10 e 11 do livro podem ser indicados ao aluno para leitura em casa, mas não interessa estudá-los em

pormenor. Pelo contrário, a experiência mostra a necessidade de esclarecer detidamente certos casos que, embora extremamente simples, encontram dificuldade de compreensão por parte dos alunos. Tais são os casos de condições com uma só variável.

Seja por exemplo a equação

$$x = 2 \text{ (no universo } \mathbb{R})$$

Trata-se duma condição com duas variáveis?

O aluno dirá provavelmente 'não'.

No entanto há condições com duas variáveis que lhe são equivalentes. Por exemplo?

Não será talvez difícil obter dos alunos a indicação de exemplos tais como:

$$x + 0 \cdot y = 2 \quad , \quad x = 2 \wedge y \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{etc.}$$

Quais são os pares ordenados que as verificam?

Todos aqueles em que o primeiro elemento, x , é 2, e o segundo elemento, y , é *qualquer número real*. Marcando alguns pontos representativos destes pares, o aluno imediatamente reconhece que o gráfico de tais condições é a *recta paralela ao eixo das ordenadas, de abcissa 2*. E, como

$$x = 2 \Leftrightarrow x + 0 \cdot y = 2 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y \in \mathbb{R},$$

é natural dizer que a equação $x = 2$ ou qualquer outra equivalente (por exemplo $x - 2 = 0$) tem por gráfico, *no plano*, a referida recta.

Devem seguir-se exemplos análogos, tais como

$$x = -3 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 5, \quad y = \sqrt{2} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad \text{etc.}$$

Há toda a conveniência em passar depois a condições tais como

$$x < 5 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad y \leq \frac{2}{3} \quad , \quad -2 \leq x \leq 5 \quad , \quad \text{etc.}$$

8. O assunto exposto no n.º 13 tem de ser agora tratado com maior amplitude, sob o título:

'Dedução de equações ou de condições de outro tipo qualquer para conjuntos de pontos que sejam dados geometricamente'

ou, mais sucintamente:

'Definir analiticamente conjuntos de pontos que sejam dados geometricamente'

Convém começar por um exemplo como o seguinte:

Achar uma equação de circunferência de centro $(5, -2)$ e de raio 4.

Por definição, a referida circunferência é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto $(5, -2)$, isto é, de todos os pontos (x, y) que verificam a *condição*:

A distância do ponto (x, y) ao ponto $(5, -2)$ é 4.

Ora, segundo a fórmula da distância, esta propriedade é traduzida algebricamente pela equação

$$\sqrt{(x - 5)^2 + (y + 2)^2} = 4,$$

equivalente a

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

Qualquer destas será pois *uma* equação da circunferência em questão. Esta será por sua vez a imagem geométrica dessas equações ou da relação definida pelas mesmas:

$$\{(x, y) : (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16\}$$

Convém depois aproveitar este exemplo, para passar logo ao seguinte:

Definir analiticamente o círculo de centro $(5, -2)$ e de raio 4.

Por definição, este círculo é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto $(5, -2)$ é *inferior ou igual* a 4. Chega-se deste modo à condição

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 \leq 16,$$

que define analiticamente o círculo em questão.

Devem seguir-se exemplos análogos:

Circunferência de centro $(0, 2)$ e raio 3.

Circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$.

Círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1.

Interior do círculo de centro $(2, 0)$ e raio 1.

Convém, é claro, aconselhar os alunos a desenhar as figuras consideradas, quando possível.

Poderá depois passar-se ao exemplo IV do livro, mas não convirá ir por enquanto mais longe.

9. O assunto dos n.ºs 15 e 16 do livro poderá agora ser tratado com muito maior facilidade e deixam de ser necessárias as considerações introdutivas.

Comecemos pela condição

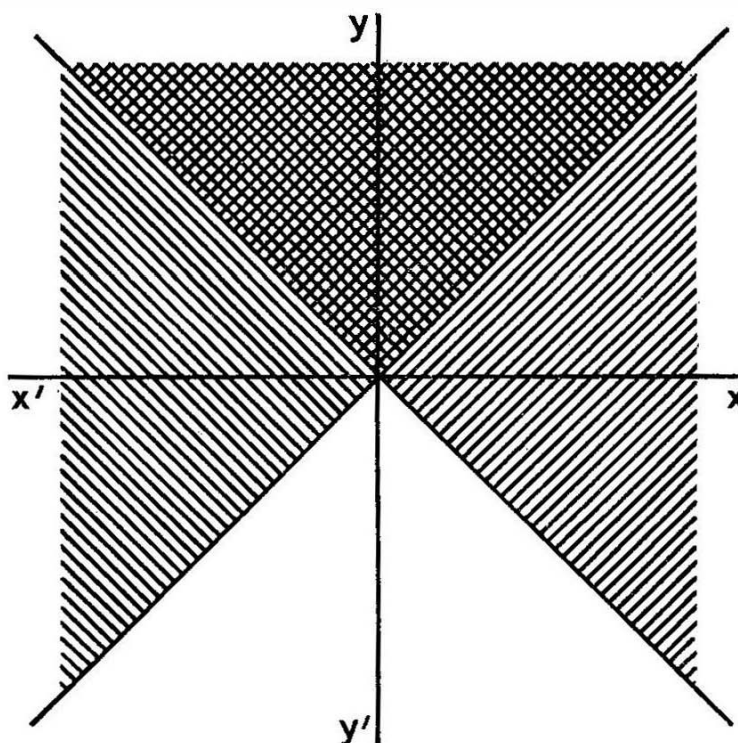
$$(1) \quad x - y \leq 0 \wedge x + y \geq 0,$$

que pode também ser apresentada sob a forma de sistema:

$$(1') \quad \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

Trata-se pois da conjunção das condições $x - y \leq 0$ e $x + y \geq 0$. A primeira, como já se viu atrás, tem por gráfico o semiplano superior determinado pela bissectriz dos quadrantes ímpares. A segunda tem por gráfico o semiplano superior determinado pela bissectriz dos quadrantes pares.

Ora o conjunto dos pares (x, y) que verificam a condição (1) é a *intersecção* dos conjuntos dos pares que verificam as condições $x - y \leq 0$ e $x + y \geq 0$.



Nestas circunstâncias, não é difícil ao aluno chegar por si à conclusão de que o gráfico da condição (1) é a *intersecção* dos dois referidos semiplanos, ou seja o *ângulo convexo* indicado na

figura a duplo tracejado (no desenho, é aconselhável usar giz ou lápis de cores diferentes para os dois semiplanos).

Convém considerar logo em seguida a condição

$$(2) \quad x - y \leq 0 \vee x + y \geq 0$$

O aluno não terá dificuldade nenhuma em reconhecer que o gráfico desta condição é a *reunião* dos dois semiplanos considerados, ou seja o *ângulo côncavo* indicado a tracejado simples ou duplo. Será também interessante observar que a condição (2) é equivalente à negação da seguinte:

$$(3) \quad x - y > 0 \wedge x + y < 0,$$

cujo gráfico é o *interior* do ângulo convexo não tracejado (*complementar* do gráfico anterior).

Deve seguir-se um exemplo como o seguinte:

$$x - y \geq 0 \wedge x + y \leq 0 \wedge y \geq -3$$

Agora o gráfico é a intersecção de três semiplanos, ou seja um *triângulo*.

Dum modo geral diz-se que um conjunto $\mathcal{A}$ de pontos é convexo sse, quaisquer que sejam os pontos P, Q de $\mathcal{A}$, o segmento de recta $\overline{PQ}$ está contido em $\mathcal{A}$.

Um plano, um semiplano, um ângulo convexo, um triângulo, um trapézio, um círculo, um sector circular, etc. são conjuntos convexos. Mas já um ângulo côncavo, uma circunferência, uma coroa circular, etc. não são conjuntos convexos. Os conjuntos convexos (muitas vezes definidos por sistemas de desigualdades) desempenham um papel importante em matemática moderna, pura ou aplicada, nomeadamente em programação linear, relativa a assuntos económicos.

Devem agora seguir-se exemplos de condições tais como:

$$x + y = 0 \wedge x - y = 0 \quad , \quad x^2 - y^2 = 0 \quad , \quad x^3 + y^3 = 1 \wedge x = y, \\ -1 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 4 \quad , \quad x^2 - y^2 \leq 0$$

o outras que se encontram no livro.

Quanto à condição $x^2 - y^2 \leq 0$, note-se que

$$x^2 - y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ x \geq -y \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq y \\ x \leq -y \end{cases}$$

Vê-se então que o gráfico é a reunião dos dois ângulos verticalmente opostos, superior e inferior, determinados pelas bissetrizes dos quadrantes (conjunto não convexo).

Considerem-se ainda condições tais como

$$x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad \sim (1 < x^2 + y^2 < 9) \\ x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x - 1)^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x^2 - 1 \geq 0, \text{ etc.}$$

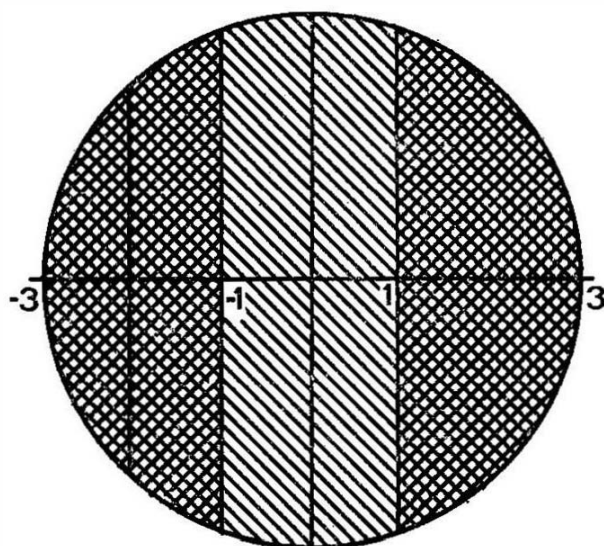
Quanto ao último exemplo, note-se que

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

donde, aplicando a distributividade da conjunção em relação à disjunção

$$x^2 + y^2 \leq 9 \wedge x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x \leq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Facilmente se reconhece que o gráfico é a reunião das duas porções de círculo indicadas a duplo tracejado na figura.



Um caso análogo, que interessa estudar, é o da condição

$$x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y^2 - 3y \geq 0$$

Um outro exemplo curioso e recomendável é o da condição

$$\begin{cases} y = 5 \\ -6 \leq x \leq 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ 2 \leq y \leq 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \\ (x + 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \end{cases}$$

Para melhor ver o gráfico, depois de feito o desenho, convém apagar os eixos e as linhas auxiliares.

A geometria analítica presta-se admiravelmente para espicaçar a curiosidade, a imaginação e até o sentido estético do aluno. Podem conceber-se os mais variados exemplos, agora e mais tarde.

A título de curiosidade, pode ainda apresentar-se o sistema de desigualdades

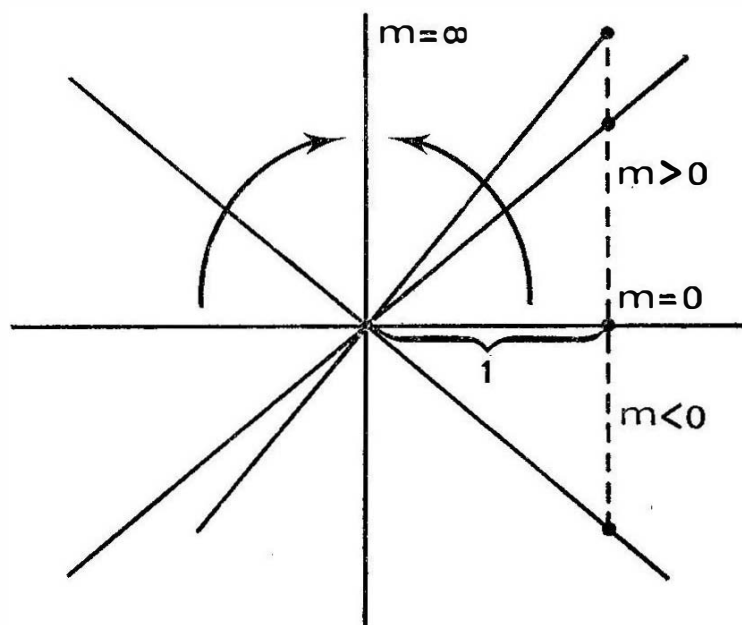
$$\begin{cases} y < \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{4 - x^2} \\ y > \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

Comparando com o exemplo III do n.º 12 do livro (pág. 31) vê-se que o gráfico neste caso é o conjunto dos pontos interiores à linha em forma de coração a que conduz esse exemplo (neste caso não valerá a pena fazer os cálculos e desenhar a curva; bastará observar o que está no livro).

É claro que nem todos estes exercícios terão de ser resolvidos na aula. O professor deverá propor vários como trabalhos de casa, que o aluno fará, ou não, como entender.

9. Passamos agora ao Capítulo III do livro, relativo ao ESTUDO GERAL DA RECTA. É claro que também aqui a orientação terá de ser modificada.

Em primeiro lugar a noção de *declive* deverá ser introduzida como se fez no n.º 25, pág. 57, fórmula (12). *Mas seria um erro didáctico grave introduzi-la secamente, sem considerações de ordem intuitiva que a motivem, estimulando a imaginação do aluno.* Deverá, pois, neste ponto, adoptar-se a orientação do *Compêndio de Álgebra*, no início do Capítulo VIII sobre DERIVADAS, começando com o exemplo bem concreto duma rampa.



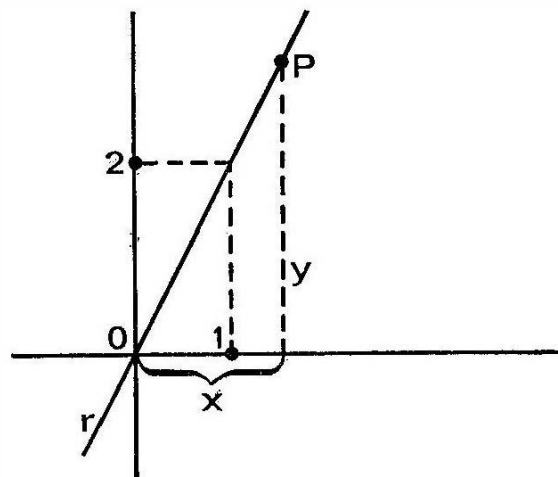
A distinção entre *declive positivo* e *declive negativo* será fundamental (não esquecer os exemplos numéricos!). Deve seguir-se a discussão dos casos-limites: *declive nulo* e *declive infinito*.

Quanto ao primeiro não há dificuldade. Para o segundo há que recorrer à intuição e é bom que o símbolo ∞ seja introduzido por esta via (mais tarde, na teoria dos limites, o assunto será retomado noutra base). Considerando sucessivas posições duma recta em rotação em torno dum ponto, sendo o declive da recta positivo, o aluno nota que o declive vai aumentando, *tornando-se superior a qualquer número que se dê* (um milhão, um bilião, etc.). É então natural dizer que o declive da recta em movimento tende para $+\infty$. Fazendo, depois, considerações análogas para uma recta de declive negativo, toma-se natural dizer que o declive da recta tende para $-\infty$. Mas, como a posição vertical pode ser atingida tanto de um lado como do outro, convencionou-se dizer que o *declive da recta vertical* é ∞ , sem distinção de sinal.

Escusado será dizer que estas considerações deverão ser feitas de modo heurístico, levando o aluno a interpretar por si próprio as situações.

10. Trata-se depois de estudar a equação reduzida duma recta não vertical. Proponha-se ao aluno o problema:

Achar uma equação da recta r que passa pela origem e tem declive 2.



O aluno começará por desenhar a figura respectiva. Em seguida deverá considerar um ponto P qualquer da recta, de coordenadas x, y , sendo $x > 0$. Como o declive da recta, determinado a partir dos pontos O e P , é $\frac{y}{x}$, deverá ter-se

$$\frac{y}{x} = 2 \quad \text{ou seja} \quad y = 2x$$

A conclusão será a mesma, supondo $x < 0$ (o ponto P está então no 3.º quadrante).

Finalmente, deverá ter-se ainda $y = 2x$ se P coincide com O , visto ser então $x = y = 0$.

Por conseguinte, podemos escrever:

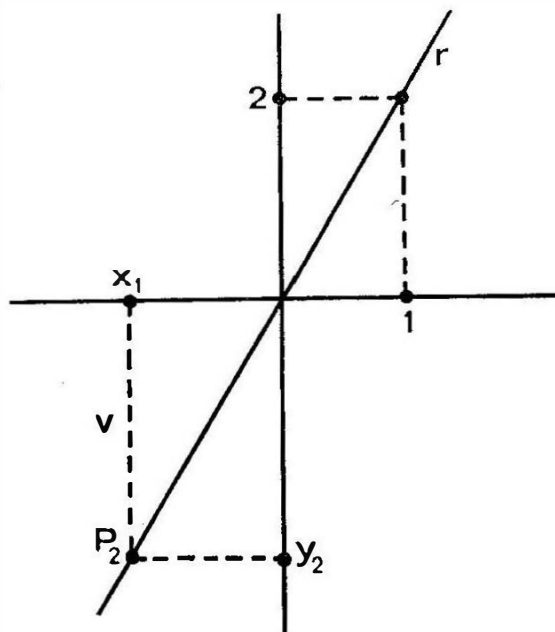
$$(1) \quad P \in r \Rightarrow y = 2x,$$

em que, como se disse, x é abcissa e y a ordenada de P .

Mas basta isto para que a equação $y = 2x$ tenha por gráfico a recta r ? Não: é necessário também que se verifique a implicação inversa:

$$(2) \quad P \in r \Leftarrow y = 2x$$

É portanto indispensável provar isto!



Seja então (x_1, y_1) *qualquer* par ordenado de números reais tal que $y_1 = 2x_1$ e seja P_1 o ponto correspondente. Trata-se de provar que P_1 pertence a r . Para isso, consideremos a recta vertical v que passa pelo ponto $(x_1, 0)$. Esta intersecta r num ponto P_2 de abcissa x_1 (pergunta-se ao aluno: porquê?). Designemos por y_2 a ordenada de P_2 . Como este ponto pertence a r e corresponde ao par (x_1, y_2) , teremos, segundo (1),

$$y_2 = 2x_1 \text{ donde } y_2 = y_1 \text{ e portanto } (x_1, y_2) = (x_1, y_1)$$

Mas daqui resulta $P_1 = P_2$ (pergunta-se ao aluno porquê) e, visto que $P_2 \in r$, tem-se $P_1 \in r$, como se queria provar.

Por conseguinte, atendendo a (1) e a (2):

$$P \in r \Leftrightarrow y = 2x$$

Mas isto quer dizer, exactamente, *que a imagem geométrica da equação $y = 2x$ é a recta r .*

Devem seguir-se exemplos análogos com rectas de declive negativo (por exemplo $-\frac{2}{3}$) e declive nulo. Deste modo se chega à síntese:

Uma recta não vertical, de declive m , que passe pela origem, tem por equação:

$$y = mx$$

Num segundo passo, irá investigar-se o *caso duma recta não vertical que não passe necessariamente pela origem*. Depois de introduzida a expressão 'ordenada duma recta na origem', propõe-se o problema:

Achar uma equação da recta r cujo declive é $\frac{1}{2}$ e cuja ordenada na origem é 3.

O aluno começará por desenhar a figura correspondente. Em seguida, *motu proprio* ou por sugestão alheia, traçará a recta que passa pela origem e que tem o mesmo declive. Não lhe será então difícil, por considerações mais ou menos semelhantes às do livro, chegar à equação que se pretende:

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Deve seguir-se o exemplo duma recta cuja ordenada na origem seja negativa. Deste modo se chega à síntese:

Toda a recta não vertical tem uma equação da forma

$$y = mx + b,$$

em que m é o declive da recta e b a ordenada na origem.

O aluno deverá chegar a estas sínteses como resultados dum processo indutivo, tal como nas ciências experimentais, indo do particular para o geral. Só depois notará que o raciocínio no

caso geral é essencialmente o mesmo, bastando substituir os símbolos numéricos por letras. Quanto às figuras, essas terão de corresponder sempre a casos particulares, evidentemente, mas é preciso notar que não intervêm essencialmente nas demonstrações: o seu papel é apenas o de apoiar a intuição.

Resta ainda provar que a recíproca da proposição anterior é também verdadeira, como se faz na pág. 50 do livro.

11. Passando ao n.º 22 do livro, deverá mais uma vez seguir-se o caminho do particular para o geral. Proponha-se por exemplo ao aluno o seguinte problema:

Determinar o gráfico da equação

$$3x - 2y - 5 = 0$$

O aluno é conduzido naturalmente a ver que

$$3x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

e assim reconhece que o gráfico pedido é uma recta não vertical.

Devem seguir-se exemplos de rectas verticais e de rectas horizontais. A síntese a que se pretende chegar é a seguinte:

Toda a equação da forma

$$Ax + By + C = 0,$$

em que A, B, C são números reais quaisquer, não sendo A e B simultaneamente nulos, define uma recta. Reciprocamente, toda a recta pode ser definida por uma equação desta forma. A recta será não vertical, sse $B \neq 0$, sendo então o declive e a ordenada na origem dados pelas fórmulas:

$$m = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

12. Saltando o n.º 23, passaremos depois ao n.º 24. Mais uma vez o caminho a seguir deverá ser heurístico, do particular para o geral.

Proponha-se, por exemplo, o problema:

Achar a equação reduzida da recta que passa pelo ponto (3, 4) e tem declive 2 (começando por desenhar a figura).

A equação pedida será da forma

(1) $y = 2x + b,$

em que falta determinar b. Como determiná-lo? Visto que o ponto

considerado pertence à recta, o par ordenado (3, 4) é uma solução de (1). O aluno é levado a reconhecer então que

$$4 = 2 \times 3 + b$$

donde: $b = -2$. A equação pedida será pois: $y = 2x - 2$.

Pode passar-se logo ao caso geral:

Achar a equação reduzida da recta que passa por um ponto dado (x_1, y_1) e tem declive dado m .

Todos ou quase todos os alunos *deverão* ser capazes de reproduzir rapidamente os passos anteriores no caso geral:

$$y = mx + b \quad , \quad y_1 = mx_1 + b \quad , \quad b = y_1 - mx_1$$

$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

O aluno será conduzido a notar que esta equação é equivalente à seguinte, de *forma elegante, facilmente memorizável*:

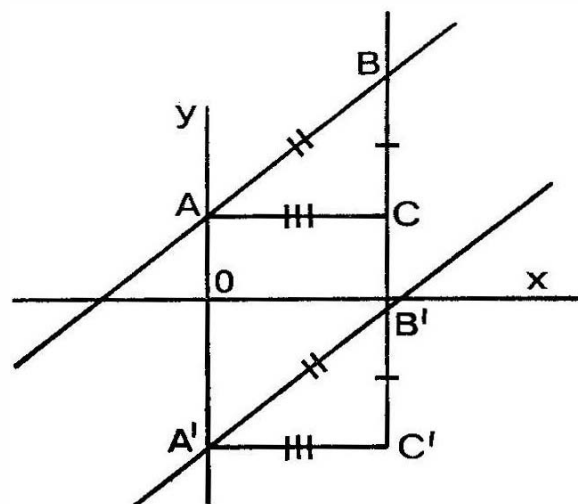
$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Podem seguir-se os exemplos I e II do livro.

Quanto à equação da recta que passa por dois pontos (n.º 26), o problema reduz-se ao anterior, depois de achado o declive — será preferível, mesmo didacticamente, não considerar neste problema o caso geral (isto é, com equações literais).

13. Saltando depois os n.ºs 27, 28 e 29 podemos passar imediatamente aos problemas de intersecção e paralelismo de rectas. Mas será talvez conveniente começar pelos problemas de paralelismo mediante considerações directas de ordem geométrica. Proponha-se aos alunos a seguinte questão:

Se duas rectas são paralelas, que relação deve haver entre os seus declives?



Não é preciso ter uma intuição geométrica excepcional para responder imediatamente: 'são iguais'. O aluno será convidado a fazer a demonstração ⁽¹⁾. Pode seguir-se o caminho seguido pela figura (o problema do sinal do declive é mais delicado; há que fazer aí apelo à intuição). Os casos particulares de rectas horizontais ou verticais são imediatamente esclarecidos.

Segue-se a pergunta:

Se duas rectas têm o mesmo declive, que relação deve verificar-se entre as rectas?

Não é difícil obter a resposta. Para a demonstração pode-se utilizar a mesma figura e tomar o comprimento de $\overline{AC}$ para unidade. Ora $|BC| = |B'C'|$, etc. ⁽²⁾.

Síntese:

Duas rectas são paralelas sse têm o mesmo declive.

Note-se que este facto já foi utilizado intuitivamente nas considerações do n.º 10.

Vêm agora a propósito dois tipos de problemas:

I. *Verificar se as rectas seguintes são paralelas:*

$2x - 3y + 1 = 0$	e	$6x - 9y = 2;$
$3x - 2y + 1 = 0$	e	$2x - 3y + 1 = 0;$
$x - 5 = 0$	e	$y + 3 = 0;$
$x + 2 = 0$	e	$x - 2 = 0,$
	etc.	

II. *Por um ponto dado conduzir uma paralela a uma recta dada.*

Segundo a orientação anterior, convém começar neste caso por determinar o declive da recta, o que reduz o problema ao tipo considerado no n.º 12.

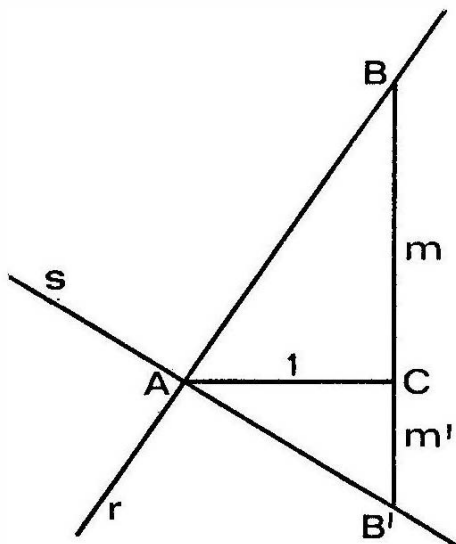
14. Antes ainda de entrar no estudo da intersecção de rectas, será talvez conveniente tratar de problemas de perpendicularidade, que surgem logo por associação de ideias com os de paralelismo. Ainda neste caso há que seguir o *método geométrico directo*.

⁽¹⁾ Dispensável se a turma estiver atrasada.

⁽²⁾ Representa-se por $|BC|$ o comprimento de $\overline{BC}$.

O problema que se põe agora é este:

Se duas rectas são perpendiculares, que relação se deve verificar entre os seus declives?



Convidado a representar duas rectas r , s perpendiculares entre si, *não sendo nenhuma delas vertical*, o aluno será levado a recordar o caminho que se segue para determinar geometricamente os respectivos declives, m e m' . É natural que siga um caminho semelhante ao da figura, em que AC é horizontal e BB' vertical. Para maior comodidade, supõe-se o comprimento de $\overline{AC}$ igual à unidade. Então os declives m , m' são dados, respectivamente, pelos comprimentos de $\overline{BC}$ e $\overline{B'C}$. Uma vez reconhecido que o triângulo $[ABB']$ é rectângulo, é possível que o aluno tenha um *lampejo*, uma *reminiscência* ('A altura referente à hipotenusa é a meia proporcional, etc.'), o que o levará talvez a escrever

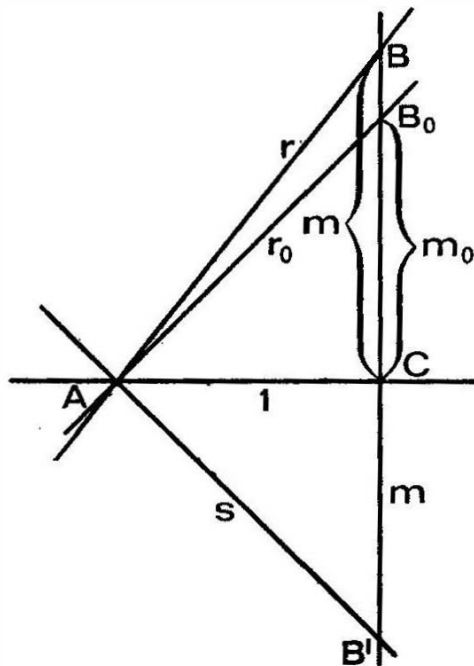
$$1 = mm'$$

É preciso errar para aprender! Os grandes génios erram inúmeras vezes quando tentam descobrir algo de novo... O professor deve lembrar ao aluno que *os declives podem ser positivos ou negativos*. A fórmula correcta surgirá então finalmente:

$$mm' = -1 \quad \text{ou ainda} \quad m' = -\frac{1}{m}$$

Segue-se agora necessariamente a pergunta:

Se esta relação se verifica, as rectas são perpendiculares?



Uma figura semelhante à anterior mostra que a resposta é afirmativa. É claro que r não pode ser paralela a s (de contrário seria $mm' = m^2 \geq 0$). Conduzindo pelo ponto A de intersecção de r e s uma recta r_0 perpendicular a s e designando por B_0 o ponto de intersecção de r_0 com BC e por m_0 o declive de r_0 , tem-se, pelo resultado anterior, $m_0 m' = -1$. Portanto $m_0 = -1/m' = m$, ou seja $|CB| = |CB_0|$. Daqui resulta, necessariamente, que $B = B_0$, visto que estes pontos estão do mesmo lado em relação a C , na recta BC . Por conseguinte r coincide com r_0 e é *portanto perpendicular a s* (na figura admitiu-se momentaneamente a hipótese $r_0 \neq r$, que a demonstração mostrou ser impossível).

Devem seguir-se exercícios, tais como os da pág. 78 do livro, mas utilizando directamente a fórmula anterior no caso das rectas não horizontais ou verticais. No caso excluído os problemas resolvem-se imediatamente, notando que, se a recta dada é horizontal, a pedida é vertical e vice-versa.

15. Pode-se agora abordar o estudo da intersecção de rectas. Mas desde já fique assente o seguinte ponto:

Não convém aqui chegar a fórmulas ou regras cujo emprego, infelizmente, degenera quase sempre na mecanização do aluno, levando-o a ignorar o que mais interessa, que é a dedução dessas regras.

Quanto a princípios de equivalência, pode-se desde já seguir a exposição do Capítulo VI, n.º 15, págs. 118-122 do 2.º tomo, considerando $\mathbb{R}$ no lugar do corpo K .

Devem considerar-se agora unicamente equações numéricas, mas não convém limitar o estudo ao caso de equações lineares (ver o exemplo dado nas referidas páginas).

Quanto a sistemas de equações lineares (duas equações com duas incógnitas), apresentar-se-ão em primeiro lugar exemplos de equações possíveis e determinadas, e convida-se o aluno a interpretar o resultado geometricamente (fazendo pelo menos uma vez a representação gráfica).

Os casos de impossibilidade ou indeterminação devem surgir ao aluno heurísticamente, isto é, o professor deve colocar o aluno inteiramente desprevenido perante a nova situação e tentar que ele se desembarace e se esclareça espontaneamente, até chegar a conclusões correctas. Aliás, o estudo da lógica que se tem estado a fazer irá facilitar bastante a tarefa.

Seja, por exemplo, o sistema

$$(1) \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$$

Pelo método de redução, baseado no *princípio de adição ordenada*, vê-se que o sistema é equivalente ao seguinte:

$$(1') \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 0x + 0y = + 1 \end{cases}$$

Existe algum par (x, y) de números reais que verifique a segunda equação?

Vê-se que não existe e porque não existe. Então essa equação é *impossível* e portanto o sistema também o é (a conjunção de uma condição impossível com outra qualquer é sempre uma condição impossível). Logo o sistema (1), sendo equivalente a (1'), é impossível.

A interpretação geométrica deste resultado não oferece qualquer dificuldade:

Dizer que o sistema (1) é impossível equivale a dizer que as rectas de equações $3x - 2y = 1$ e $6x - 4y = 3$ não têm nenhum ponto comum e são portanto paralelas.

Neste momento, *impõe-se* desenhar os gráficos das duas rectas. Aliás o aluno pode verificar que as rectas têm o mesmo declive $\left(\frac{3}{2}\right)$, mas não a mesma ordenada na origem, isto é, são *paralelas* e *distintas*, o que confirma a conclusão anterior.

Seja agora o sistema:

$$(2) \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

Procedendo como anteriormente, vê-se que este é equivalente ao seguinte:

$$(2') \quad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Quais as soluções da 2.^a equação? *Todos os possíveis pares ordenados de números reais.* Trata-se pois de uma *condição universal*, que tem por gráfico o plano inteiro. Mas a conjunção de qualquer condição com uma condição universal é equivalente à primeira. Logo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 2y = 1$$

Portanto o sistema (2) equivale à equação $3x - 2y = 1$. Quantas soluções tem esta? Já sabemos: uma infinidade, mas *não todos* os possíveis pares ordenados de números reais (não é uma condição universal). O sistema é portanto *possível*, mas *indeterminado*. Para obter diferentes soluções, basta resolver a equação $3x - 2y = 1$, *por exemplo* em ordem a y :

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2},$$

atribuir a x valores arbitrários e determinar os valores correspondentes de y .

Interpretação geométrica:

Dizer que o sistema (2) é equivalente à equação $3x - 2y = 1$ significa que a intersecção das rectas $3x - 2y = 1$ e $6x - 4y = 2$ é a própria recta $3x - 2y = 1$, isto é, significa que as equações $3x - 2y = 1$ e $6x - 4y = 2$ representam afinal a mesma recta.

O aluno pode verificar directamente que as rectas têm o mesmo declive e a mesma ordenada na origem, sendo portanto coincidentes.

Estes e outros exemplos levarão o aluno indutivamente à seguinte conclusão:

Duas rectas de equações

$$Ax + By + C = 0 \quad , \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

são paralelas, sse A' e B' são proporcionais a A e B , isto é, sse existe $k \neq 0$ tal que

$$A' = kA \quad , \quad B' = kB$$

As duas rectas serão *coincidentes* (ou *idênticas*), sse A' , B' , C' forem proporcionais a A , B , C (a coincidência é um caso particular do paralelismo!).

O professor não deve forçar a conclusão: deve deixá-la formar-se espontaneamente no espírito do aluno.

16. A propósito do assunto anterior, convém introduzir uma noção que irá ser aplicada no número seguinte. Chama-se *forma linear em duas variáveis* x , y toda a expressão do tipo

$$ax + by,$$

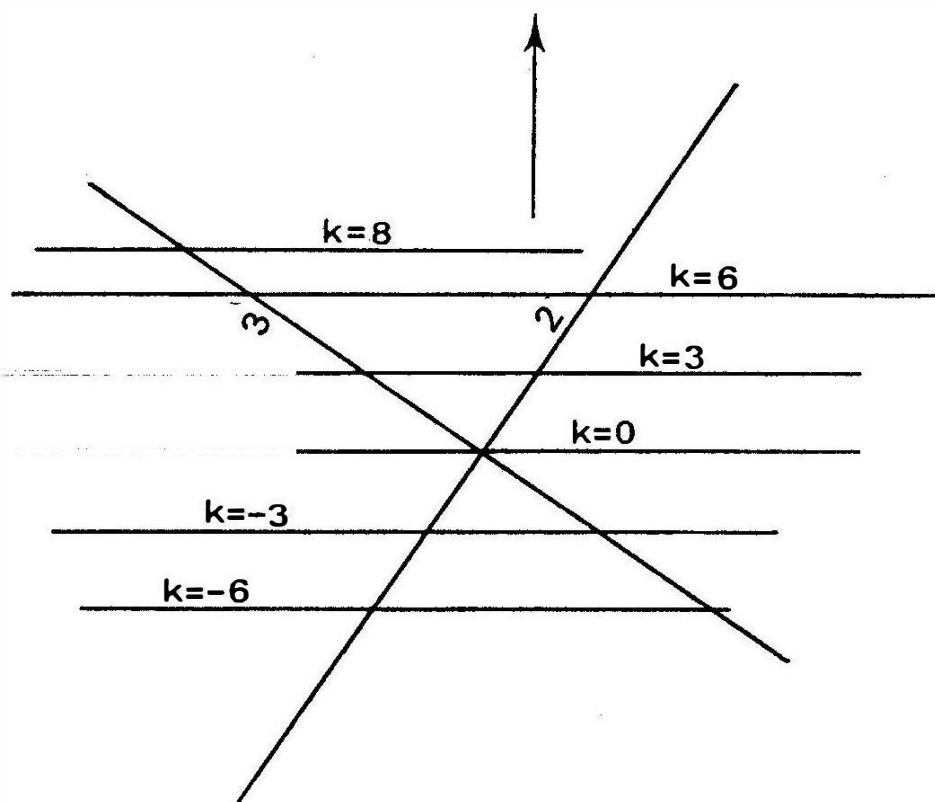
em que a , b são números reais quaisquer. Por sua vez, chama-se *recta de nível* duma forma linear $ax + by$ toda a recta sobre a qual a forma toma um valor *constante*, isto é, toda a recta que tenha uma equação do tipo

$$ax + by = k,$$

sendo k uma constante.

Desde logo se vê que as rectas de nível duma dada forma linear são todas as rectas paralelas a uma qualquer dessas linhas.

Na figura junta são indicadas várias rectas de nível da forma linear $3x + 2y$, bem como os valores que a forma toma sobre essas rectas. (Mais uma vez, convirá *começar pelo exemplo* para chegar ao conceito geral de recta de nível.)



Note-se que os valores da forma crescem de baixo para cima ou da esquerda para a direita, conforme indica a seta na figura.

17. O n.º 43 do livro, que vem marcado com um asterisco por não ser obrigatório, é agora, pelo contrário, da *máxima importância*, pelas suas aplicações em problemas de *programação linear*. A programação, linear ou não linear, é um dos tipos de problemas que se apresentam hoje com maior frequência em INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL, no domínio da economia. A sua inclusão no ensino liceal, com carácter elementar, está a tornar-se cada vez mais imperiosa.

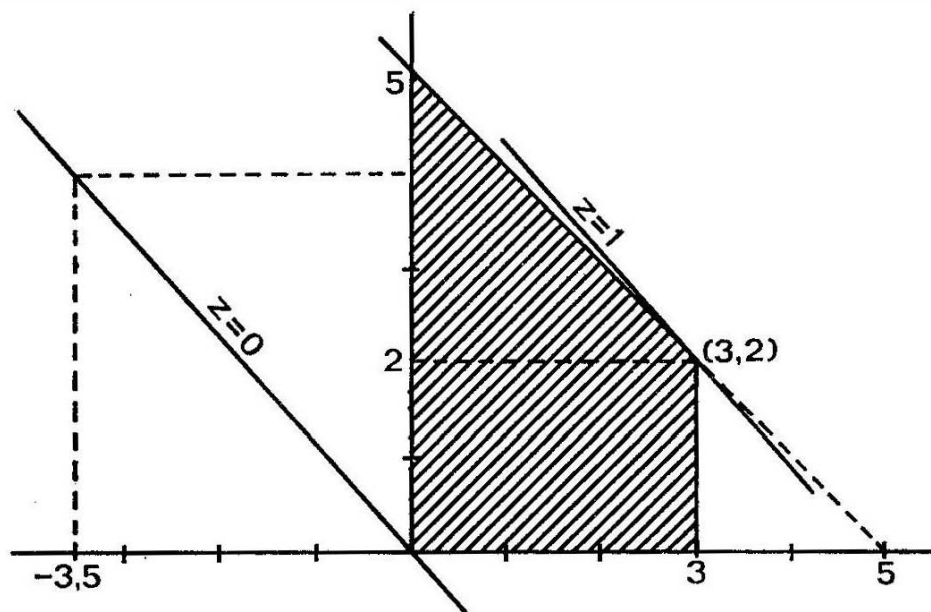
Começaremos por um exemplo de extrema simplicidade:

Suponhamos que um comerciante pretende adquirir uma quantidade, não superior a 5 toneladas, de certo produto que pode ser encomendado a duas fábricas A e B. A fábrica A garante ao comerciante um lucro de 4 contos por tonelada, mas não pode fornecer mais de 3 toneladas desse produto. A fábrica B garante apenas um lucro de 3500 escudos por tonelada, mas pode fornecer toda a quantidade pretendida. Investigar a melhor maneira de o comerciante distribuir as encomendas pelas duas fábricas, de modo a obter o máximo lucro.

Neste caso vê-se logo que a solução ótima consistirá em encomendar 3 toneladas do produto à fábrica A e duas toneladas à fábrica B. Mas convém examinar outras soluções possíveis, a fim de encontrar a solução ótima por um processo que possa aplicar-se a outros casos menos triviais.

Seja x o número de toneladas do produto que o comerciante encomenda à fábrica A e y o número de toneladas que encomenda à fábrica B. Teremos em primeiro lugar as seguintes condições, chamadas *restrições* (ou *condicionamentos*) do programa:

$$(1) \quad x + y \leq 5, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad y \geq 0$$



A conjunção destas três condições tem por gráfico o trapézio indicado na figura supra: será, pois, este o gráfico das *soluções possíveis*. Note-se que este conjunto é *convexo* (cf. pág. 57).

Designando agora por z o lucro garantido ao comerciante, será

$$z = 4x + 3,5 y$$

O que se pretende portanto é maximizar esta expressão, isto é, determinar os valores de x e de y que tornam máximo o valor da forma $4x + 3,5 y$ (chamada objectivo do programa), de acordo com as restrições (1).

Comecemos por construir a recta de nível $4x + 3,5 y = 0$ da forma linear considerada, como vem indicado na figura; todas as outras rectas de nível da forma são paralelas a esta e o valor z da forma cresce de baixo para cima (ou da esquerda para a direita). *Achar a solução óptima equivale pois a determinar a recta de nível de máxima ordenada na origem que encontra o gráfico das soluções possíveis (o trapézio indicado).*

Este problema pode ser resolvido geometricamente ou analiticamente. Imediatamente se reconhece que a solução (x, y) procurada deve ser um dos vértices do trapézio, que são:

$$(0,0) , (3,0) , (3,2) \text{ e } (0,5)$$

Os dois primeiros são desde logo eliminados. Para decidir, analiticamente, qual dos últimos é a solução, basta ver quais são os valores que a forma objectivo toma em cada um desses pontos:

$$4 \times 3 + 3,5 \times 2 = 19$$

$$4 \times 0 + 3,5 \times 5 = 17,5$$

Como o maior valor é o primeiro, segue-se que a solução *óptima* é $x = 3$ e $y = 2$ (toneladas), sendo o máximo lucro possível 19 contos.

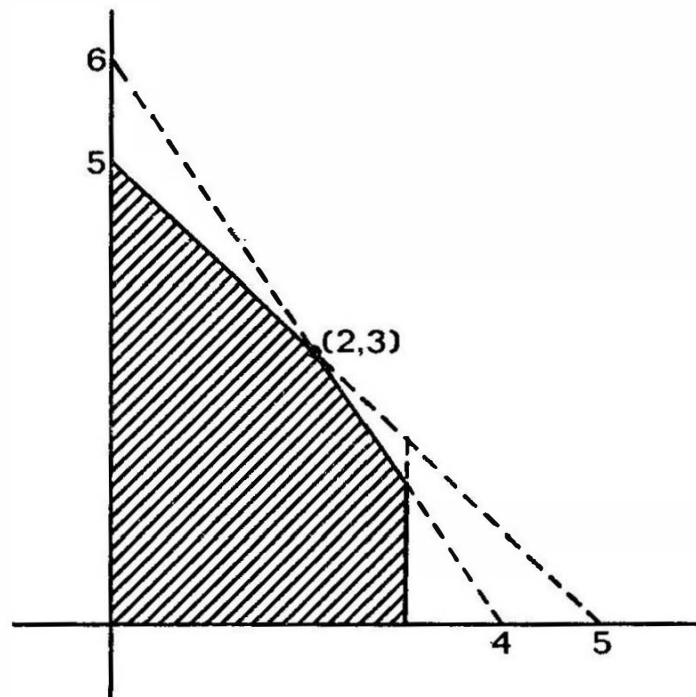
Vamos agora juntar uma nova restrição ao programa:

A fábrica A produz uma tonelada dessa mercadoria em cada 3 meses e a fábrica B produz uma tonelada em cada 2 meses, mas as fábricas não podem trabalhar simultaneamente por exigirem a presença de um mesmo técnico. Por outro lado, o comerciante não pode esperar mais 12 meses.

Este condicionamento traduz-se pela fórmula

$$3x + 2y \leq 12$$

e o domínio das soluções possíveis é agora o conjunto convexo



indicado na figura junta. Quanto à solução óptima pode ver-se que é agora

$$x = 2 \quad , \quad y = 3,$$

sendo o lucro máximo 18,5 contos.

Vejamos um outro exemplo, análogo ao anterior:

Um comerciante pretende obter um lucro não inferior a 28 contos com a venda de uma mercadoria que pode encomendar a duas fábricas A e B. A fábrica A garante um lucro de 4 contos por tonelada e pode produzir à razão de uma tonelada por quatro meses, mas não pode fornecer ao todo mais de 5 toneladas da mercadoria. A fábrica B garante um lucro de 3500 escudos por tonelada e pode produzir à razão de uma tonelada por três meses, mas não pode fornecer ao todo mais de 6 toneladas. Investigar a melhor maneira de fazer as encomendas, de modo a obter a mercadoria no mínimo prazo possível (em regime de trabalho não simultâneo).

Neste caso as restrições do programa são

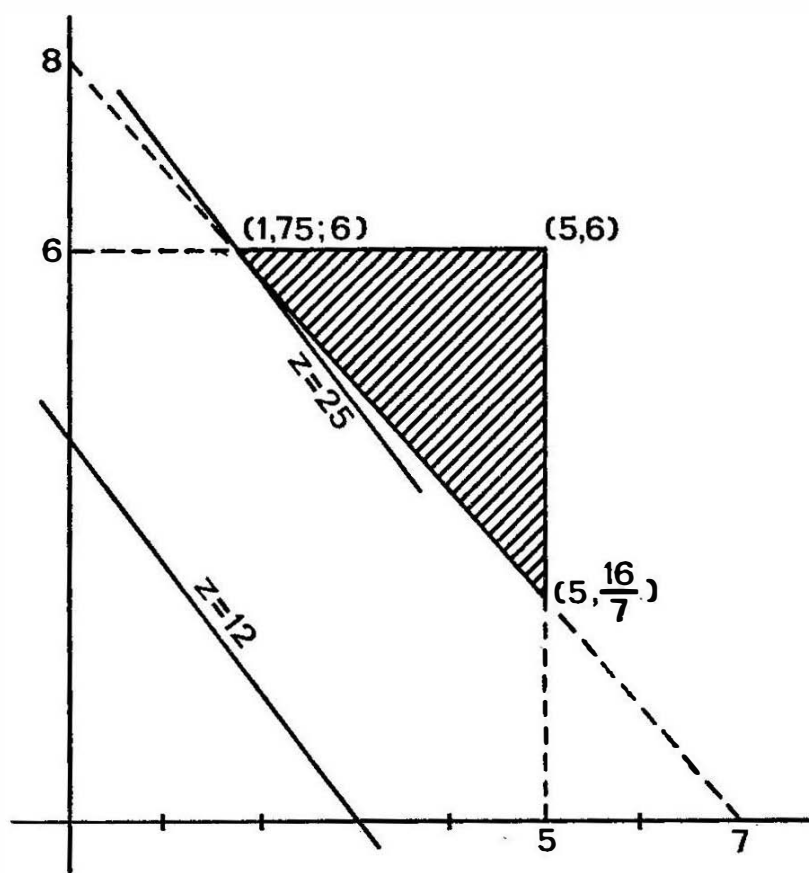
$$0 \leq x \leq 5 \quad , \quad 0 \leq y \leq 6 \quad , \quad 4x + 3,5y \geq 28$$

e a forma objectivo é

$$z = 4x + 3y$$

Todavia, ao contrário do que sucede no problema anterior, o que se pretende é *minimizar*, e não *maximizar*, esta forma.

O gráfico das soluções possíveis é o triângulo indicado na figura seguinte:



A solução óptima pode ser obtida analiticamente, comparando os valores que a forma toma nos vértices $(1,75; 6)$ e $\left(5, \frac{16}{7}\right)$ do triângulo. Como esse valor é menor no primeiro ponto, a solução óptima será

$$x = 1,75 \quad \text{e} \quad y = 6 \quad (\text{toneladas})$$

Para a resolução gráfica, construiu-se primeiro a linha de nível da forma e procurou-se em seguida a paralela a esta recta menos afastada da origem que encontra o triângulo.

Modifiquemos agora ligeiramente o enunciado do problema: suponhamos que a fábrica A produz à razão de uma tonelada por quatro meses e a fábrica B à razão de uma tonelada por três meses e meio.

Então é fácil ver que existe uma infinidade de soluções óptimas, representadas por todos os pontos do segmento de extremos $(1,75; 6)$ e $(5,16/7)$.

Os problemas de programação linear são apenas um caso particular dos *problemas de máximos e mínimos condicionados para funções de mais de uma variável*. Em programas de grandes empresas o número de variáveis é por vezes enorme, chegando a ser necessário resolver sistemas com mais de 100 incógnitas, o que seria impossível num prazo razoável, antes da era dos computadores electrónicos.

18. O estudo elementar das cónicas, tratado no Capítulo IV do livro, terá de ser feito agora de maneira diferente. *O assunto deverá ser adiado para o 7.º ano*. O que nos parece que não deve ser de modo nenhum menosprezado no ensino liceal. As cónicas tiveram sempre um grande interesse, e hoje mais do que nunca, com os progressos da astronáutica.

Inicialmente as cónicas serão definidas como sendo as secções planas das superfícies cónicas de revolução (ver n.º 65 do livro, pág. 130). Convém dispor de modelos nas turmas experimentais, para concretização deste assunto. O exemplo familiar da mancha luminosa, produzida numa parede por uma lâmpada de algibeira ou por um candeeiro munido de *abat-jour* de bordo circular, é também um recurso eficaz e sugestivo, sempre aconselhável.

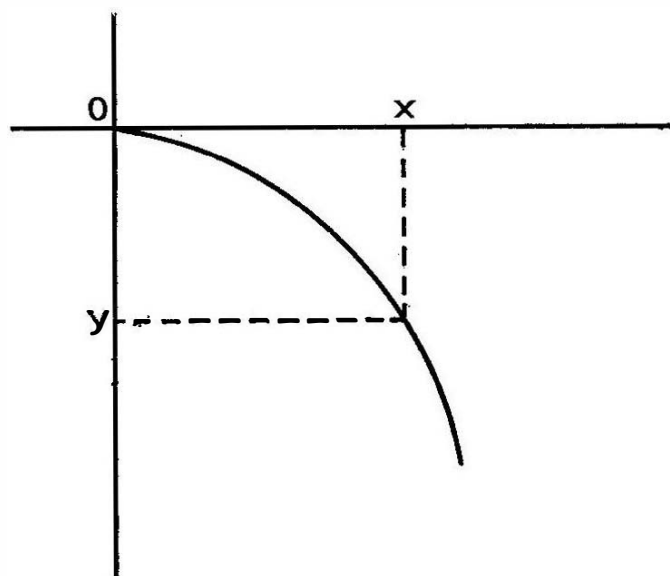
Mas não deve ficar por aqui a motivação do estudo das cónicas. O aluno aprenderá a seu tempo que o gráfico duma função quadrática é uma parábola. A demonstração de que esse gráfico é efectivamente uma parábola, de acordo com a definição anterior de parábola, como secção cónica de tipo particular, será feita posteriormente. Mas seria um erro pedagógico grave não concretizar desde logo este assunto com exemplos da cinemática.

O aluno ouve dizer, desde muito cedo, que um projectil, lançado à superfície da Terra em direcção não vertical, segue uma trajectória aproximadamente parabólica, desde que a resistência do ar não seja muito apreciável e que a velocidade inicial não ultrapasse um

certo limite (de contrário o projectil pode entrar em órbita elíptica ou afastar-se definitivamente da Terra!). A trajectória será tanto mais próxima duma parábola, quanto menores forem a resistência do ar e a extensão da superfície terrestre considerada (convém insistir mais uma vez no carácter aproximado de todo o conceito geométrico).

A demonstração deste facto não oferece dificuldade. Comece-mos pelo caso em que o projectil é lançado horizontalmente. Suponhamos que a velocidade inicial é, por exemplo, de 3 m/s. Então, *desprezando a resistência do ar e admitindo que a força da gravidade é constante em direcção, sentido e intensidade*, o movimento do projectil será o resultante dos dois seguintes:

- 1) um movimento horizontal, rectilíneo e uniforme, com a velocidade de 3 m/s;
- 2) um movimento vertical, uniformemente variado.



Tomemos para eixo dos x a recta horizontal a que se refere 1) e para eixo dos y a vertical a que se refere 2), orientada *de baixo para cima*. Então, supondo que a aceleração da gravidade é de $9,8 \text{ m/s}^2$, as equações destes movimentos serão respectivamente

$$(1) \quad \begin{cases} x = 3 t \\ y = - 4,9 t^2 \end{cases}$$

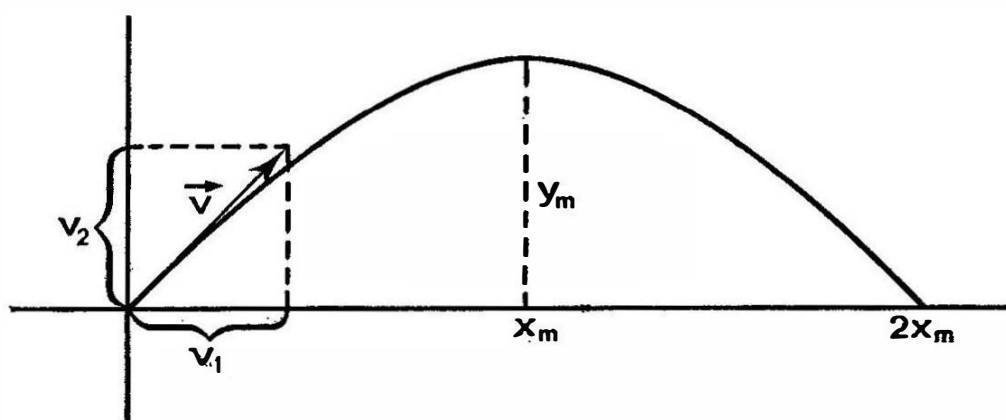
e podemos dizer que o *movimento resultante é definido por este sistema de equações*. Para ter a *equação cartesiana da trajectória*,

o que há a fazer é eliminar a variável t entre as duas equações, o que dá *aproximadamente*:

$$(2) \quad y = -0,54 x^2$$

Como se vê, a trajectória é um arco de parábola de eixo vertical, com a concavidade voltada para baixo. Diz-se que (2) é a *equação cartesiana* da parábola (equação nas coordenadas x, y). Por outro lado, diz-se que as equações (1) são *equações paramétricas* da parábola, sendo t o *parâmetro*.

Pode em seguida considerar-se o caso geral. Sejam v_1 e v_2 as componentes do vector velocidade inicial. Então o módulo



desta será

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

e o movimento do projectil será o resultante dos dois seguintes:

- 1) movimento horizontal uniforme, de equação

$$x = v_1 t ;$$

- 2) movimento vertical, uniformemente variado, de equação

$$y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2$$

A equação cartesiana da trajectória obtém-se eliminando t entre estas duas equações, o que dá

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2$$

Como se vê, trata-se ainda duma parábola de eixo vertical e de concavidade voltada para baixo. Mas o eixo da parábola só coincide com o eixo dos y se $v_2 = 0$ (nesse caso o vértice da parábola coincide com a origem).

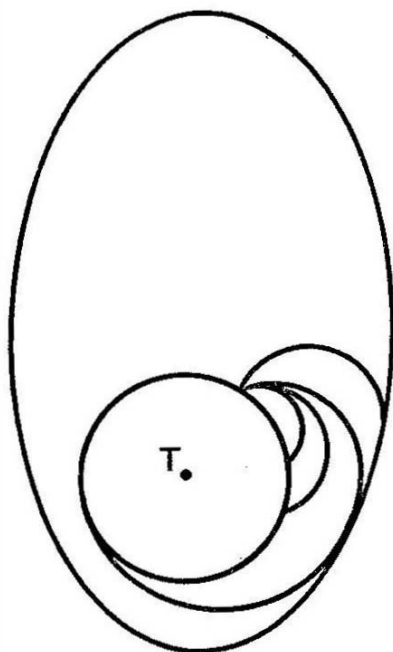
Se $v_2 > 0$, a ordenada do vértice da parábola é a altura máxima alcançada pelo projectil. Como a abcissa do vértice é ⁽¹⁾

$$x_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_2}{v_1} / \frac{g}{2v_1^2} = \frac{v_1 v_2}{g},$$

a referida altura será

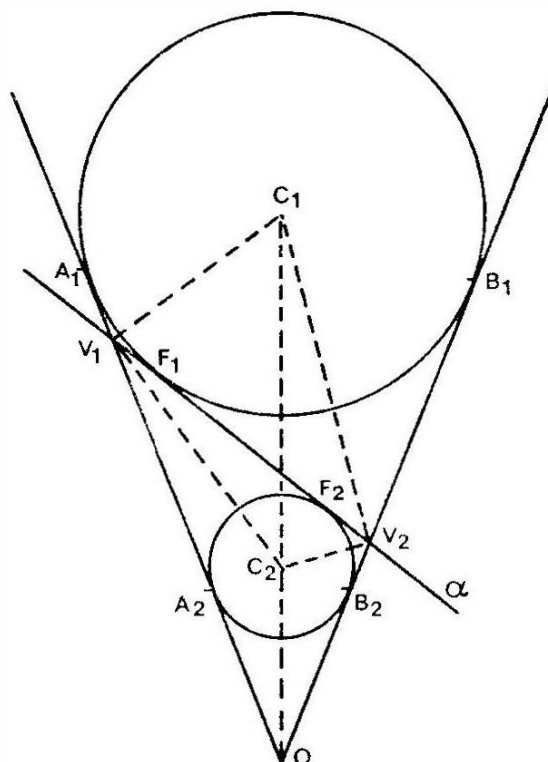
$$y_m = \frac{v_2}{v_1} x_m - \frac{g}{2v_1^2} x_m^2 = \frac{v_2^2}{2g}$$

Por sua vez, o *alcance horizontal* do projectil é $2x_m$. Este alcance será tanto maior quanto maior for $v_1 v_2$. No entanto, à medida que o alcance cresce, a trajectória vai-se afastando cada vez mais da forma parabólica e, para além de um certo limite, o projectil não poderá regressar à Terra. No entanto, para ser colocado em órbita fechada, o projectil necessitará de uma força propulsora conveniente durante a fase ascensional. Finda esta, a órbita será aproximadamente uma *ellipse*, de que o centro da Terra é um dos focos.



(1) Supõe-se que neste momento se está no 7.º ano e o aluno já fez um estudo preliminar do gráfico das funções quadráticas. O exemplo cinemático que estamos agora analisando poderá, com vantagem, ser apresentado a propósito desse estudo.

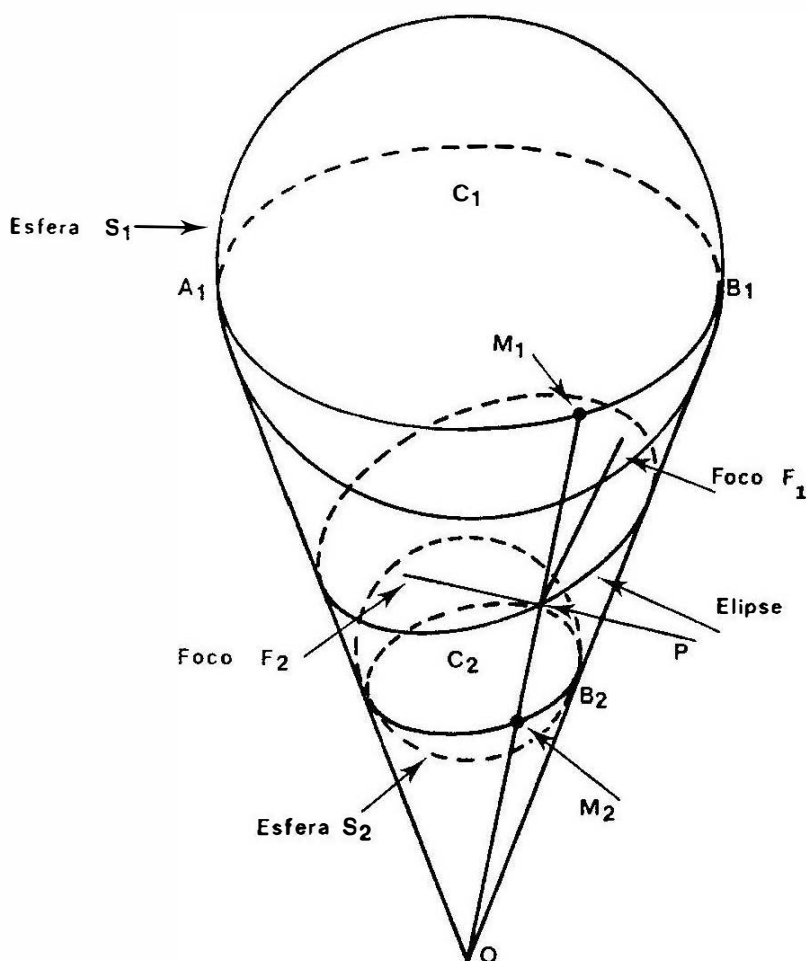
19. Após estas considerações, convém passar à demonstração das propriedades focais das cónicas que, como é sabido, permitem dar novas definições de 'elipse', 'hipérbole' e 'parábola'. A demonstração mais simples e elegante que se conhece foi descoberta em 1822 pelo matemático belga Dandelin. O Prof. Tom Apostol chama-lhe pitorescamente 'ice-cream-cone proof' (demonstração *cone de gelado*), pelo aspecto que toma, no caso da elipse, a figura a que se recorre nessa demonstração.



Para fazer a demonstração neste caso (da elipse), consideremos uma superfície cónica de revolução, Σ , e um plano α que não seja paralelo a nenhuma geratriz e não passe pelo vértice do cone. Então o plano α corta a superfície Σ segundo uma elipse, ε . Por sua vez, o plano que passa pelo eixo de revolução de Σ e é perpendicular a α corta a superfície cónica segundo duas geratrizes, OV_1 e OV_2 , e corta o plano α segundo uma recta, V_1V_2 (na figura supra supõe-se que o corte é feito pelo próprio plano da figura). É fácil ver que existem duas e só duas circunferências tangentes às 3 rectas OA_1 , OA_2 e V_1V_2 . O centro C_2 duma dessas circunferências é o ponto de encontro das bissectrizes dos ângulos internos do triângulo $[OV_1V_2]$. O centro C_1 da outra circunferência é o ponto de encontro das bissectrizes dos ângulos $A_1\hat{V}_1V_2$ e $V_1\hat{V}_2B_1$.

Esta circunferência toca, portanto, a recta V_1V_2 num ponto F_1 e as rectas OV_1 e OV_2 em pontos A_1 e B_1 , respectivamente. Por sua vez, a outra circunferência toca as mesmas rectas, em pontos que designaremos por F_2 , A_2 e B_2 , respectivamente.

Ora, quando esta figura roda em torno da recta OC_1 , a recta OA_1 gera a superfície cônica Σ e as duas circunferências consideradas geram duas superfícies esféricas S_1 e S_2 , que são tangentes ao plano secante α nos pontos F_1 e F_2 , e à superfície cônica segundo duas circunferências, geradas pelos pontos A_1 e A_2 (ou B_1 e B_2). Na figura seguinte, que sugere a designação 'ice-cream-cone proof', estão indicadas em perspectiva a superfície cônica Σ , as superfícies esféricas S_1 e S_2 , e a elipse $\mathcal{E}$, intersecção de α com Σ . É a essa figura que passamos agora a referir-nos.



Seja P um ponto qualquer da elipse $\mathcal{E}$; e sejam M_1 e M_2 , respectivamente, os pontos em que a geratriz OP toca nas superfícies

esféricas S_1 e S_2 . Ora as rectas PF_1 e PF_2 , que passam pelo ponto P , também são tangentes a S_1 e S_2 , e tem-se ⁽¹⁾

$$(1) \quad |PF_1| = |PM_1|, \quad |PF_2| = |PM_2|,$$

em virtude do seguinte facto, cuja demonstração se pode fazer como nas considerações iniciais:

Quando, por um ponto P exterior a uma esfera S , se conduzem rectas tangentes a S , as distâncias de P aos pontos de tangência são todas iguais entre si.

Por outro lado, tem-se:

$$|PM_1| + |PM_2| = |M_1M_2|$$

Daqui e de (1) resulta então

$$|PF_1| + |PF_2| = |M_1M_2|$$

E, como a distância de M_1 a M_2 não depende de P (é sempre a mesma qualquer que seja a geratriz OP considerada), conclui-se:

A soma das distâncias de um ponto P da elipse aos pontos F_1 e F_2 é sempre igual a um mesmo comprimento $|M_1M_2|$.

Poderia ainda demonstrar-se que, reciprocamente:

Se Q é um ponto do plano α tal que a soma das distâncias de Q a F_1 e a F_2 é igual a $|M_1M_2|$, então Q pertence à elipse $\mathcal{E}$.

Por conseguinte:

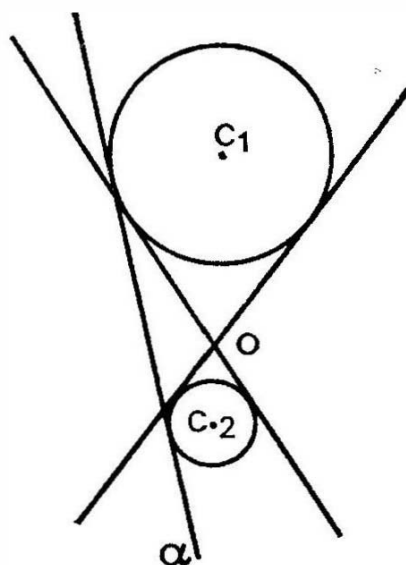
A elipse $\mathcal{E}$ é o conjunto (ou o lugar geométrico) dos pontos P do plano α tais que a soma das distâncias de P a F_1 e F_2 é sempre igual a $|M_1M_2|$.

Temos pois aqui uma propriedade característica do género elipse, propriedade que se pode tomar para definição deste género de cónicas, tal como se fez no livro. Deve fazer-se em seguida o estudo dos métodos de construção indicados no livro.

Para o género hipérbole, a demonstração de Dandelin é análoga, com a diferença de que se consideram agora duas esferas tangentes segundo circunferências às duas folhas do cone, como

⁽¹⁾ Dados dois pontos A e B , designamos por $|AB|$ a distância de A a B , ou seja, o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

se indica na figura junta (basta indicar esta diferença ao aluno, bem como a propriedade focal característica do género hipérbole).

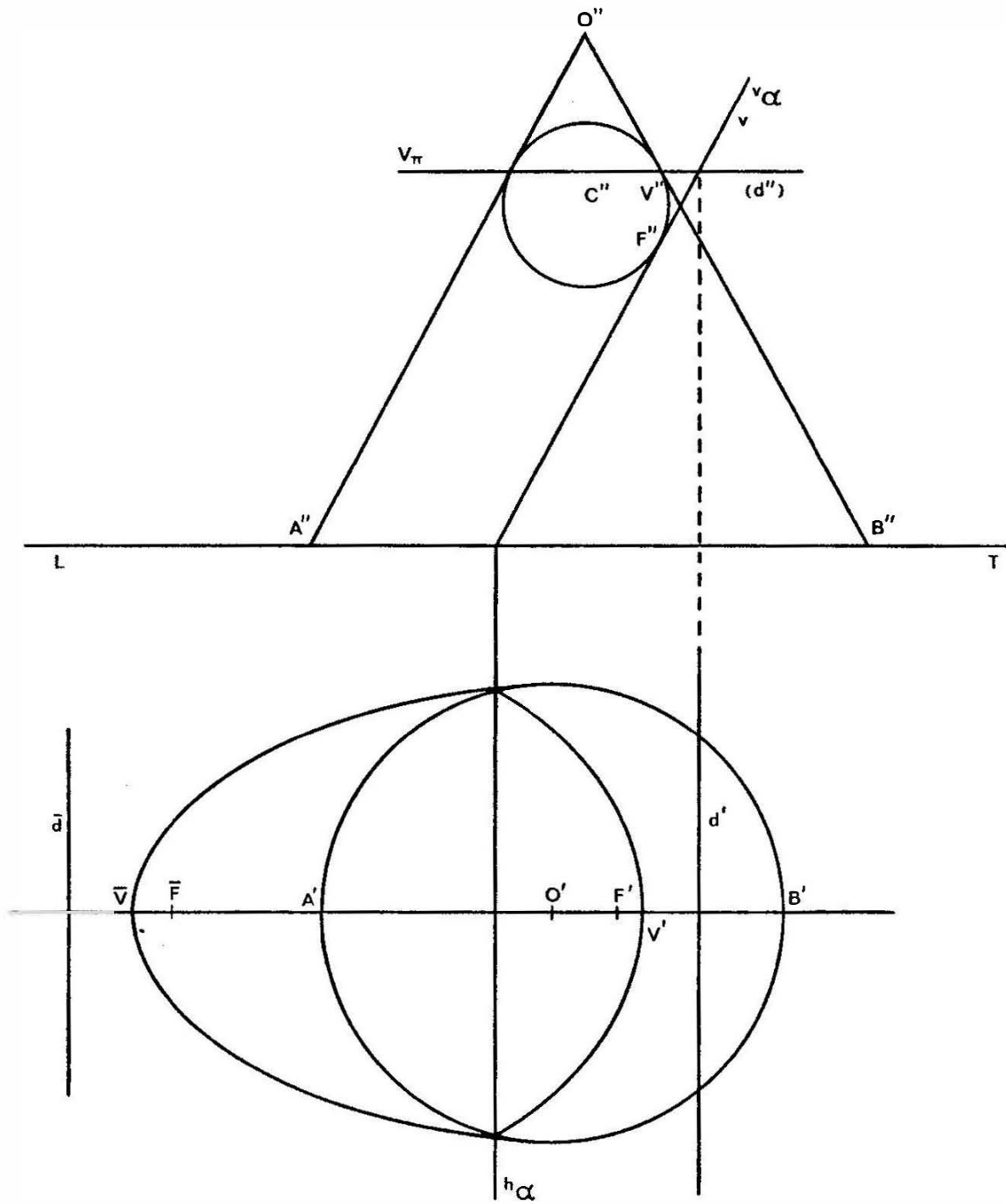


Quanto ao género parábola, a demonstração é um pouco diferente: considera-se apenas uma esfera e, em vez de dois focos, tem-se um foco e uma directriz (intersecção do plano secante com o plano da circunferência em que a esfera é tangente à superfície cónica).

NOTA. Para a demonstração *cone de gelado*, convém dispor previamente de figuras bastante bem desenhadas, em tamanho razoável, a fim de serem vistas ao mesmo tempo por toda a turma. Poderia solicitar-se para isso a colaboração do professor de Desenho.

Melhor ainda seria dispor de modelos que permitissem aos alunos ver *num relance* a ideia da demonstração — e numa demonstração o que mais interessa é, precisamente, a *ideia*, ou melhor, a *intuição* donde nasce. *O estudo começaria então pelo modelo, e só depois se passaria à análise do assunto, isto é, aos pormenores da demonstração.*

Também se poderia estabelecer utilmente coordenação com a disciplina de Desenho, ilustrando o estudo anterior por meio da Geometria Descritiva. Na figura da página seguinte é determinada, em rebatimento, pelo método de Monge, a secção parabólica feita por um plano de topo num cone de revolução de eixo vertical. São determinados o foco e a directriz da parábola pelo processo de Dandelin. Em seguida o aluno pode verificar *experimentalmente* que a parábola é o lugar dos pontos equidistantes do foco e da directriz.



20. Posto isto, chega o momento de fazer o estudo das cónicas pelo método da geometria analítica. Começaremos pelo caso mais simples — o da parábola — tratado com todo o pormenor, como se faz no livro.

Assim, finalmente, o aluno pode tomar consciência (o que é essencial) de que são equivalentes as três definições de parábola:

- 1) *como secção cónica,*
- 2) *como conjunto dos pontos do plano equidistantes do foco e da geratriz,*
- 3) *como gráfico da função quadrática.*

O estudo geral da parábola como gráfico da função quadrática é feito, quer no livro de *Geometria Analítica*, quer no *Compêndio de Matemática*, 1.º volume, 2.º tomo, Cap, VI, n.º 14, págs. 113-115. *Esse estudo deve considerar-se imprescindível.*

Quanto aos casos da elipse e da hipérbole bastará fazer um estudo analítico bastante abreviado, segundo as linhas gerais da exposição feita no livro, do n.º 50 ao n.º 60. A dedução das equações reduzidas não será desenvolvida: bastará indicar o ponto de partida e o ponto de chegada, esclarecendo o significado dos parâmetros a , b , c e dizendo ao aluno que a técnica da demonstração é perfeitamente análoga à que foi seguida no caso da parábola.

Deve, no entanto, ser considerada imprescindível a matéria do n.º 60; só então o aluno poderá reconhecer que são equivalentes as três definições de hipérbole consideradas:

- 1) *como secção cónica,*
- 2) *como conjunto de pontos definido pela propriedade focal,*
- 3) *como gráfico da função homográfica (hipérbole equilátera).*

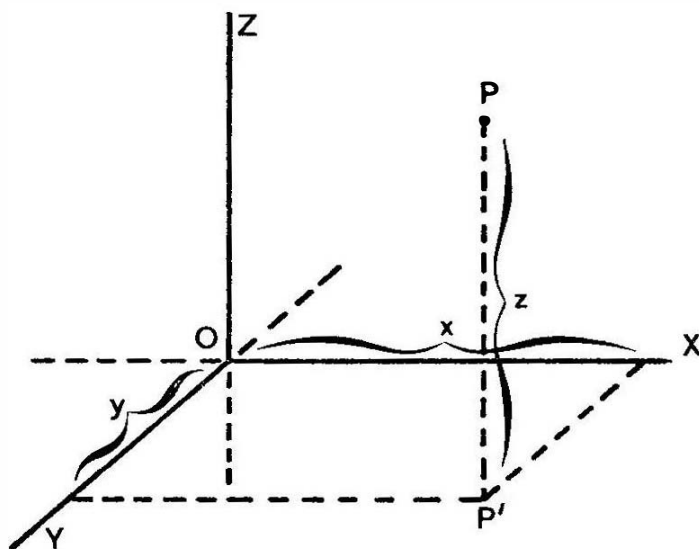
O estudo geral da função homográfica é feito no *Compêndio de Matemática*, 1.º volume, 2.º tomo, Cap. VI, n.º 32, pág. 182.

E com isto se dará por concluído o estudo das cónicas no ensino liceal.

21. Passaremos, agora, a um assunto novo no ensino liceal: *a introdução ao estudo da geometria analítica no espaço*. A inclusão deste assunto no programa do 3.º ciclo (de preferência no 7.º ano),

impõe-se, não só do ponto de vista da preparação para a Universidade, como ainda do ponto de vista da cultura geral. Além disso, a matéria que interessa realmente tratar nesta fase de iniciação é muito fácil e presta-se inteiramente ao método heurístico, por analogia com a geometria analítica plana.

Bastará tomar como base um *referencial ortonormal* (isto é, *ortogonal e monométrico*).



Consideremos, pois, três rectas orientadas OX , OY e OZ , que se cortem perpendicularmente em O , e uma unidade de comprimento igual para as três rectas.

Dado um ponto P qualquer do espaço, apresente-se ao aluno a questão.

Como definir o ponto P , por meio de números reais, de modo análogo ao que se faz em geometria analítica plana?

Haverá toda a vantagem em concretizar o assunto por meio dum modelo, que pode ser muito simplesmente constituído pelo chão e duas paredes da sala da aula, sendo P representado pela ponta dum lápis ou dum ponteiro (os modelos usuais de cartão ou plástico com arames e pequenas esferas serão depois úteis ao considerar pontos com uma ou mais coordenadas negativas).

Colocado perante esta questão, o aluno será provavelmente levado a considerar a projecção horizontal de P , isto é, a projecção P' de P sobre o plano XOY . Ora o ponto P' , neste plano cartesiano, é definido por um par ordenado de números reais, x (a *abscissa* de P) e y (a *ordenada* de P). Para definir P , bastará então dar um terceiro número real — e o mais natural é que este seja a

distância do ponto P ao plano horizontal (plano XOY), com o sinal $+$ ou $-$ conforme P está acima ou abaixo desse plano (se P pertence ao plano, é claro que a distância é 0). O número real assim obtido — que designaremos por z — chama-se *cota* de P (ver figura anterior). Assim o aluno reconhece que:

A cada ponto P do espaço fica a corresponder, pelo processo descrito, um terno ordenado (x, y, z) de números reais.

Não será agora difícil levar o aluno a concluir que, reciprocamente:

Dado um terno ordenado (x, y, z) de números reais, qualquer que ele seja, existe sempre um e um só ponto P do espaço que lhe corresponde, segundo o processo indicado.

(O aluno começa por observar que o par (x, y) define um ponto P' do plano XOY ; em seguida observa que, sobre a recta vertical que passa por P' , existe um e um só ponto cuja cota é z .)

Os números x, y, z dizem-se as coordenadas de P , respectivamente a *abscissa*, a *ordenada* e a *cota* (no referencial fixado).

Designemos por $\mathcal{E}_3$ o *espaço* ⁽¹⁾, isto é, o conjunto de todos os pontos considerados como existentes em *geometria euclidiana elementar*. O aluno já sabe que se designa por $\mathbb{R}^3$ o cubo cartesiano de $\mathbb{R}$, isto é, o conjunto de todos os possíveis ternos ordenados de números reais. Podemos pois, em resumo, concluir que:

Pelo processo indicado, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\mathcal{E}_3$ e $\mathbb{R}^3$.

É, no fundo, este facto que leva a dizer habitualmente:

O espaço $\mathcal{E}_3$ (da geometria euclidiana elementar) tem 3 dimensões:

Ainda o mesmo facto induz a chamar a $\mathbb{R}^3$ o *espaço numérico tridimensional*.

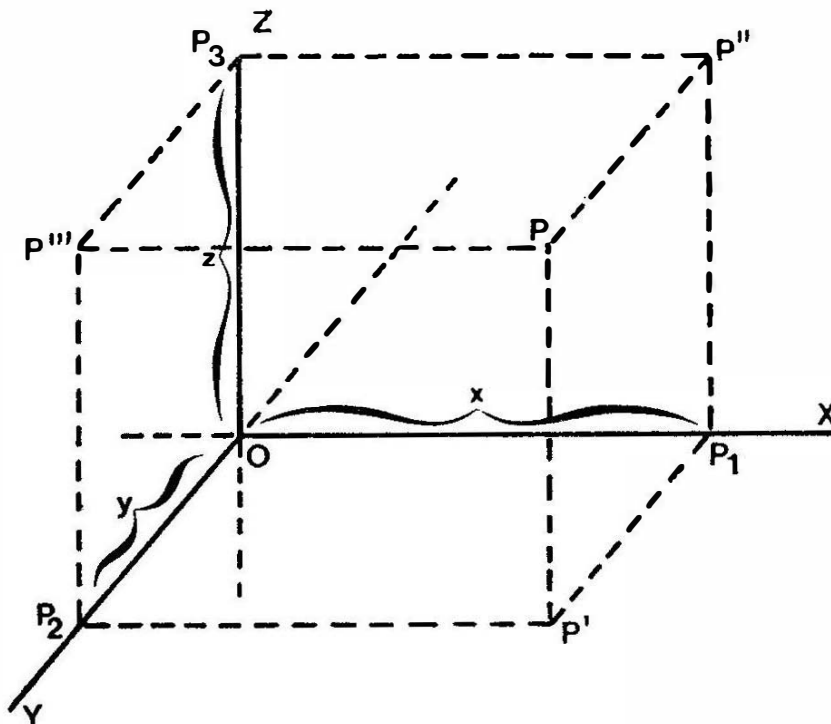
Mas restam dois pontos a esclarecer:

1.º — Para determinar as coordenadas de um ponto P dado, começámos por considerar a projecção ortogonal P' de P sobre o plano XOY . Se, em vez desta, tivéssemos considerado a projecção ortogonal P'' de P sobre XOZ ou a projecção P''' de P sobre YOZ , obteríamos, de modo análogo, as mesmas coordenadas x, y, z de P ?

⁽¹⁾ Subentende-se 'espaço físico ligado a um determinado corpo sólido, por exemplo a Terra', admitindo que existe um tal espaço (ver n.º 4).

2.º — Os eixos OX , OY e OZ foram considerados em posição especial e orientados também de modo especial em relação ao observador, o que envolve noções de carácter não geométrico, tais como as de '*horizontal*', '*vertical*', '*da esquerda para a direita*', '*de trás para diante*', '*de baixo para cima*'. Será possível expor o assunto de modo mais rigoroso, embora menos intuitivo, não fazendo apelo a tais noções?

Estas duas questões estão interligadas e o seu esclarecimento pode ser feito, recorrendo ao paralelepípedo de vértices P , P' , P'' , P''' , P_1 , P_2 , P_3 , O .



É fácil ver que a cota, z , do ponto P é igual à medida ⁽¹⁾ do segmento $\overline{OP_3}$, com o sinal $+$ ou $-$, conforme P_3 está na parte positiva ou negativa do eixo OZ (por isso diremos que este é o *eixo das cotas* ou eixo dos z). Portanto, as três coordenadas de P podem ser determinadas do seguinte modo:

Considerem-se os três planos que passam por P e são perpendiculares respectivamente aos eixos OX , OY e OZ . Esses planos

⁽¹⁾ Medida dum segmento $\overline{AB}$ é o mesmo que medida do seu comprimento $|AB|$.

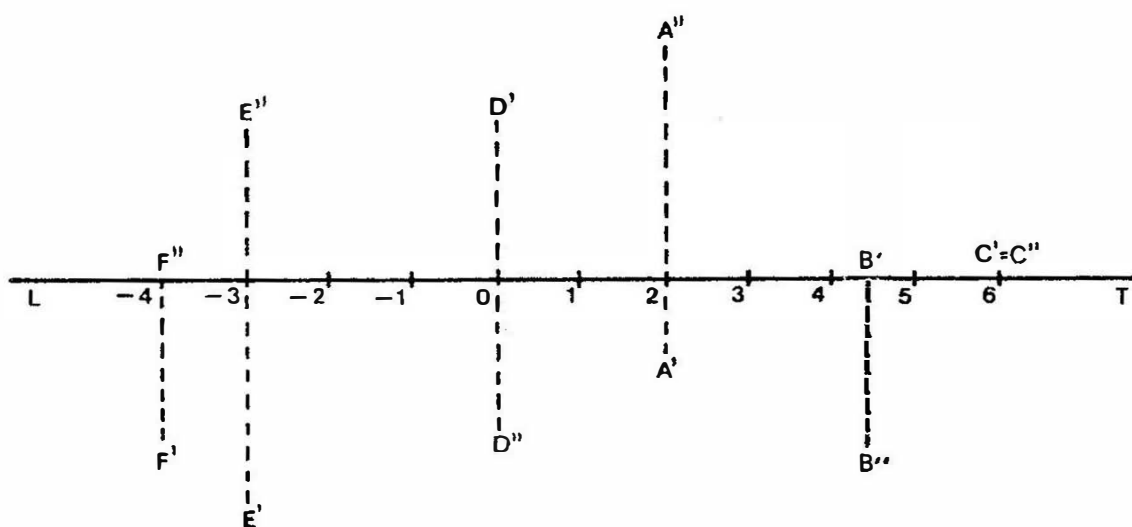
cortam os eixos em três pontos, que chamaremos projecções ortogonais de P sobre OX, OY e OZ, e designaremos respectivamente por P_1 , P_2 , P_3 . Cada um destes pontos, no eixo onde está, é representado por um número, relativamente à origem O e à unidade de comprimento adoptada. Os três números x , y , z assim obtidos são as coordenadas de P no referencial adoptado: respectivamente a abcissa, a ordenada e a cota.

É evidente que, neste processo, a posição e a orientação dos eixos pode ser *qualquer*. Daqui se conclui que a determinação das coordenadas é independente da posição do observador e não faz intervir essencialmente noções de carácter não geométrico. Só por comodidade se recorre muitas vezes a tais noções.

Aliás, em todas as considerações anteriores, relativas à introdução da geometria analítica no espaço, há que ter presente a seguinte importante

NORMA DIDÁCTICA: *O esclarecimento total da questão posta de início deverá, segundo o método heurístico, ser feito em diálogo com o aluno, gradualmente, por tentativas, por aproximações sucessivas, até atingir o máximo rigor possível nesta fase. Usando uma imagem, poderíamos dizer que tudo se passa como se estivessemos a focar uma paisagem, que se nos torna cada vez mais nítida.*

NOTA. Poderá ser útil recorrer neste momento à geometria descritiva de Monge, que o aluno aprende na disciplina de Desenho. A associação do método cartesiano com o método de Monge é feita habitualmente, tomando o plano XQY para plano *horizontal de projecção* e o plano XOZ para *plano vertical de projecção*, sendo



portanto o eixo OX a *linha de terra*. Na figura da página anterior são representados os pontos A, B, C, D, E, F que correspondem, respectivamente, aos seguintes ternos ordenados de números reais: $(2, 1, 3)$, $(4\frac{1}{2}, 0, -2)$, $(6, 0, 0)$, $(0, -2, -2)$, $(-3, 3, 2)$, $(-4, 2, 0)$.

Note-se que na geometria de Monge a ordenada se chama 'afastamento' e que o termo 'abscissa' só aparece em geometria analítica.

Convirá também registrar a seguinte terminologia:

recta horizontal (ou de nível): paralela a XOY

recta de frente: paralela a XOZ

recta de perfil: paralela a YOZ

recta vertical: perpendicular a XOY (ou paralela a OZ)

recta de topo: perpendicular a XOZ (ou paralelo a OY)

plano horizontal (ou de nível): paralelo a XOY

plano de frente: paralelo a XOZ

plano vertical: perpendicular a XOY (ou paralelo a OZ)

plano de topo: perpendicular a XOZ (ou paralela a OY)

plano de rampa: perpendicular a YOZ (ou paralelo a OX)

As rectas verticais também se dizem '*projectantes horizontais*' porque projectam os pontos sobre o plano horizontal.

As rectas de topo também se dizem '*projectantes verticais*' por análoga razão.

Os planos verticais também se dizem '*projectantes horizontais*' porque projectam rectas sobre o plano horizontal.

Os planos de topo também se dizem '*projectantes verticais*' por análoga razão.

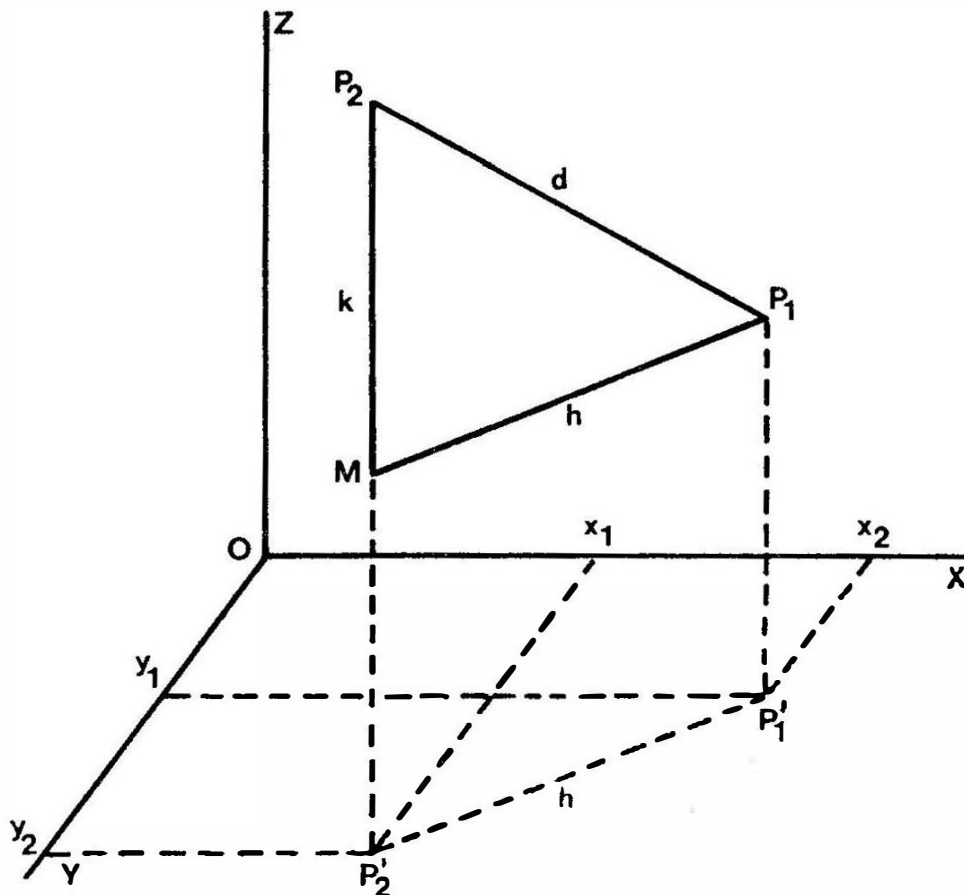
As rectas paralelas a OX dizem-se em geometria de Monge '*paralelas à linha de terra*' precisamente porque se toma $LT = OX$.

Analogamente, os planos de rampa também se podem dizer '*paralelos à linha de terra*'. Note-se que estes planos são *projectantes sobre o plano YOZ*.

22. O assunto que convém tratar logo em seguida é o da distância entre dois pontos. Aqui, mais uma vez, é o aluno quem irá redescobrir a fórmula, por analogia com o que se passa no

plano. Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer do espaço, representados respectivamente pelos ternos ordenados

$$(x_1, y_1, z_1) \text{ e } (x_2, y_2, z_2)$$



Suponhamos fixado um referencial ortogonal e consideremos as projecções horizontais, P'_1 e P'_2 , de P_1 e P_2 . Designemos por M o ponto de cota z_1 (igual à de P_1) situado na vertical de P_2 . Então o triângulo $[M P_1 P_2]$ é rectângulo em M e a distância d de P_1 a P_2 é dada pela hipotenusa $\overline{P_1 P_2}$ desse triângulo. Designemos agora por h a medida do cateto $\overline{MP_1}$ e por k a medida do cateto $\overline{MP_2}$. Nestas condições, temos:

$$d^2 = h^2 + k^2$$

Mas $k = |z_1 - z_2|$. Por outro lado, h é igual à distância de P'_1 a P'_2 e, como já sabemos,

$$h^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Logo

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Neste momento o aluno não deve ter dificuldade em deduzir (por analogia com o caso da circunferência) a equação da superfície de centro (a, b, c) e raio r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

assim como não terá dificuldade em reconhecer os gráficos de condições tais como

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 < r^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 > r^2, \text{ etc.}$$

23. Convém agora passar ao estudo de *planos projectantes*, isto é, perpendiculares a algum dos planos coordenados (será conveniente usar modelos!).

Comecemos pelo exemplo da equação $z = 3$. Por analogia com o caso da geometria plana, é fácil reconhecer que

$$z = 3 \Leftrightarrow 0x + 0y + z = 3$$

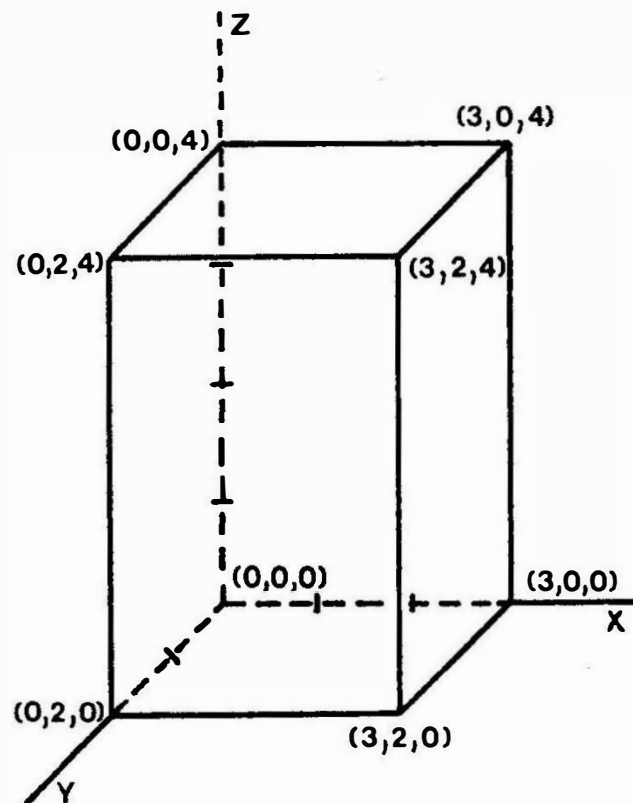
e que portanto a equação $z = 3$ representa o *conjunto de todos os pontos de cota 3*, ou *seja o plano horizontal de cota 3*.

Dum modo geral, as equações da forma $z = a$ representam os *planos horizontais*, as equações $y = b$ os *planos de frente* e as equações $x = c$ os *planos de perfil*. Em particular, as equações $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$ representam os planos coordenados XOY, XOZ e YOZ.

Por sua vez, a inequação $z \geq 3$ representa o semiespaço situado acima do plano $z = 3$, a condição $3 < x < 5$ representa o domínio compreendido entre os planos $x = 3$ e $x = 5$ (não incluindo estes planos), a condição

$$0 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 2 \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 4$$

representa o paralelepípedo a seguir representado, de vértices $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 4)$, $(3, 2, 0)$, $(0, 2, 4)$, $(3, 0, 4)$ e $(3, 2, 4)$, etc., etc.

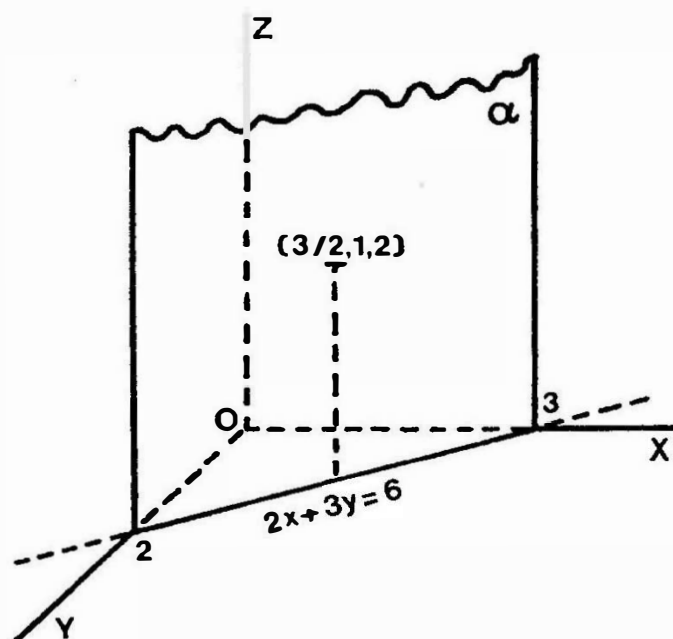


Apresenta-se agora ao aluno, por exemplo, a equação

$$2x + 3y = 6$$

Tem-se neste caso

$$2x + 3y = 6 \Leftrightarrow 2x + 3y + 0z = 6$$



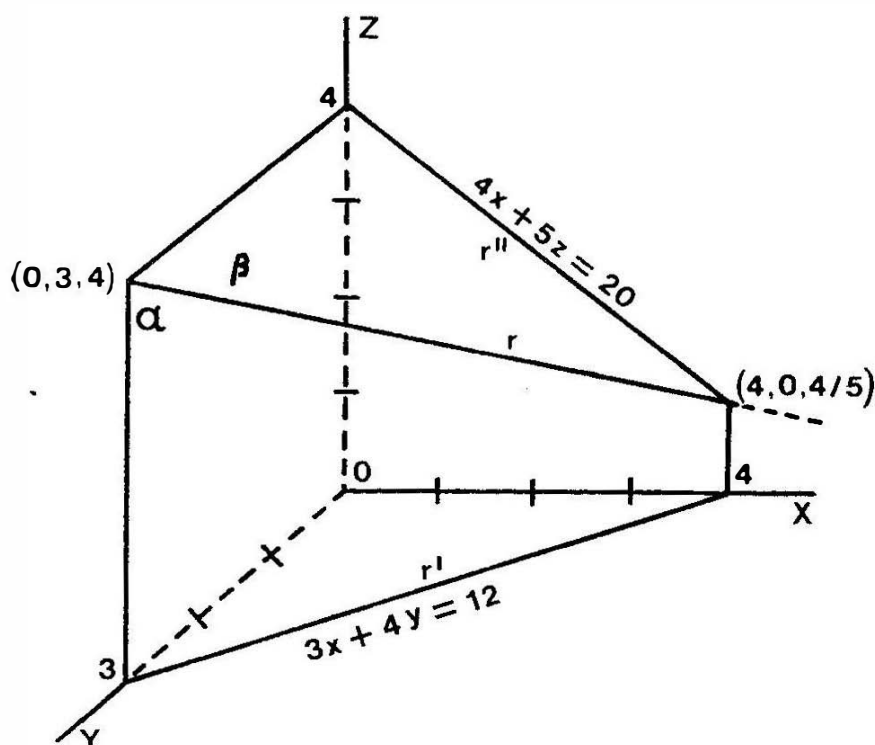
No plano XOY, a equação $2x + 3y = 6$ representa uma recta r desse plano. No espaço, a mesma equação representa o conjunto dos pontos (x, y, z) tais que $2x + 3y = 6$, podendo z ser qualquer. O aluno deverá reconhecer *por si mesmo* que este conjunto é o *plano vertical α , que passa por r* .

Mais geralmente, o aluno deve ser levado a reconhecer, de modo intuitivo, que as equações da forma $ax + by = c$ representam *planos verticais* (paralelos a OZ), que as equações $ax + bz = c$ representam *planos de topo* (paralelos a OY) e que as equações $ay + bz = c$ representam *planos de rampa* (paralelos a OX). Em particular, o plano $x + 2y = 0$ contém o eixo OZ, o plano $2x - z = 0$ contém o eixo OY, etc.

24. Pode-se agora fazer um estudo elementar da recta em geometria analítica do espaço.

Consideremos o sistema de equações

$$(1) \quad \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4x + 5z = 20 \end{cases}$$



A primeira equação representa no plano XOY uma recta e representa no espaço o plano vertical, α , que passa por essa recta.

Por sua vez, a segunda equação representa no plano XOZ uma recta e representa no espaço o plano de topo, β , que passa por essa recta. Logo o sistema (1) representa a *intersecção desses dois planos*, ou seja a recta r cujo plano projectante horizontal é α e cujo plano projectante vertical é β . (Como exercício, pode-se propor a determinação dos pontos de encontro de r com os planos coordenados.)

Analogamente o sistema

$$y = 2x + 3 \wedge y + z = 5$$

representa a recta intersecção dos planos $y = 2x + 3$ e $y + z = 5$, que a projectam respectivamente sobre os planos XOY e YOZ.

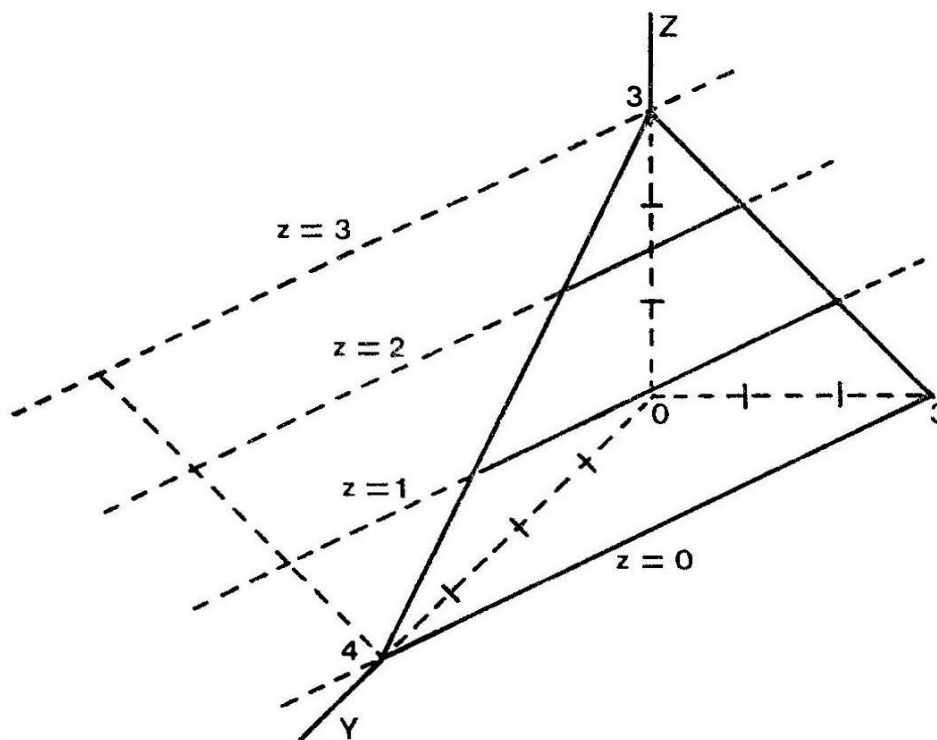
O aluno não terá dificuldade em identificar os gráficos de sistemas tais como

$$x = 3 \wedge y = 4 \quad , \quad x + y = 1 \wedge z = 3 \quad , \quad \text{etc.}$$

25. Consideremos agora a equação

$$4x + 3y + 4z = 12$$

Trata-se, como se vê, de uma *equação do 1.º grau nas três variáveis* x, y, z .



Para identificar o gráfico desta equação, consideremos as suas intersecções com planos horizontais. Começemos pelo plano $z = 0$. Tem-se

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ora o aluno já sabe que o gráfico do segundo sistema é uma recta (contida no plano XOY).

Analogamente

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 12 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

Agora a intersecção é uma recta horizontal de cota 1.

Dum modo geral, sendo c um número real qualquer, tem-se

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 12 \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 12 - 4c \\ z = c \end{cases}$$

A intersecção é sempre uma recta (horizontal de cota c).

Analogamente

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

A intersecção com o plano XOZ é pois também uma recta. Deste modo se vê que:

O gráfico da equação $4x + 3y + 4z = 12$ é a reunião de todas as rectas paralelas à recta de equações $4x + 3y = 12$, $z = 0$ e que passam pela recta, de equações $x + z = 3$ e $y = 0$; esse gráfico é portanto um plano.

Não. é, assim, difícil levar o aluno a reconhecer indutivamente que toda a equação da forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

em que um pelo menos dos coeficientes A , B , C é diferente de zero, representa um plano, e que, reciprocamente, todo o plano é representável por uma equação desta forma.

NOTA. As rectas horizontais contidas num plano α são chamadas as *rectas de nível de α* (ver exemplo anterior). É claro que todo o plano é a reunião das suas rectas de nível, como é a reunião das suas rectas de frente ou das suas rectas de perfil.

Podemos, agora, dar uma nova interpretação geométrica à resolução dos problemas de programação linear considerados no n.º 17 *tomando para cotas os valores z das formas lineares objectivo*. Assim, por exemplo, no último problema, a forma linear objectivo $z = 4x + 3y$ tem agora por gráfico um plano, enquanto a conjunção

$$0 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 6 \wedge 4x + 3,5y \geq 28$$

das restrições do programa tem por gráfico, no espaço, um prisma triangular de arestas verticais. A solução óptima é então dada pelo ponto da *cota mais baixa, em que o plano representativo da forma intersecta este prisma*, ou seja o ponto (1,75; 6; 25). Note-se ainda que *as rectas de nível da forma são agora as projecções horizontais das rectas de nível do respectivo plano*.

26. O aluno já teve ocasião de verificar que, *enquanto um plano é representável por uma única equação cartesiana, uma recta no espaço só pode ser representada por um sistema de duas equações cartesianas*. Até aqui apenas se considerou o caso de rectas representadas pelas equações de dois dos seus planos projectantes (equações em que é nulo o coeficiente de uma das variáveis). Mas pode apresentar-se o caso de uma recta definida como intersecção de dois planos quaisquer. Ora é sempre possível reduzir este caso ao anterior por eliminação de variáveis, aplicando por exemplo o método de redução. Exemplo:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 5x + 5z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - (1 - x) = 1 \\ z = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ÍNDICE

	Págs.
Advertência prévia	9
Normas gerais	11
I — Observações ao Capítulo I	15
II — Observações ao Capítulo II	30
III — Introdução à geometria analítica (assunto não tratado no <i>Compêndio</i>)	45
IV — Observações ao Capítulo III	98
V — Observações ao Capítulo IV	114
VI — Observações ao Capítulo V	121
VII — Observações ao Capítulo VI	134
VIII — Observações ao Capítulo VII	143

**GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA**