J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(1.º volume)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

I

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO I

1. A lógica matemática é um meio poderoso para habituar o aluno à clareza e ao rigor, tanto da linguagem como do pensamento. Esta introdução constitui, ao mesmo tempo, uma excelente oportunidade para despertar no aluno o interesse pela discussão bem conduzida, *o gosto da dialéctica.*

A experiência dos anos anteriores tem demonstrado que este capítulo, bem como o seguinte, encontram a melhor aceitação por parte dos alunos. O professor poderá portanto tratá-lo relativamente depressa, tanto mais que todas as noções aqui introduzidas serão depois constantemente utilizadas nos capítulos seguintes.

2. A distinção entre *designação* e *designado* (em particular a distinção entre *fracção* e *número fraccionário*) é importante, mas basta que fique esclarecida na aula, neste momento e mais tarde, quando venha a propósito. Não é contudo necessário fazer deste assunto um *cavalo-de-batalha* e incluí-lo em exercícios escritos.

3. Quanto à noção de conjunto (ou classe), introduzida intuitivamente nos n.os 5, 6, 7 e 8, convém notar que a palavra 'classe' é usada hoje, tecnicamente, por lógicos matemáticos, com um significado ainda mais geral que o da palavra 'conjunto', para evitar o paradoxo de Russell da teoria dos conjuntos. Mas a distinção é inacessível nesta fase elementar e pode por enquanto evitar-se, utilizando a distinção em tipos lógicos. Aliás, o próprio assunto dos tipos lógicos deverá ser apenas tocado ao de leve, porquanto o aluno ainda não tem suficiente receptividade para este género de questões. Pelo contrário, o professor necessita de ter ideias bem claras e assentes sobre o assunto.

4. O aluno deverá, logo a partir da 3.ª ou 4.ª lição, ser familiarizado com as operações lógicas elementares. Inicialmente, as

tabelas de verdade poderão ser apresentadas com aspecto mais acessível do que no *Compêndio*. Por exemplo, para a conjunção, para a disjunção inclusiva, para a disjunção exclusiva e para a implicação, poderão usar-se as seguintes disposições:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V
V	F	F

5. Quanto às propriedades das operações (págs. 32 e 33, 1.º tomo), convém acrescentar as *propriedades da idempotência* da conjunção e da disjunção, que consistem no seguinte:

$$a \wedge a = a \quad , \quad a \vee a = a \quad \text{(qualquer que seja a).}$$

Estas propriedades podem ser estabelecidas directamente ou deduzidas das restantes (como se faz na pág. 186 do 2.º tomo, o que pode agora dispensar-se).

São de grande interesse e actualidade os exercícios sobre logigramas (desenhos de circuitos correspondentes a dadas expressões lógicas). Para isso pode ver-se o exercício X do final do Capítulo VI do Compêndio *(págs. 194-195, 2.º tomo).*

6. O termo 'polissilogismo' é introduzido no n.º 17 com significado mais geral do que lhe é atribuído em lógica tradicional. É talvez preferível substituí-lo aqui por 'cadeia de silogismos'.

Dum modo geral, os exemplos em linguagem comum consomem tempo excessivo quando escritos na pedra. Este inconveniente pode ser atenuado, recorrendo de vez em quando a cartões em que se tenham escrito previamente os exemplos, ou utilizando directamente o próprio *Compêndio.*

7. A propósito dos universos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ (pág. 57, 1.º tomo), o professor deve certificar-se de que o aluno tem *conhecimento intuitivo*, adquirido em anos anteriores, desses e outros universos numéricos. Podem também ser introduzidos já os símbolos $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros relativos: 0, 1, − 1, 2, − 2, ...), $\mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais, inteiros — os anteriores — e fraccionários: $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, 2,57, − 2,57, etc.), $\mathbb{Q}^+$ (conjunto dos racionais positivos) e $\mathbb{R}^+$ (conjunto dos reais positivos).

Quanto a números irracionais, bastará por enquanto que o aluno conserve a noção, adquirida no 2.º ciclo, de que as dízimas infinitas não periódicas (e só essas) representam números irracionais. Devem recordar-se os exemplos clássicos do número π e dos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, etc., bem como dos respectivos simétricos, ficando para mais tarde a demonstração da irracionalidade de alguns deles (o professor dirá 'prova-se que...' e, se houver alunos muito interessados, poderá antecipar a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$).

Por outro lado, deverá recordar-se como se faz, intuitivamente, *a representação geométrica dos números reais.*

Já nas normas gerais se observou que a *intuição precede a lógica* e que *a ordem lógica não coincide muitas vezes com a ordem didáctica mais recomendável.* Seria um erro grave evitar, neste momento, falar de números naturais, números racionais e números reais, quando o aluno já desde o ensino primário veio adquirindo noções intuitivas sobre estas diferentes espécies de números. Tais noções só a pouco e pouco, directa ou indirectamente, poderão ir sendo esclarecidas e aperfeiçoadas, do ponto de vista lógico.

8. Logo após o n.º 23 do Capítulo I, deverão reservar-se algumas aulas à aplicação dos conhecimentos adquiridos ao estudo de equações e inequações, embora esse estudo venha a ser depois retomado no Capítulo VI, em termos de muito maior generalidade, a respeito de equações em corpos abstractos. Será este um óptimo pretexto para aperfeiçoar técnicas de cálculo adquiridas no 2.º ciclo e revistas agora em condições de maior rigor lógico.

Os enunciados dos princípios de equivalência para equações em $\mathbb{R}$ (incluindo o princípio de decomposição) são, *mutatis mutandis*, os que se apresentam no Capítulo VI, págs. 91-98, 2.º tomo; em vez de 'elemento de K' diremos agora simplesmente 'número'. A ideia das demonstrações é também a mesma que se apresenta nessas páginas. As propriedades dos números reais que intervêm nessas demonstrações já são conhecidas intuitivamente pelos alunos. (Os princípios lógicos de equivalência devem ser tratados após o n.º 23.)

Nesta fase será usado sistematicamente o sinal de equivalência (quando aplicável), podendo no entanto dispensar-se o ponto indicativo de que a equivalência é formal, quando não haja lugar para dúvida ou confusão. Exemplo:

$$\left(\frac{x-4}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 8x + 16}{4} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x\,(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

O aluno indicará onde e como intervêm os princípios de equivalência.

Mais tarde, o próprio sinal de equivalência poderá ser dispensado: não é necessário ficar acorrentado a um símbolo, quando este for utilizado apenas para esclarecimento didáctico.

9. Os princípios de equivalência para as inequações em $\mathbb{R}$ enunciam-se e demonstram-se de modo análogo. O 2.º princípio baseia-se nas conhecidas propriedades:

$$a + b < c \Leftrightarrow a < c - b \quad , \quad a < b + c \Leftrightarrow a - b < c$$

Estas são uma consequência directa da propriedade:

$$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$$

Para o reconhecer, basta aplicar esta propriedade às fórmulas $a + b < c$, $a < b + c$, com $x = a + b$, $y = c$, $z = -b$ no 1.º caso e $x = a$, $y = b + c$, $z = -b$ no 2.º caso, atendendo à associatividade da adição e à definição do simétrico.

O 3.º princípio de equivalência para inequações assenta nas seguintes propriedades, já conhecidas do aluno:

Se $k > 0$, *então* $a < b \Leftrightarrow ak < bk$, *quaisquer que sejam* a, b.

Se $k < 0$, *então* $a < b \Leftrightarrow ak > bk$, *quaisquer que sejam* a, b.

Quanto ao princípio de decomposição para inequações, o seu aspecto é diferente daquele com que se apresenta para equações. Não vale a pena procurar enunciá-lo de modo geral; basta mostrar como se aplica na prática. No fundo, o que intervém aqui é apenas a *regra dos sinais* para a multiplicação de números reais. Seja por exemplo a inequação $x^2 < 9$. Tem-se, aplicando os dois primeiros princípios de equivalência:

$$x^2 < 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow (x-3)\ (x+3) < 0$$

Procuram-se pois os valores de x que tornam negativo o 1.º membro da equação. Ora, segundo a regra dos sinais, será:

$$(x-3)\ (x+3) < 0 \quad \text{sse} \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases},$$

isto é [1]:

$$(x-3)\ (x+3) < 0 \Leftrightarrow (x-3 > 0 \wedge x+3 < 0) \vee (x-3 < 0 \wedge x+3 > 0).$$

Como o primeiro sistema é impossível, segue-se que

$$x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

---

(1) **Não esquecer que a chaveta desempenha o papel do sinal de conjunção.**

Na prática pode sempre adoptar-se o seguinte esquema bem conhecido (uma vez compreendida a sua justificação, o que é quase imediato):

		-3		3	
$x+3$	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
x^2-9	$+$		$-$		$+$

É claro que este processo pode ser aplicado a produtos com mais de dois factores ou ainda a quocientes. *Por outro lado, convém considerar também condições de outros tipos, em que, no lugar dos sinais* $=$, $<$, $>$, *figurem os sinais* $\leqslant$, $\geqslant$ ou $\neq$.

Seja por exemplo a condição:

$$(1) \qquad \frac{1-x^4}{2x^2-1} \geqslant 0$$

a qual é manifestamente equivalente a

$$(1') \qquad \frac{(x+1)\ (x-1)\ (x^2+1)}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \leqslant 0$$

Tem-se agora o seguinte quadro:

		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
1.º membro de (1′)	$+$	0	$-$		$+$		$-$	0	$+$

Para $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e para $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, a expressão não assume nenhum valor em $\mathbb{R}$.

Virá, pois:

$$\frac{1 - x^4}{2x^2 - 1} \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1$$

O mesmo quadro mostra que

$$\frac{1 - x^4}{2x^2 - 1} < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x > 1,$$

$$\frac{1 - x^4}{2x^2 - 1} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -1, \text{ etc.}$$

É claro que, entre o primeiro exemplo e o segundo, o professor terá o cuidado de intercalar exemplos graduados de complexidade crescente. Convém insistir em exemplos *simples*, como os seguintes:

$$x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$\frac{1}{x^2 - 4} = 0 \text{ é impossível}$$

$$\frac{x - 2}{x + 2} \geqslant 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x \geqslant 2, \text{ etc.}$$

10. Até aqui temos considerado apenas exemplos em que a decomposição se faz rapidamente, aplicando propriedades elementares. Pode-se ir mais longe e fazer *directamente* a factorização de trinómios de 2.º grau de coeficientes numéricos. *Esta prática é muito recomendável, para evitar cair, desde logo, nas clássicas receitas sobre o trinómio, que o aluno aplica mecanicamente. Se o ensino for bem conduzido, o próprio aluno irá redescobrir, espontaneamente, ao fim de alguns exercícios, os teoremas sobre o sinal da função quadrática* (é claro que muitos dos exercícios poderão e deverão ser trabalhos de casa).

Seja, por exemplo, a inequação $x^2 - 6x + 5 < 0$. Tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &\equiv x^2 - 2 \times 3 \cdot x + 9 - 9 + 5 \\ &\equiv (x-3)^2 - 4 \equiv (x - 3 - 2)\ (x - 3 + 2) \\ &\equiv (x-5)\ (x-1) \end{aligned}$$

Portanto:

$$x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow (x-5)\ (x-1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 5$$

Analogamente, para $x^2 - 7x + 10 > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &\equiv x^2 - 2 \times \frac{7}{2} \cdot x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 10 \\ &\equiv \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \equiv \left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ &\equiv (x-5)\ (x-2) \end{aligned}$$

donde

$$x^2 - 7x + 10 > 0 \Leftrightarrow (x-5)\ (x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 5$$

Outro exemplo:

$$x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Por sua vez, para a inequação $x^2 - 6x + 14 > 0$, vem:

$$x^2 - 6x + 14 \equiv (x-3)^2 - 9 + 14 \equiv (x-3)^2 + 5$$

Como $(x-3)^2$ é *maior* ou *igual* a zero para todo o valor de x, segue-se que $x^2 - x + 1 \geqslant 0$ *qualquer que seja* x: a condição dada é portanto universal. Ao mesmo tempo se reconhece que as condições $x^2 - 6x + 14 < 0$, $x^2 - 6x + 14 = 0$, $x^2 + 14 \leqslant 6x$ são impossíveis, etc.

Não se fala por enquanto de raízes imaginárias. Bastará dizer que a equação $x^2 - 6x + 14 = 0$ *não tem raízes em* $\mathbb{R}$. Os números imaginários pouco ou nenhum préstimo têm na teoria das equações do 2.º grau.

Deve dizer-se ao aluno que, se deseja ser conduzido a uma boa compreensão da matemática, que lhe será muito útil no futuro, terá conveniência em seguir esta orientação, evitando a princípio todo o uso de fórmulas ou regras mecanizantes.

11. Será vantajoso introduzir desde já, antes do n.º 24 do *Compêndio*, o conceito de *implicação formal*, directamente, como se fez para a equivalência. Só mais tarde se verá como a implicação formal se exprime por meio da implicação material e do quantificador universal, ponto este delicado, que será abordado no n.º 28, págs. 76-79, 1.º tomo.

Sejam, por exemplo, as condições:

$$x \textit{ é peixe } (^1) \quad , \quad x \textit{ tem guelras}$$

Pergunta-se aos alunos: são estas condições equivalentes? Seguir-se-á uma breve discussão, em que serão certamente invocados conhecimentos biológicos e a resposta acabará por ser negativa, visto que *todo o peixe tem guelras, mas há animais que têm guelras e não são peixes (quais?)*. O mais que se pode dizer agora é que a primeira condição *implica formalmente* a segunda, isto é, que todo o indivíduo que verifica a primeira também verifica a segunda. Exprime-se este facto, escrevendo:

$$x \text{ é peixe } \underset{\bullet}{\Rightarrow} x \text{ tem guelras}$$

por analogia com o que se fez para a equivalência formal (muitas vezes, quando não há perigo de confusão, omite-se o ponto, o que, no entanto, será sempre um *abuso de escrita*).

Importa mais uma vez salientar que as expressões proposicionais exprimem *propriedades* (ou *atributos*) e convém apresentar exemplos de implicação formal em linguagem comum:

Ser peixe implica ter guelras (isto é, o atributo *ser peixe* implica o atributo *ter guelras)*.

Ser daltónico implica não poder conduzir automóvel.
Ser homem implica ser mortal.
Ser casado implica não ser solteiro.
Ser múltiplo de 6 *implica ser múltiplo de* 3.
Ser múltiplo de 15 *implica ser múltiplo de* 3 *e de* 5.
Ser múltiplo de 3 *e de* 5 *implica ser múltiplo de* 15.
Ser triângulo equilátero implica ser triângulo equiângulo.
Mau comportamento na aula implica falta de civilização.
Ser peixe implica ter escamas e respirar por guelras.
Ser homem implica ser bípede implume.

---

(1) Subentende-se 'peixe vivo, não amputado'.

Nova discussão se poderá seguir, sobre o valor lógico de tais proposições e sobre os casos em que há equivalência formal. (Convide-se o aluno a traduzir algumas destas frases em escrita simbólica.)

Convém também apresentar desde já exemplos de implicações formais, entre condições com mais de uma variável:

$$\text{x é irmão de y} \wedge \text{y é mãe de z} \underset{\bullet}{\Rightarrow} \text{x é tio de z}$$

$$\text{X ofendeu Y} \underset{\bullet}{\Rightarrow} \text{X deve pedir desculpa a Y}$$

$$a > b \wedge b = c \underset{\bullet}{\Rightarrow} a > c$$

etc.

Não esquecer que, nestes casos, o símbolo $\underset{\bullet}{\Rightarrow}$ se pode ler 'implica formalmente', 'implica necessariamente' ou simplesmente 'implica'. Também se pode traduzir pela condicional 'se' anteposta à primeira condição ou mais precisamente por 'se... então necessariamente' ou ainda por 'se... então' (tudo isto será dito ao aluno, a propósito dos exemplos).

12. As considerações anteriores estendem-se imediatamente à relação $\underset{\bullet}{\Leftarrow}$ ('é implicado formalmente por' ou 'é implicado por') e devem desde logo ser aplicadas ao estudo de equações e inequações. Por exemplo:

$$x^2 < 4 \Rightarrow x < 2 \quad , \quad x^2 = 4 \Leftarrow x = 2$$

$$x < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \quad , \quad x < 2 \wedge x > -2 \Rightarrow x^2 < 4$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad (\text{em } \mathbb{R})$$

etc.

(Convidar o aluno a reconhecer quais destas proposições são verdadeiras e quais são falsas.)

É esta a melhor preparação para o estudo das equações irracionais e mais um meio de esclarecer o conceito de equivalência. O 2.º princípio lógico de equivalência estende-se, *mutatis mutandis*, à implicação formal, nos seguintes termos:

Se uma condição implica formalmente outra condição, a implicação formal mantém-se no mesmo sentido, substituindo uma ou mais variáveis por quaisquer outras expressões designatórias [1].

---

[1] A implicação material é considerada como caso particular de implicação formal.

(Estes princípios irão depois aparecer como consequência das regras de substituição de variáveis aparentes, relativas a quantificadores universais, como se indica no n.º 25, pág. 70.)

Considere-se, por exemplo, a proposição

(1) $$a = b \Rightarrow a^2 = b^2 \text{ (no universo } \mathbb{R}\text{)}$$

que é reconhecidamente verdadeira. Pergunte-se ao aluno: Será também verdadeira a recíproca? Em caso de hesitação apresente-se um contra-exemplo, como o seguinte:

Tem-se $5^2 = (-5)^2$. Podemos concluir que $5 = -5$?

Seja agora a equação

$$2 + \sqrt{x} = x$$

Tem-se $2 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2$. Ora, substituindo *a* e *b* em (1) respectivamente por $\sqrt{x}$ e $x - 2$, vem, segundo o princípio anterior:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x - 2)^2$$

Por sua vez:

$$x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Virá, portanto:

$$2 + \sqrt{x} = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Mas a segunda equação não implica a primeira. Com efeito, as raízes da segunda são 1 e 4, e destas só 4 é raiz da primeira como se pode verificar directamente. (Note-se: há duas raízes quadradas de 1, que são 1 e -1, *mas o símbolo* $\sqrt{1}$ *designa unicamente a raiz não negativa, ou seja* 1.) Por conseguinte, a equação proposta tem uma só raiz, que é 4: ao elevar ao quadrado ambos os membros de $\sqrt{x} = x - 2$, introduziu-se a *solução estranha* 1.

Virão depois outros exemplos de equações com um ou, *no máximo,* dois radicais quadráticos (ver *Compêndio de Álgebra, 7.º ano,* os exemplos e exercícios mais simples do Capítulo XVIII).

13. Tratando-se da equação $x - \sqrt{x^2 + 2} = 1$, conclui-se que

$$x - \sqrt{x^2 + 2} = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 0$$

A segunda tem uma única raiz, que é $-\frac{1}{2}$. Ora, verifica-se que $-\frac{1}{2}$ não é raiz da primeira. Logo a equação proposta não tem nenhuma raiz: *é uma equação impossível.* Surge porém a dúvida, que é preciso focar bem:

Fará sentido dizer que uma condição impossível implica outra que é possível?

Segundo a definição anterior, diz-se que uma condição implica outra, quando *toda a solução da primeira* também é solução da segunda. Ora, na linguagem comum, quando se diz 'toda a solução da primeira', parece subentender-se que a primeira tem *pelo menos* uma solução. É este mais um dos inconvenientes lógicos da linguagem comum.

Para evitar dúvidas, a definição de implicação formal, entre condições comuns com uma variável, poderia ser enunciada do seguinte modo, em linguagem comum:

Uma condição implica outra, quando todo o elemento que verifica a primeira também verifica a segunda, ou quando todo o elemento que não *verifica a segunda também* não *verifica a primeira.*

Segundo esta definição é fácil ver que:

Uma condição impossível implica qualquer outra condição.

Porém, como se verá posteriormente, o conceito de implicação formal ficará rigorosamente definido a partir dos conceitos de implicação material e de quantificador universal. A vantagem duma antecipação em linguagem comum é, naturalmente, de ordem didáctica. Ver-se-á depois que a propriedade anterior se obtém aplicando a PROPRIEDADE DA CONVERSÃO à seguinte, que é evidente:

Uma condição universal é implicada por qualquer outra condição.

Por exemplo, em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$x < 1 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \quad \text{donde} \quad x^2 + 1 \leq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

14. A parte restante do Capítulo I, relativa a quantificadores e suas relações com as operações lógicas elementares, pode agora ser tratada em melhores condições de rendimento para os alunos. Convém insistir nos exemplos de quantificação múltipla e de aplicação das 2.as leis de De Morgan.

Segue-se a já aludida conexão entre implicação formal e implicação material (e analogamente para a equivalência). Trata-se de um ponto delicado que importa esclarecer, mas agora em melhores condições. Na experiência feita em 1964-65 verificou-se que, só com auxílio destas noções, a maior parte dos alunos compreendeu *pela primeira vez* a distinção entre os conceitos de *condição necessária* e *condição suficiente.*

Para melhor compreender a relação entre os conceitos de implicação material e implicação formal, é muito útil dar exemplos de negação de implicações formais, como os seguintes:

$$\sim (\text{n é par} \underset{\bullet}{\Rightarrow} \text{n não é primo}) \Leftrightarrow \underset{n}{\exists} (\text{n é par} \wedge \text{n é primo})$$

$$\sim (\text{x é peixe} \underset{\bullet}{\Rightarrow} \text{x tem guelras}) \Leftrightarrow \underset{x}{\exists} (\text{x é peixe} \wedge \text{x não tem guelras})$$

É também conveniente apresentar exemplos de implicação (ou equivalência), que sejam formais relativamente a certas variáveis, e não relativamente a outras. Por exemplo, a propriedade em que se baseia o 2.º princípio de equivalência das equações pode ser traduzida simbolicamente do seguinte modo:

$$k \neq 0 \underset{k}{\Rightarrow} (a = b \underset{a,\,b}{\Leftrightarrow} ka = kb)$$

Analogamente para as inequações:

$$k > 0 \underset{k}{\Rightarrow} (a > b \underset{a,\,b}{\Leftrightarrow} ka > kb)$$
$$k < 0 \underset{k}{\Rightarrow} (a < b \underset{a,\,b}{\Leftrightarrow} ka < kb)$$

Note-se que, em qualquer dos casos, a equivalência é formal relativamente às variáveis a, b, mas não relativamente a k. Por sua vez, a primeira implicação considerada é formal relativamente à única variável livre que resta: a variável k.

Registe-se ainda a definição de número primo que é dada simbolicamente na pág. 83, 1.º tomo.

15. A propósito das abreviaturas das relações de parentesco (pág. 83, 1.º tomo), é talvez preferível adoptar as seguintes:

F = é filho ou filha de,
I = é irmão ou irmã de,
S = é sobrinho ou sobrinha de,
T = é tio ou tia de.

16. O número 31 do Capítulo I, pág. 84, 1.º tomo, relativo a *existência e unicidade*, é também muito importante. Se a turma não estiver em atraso, é talvez conveniente introduzir, desde já, o símbolo de explicitação, tal como se faz no n.º 20 do Capítulo IV (págs. 211-212, 1.º tomo) mas começando por exemplos colhidos fora do âmbito restrito da matemática. Seja a condição:

x *inventou a lâmpada eléctrica (de incandescência)*

Como existe *um único* indivíduo que verifica esta condição (existência em sentido intemporal), podemos designá-lo pela expressão

ι_x (x inventou a lâmpada eléctrica),

que se lê *'aquele indivíduo* x *tal que* x *inventou a lâmpada eléctrica'* ou, em linguagem corrente, *'o indivíduo que inventou a lâmpada eléctrica'* ou ainda *'o inventor da lâmpada eléctrica'*. A designação habitual deste indivíduo é 'Edison', de modo que podemos escrever:

ι_x (x inventou a lâmpada eléctrica) = Edison

Porém a expressão

ι_x (x é um homem $\wedge$ x foi à Lua)

não tem sentido, porque não existe nenhum elemento x que verifique a condição entre parêntese; e a expressão

ι_x (x é satélite de Marte)

não tem sentido, porque existe *mais de um* satélite de Marte. Analogamente para a expressão

ι_x (x inventou o telefone)

Podem seguir-se os exemplos numéricos dados nas págs. 211-212, excluindo, por enquanto, os que utilizam o símbolo $\{ x : \}$. Faça-se o aluno notar que

$$\iota_x \ (3x = 2) = \frac{2}{3},$$

mas que as expressões $\iota_x \ (0 \cdot x = 2)$ e $\iota_x \ (0 \cdot x = 0)$ não têm sentido em $\mathbb{R}$.

O papel do operador de explicitação é muitas vezes desempenhado em linguagem comum por pronomes relativos. Exemplos:

O poeta que escreveu Os Lusíadas,
O aluno a respeito do qual falámos ontem,
O número positivo cujo quadrado é 2,
etc.

As designações indirectas como estas (em linguagem comum ou simbólica) são chamadas *descrições*, por Bertrand Russell, a quem se deve a teoria de tais designações.

ADITAMENTO AO N.º 8, PÁG. 18, DESTE GUIA

No estudo das equações, devem surgir naturalmente ao aluno equações impossíveis e equações indeterminadas, como as do exercício I da pág. 100, 2.º tomo, do *Compêndio*. O aluno não terá dificuldade em reconhecer que as equações $0x = a$, com $a \neq 0$, e $0x = 0$, às quais se reduzem as propostas, são respectivamente impossível e universal.

ÍNDICE

	Págs.
Advertência prévia	9
Normas gerais	11
I — Observações ao Capítulo I	15
II — Observações ao Capítulo II	30
III — Introdução à geometria analítica (assunto não tratado no *Compêndio)*	45
IV — Observações ao Capítulo III	98
V — Observações ao Capítulo IV	114
VI — Observações ao Capítulo V	121
VII — Observações ao Capítulo VI	134
VIII — Observações ao Capítulo VII	143

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA