J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(1.º volume)

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

II

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO II

1. Neste capítulo é feita a tradução da *lógica de atributos* (também chamada *'cálculo de predicados'*) na *lógica de conjuntos* (também chamada *'cálculo de classes'*). É necessário que o aluno tome bem consciência de que, uma vez fixado o universo, a lógica de atributos é equivalente à lógica de conjuntos. Entre uma e outra existe apenas uma diferença de linguagem ou de ponto de vista psicológico: *ponto de vista da compreensão*, no primeiro caso; *ponto de vista da extensão*, no segundo caso.

Por exemplo, no universo dos seres vivos, o atributo *'felino doméstico'* define um conjunto, também denominado *'conjunto dos gatos'*. Convém desde logo recorrer a exemplos familiares e, tanto quanto possível, sugestivos para os alunos, como os que se apresentam no Capítulo VII, n.º 1, pág. 197, 2.º tomo.

2. A equivalência entre atributos (ou propriedades) traduz-se na identidade entre conjuntos (ou classes). Assim, os atributos

gato, felino doméstico,

são *equivalentes;* definem, por isso, o mesmo conjunto. Analogamente para os atributos

triângulo equilátero, triângulo equiângulo,

no universo das figuras da geometria euclidiana; para os atributos

múltiplo de 15, *múltiplo de* 3 *e de* 5,

no conjunto $\mathbb{N}$; etc.

Só depois de exemplos como estes, em linguagem comum, convirá talvez considerar atributos traduzidos por expressões com variáveis e introduzir então o símbolo $\{ x : \}$. *Para estimular o* *brio dos alunos, convém dizer-lhes que o emprego correcto deste e de outros símbolos de lógica já é familiar a garotos de 7 anos, nos Estados Unidos, segundo o projecto do Prof. Suppes.*

3. O estudo anterior de equações e inequações pode agora ser encarado sob o ponto de vista da extensão. Por exemplo, a equivalência de equações

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)\ (x + 2) = 0,$$

traduz-se na identidade de conjuntos

$$\{x : x^2 - x - 6 = 0\} = \{x : (x - 3)\ (x + 2) = 0\}$$

Por sua vez a equivalência

$$(x - 3)\ (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

traduz-se na identidade

$$\{x : (x - 3)\ (x + 2) = 0\} = \{-2, 3\}$$

Analogamente a equivalência

$$x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$$

traduz-se na identidade

$$\{x : x^2 - x - 6 < 0\} = \{x : -2 < x < 3\}\ ,\ \text{etc.}$$

4. É agora o momento de esclarecer os conceitos de 'conjunto com um só elemento' e de 'conjunto vazio'. Só assim poderemos dizer que, a cada atributo, num dado universo, corresponde um conjunto definido por esse atributo. Importa notar que, segundo o projecto Suppes, o conceito de conjunto vazio é introduzido sem a mínima dificuldade aos 6 anos, logo na 6.ª lição. O objectivo principal, neste caso, é dar mais tarde o conceito de *número zero* a partir do de *conjunto vazio.* Note-se que o conceito de zero é mais abstracto que o de conjunto vazio.

5. A implicação entre atributos traduz-se na inclusão entre conjuntos. Por exemplo, a proposição

'Ser peixe implica ter vértebras'

traduz-se, extensivamente, na proposição

'O conjunto dos peixes está contido no conjunto dos vertebrados'.

A proposição

'Ser múltiplo de 6 implica ser múltiplo de 3'

traduz-se por

'O conjunto dos múltiplos de 6 está contido no conjunto dos múltiplos de 3'.

Só depois de exemplos como estes, em linguagem comum, convirá passar à linguagem simbólica. Note-se que, uma vez introduzido o símbolo $\subset$, o 2.º exemplo anterior pode ser apresentado com o seguinte aspecto:

A implicação [1]

$$n \text{ é múltiplo de } 6 \Rightarrow n \text{ é múltiplo de } 3$$

traduz-se na inclusão

$$\{n : n \text{ é múltiplo de } 6\} \subset \{n : n \text{ é múltiplo de } 3\}$$

Quanto ao 1.º exemplo, se designarmos por P o conjunto dos peixes e por V o conjunto das vértebras, podemos dizer:

A implicação $x \in P \Rightarrow x \in V$ traduz-se na inclusão $P \subset V$ (aliás no *Compêndio* parte-se dum exemplo análogo).

Devem seguir-se exemplos com equações e inequações. Assim tem-se:

EM TERMOS DE COMPREENSÃO	EM TERMOS DE EXTENSÃO
$x = 3 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$	$\{x : x = 3\} \subset \{x : x^2 - 9 = 0\}$
$x > 3 \Rightarrow x^2 - 9 > 0$	$\{x : x > 3\} \subset \{x : x^2 - 9 > 0\}$
$2 + \sqrt{x} = x \Rightarrow x^2 + 4 < 5x$	$\{x : 2 + \sqrt{x} = x\} \subset \{x : x^2 + 4 < 5x\}$
$\sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Rightarrow 2x = 0$	$\{x : \sqrt{x^2 + 1} = x - 1\} \subset \{x : 2x = 0\}$

Convirá sempre verificar se a inclusão inversa também se verifica. Deve também avisar-se o aluno de que muitos autores usam o sinal $\subset$ apenas para *inclusão estrita*, adoptando o sinal $\subseteq$ (por analogia com o sinal $\leqslant$) para *inclusão lata*. Segue-se porém aqui o critério de muitos outros autores, que adoptam o sinal $\subset$ para inclusão lata, podendo usar-se o sinal $\underset{\neq}{\subset}$ para inclusão estrita.

---

(1) Importa salientar que se trata de implicação formal e pôr, a princípio, um ponto ou a variável sob o sinal de implicação.

6. O último exemplo anterior poderá servir de pretexto para notar que a proposição:

'Uma condição impossível implica qualquer outra condição' se traduz, em termos de extensão, na proposição:

'O conjunto vazio está contido em qualquer outro conjunto'.

Porém, ao contrário do que se faz no Compêndio, *será talvez preferível reservar para depois das operações sobre conjuntos o estudo sistemático das propriedades da inclusão, relacionadas aliás com as propriedades dessas operações.*

O que convirá, desde já, é introduzir a terminologia e as notações relativas a intervalos em $\mathbb{R}$, *pela comodidade que oferecem no estudo de inequações e em exemplos vários.*

7. Já se viu que, na passagem da compreensão para a extensão, *implicação* se transforma em *inclusão* e *equivalência* em *identidade*.

Agora chegou o momento de mostrar, com exemplos bem escolhidos, que as operações de conjunção, disjunção e negação sobre atributos, se convertem, respectivamente, nas operações de intersecção, reunião e complementação sobre conjuntos. Tal como para a equivalência e para a implicação, os primeiros exemplos deverão talvez ser apresentados em linguagem comum. Sejam os dois atributos

estudante, menor de 18 *anos*

(que poderemos designar abreviadamente pelas letras *e, m*) considerados no universo dos portugueses. A sua conjunção é o atributo

estudante menor de 18 *anos*

(ou abreviadamente $e \wedge m$). Designemos por E o conjunto dos estudantes e por M o conjunto dos menores de 18 anos (no referido universo). Como se forma a partir destes o conjunto dos *estudantes menores de* 18 *anos?* O próprio aluno deverá fornecer a resposta, sendo aconselhado para isso a utilizar um diagrama. Surge deste modo o conceito de intersecção dos dois conjuntos, que se representa por $E \cap M$.

Assim, a *conjunção* $e \wedge m$ converte-se na *intersecção* $E \cap M$. Utilizando variáveis, tem-se por definição

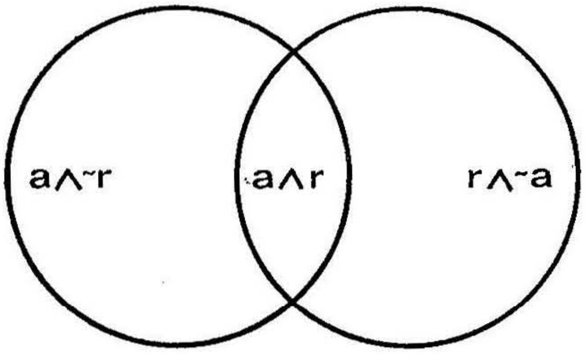
$$x \in E \cap M \Leftrightarrow x \in E \wedge x \in M$$

Os exemplos apresentados no *Compêndio* são todos importantes.

Orientação análoga será seguida para a reunião e para a complementação. Os exemplos do Capítulo VII, n.º 1 (págs. 197-198, 2.º tomo) poderão, desde já, ser utilizados completamente.

Note-se que *'atributos incompatíveis'* se traduz, em termos de extensão, por *'conjuntos disjuntos'*.

8. Será interessante informar os alunos de que, segundo o *projecto Dienes*, estas noções estão já a ser introduzidas de modo intuitivo no *ensino pré-primário*. Para isso é adoptado o método dos BLOCOS DE ATRIBUTOS imaginado pelo Prof. Dienes e que se baseia em jogos com uma colecção de objectos de várias formas (círculos, quadrados, rectângulos e triângulos), várias cores (azuis, vermelhos e amarelos), dois tamanhos (grandes e pequenos) e duas espessuras (grossos e delgados). Por exemplo, para focar os conceitos de conjunção e intersecção, o professor pode colocar sobre uma mesa ou no chão duas cintas a cruzarem-se e convidar os garotos a colocarem num dos círculos todos os objectos azuis da colecção e só esses (independentemente da forma, tamanho e espessura) e no outro círculo todos os objectos redondos e só esses (independentemente da cor, tamanho e espessura). Há-de chegar um momento em que os alunos hesitam perante os objectos que são *ao mesmo tempo azuis e redondos.* Quando compreenderem o que se pretende, acabarão por colocar esses objectos (e só esses) na região comum aos dois círculos. Deste modo se materializa extensivamente aos seus olhos o conceito de intersecção de dois conjuntos, gerado pelo de conjunção de atributos. Analogamente para outras operações lógicas.



9. As propriedades das operações lógicas sobre conjuntos e de inclusão devem surgir como tradução das propriedades correspondentes das operações sobre atributos, as quais, em última análise, são consequência das propriedades das *operações sobre valores*

lógicos. Também aqui convém acrescentar as PROPRIEDADES DA IDEMPOTÊNCIA para a intersecção e para a reunião:

$$A \cap A = A \quad , \quad A \cup A = A$$

O enunciado do PRINCÍPIO DA DUALIDADE LÓGICA, *dado na pág. 109, 1.º tomo, presta-se a confusões.* Onde está *'Toda a proposição sobre conjuntos'* deveria estar *'Toda a propriedade das operações lógicas sobre conjuntos'.*

10. Só depois do estudo das referidas propriedades, e como aplicação das mesmas, se deve abordar o *estudo dos silogismos em termos de extensão.* Nos silogismos clássicos, em que a conclusão é uma proposição universal, o que intervém fundamentalmente é a *propriedade transitiva da inclusão*

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

ou a própria definição de inclusão:

$$a \in A \wedge A \subset B \Rightarrow a \in B$$

(É indispensável distinguir os dois casos, como se faz no *Compêndio.)*

Mas tem igualmente muito interesse apresentar os silogismos sob forma operatória, para mostrar como o raciocínio *se traduz em cálculo algébrico (no domínio da álgebra de Boole).*

Para isso é mais cómodo representar a intersecção de dois conjuntos A, B pela notação AB, o complementar de A pela notação $\tilde{A}$ e o conjunto vazio pelo símbolo 0 (1). Observe-se agora que a inclusão se pode definir a partir das operações lógicas. Seja por exemplo R o *conjunto dos rouxinóis* e A o *conjunto das aves.* Temos então

R ⊂ A (isto é: *Todo o rouxinol é uma ave).*

Mas o mesmo juízo pode ser assim expresso:

$$R\tilde{A} = 0,$$

o que está a indicar que os conjuntos R e $\tilde{A}$ *são disjuntos,* ou seja, em termos de compreensão:

Ser rouxinol e não ser ave é impossível.

---

(1) O símbolo ∅ (letra O cortada) só interessa para designar o conjunto vazio, quando se pretende evitar a confusão com o número *zero.*

Dum modo geral, quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se

$$A \subset B \Leftrightarrow A\tilde{B} = 0$$

Daqui se deduz, por sua vez, aplicando a LEI DA DUPLA NEGAÇÃO:

$$A \subset \tilde{B} \Leftrightarrow AB = 0$$

Por exemplo, sendo A o conjunto das *aves* e G o conjunto dos *animais com guelras*, tem-se

$A \subset \tilde{G}$ (isto é: *Nenhuma ave tem guelras*)

o que também se pode exprimir, escrevendo

$AG = 0$ (isto é: *Ser ave e ter guelras é impossível*).

Posto isto, seja ainda R o conjunto dos rouxinois, A o conjunto das aves e P o conjunto dos animais com pulmões. O silogismo

$R \subset A$ (Todo o rouxinol é ave)

$A \subset P$ (Toda a ave tem pulmões)

$R \subset P$ (Todo o rouxinol tem pulmões)

pode agora ser apresentado com o aspecto:

$$\frac{\begin{array}{c} R\tilde{A} = 0 \\ A\tilde{P} = 0 \end{array}}{R\tilde{P} = 0}$$

Analisando este esquema, o aluno facilmente nota que se chegou à conclusão *eliminando* entre as premissas os dois factores complementares A, $\tilde{A}$. *Tudo se passa, portanto, como se tivéssemos multiplicado membro a membro as duas premissas, o que dá*

$$R\tilde{A} \cdot A\tilde{P} = 0$$

e tivéssemos depois eliminado os referidos termos complementares, o que conduz à conclusão, $R\tilde{P} = 0$.

Seja ainda R o conjunto dos rouxinóis, A o conjunto das aves e G o conjunto dos animais com guelras. Então o silogismo

$$R \subset A \quad , \quad A \subset \tilde{G} \quad , \quad \therefore \quad R \subset \tilde{G}$$

pode apresentar-se com o aspecto

$$R\tilde{A} = 0 \quad , \quad AG = 0 \quad , \quad \therefore \quad RG = 0,$$

em que a conclusão se pode obter aplicando a mesma regra.

Mas note-se que se trata aqui apenas de uma regra prática *e não da aplicação de uma propriedade operatória que justifique essa eliminação no produto* $R\tilde{A} \cdot AG = 0$.

Seja porém como for, esta regra é na verdade muito prática, podendo aplicar-se a duas ou mais premissas do tipo das anteriores, para delas deduzir uma ou mais conclusões. Sejam por exemplo as seguintes premissas, consideradas por Lewis Carrol:

1) Nenhum indivíduo que aprecie realmente Beethoven pode deixar de manter silêncio absoluto enquanto se toca a *Sonata ao Luar.*
2) As cobaias são desesperadamente incultas a respeito de música.
3) Nenhum indivíduo que seja desesperadamente inculto a respeito de música é capaz de manter silêncio absoluto, enquanto se toca a *Sonata ao Luar.*

Para traduzir estas proposições em linguagem de conjuntos, ponhamos:

B = conjunto dos indivíduos que apreciam realmente Beethoven.
S = conjunto dos que mantêm silêncio absoluto enquanto se toca a *Sonata ao Luar.*
C = conjunto das cobaias.
D = conjunto dos indivíduos que são desesperadamente incultos a respeito de música.

As três proposições anteriores podem traduzir-se assim:

$$\begin{array}{lll} 1') & B \subset S & \text{ou seja } B\tilde{S} = 0 \\ 2') & C \subset D & \text{ou seja } C\tilde{D} = 0 \\ 3') & D \subset \tilde{S} & \text{ou seja } DS = 0 \end{array}$$

Multiplicando membro a membro estas igualdades, pela ordem 2'), 3'), 1') e aplicando a propriedade comutativa do produto, obtém-se:

$$C\tilde{D} \cdot DS \cdot \tilde{S}B = 0$$

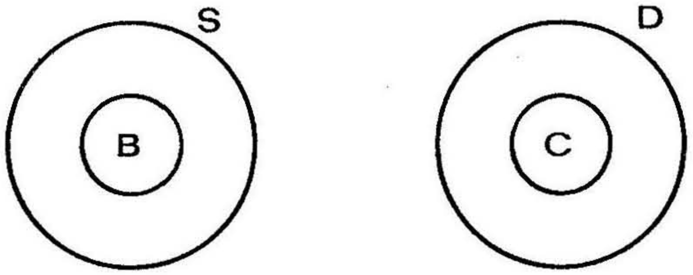
Eliminando os factores complementares, segundo a referida regra prática, vem a conclusão:

$$CB = 0,$$

que se traduz em linguagem comum por:

'Nenhuma cobaia aprecia realmente Beethoven'.

Mas das três premissas ainda se podem tirar as conclusões $DB = 0$ (Nenhuma pessoa desesperadamente inculta a respeito de música aprecia realmente Beethoven) e $CS = 0$ (Nenhuma cobaia é capaz de manter silêncio absoluto enquanto se toca a *Sonata ao Luar*).



Este exemplo, ao mesmo tempo humorístico e educativo, segundo o estilo do autor, pode tornar-se intuitivo com o diagrama.

Um outro exemplo de L. Carrol que convém citar, igualmente humorístico e recreativo, é o dos *fumadores de ópio*, apresentado nas págs. 191-192 do 2.º tomo do *Compêndio*. O próprio aluno poderá chegar por si à conclusão; mas outras conclusões se podem tirar das mesmas premissas. Ver ainda o exercício IX, pág. 194, 2.º tomo.

Os exemplos anteriores mostram o seguinte facto, para o qual convém chamar a atenção do aluno:

Quando se apresentam mais de duas premissas, é possível geralmente tirar delas mais de uma conclusão e começa a ser cada vez menos evidente quais as conclusões que se podem obter.

Ora numa teoria matemática a situação é análoga: a teoria parte normalmente de várias premissas (os *axiomas* ou *postulados*) para chegar a várias conclusões (os *teoremas*), que são cada vez menos evidentes e que o matemático antevê primeiramente *por intuição* e só depois confirma logicamente *por demonstração*. Note-se ainda que muitas das conclusões possíveis são desprovidas de interesse; o mérito do matemático está em distinguir os resultados verdadeiramente interessantes.

11. Os casos anteriores não esgotam de modo nenhum a lista dos silogismos, nem sequer a dos silogismos clássicos em termos de conjuntos. Aliás a lista dos silogismos é interminável. Convirá ainda deter a atenção, *por breve tempo*, em outros tipos de silogismos.

Por exemplo, apresentem-se as premissas

2 é um número par
2 é um número primo

e convide-se o aluno a tirar uma conclusão.

Não será difícil obter a resposta:

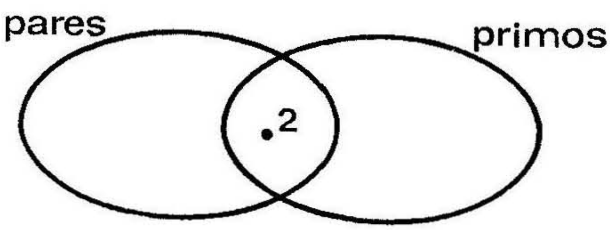
Existe pelo menos um número que é par e primo

ou

Algum número par é primo

ou ainda

Algum número primo é par

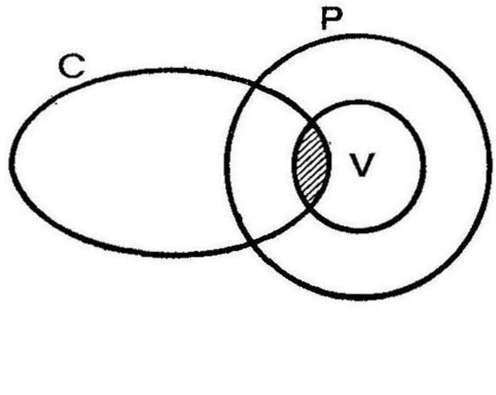


Se designarmos por M_2 o conjunto dos números pares e por Pr o conjunto dos números primos (por exemplo no universo $\mathbb{N}$), o silogismo considerado assume a forma simbólica:

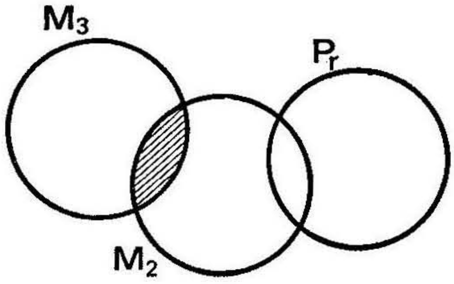
$$\frac{\begin{array}{c} 2 \in M_2 \\ 2 \in Pr \end{array}}{M_2 Pr \neq 0}$$

Podem-se depois considerar exemplos tais como:

Alguma destas cobras é uma víbora
Toda a víbora é perigosa
Logo...



Algum número par é múltiplo de 3
Nenhum múltiplo de 3 é primo
Logo...



Convide-se o aluno a interpretar estes exemplos, quer simbolicamente, quer por meio de diagramas.

Convide-se ainda o aluno a ver, por exemplo, onde está o vício de paralogismos tais como:

Algum número par é primo
Algum número par é múltiplo de 3
Logo algum múltiplo de 3 é primo

Algum homem é cosmonauta
Todo o americano é um homem
Logo algum americano é cosmonauta

NOTA IMPORTANTE. I. O emprego da palavra 'algum' no singular, como se faz nestes exemplos, torna a linguagem pouco natural. Seria mais natural dizer 'Alguns homens são cosmonautas'. Mas isso equivaleria a dizer 'Existe mais de um homem que é cosmonauta', o que é aliás verdadeiro (em 1965). Ora o que se pretende dizer é: '*Existe pelo menos um* homem que é cosmonauta'. Isto mostra, por um lado, mais um dos inconvenientes da linguagem comum e, por outro lado, a vantagem do emprego do quantificador 'Existe pelo menos um', em vez do adjectivo indefinido 'Algum'. Por exemplo, as proposições 'Algum número par é primo' e 'Existe pelo menos um número par que é primo' pretendem dizer a mesma coisa; simplesmente, a segunda é muito mais explícita e natural do que a primeira.

Todavia, convém muitas vezes transigir com as irregularidades da linguagem comum e — até mais — habituar o aluno à multi-

plicidade de formas que essa linguagem pode assumir, para que ele fique apto a traduzi-la em termos simbólicos.

O pôr problemas em equação não é senão um primeiro aspecto desse tipo de traduções. Agora o campo alarga-se extraordinariamente e, tendo em vista o incremento que as aplicações da matemática moderna estão a ter, especialmente no domínio da automação, é forçoso preparar nesse sentido as novas gerações. O professor pode ter à sua disposição uma imensa variedade de exemplos — e quanto mais pitorescos estes forem, melhor. Indicaremos, a propósito, o seguinte exemplo extraído do livro do Prof. Suppes, *Introduction to Logic:*

Pondo:

H = conjunto de todas as pessoas

A = conjunto dos americanos

F = conjunto dos franceses

B = conjunto dos bandidos

P = conjunto dos filósofos

V = conjunto das pessoas que bebem vinho

C = conjunto das que bebem café

T = conjunto das que bebem chá

traduza as seguintes proposições em forma simbólica:

a) Alguns americanos que bebem vinho são filósofos.

b) Nenhum francês é americano.

c) Quem bebe vinho e café bebe também chá.

d) Os bandidos franceses bebem café, chá e vinho.

e) Alguns bandidos americanos bebem café e chá, mas não vinho.

f) Alguns bandidos franceses que bebem vinho não bebem ou chá ou café.

g) Um filósofo não bebe chá nem café.

h) Alguns franceses são ou filósofos ou bandidos.

i) Todos os que bebem café bebem chá ou vinho.

Quando se trata de silogismos, os exemplos podem tornar-se ainda mais sugestivos, como já se viu. Acrescentaremos mais dois exemplos do livro *Symbolic Logic*, de L. Carrol:

I. Tirar todas as conclusões possíveis das seguintes hipóteses:

1) Nenhum exercício acrobático, que não esteja anunciado no programa dum circo, é ali executado.

2) Nenhum exercício acrobático é possível, quando envolve um quádruplo salto mortal.

3) Nenhum exercício acrobático impossível é anunciado no programa dum circo.

(Pôr U = { exercícios acrobáticos }, a = { exercícios acrobáticos anunciados nos programas dum circo }, b = { exercícios acrobáticos executados num circo }, c = { exercícios acrobáticos que implicam um quádruplo salto mortal }, d = { exercícios acrobáticos possíveis }.)

II. Tirar todas as conclusões possíveis das seguintes hipóteses:

1) Quando trabalho num exemplo de lógica sem resmungar, estejam certos de que posso compreendê-lo.

2) Estes sorites não estão dispostos em ordem regular como os exemplos a que estou habituado.

3) Nenhum exemplo fácil me faz dor de cabeça.

4) Não sou capaz de entender um exemplo que não esteja disposto em ordem regular, como aqueles a que estou habituado.

5) Eu nunca resmungo com um exemplo, a não ser quando me faz dor de cabeça.

U = { exemplos de lógica em que trabalho }, a = { exemplos de lógica dispostos em ordem regular }, b = { exemplos fáceis de lógica }, c = { exemplos de lógica com que resmungo }, d = { exemplos de lógica que me fazem dor de cabeça }, e = { estes sorites }, f = { exemplos de lógica que sou capaz de entender }.

Ao ver estes e outros exemplos o professor pensa logo no problema do tempo. A maior parte dos exemplos como estes não são para desenvolver na aula. *O professor pode distribuir os enunciados em folhas a ciclostilo, e dizer aos alunos que são* *para os verem em casa se tiverem tempo para isso e se acharem que podem assim divertir-se, do mesmo modo que as crianças pequenas se divertem com* jogos de paciência.

Os alunos devem saber que muitas das grandes descobertas científicas, como a do dínamo, a da teoria da relatividade, a da penicilina, etc., etc. são devidas a pessoas que se divertiram *assim com as suas experiências e as suas meditações.*

10. O assunto da rubrica *'Intersecção ou reunião dos conjuntos duma dada família'* (n.º 13 do Capítulo II, págs. 111-113, 1.º tomo) pode ser adiado para o 7.º ano quando se tratar do conceito de 'partição dum conjunto' associado ao de 'relação de equivalência'.

11. No estudo introdutório das relações, que se faz na parte final deste capítulo, será talvez preferível, do ponto de vista didáctico, adoptar a seguinte ordem, relativamente aos números em que são expostos estes assuntos:

14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 16, 17

Trata-se, pois, de passar para o fim o estudo do produto anterior de *mais de dois conjuntos* e, portanto, o das relações com mais de dois termos.

Este assunto deverá ser feito com todo o cuidado. Um modo natural de o iniciar pode ser o seguinte:

Já vimos que as expressões proposicionais com variáveis exprimem propriedades (ou atributos). Mas há uma diferença notável entre o caso das expressões com uma só variável, tais como:

n *é múltiplo de* 5 , k *é primo*

$3 < x < 5$, X *é estudioso* , X *tem filhos*, etc.

e o caso das expressões com mais de uma variável, tais como:

a *é múltiplo de* b , m *é primo com* n

$a < x < b$, X *estuda mais que* Y , X *é par de* Y, etc.

As primeiras aplicam-se, de cada vez, a *um só indivíduo*, e podemos, por isso, dizer que exprimem *propriedades absolutas.*

As segundas aplicam-se, de cada vez, a *dois ou mais indivíduos considerados numa certa ordem.* Diremos então que essas expressões traduzem *propriedades relativas.*

Assim, as propriedades 'ser múltiplo de 5', 'ser número primo', etc. são propriedades absolutas, enquanto as propriedades 'ser múltiplo de', 'ser primo com', etc. são propriedades relativas.

Ora já sabemos que, na passagem da compreensão para a extensão, as *propriedades absolutas* dão lugar a *conjuntos.* A que dão lugar então as *propriedades relativas?* Podemos dizer desde já que dão lugar a *relações.* Mas, por enquanto, apenas se introduziu uma palavra, cujo significado é ainda vago. Procurando precisar o significado da palavra 'relação' — no caso das expressões com *duas* variáveis — chega-se aos conceitos de 'par ordenado' e de 'produto cartesiano', tais como se apresentam nos n.^{os} 14 e 15.

Assim, estes conceitos surgem inevitavelmente, quando se procura interpretar as propriedades relativas em termos de extensão. Também, como se vê, é inevitável fazer aqui apelo ao conceito intuitivo de ordem. *Este é inerente à própria estrutura da linguagem (e portanto do pensamento), exactamente como os conceitos de indivíduo e de classe. Na verdade, é impossível falar ou escrever, sem que os sons ou os sinais gráficos se disponham segundo uma ordem determinada:* ordem temporal, *no primeiro caso;* ordem espacial, *no segundo caso.*

Certos autores reduzem os conceitos de par ordenado, de termo ordenado, etc. aos de conjuntos de diferentes tipos lógicos, mediante um artifício. Por exemplo, põem por definição:

$$(5,\ 3) = \{\{5,\ 3\}\ ,\ 5\}\quad ,\quad (5,\ 5) = \{\{5\}\ ,\ 5\},\ \text{etc.}$$

A nosso ver, porém, trata-se de um artifício pouco intuitivo e desnecessário, especialmente nesta fase do ensino.

NOTA SOBRE A TERMINOLOGIA. Em vez de 'gráfico duma relação', no caso geral, parece-nos preferível dizer 'diagrama duma relação'. Quando se tratar de relações em $\mathbb{R}$, a expressão 'gráfico duma relação' será usada especificamente para designar a sua imagem geométrica, segundo o método da geometria analítica, como se verá adiante.

ÍNDICE

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA