J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(1.º volume)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

VI

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO V

1. As considerações dos n.os 1 e 2 podem ser resumidas para o aluno, reservando-se para esclarecimento do professor a leitura minuciosa desses números.

2. A noção de grupóide desperta bastante interesse nos alunos, sobretudo quando se parte de exemplos. O exemplo recreativo do 'Bailado das Horas' que aparece só na pág. 27 do 2.º tomo, pode ser apresentado logo no n.º 4, atendendo a que se trata de um exemplo muito rico em sugestões. Em vez de considerar os seus elementos como *classes de congruência módulo 12*, é preferível começar por considerá-los como entes arbitrários, nomeadamente rapazes e raparigas, como se indica no texto (de preferência alunos da turma ou seus conhecimentos). Isso não só concretiza bastante mais o exemplo, como prepara o terreno para os conceitos de isomorfismo e de identidade de estruturas, que serão dados mais adiante. É claro que o próprio exemplo conduzirá às referidas classes de congruência (em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{Z}$), como elementos de uma das possíveis concretizações desta estrutura.

Um exercício entre muitos:

Determinar o número total de grupóides que é possível definir com o conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Trata-se, é claro, de achar o número total de aplicações de $\{1, 2, 3\}^2$ em $\{1, 2, 3\}$, número esse muito elevado ($3^9 = 19683$).

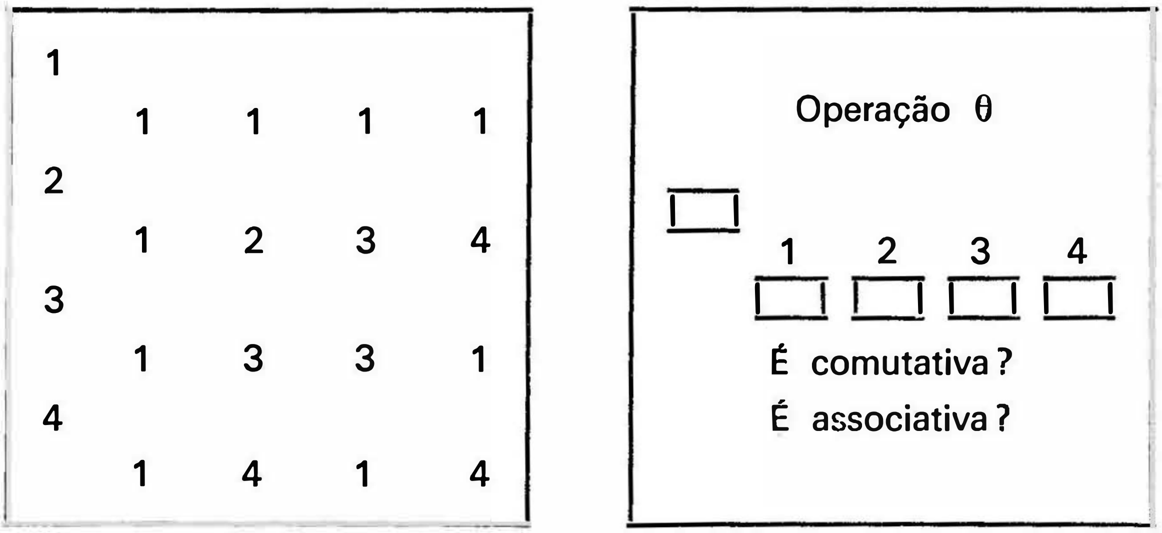
3. Podem imaginar-se diversos modelos para concretizar o conceito de grupóide. Convém que tais modelos se aproximem, mais ou menos, de máquinas de calcular.

Seja, por exemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e seja θ a operação definida pela tabela seguinte:

$x \; \theta \; y$

x \ y	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	3	1
4	1	4	1	4

Um modelo muito simples para este grupóide pode ser construído com dois cartões como vão a seguir indicados.



No segundo cartão são abertas 5 *janelas*. A da esquerda, isolada, destina-se a mostrar o *primeiro dado*. As restantes quatro são encimadas pelos valores do *segundo dado* e destinam-se a mostrar os correspondentes resultados.

O primeiro cartão deve deslizar verticalmente por trás do segundo, entre dois encaixes laterais. Se as posições relativas das janelas estiverem bem calculadas, a *máquina* executará correctamente a operação θ. Por exemplo, quando à janela da esquerda aparecer o número 3 (primeiro dado), deverão aparecer 1, 3, 3, 1, respectivamente, por baixo de 1, 2, 3, 4 (valores do segundo dado).

Podem construir-se modelos deste tipo para vários grupóides, o que contribuirá, certamente, para animar o ensino e torná-lo mais eficiente.

É claro que também se podem concretizar, com tais modelos, operações para as quais o conjunto dado não é um grupóide. É o que sucede, por exemplo, com as operações de adição e multiplicação no conjunto dos números dígitos. *Conviria até começar por estes dois exemplos familiares, em que as tabelas são as tabuadas usuais da adição e da multiplicação*.

4. Quando uma operação é dada por uma tabela, é muito fácil verificar se ela é comutativa ou ainda se tem elemento neutro ou se é reversível; mas é fastidioso, nesse caso, verificar directamente se a operação é associativa. O problema pode amenizar-se bastante, por meio dum isomorfismo, *como veremos mais adiante*.

5. O conceito de isomorfismo tem importância primacial na matemática moderna. Tudo o que neste capítulo se refere a isomorfismos pode ser assimilado com interesse pelos alunos, desde que o ensino seja bem conduzido. A equipa guiada pelo Prof. Suppes consegue transmitir estas noções, com êxito, a *alunos de* 10-11 *anos*, mediante exemplos adequados (de carácter elementar, bem entendido).

Um exemplo bastante eficaz, que convém explorar a fundo, é o do 'Bailado das Horas'.

Um exemplo ao mesmo tempo eficaz e utilíssimo é o que se desenvolve através de todo o capítulo, como *leit-motiv*, até final: o da *função exponencial e sua inversa*. Este isomorfismo — que só por si justifica todo o estudo geral que se faz sobre tal conceito — acabará por ser concretizado, de maneira excelente, com o uso da régua de cálculo, que é um exemplo notável de associação da teoria com a prática.

6. Quando dois grupóides (A, θ) e (B, Φ) são dados por tabelas, é bem fácil verificar se uma aplicação f de A sobre B é ou não um isomorfismo. Basta substituir cada elemento x de A, em todos

os lugares da tabela de θ pelo correspondente elemento f(x) de B: a aplicação f será um isomorfismo, sse a operação definida pela tabela assim formada coincide com Φ.

Seja, por exemplo, A = { – 1, – 1 } , B = {0 , 1 }, e consideremos os grupóides (A, ·) e (B, $\dot{+}$) com as operações definidas pelas tabelas seguintes:

x · y

y \ x	– 1	1
– 1	1	– 1
1	– 1	1

x $\dot{+}$ y

y \ x	0	1
0	0	1
1	1	0

Trata-se de saber se a aplicação $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é um isomorfismo de (A, ·) sobre (B, $\dot{+}$).

Feita a substituição de – 1 por 1 e de 1 por 0 na primeira tabela, obtém-se a tabela seguinte:

y \ x	1	0
1	0	1
0	1	0

Ora a operação definida por esta coincide manifestamente com a anterior, $\dot{+}$.

Analogamente se vê que a aplicação $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ não é um isomorfismo de (A, ·) sobre (B, $\dot{+}$).

7. Vejamos agora como se pode, por meio de um isomorfismo, averiguar se uma operação definida por uma tabela é ou não associativa.

$x\,\theta\,y$

x \ y	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	3	1
4	1	4	1	4

Seja novamente a operação θ considerada no n.º 3, operação definida no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Note-se que, a cada elemento *a* de A, corresponde a aplicação $x \hookrightarrow a\theta x$ do conjunto A em si mesmo, aplicação que podemos designar por S_a. Teremos assim:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = I, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aliás, estas aplicações são bem evidenciadas pelo modelo-máquina descrito no n.º 3.

Formemos, agora, a tabela do produto de aplicações definidas no conjunto $A^* = \{S_1, S_2, S_3, S_4.\}$

$x\,\theta\,y$

S \ T	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	S_1	S_1	S_1	S_1
S_2	S_1	S_2	S_3	S_4
S_3	S_1	S_3	S_3	S_1
S_4	S_1	S_4	S_1	S_4

Confrontando esta tabela com a anterior, imediatamente se reconhece que a aplicação $a \curvearrowright S_a$ é um isomorfismo do grupóide (A, θ) sobre o grupóide $(A^*, \cdot)$. Ora, já sabemos que o produto de aplicações é associativo. Logo, pelo PRINCÍPIO DE ISOMORFIA, a operação θ também é, necessariamente, associativa.

Vejamos um segundo exemplo. Seja, agora, $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e seja θ dada pela tabela seguinte:

$x \theta y$

x \ y	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Então:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Neste caso, a correspondência $a \curvearrowright S_a$ é a aplicação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{pmatrix}$ biunívoca do conjunto A sobre o conjunto $A^* = \{ S_1, S_2, S_3 \}$. *Mas não é um isomorfismo.* Por exemplo, tem-se

$$S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_{1\theta 2} = S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

portanto $S_{1\theta 2} \neq S_1 S_2$. Mais até: $S_1 S_2$ *não pertence a* A^* *e, deste modo,* $(A^*, \cdot)$ *não é sequer um grupóide.*

Podemos nós concluir daqui que a operação θ *não é associativa? Vamos ver que sim, tendo em conta o seguinte teorema,* cuja demonstração pode ser feita ou não na aula, *conforme o estado de adiantamento da turma:*

TEOREMA. *Seja* (A, θ) *um grupóide qualquer. Pondo* $S_a(x) = a\theta x$ *para todo o* $a \in A$, *e* $A^* = \{ S_a : a \in A \}$, *suponhamos que a correspondência* $a \curvearrowright S_a$ *é uma aplicação biunívoca de* A *sobre* A^*. *Nestas condições, a operação* θ *é associativa, sse a aplicação* $a \curvearrowright S_a$ *é um isomorfismo de* (A, θ) *sobre* $(A^*, \cdot)$.

Demonstração:

a) Se a referida aplicação é um isomorfismo, a operação θ é associativa, em virtude do PRINCÍPIO DE ISOMORFIA, visto que o *produto de aplicações é sempre associativo.*

b) Reciprocamente, *suponhamos que θ é associativa.* Vamos provar que a aplicação $a \hookrightarrow S_a$ *é necessariamente um isomorfismo de* (A, θ) *sobre* (A^*, $\cdot$), isto é, que $S_{a\theta b} = S_a \cdot S_b$, $\forall a, b \in A$.

Com efeito temos, por definição de $S_{a\theta b}$:

$$S_{a\theta b}(x) = (a\theta b)\,\theta x \quad , \quad \forall x \in A,$$

donde, visto que $(a\theta b)\,\theta x = a\theta(b\theta x)$,

$$S_{a\theta b}(x) = S_a(S_b(x)) \quad , \quad \forall x \in A$$

e portanto $S_{a\theta b} = S_a \cdot S_b$.

Este teorema exige a hipótese de *a aplicação* $a \hookrightarrow S_a$ *ser biunívoca* (é óbvio que é sempre uma aplicação de A sobre A^*). Vamos ver dois casos em que se verifica a hipótese da biunivocidade:

1.º caso. *O grupóide tem elemento neutro.* Com efeito, se u é elemento neutro de θ, tem-se:

$$a \neq b \Leftrightarrow a\theta u \neq b\theta u \Rightarrow S_a \neq S_b, \quad \forall a \ , \ b \in A$$

2.º caso. *O grupóide verifica a lei do corte.* É fácil fazer a demonstração neste caso.

Assim se conclui, em particular:

COROLÁRIO. *Todo o semigrupo que tenha elemento neutro ou verifique a lei do corte é isomorfo a um semigrupo de aplicações* (também se diz: 'pode ser *realizado* ou *representado* por um semigrupo de aplicações').

É claro que qualquer das hipóteses é sempre verificada por um grupo. Note-se que a representação de grupos por meio de aplicações de outro tipo *tem grande importância em física moderna e em outros ramos da ciência.*

A título de curiosidade, pode ainda registar-se o seguinte teorema:

Um grupóide (A, θ) *que não tenha elemento neutro pode ser sempre prolongado num grupóide* (A′, θ') *com elemento neutro, e que é associativo sse o primeiro for.*

Com efeito, basta pôr $A' = A \cup \{u\}$, onde u é qualquer elemento que não pertença a A, e pôr

$$u\theta' a = a\theta' u = a \quad , \quad \forall a \in A'$$
$$a\theta' b = a\theta b \quad , \quad \forall a,\ b \in A$$

Assim θ' é uma extensão de θ, *u* elemento neutro de θ' e vê-se que θ' é associativa sse θ o for.

Deste modo o anterior método poderá ser sempre aplicado com êxito. E convém ainda notar que os anteriores teoremas são válidos, quer A seja finito quer seja infinito.

8. Já atrás falámos de *numerais cardinais* (nomes de números naturais) e de *numerais multiplicativo-partitivos* (nomes de números racionais positivos). Observe-se agora a correspondência biunívoca:

1	2	3	... n	...
↓	↓	↓	... ↓	...
o mesmo	o dobro	o triplo	o n-uplo	...

Aqui 'o mesmo' designa o operador identidade $x \hookrightarrow x$, 'o dobro' designa o operador $x \hookrightarrow 2x$, etc. Estes operadores são *números racionais*, postos em correspondência biunívoca com números *naturais*. Ora tal correspondência é um isomorfismo relativamente à multiplicação. Por exemplo, tem-se:

$2 \times 3 = 6$ o dobro do triplo = o sêxtuplo

$3 \times 4 = 12$ o triplo do quádruplo = doze vezes

e assim por diante.

Mais ainda: essa correspondência é também um isomorfismo relativamente à adição. Por exemplo:

$2 + 3 = 5$ o dobro mais o triplo = o quíntuplo

$3 + 4 = 7$ o triplo mais o quádruplo = o séptuplo

É este *duplo isomorfismo* que leva a identificar os números naturais com os correspondentes números racionais, permitindo escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$$

Por um processo análogo se identificam os números absolutos com os correspondentes números relativos (não negativos). Mas isso será tratado a seu tempo.

9. Assim como o conceito de correspondência biunívoca dá origem à *relação de equipotência*, assim também o conceito de isomorfismo dá origem à *relação de isomorfia*. E assim como a relação de equipotência dá origem, por abstracção, ao conceito de *número cardinal*, assim também a relação de isomorfia dá origem ao conceito de *estrutura* (ou forma). Com efeito:

Diz-se que dois conjuntos *têm o mesmo número cardinal*, sse são equipotentes.	Diz-se que dois grupóides *têm a mesma estrutura* (ou a mesma *forma*), sse são isomorfos.

Donde:

Número cardinal dum conjunto A é a propriedade que possuem todos os conjuntos equipotentes a A e só esses.	*Estrutura* (ou *forma*) dum grupóide G é a propriedade que possuem todos os grupóides isomorfos a G e só esses.

Um exemplo análogo, que convém citar, é o da *forma duma figura* F (propriedade que possuem todas as figuras semelhantes a F e só essas).

Mas, assim como não faz sentido falar do *conjunto de todos os conjuntos* (por causa do PARADOXO DE RUSSELL), assim também não faz sentido falar do *conjunto de todos os grupóides* (pela mesma razão). Neste caso, uma solução é utilizar o termo 'classe' com significado mais amplo que o de 'conjunto' (ver págs. 105-106); então o universo em que é definida a relação de isomorfia será a *classe de todos os grupóides*, que ficará repartida em classes de equivalência pela referida relação ([1]).

MUITO IMPORTANTE:

No *Compêndio* define-se 'estrutura dum grupóide' (1.º vol., 2.º tomo, pág. 36) de maneira diversa da anterior, embora lhe seja equivalente, em virtude do PRÍNCIPIO DE ISOMORFIA. Mas talvez seja preferível a definição anterior, para estabelecer uniformidade com as definições de número cardinal, forma duma figura, etc.

Sendo assim, o princípio de isomorfia admite um segundo enunciado que vem esclarecer o significado de 'estrutura', como

([1]) Recordemos que, segundo vários autores, é a estas classes que deveríamos chamar *estruturas de grupóide*.

propriedade equivalente à conjunção das propriedades formais da operação do grupóide:

A estrutura dum grupóide (A, θ) *equivale à conjunção de todas as propriedades lógicas da operação* θ.

Mas, nos casos *usuais*, verifica-se o seguinte facto, em que se revela a própria essência da matemática moderna:

Entre todas as possíveis propriedades lógicas de θ, *é possível escolher algumas, em número finito (e geralmente pequeno), que implicam todas as outras.*

As propriedades assim escolhidas são chamadas os *axiomas* e as restantes os *teoremas* da estrutura.

Nestas condições, dar uma estrutura equivale a dar um sistema de axiomas [1].

Por exemplo, dar a estrutura do grupóide $(\mathbb{N}, +)$ equivale a dar um sistema de axiomas (propriedades da adição em $\mathbb{N}$), equivalente ao sistema de PEANO, como se verá no 7.º ano.

Entretanto, como preparação do terreno psicológico, será muito importante resolver os exercícios da página 37.

Eis mais dois exercícios esclarecedores:

I. Os grupóides $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$ são isomorfos? Porquê?

II. Os grupóides $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ são isomorfos? Porquê?

Trata-se de procurar propriedades lógicas que sejam válidas num e não no outro. Por exemplo, a propriedade

$$\forall a, \exists x : x + x = a$$

é válida em $(\mathbb{Q}, +)$ e não em $(\mathbb{Z}, +)$.

Por sua vez, a propriedade

$$\forall a, \exists x : x \cdot x = a,$$

é válida em $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ e não em $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$.

Convém que seja o aluno a descobrir por si estas propriedades.

10. Dum modo geral, os assuntos marcados com asterisco são facultativos. Mas a noção de quase-grupo deve ser dada, *pelo menos* sob a forma de exercício, a propósito do teorema:

---

(1) Note-se que este facto se verifica não só com as estruturas do grupóide, mas ainda com qualquer outra que se considere em matemática.

A operação dum grupo é sempre reversível.

Para concretizar melhor o conceito de operação reversível, apresente-se o exemplo sugestivo do n.º 4, pág. 13. Aqui a operação é reversível, mas *o grupóide não é um grupo* (não é associativo). Exemplo análogo, igualmente sugestivo, é o do grupóide $(\mathbb{Z}, -)$. O aluno deve, por si só, chegar a esta conclusão:

O facto de a operação dum grupóide (A, θ) ser reversível *equivale a serem biunívocas as aplicações*

$$x \curvearrowright \alpha\theta x \quad , \quad x \curvearrowright x\theta\alpha \quad , \quad \forall\alpha \in A$$

No caso em que a operação é definida por uma tabela, estas aplicações são dadas respectivamente pelas linhas e pelas colunas, e é assim que o aluno se pode aperceber do referido facto.

Os termos 'quase-grupo' e 'quadrado latino' surgem agora como necessidade de dar um nome às situações encontradas.

Quanto aos teoremas 'Um quase-grupo é um grupo, sse for associativo' e *'A matriz dum grupóide finito define um quase-grupo, sse é um quadrado latino'* ficam à mercê das circunstâncias e a título de curiosidade.

Note-se que no primeiro teorema há um ponto delicado, relativo à existência de elemento neutro. Se (A, θ) é um quase-grupo, tem-se

$$\text{(1)} \qquad \forall c \in A, \ \exists u \in A : c\theta u = c$$

Isto leva o aluno precipitadamente a concluir que todo o quase-grupo tem elemento neutro. Mas os exemplos apresentados mostram que isto não é verdade.

Para ver que a conclusão é precipitada, basta lembrar que o elemento u indicado em (1) *depende de* c e *não verifica necessariamente a condição* $u\theta c = c$. Para a existência de elemento neutro, deveria ter-se, em vez de (1):

$$\exists u \in A, \ \forall c \in A : c\theta u = u\theta c = c$$

o que é bastante diferente de (1) e acaba por ser demonstrado, aplicando a associatividade.

11. A introdução ao estudo dos logaritmos, feita no n.º 22, tem ainda carácter intuitivo, como se diz aí, e deverá ser completada logicamente no 7.º ano. *Mas, para já, é necessário tirar o máximo partido do estudo anterior sobre isomorfismos.*

Assim, os clássicos teoremas sobre logaritmos (do produto, do quociente, etc.) devem aparecer como simples consequência do teorema relativo à aplicação inversa de um isomorfismo. Aliás, isto irá tornar-se perfeitamente claro no espírito do aluno, quando fizer uso consciente da régua de cálculo.

Os alunos costumam reagir quando se trata de dar uma ideia de demonstração do teorema fundamental (n.º 24, pág. 65), notando que, para além do algarismo das décimas, o cálculo do logaritmo se torna excessivamente laborioso. Deve-se então explicar-lhes que não se trata propriamente de recomendar um método de cálculo dos logaritmos (que, em matemática superior, se pode fazer, de maneira muito mais expedita, por meio de séries), mas sim de ver como se pode demonstrar a existência e a unicidade do logaritmo, visto que, *teoricamente*, será possível determinar tantos algarismos decimais do logaritmo quantos se queiram.

Em todo o caso, para que esta ideia se torne mais clara no espírito do aluno, será aconselhável fazer, como exercício, o cálculo de logaritmos, na base dois, *de números escritos igualmente no* sistema de base dois — *por exemplo de 3 na base 2, ou seja o logaritmo de 11 na base 10, usando o sistema de numeração binária. Será então muito mais fácil determinar vários algarismos exactos do logaritmo. Exercícios como este, além de esclarecerem o conceito de logaritmo, chamam novamente a atenção para o sistema binário, de que os computadores electrónicos mostram o grande interesse e actualidade.*

12. Que o professor não perca esta oportunidade para demonstrações simples da irracionalidade de logaritmos na base 10, como se faz por exemplo no *Compêndio de Álgebra* adoptado, para o logaritmo de 2 (pág. 242).

Além disso, será do maior interesse resolver os 11 primeiros exercícios do Capítulo XXII deste *Compêndio*, pág. 250, não só para esclarecimento da teoria, mas ainda para desenvolvimento no aluno da técnica de cálculo. *Um dos factos alarmantes que a actual experiência tem posto em foco é que a preparação adquirida pelos alunos no 2.º ciclo é deficientíssima, até no que se refere à técnica de cálculo algébrico elementar.*

13. A aprendizagem do uso da régua de cálculo deverá ser gradual, ocupando pouco tempo em cada aula e limitando-se a operações simples no 6.º ano.

A primeira coisa a estudar é a teoria da régua de cálculo, em íntima ligação com a teoria dos logaritmos. Neste sentido, é muito recomendável que o aluno *construa* ele próprio uma régua de cálculo rudimentar, com dois bocados de cartolina sobre os quais deve marcar duas escalas logarítmicas, numa base conveniente. Aliás, a noção de escala logarítmica é por si só muito importante e virá a reaparecer no 7.º ano, ao fazer-se uso de papel logarítmico ou semilogarítmico.

Devem seguir-se as instruções que acompanham a própria régua, utilizando a régua de demonstração para que o ensino possa ser rapidamente apreendido por toda a turma.

ÍNDICE

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA