J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(1.º volume)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

IV

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO III

1. Como estamos ainda em fase experimental, é inevitável que surjam numerosas hesitações quanto à escolha e à ordenação dos assuntos. Uma dessas hesitações verificou-se no estudo das *partições associadas a relações de equivalência*. Não nos pareceu (e não nos parece ainda) oportuno fazer no 6.º ano o estudo rigoroso deste assunto, com a demonstração do teorema que estabelece a ligação entre relações de equivalência e partições de conjuntos. Mas agora, com a perspectiva que já possuímos após dois anos de experiência, parece-nos que se impõe no 6.º ano um estudo heurístico-intuitivo do referido assunto, *o que aliás pode e deve ser feito em anos anteriores*.

Segundo a orientação heurística, esse estudo deve partir de exemplos tão sugestivos e familiares quanto possível. Para começar, poderá considerar-se um conjunto T de alunos e as respectivas notas no exame de matemática do 5.º ano. Seja

$$T = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$$

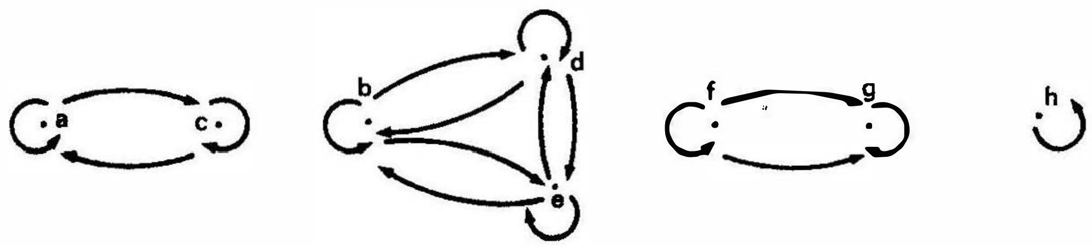
e suponhamos que estes alunos tiveram as notas indicadas na seguinte lista:

a	b	c	d	e	f	g	h
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
13	10	13	10	10	12	12	11

Consideremos agora a relação definida em T, a partir desta lista, pela seguinte expressão:

X teve a mesma nota que Y

Para construir o diagrama desta relação, convirá *agrupar* os alunos segundo as notas que tiveram:



O diagrama desde logo evidencia que se trata de uma relação de equivalência e que, por efeito desta relação, os alunos são *divididos (ou repartidos)* em quatro conjuntos:

$A = \{ a, c \}$, $B = \{ b, d, e \}$, $C = \{ f, g \}$, $D = \{ h \}$

Estes conjuntos são chamados *classes de equivalência* correspondentes à relação ρ considerada.

O aluno observará que:

1.° — *As classes de equivalência não são conjuntos vazios.*

2.° — *A reunião das classes de equivalência é o conjunto dado* T, *isto é:*

$$T = A \cup B \cup C \cup D$$

3.° — *As classes de equivalência são disjuntas duas a duas, isto é:*

$$A \cap B = \varnothing \quad , \quad A \cap C = \varnothing \quad , \quad A \cap D = \varnothing \quad , \quad B \cap C = \varnothing ,$$
$$B \cap D = \varnothing \quad , \quad C \cap D = \varnothing$$

Por outro lado, verificará que:

Dois elementos x, y *de* T *verificam a relação* ρ, *sse* x, y *pertencem à mesma classe de equivalência*.

Um segundo exemplo poderá ser dado pela relação

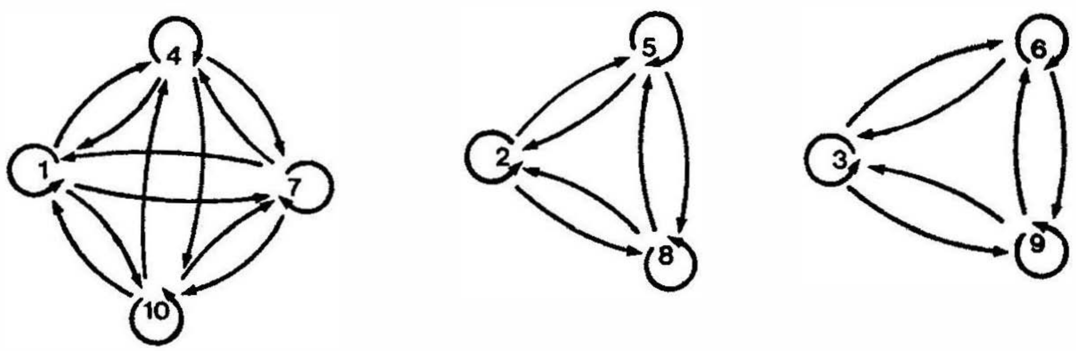
$$x \equiv y \pmod 3$$

restringida ao conjunto $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$.

Adopte-se a definição:

Diz-se que x *é congruente com* y *módulo* 3, *e escreve-se* $x \equiv y \pmod 3$, *sse* x *e* y *divididos por* 3 *dão restos iguais.*

Tem-se então o diagrama:



e as *classes de equivalência:*

$A = \{ 1, 4, 7, 10 \}$, $B = \{ 2, 5, 8 \}$, $C = \{ 3, 6, 9 \}$

As conclusões são inteiramente análogas às anteriores.

Um terceiro exemplo poderá ser constituído pela relação «X é semelhante a Y» restringida a um conjunto constituído por um certo número de figuras geométricas (p. ex. quadrados, círculos, triângulos equiláteros e rectângulos), de diferentes dimensões, que se apresentem desenhados na pedra ou num cartão. Ainda neste caso as conclusões serão análogas.

Convirá também apresentar o exemplo da *relação lógica de identidade* num conjunto qualquer $U = \{ a, b, c, d, e \}$. Neste caso o diagrama é

e as classes de equivalência reduzem-se aos conjuntos *singulares* $A = \{ a \}$, $B = \{ b \}$, $C = \{ c \}$, $D = \{ d \}$, $E = \{ e \}$.

Até aqui foram apresentados apenas exemplos em *universos finitos*. Passando a considerar *universos infinitos*, podemos tornar ao exemplo da relação $x \equiv y \pmod 3$ no universo $\mathbb{N}$. Neste caso, temos apenas três classes de equivalência, mas qualquer delas é um conjunto infinito:

$$C_0 = \{ 3, 6, 9, 12, \ldots, 3n, \quad \ldots \}$$
$$C_1 = \{ 1, 4, 7, 10, \ldots, 3n + 1, \ldots \}$$
$$C_2 = \{ 2, 5, 8, 11, \ldots, 3n + 2, \ldots \}$$

Exemplos análogos são dados pelas relações

$$x \equiv y \pmod 4 \quad , \quad x \equiv y \pmod 5, \text{ etc.}$$

Um segundo exemplo em universo infinito pode ser o da *relação de semelhança, no universo das figuras geométricas (isto é, conjuntos de pontos do espaço usual)*. Agora, temos uma infinidade de classes de equivalência, cada uma das quais é formada por uma infinidade de figuras. Por exemplo, a classe de equivalência a que pertence um dado triângulo é *o conjunto de todos os triângulos que são semelhantes a esse*, a classe de equivalência a que pertence um quadrado é *o conjunto de todos os quadrados*, etc., etc. Recordemos agora a seguinte definição:

> Diz-se que duas figuras geométricas *têm a mesma forma*, sse são semelhantes.

Note-se bem: não se define aqui explicitamente o significado do substantivo 'forma', apenas se introduz a expressão 'ter a mesma forma' como sinónimo de 'ser semelhante' (propriedades relativas). Uma *definição explícita de 'forma'* poderia ser a seguinte, que muitos autores modernos adoptam:

> Chama-se *'forma duma figura geométrica'* ao conjunto de todas as figuras que lhe são semelhantes (classe de equivalência).

Por exemplo, segundo esta definição, a forma dum quadrado é o conjunto de todos os quadrados, a forma dum triângulo rectângulo isósceles é o conjunto de todos os triângulos rectângulos isósceles, etc.

É claro que esta definição está de acordo com a anterior: é uma das suas possíveis *explicitações*. Porém, *não é a mais natural*, a que mais se coaduna com o sentido que, na linguagem vulgar, atribuímos à palavra 'forma'. Na verdade, consideramos usualmente a forma dum corpo como sendo uma *propriedade* (tal como o volume, a cor ou a massa do corpo) e não como o *conjunto* dos corpos que têm essa propriedade. Nesta ordem de ideias:

> Chama-se *'forma duma figura* F' à propriedade que possuem todas as figuras semelhantes a F e só essas.

Em resumo, prefere-se aqui o *ponto de vista da compreensão* ao *ponto de vista da extensão*. Simbolicamente, a definição extensiva apresenta-se do seguinte modo, no universo das figuras geométricas:

$$\text{forma de } F = \{ X\text{: } X \text{ é semelhante a } F \}.$$

Mas, segundo a definição compreensiva, a forma de F é a propriedade absoluta traduzida pela expressão 'X é semelhante a F', supondo F constante e X variável.

Um terceiro exemplo, igualmente importante, é o da *relação de paralelismo no universo das rectas do espaço*. Recordemos a definição:

> Diz-se que *duas rectas têm a mesma direcção* sse são paralelas.

Daqui a definição explícita em termos de extensão:

> *Direcção duma recta* r é o conjunto de todas as rectas que são paralelas a r.

Portanto, segundo esta definição, a direcção duma recta r é a classe de equivalência a que pertence r, segundo a relação de paralelismo. Mas na linguagem corrente prefere-se o ponto de vista da compreensão:

> *Direcção duma recta* r é a propriedade que possuem todas as rectas paralelas a r e só essas.

Um quarto exemplo, que nunca poderá faltar, é a *relação de igualdade geométrica entre segmentos de recta:*

> Diz-se que dois segmentos de recta *têm o mesmo comprimento,* sse são geometricamente iguais.

Daqui a definição explícita em termos de extensão:

> *Comprimento dum segmento* $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos de recta que são geometricamente iguais a AB.

Mas o senso comum prefere o ponto de vista da compreensão:

> *Comprimento dum segmento* $\overline{AB}$ é a propriedade que possuem todos os segmentos geometricamente iguais a $\overline{AB}$ e só esses.

A propósito, é necessário lembrar que a *relação de igualdade geométrica* não se confunde com a *relação lógica de identidade*. Para indicar que duas figuras F e G são *idênticas* (ou *coincidentes*, isto é, têm a *mesma* figura), escrevemos

$$F = G$$

Para indicar que F e G são geometricamente iguais, escrevemos

$$F \cong G$$

No entanto, a igualdade geométrica converte-se em identidade, quando passamos dos segmentos de recta para os respectivos comprimentos. O comprimento dum segmento $\overline{AB}$ será representado pelo símbolo $|AB|$. Assim teremos, por definição [1]:

$$\boxed{|AB| = |CD| \Leftarrow AB \cong \overline{CD}}$$

Entretanto é natural que o aluno pergunte:

Qual dos pontos de vista se deve adoptar nas referidas definições: o da extensão ou o da compreensão?

A resposta é esta: '*Pode-se adoptar indiferentemente um ou o outro; mas veremos casos em que já não é indiferente a escolha*'.

Convém ainda notar o seguinte:

As definições como as anteriores em que se de
ou propriedades a partir de relações de equivalência são chamadas *definições por abstracção.*

Nesta ordem de ideias, também se diz, por exemplo, que a forma duma figura F é o *abstracto* (ou o *tipo*) das figuras semelhantes a F, etc. (Esta terminologia relaciona-se com a *teoria dos universais ou arquétipos de Platão.)*

No 7.º ano far-se-á um estudo mais aprofundado deste assunto, dando a definição geral de 'partição (ou classificação) dum conjunto' e demonstrando o teorema que estabelece a correspondência entre relações de equivalência e partições. Por agora não convém ir mais longe.

2. A noção de 'número cardinal dum conjunto' é definida a partir da relação de equipotência por um processo de abstracção semelhante aos anteriores:

> Diz-se que dois conjuntos A e B *têm o mesmo número cardinal* (ou *o mesmo número de elementos)*, sse A e B são equipotentes.

---

[1] Há hoje tendência para usar a notação [AB] em vez da notação $\overline{AB}$ para designar o segmento de extremos A e B.

A definição explícita em termos de extensão seria esta:

Número cardinal dum conjunto A é o conjunto de todos os conjuntos equipotentes a A.

Mas tal definição é inaceitável, pelas razões que serão apresentadas adiante, e por isso estará indicada, nesta fase do ensino, a definição em termos de compreensão:

> *Número cardinal dum conjunto* A é a propriedade que possuem todos os conjuntos equipotentes a A e só esses.

Vejamos agora porque é inaceitável a definição extensiva (1). Pergunta-se:

Qual é o universo em que está definida a relação de equipotência?

A resposta virá naturalmente:

'É o conjunto de todos os conjuntos possíveis'.

Acontece porém que não existe tal conjunto, porque a sua existência implicaria indirectamente uma contradição, chamada PARADOXO DE RUSSELL.

Com efeito, suponhamos que existe o conjunto de todos os conjuntos e designemo-lo por $\mathscr{C}$. Então um dos seus elementos será ele próprio, isto é:

$$\mathscr{C} \in \mathscr{C}$$

Já isto é uma anomalia, porque, na definição de um conjunto, não deveria intervir o próprio conjunto definido. Mas admitamos por um momento esta anomalia. Então aparecem-nos duas categorias de conjuntos:

1) *Os conjuntos que são elementos de si mesmo (como* $\mathscr{C}$*).*

2) *Os conjuntos que não são elementos de si mesmo (como normalmente sucede).*

Designemos então por $\mathscr{C}'$ *o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmo (e só esses).* Ora, de duas uma (princípio do 3.º excluído):

Ou $\mathscr{C}'$ é elemento de si mesmo ou não é elemento de si mesmo.

---

(1) A discussão que vai seguir-se pode ser recomendada como leitura aos alunos mais interessados. Fazê-la na aula talvez não resulte proveitoso.

Suponhamos que $\mathscr{C}'$ é elemento de si mesmo:

$$\mathscr{C}' \in \mathscr{C}'$$

Então o conjunto $\mathscr{C}'$ não seria constituído *só* pelos conjuntos que não são elementos de si mesmo, visto que um dos seus elementos (o próprio $\mathscr{C}'$) é elemento de si mesmo.

Suponhamos que $\mathscr{C}'$ não é elemento de si mesmo:

$$\mathscr{C}' \notin \mathscr{C}'$$

Então $\mathscr{C}'$ não seria o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmo, pois falta lá um desses elementos, que é o próprio $\mathscr{C}'$.

Assim, em qualquer das hipóteses possíveis, chega-se a uma contradição, e é nisto que consiste, precisamente, o PARADOXO DE RUSSELL. Este pode ser apresentado sob formas mais ou menos pitorescas, como por exemplo a do barbeiro:

Existe em certa aldeia um barbeiro, que barbeia todas as pessoas dessa aldeia que não fazem a barba a si mesmo, e só essas pessoas.

Se o barbeiro faz a barba a si mesmo, não barbeia *só* pessoas que não fazem a barba a si mesmo.

Se o barbeiro não faz a barba a si mesmo, não barbeia *todas* as pessoas que não fazem a barba a si mesmo.

Logo não pode existir um tal barbeiro.

B. Russell procurou eliminar o seu paradoxo, obrigando a relação $\in$ a ser anti-reflexiva (isto é, obrigando a condição $X \in X$ a ser impossível) e introduzindo a teoria dos tipos lógicos. Mas esta teoria impõe restrições embaraçosas, o que levou os lógicos matemáticos a procurarem solução diferente. Uma das soluções seria:

O ponto de vista da compreensão ultrapassa o da extensão, isto é, existem propriedades às quais não correspondem conjuntos.

Mas esta solução não se afigura suficiente, o que levou certos autores (Church, Von Neumann, etc.) a adoptarem estoutra:

Devemos fazer uma distinção entre os conceitos de 'conjunto' e de 'classe', de acordo com certas regras, como por exemplo a seguinte: todo o conjunto é uma classe, mas nem toda a classe é um conjunto ([1]).

([1]) Note-se porém que é mantido o conceito de tipo lógico: existem conjuntos de indivíduos (conjuntos de tipo 1), conjuntos de conjuntos de tipo 1 (conjuntos de tipo 2), etc.

Segundo este ponto de vista, o universo em que é definida a relação de equipotência é a *classe de todos os conjuntos possíveis* e a definição de cardinal de um conjunto pode ser dada extensivamente do seguinte modo:

> *Número cardinal de um conjunto* A é a classe de todos os conjuntos equipotentes a A.

Deve ainda notar-se que, quando o universo é uma classe mas não um conjunto, há propriedades que não definem conjuntos nesse universo.

3. Para alunos do 6.º ano, a noção de número cardinal deve ser introduzida de maneira tão intuitiva quanto possível, como se faz no *Compêndio*. A expressão 'correspondência biunívoca entre dois conjuntos A e B' aparece antes das expressões equivalentes 'aplicação biunívoca de A sobre B' e 'bijecção de A em B', que estão agora muito em moda, mas que, por serem mais estranhas ao aluno, prejudicam o carácter intuitivo e natural que convém imprimir a esta introdução.

Pela mesma razão, reserva-se para o Capítulo IV a demonstração de algumas propriedades intuitivas, tais como as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da equipotência. E, mesmo no Capítulo IV, a demonstração dessas propriedades deve ser apenas aconselhada, *em leitura*, aos alunos mais interessados.

Pelo contrário, deve recorrer-se nesta fase a imagens bastante sugestivas, como por exemplo algumas gravuras dos cadernos *Sets and numbers* do Prof. Suppes para o ensino primário. Não esquecer que nesses cadernos o símbolo de número cardinal é a letra N e que o símbolo $\subset$ exprime aí *inclusão estrita*, enquanto na nossa orientação exprime *inclusão lata* (podemos indicar a inclusão estrita com o símbolo $\subsetneq$).

Convém chamar a atenção do aluno para o facto de que a noção de número cardinal se pode aplicar também a conjuntos de números. Por exemplo:

$$\# \{2, 3, 5\} = 3 \quad , \quad \# \{3\} = 1 \quad , \quad \text{etc.}$$

O que é o número 3? Podemos dizer, por exemplo: *é a propriedade que possuem todos os conjuntos equipotentes ao con-*

junto { Terra, Sol, Lua } *e só esses conjuntos*. Em vez do conjunto { Terra, Sol, Lua }, podíamos indicar o conjunto { Lisboa, Porto, Coimbra }, o conjunto { dó, ré, mi }, o conjunto { Lusíadas, Hidrogénio, 9.ª Sinfonia de Beethoven }, etc., etc. Todos esses são representantes da mesma *classe de equivalência* (do mesmo modo que, por exemplo, vários segmentos com um metro de comprimento representam o comprimento *metro* ou várias moedas de um escudo representam o valor monetário *escudo*).

Mas não podemos definir o número 3 como sendo a propriedade que possuem os conjuntos equipotentes a { 2, 3, 5 }, *porque na definição não deve entrar o definido*.

4. Convém aproveitar esta oportunidade para mostrar mais uma vez ao aluno que não se pode confundir um ente com o conjunto singular formado por esse ente. Por exemplo, se

$$A = \{ \text{Lisboa, Porto, Coimbra} \},$$
$$B = \{ \text{Tejo, Douro, Mondego} \},$$

tem-se

$$\# A = 3 \quad , \quad \# B = 3 \quad , \quad \# \{ A \, , B \} = 2$$

mas

$$\# \{ A \} = 1 \quad , \quad \# \{ B \} = 1,$$

o que mostra ser $A \neq \{ A \}$ e $B \neq \{ B \}$.

5. O estudo das operações e da relação de grandeza entre números inteiros pretende estabelecer a transição

$$\text{intuitivo} \rightarrow \text{racional}$$

que se deve fazer progressivamente em todo o ensino da matemática, procurando reproduzir a marcha seguida na investigação. Só no 7.º ano se deverá estruturar uma aritmética inteiramente racional, a partir de uma axiomática independente da teoria dos conjuntos, e só nesse momento irá aparecer o MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA.

Mas o professor deverá ser exigente e intransigente com o aluno naquelas poucas demonstrações que aparecem desde já com carácter rigoroso.

Aliás, para estimular mais uma vez o brio do aluno, o professor deve mostrar-lhe como é feito o estudo das operações e da relação de grandeza no ensino primário segundo o método Suppes, em que o aluno tem de saber justificar a técnica das operações que efectua.

6. Os cardinais infinitos só deverão ser tratados, *se a turma não estiver atrasada.*

Se, pelo contrário, a turma estiver bastante adiantada e os alunos revelarem interesse, pode-se ir até um pouco mais longe do que no *Compêndio,* demonstrando os dois seguintes factos:

1) *O conjunto dos números racionais é equipotente a* $\mathbb{N}$*, isto é:*

$$\# \mathbb{Q} = \# \mathbb{N}$$

2) *O cardinal de* $\mathbb{R}$ *(chamado 'potência*

rior ao de $\mathbb{N}$*, isto é:*

$$\# \mathbb{N} < \# \mathbb{R}$$

No primeiro caso, bastará considerar os racionais positivos e seguir o método de Cantor. Começa-se por colocar em *primeiro lugar* a fracção cujos termos somam 2; em *segundo lugar* as fracções cujos termos somam 3, por ordem crescente dos numeradores; em *terceiro lugar* as fracções cujos termos somam 4, por ordem crescente dos numeradores; e assim sucessivamente:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Em seguida reduzem-se as fracções à sua expressão mais simples, suprimem-se os denominadores 1 e eliminam-se as fracções repetidas. Deste modo se estabelece uma correspondência biunívoca entre os números naturais e os números racionais positivos:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & \ldots
\end{array}$$

Há, pois, tantos números racionais positivos quantos números naturais, ao contrário do que a intuição sugere.

Quanto à proposição 2), bastará provar que o conjunto $]0, 1[$ dos números reais entre 0 e 1 tem potência superior à de $\mathbb{N}$. Para isso, terá de seguir-se, como faz Cantor, o método de redução ao absurdo. Suponhamos que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre ℕ e aquele conjunto. Designemos então em geral por α_n o número real do intervalo] 0, 1 [correspondente ao número natural *n*, qualquer que este seja. Ora já sabemos que cada um desses números é representado por uma dízima infinita normal (periódica ou não), tal como se indica no quadro seguinte:

$$1 \leftrightarrow \alpha_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1m}\ \ldots$$
$$2 \leftrightarrow \alpha_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2m}\ \ldots$$
$$3 \leftrightarrow \alpha_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \ldots\ a_{3m}\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n \leftrightarrow \alpha_n = 0,\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ \ldots\ a_{nm}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Assim, como se vê, indica-se dum modo geral com a letra a_{nm} o algarismo decimal de ordem *m* da dízima que representa α_n. Segundo a hipótese, *todos* os números reais do intervalo] 0, 1 [figuram nesta lista. Ora vamos ver que *existe pelo menos um número real deste intervalo que não figura nesta lista.* Seja b_1 um número dígito diferente de a_{11}, seja b_2 um número dígito diferente de a_{22}, etc. Dum modo geral, seja b_{nu} um número dígito diferente de a_{nn}. Então o número real

$$\beta = 0,\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n$$

pertence ao intervalo] 0, 1 [e é diferente de α_1 porque $b_1 \neq a_{11}$, é diferente de α_2 porque $b_2 \neq a_{22}$, etc. Dum modo geral, tem-se $\beta \neq \alpha_n$ porque $b_n \neq a_{nn}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Chegámos assim a uma contradição, resultante de termos suposto que o conjunto dos números reais do intervalo] 0, 1 [é equipotente a ℕ. E, como ℕ é equipotente a uma parte daquele conjunto, segue-se que o cardinal de ℕ é inferior ao do referido conjunto.

Há portanto mais números reais que números naturais, isto é, $\# \mathbb{N} < \# \mathbb{R}$.

Estas demonstrações têm, além de outros, o mérito de chamar fortemente a atenção do aluno para a diferença entre os conceitos de número real e de número racional.

7. O aluno manifesta geralmente muito interesse pelas questões de cálculo combinatório, apesar de não ver logo a utilidade deste assunto. *Vê-la-á mais tarde, ao estudar o cálculo das probabilidades.* É possível que se venha a reconhecer, *no futuro,* a vantagem de fazer uma bifurcação após este capítulo, dedicando 3 horas semanais ao cálculo das probabilidades e as outras três horas aos assuntos que seguem no Capítulo III no *Compêndio.*

É preciso não perder de vista que a ordem didáctica mais aconselhável (tal como a ordem lógica) não é uma ordem total, mas apenas uma ordem parcial; e que impor sistematicamente, arbitrariamente, *a ordem total, pode ter inconvenientes sérios.*

8. O estudo da fórmula do binómio deve reservar-se para o Capítulo VI. Entretanto há um assunto que convém tratar já: *o dos sistemas de numeração,* principalmente pela enorme importância que tem assumido modernamente o sistema de base 2.

Deve-se aproveitar esta oportunidade, para insistir na distinção entre *designação* e *designado.* Uma coisa é a *expressão decimal* 237, outra coisa é o *número* designado por essa expressão. Aliás, o mesmo número pode ser designado pela expressão 11101101 na base dois, isto é:

$$237 = 111011011_{(2)}$$

Os autores de língua inglesa costumam distinguir entre 'number' e 'numeral', usando o primeiro termo para *números* e o segundo para *nomes de números.* Aliás, em português também se usa neste caso em gramática a expressão 'nome numeral' ou simplesmente 'numeral', que pode perfeitamente ser transposta para a matemática com o mesmo significado. Recordemos ainda que em gramática se distinguem:

1) os *numerais cardinais* — nomes de números cardinais;

2) os *numerais ordinais* — [illegible] 2.º, 3.º, etc.);

3) *os numerais multiplicativos e os partitivos* — nomes de números racionais (por exemplo, 'o dobro', 'o triplo', 'a metade', $\frac{'2'}{3}$, $\frac{'3'}{5}$, etc.).

A técnica das operações em sistemas de base diferente de dez (nomeadamente na base dois) deve ser justificada de modo intuitivo e directo, com exemplos numéricos *simples*.

E é agora chegado o momento de dar uma ideia de *como os computadores electrónicos efectuam a adição e a multiplicação no sistema binário, a partir das operações lógicas no conjunto* $\{0, 1\}$.

Designemos por $x \dotplus y$ a disjunção ou soma lógica exclusiva de x e y; e por xy a conjunção ou produto lógico de x e y. Temos assim as duas seguintes tabuadas:

$x \dotplus y$

x \ y	0	1
0	0	1
1	1	0

$x\,y$

x \ y	0	1
0	0	0
1	0	1

Utilizaremos ainda as duas seguintes *operações ternárias* (isto é, com três dados), derivadas das anteriores:

$S = x \dotplus y \dotplus z$ *(operação de soma exclusiva)*
$T = xy \dotplus xz \dotplus yz$ *(operação de transporte)*

Suponhamos que se trata de somar os números

1 1 1 0 1 1
1 0 1 0 1 1

no sistema binário.

Tem-se, na primeira coluna a contar da direita: $1 + 1 = 10$. O último algarismo de 10 é dado pela soma lógica exclusiva: $1 \dotplus 1 = 0$. O algarismo 1 a *transportar* é dado pelo produto lógico: $1 \cdot 1 = 1$.

Este algarismo é depois somado aos da segunda coluna (sempre a contar da direita), o que dá: $1 + 1 + 1 = 11$. O último algarismo de 11 é dado pela operação de soma exclusiva:

$$S = 1 \dotplus 1 \dotplus 1 = 1$$

O algarismo da esquerda de 11 é dado pela operação de transporte:

$$T = 1 \cdot 1 \dotplus 1 \cdot 1 \dotplus 1 \cdot 1 = 1$$

Este irá para a coluna seguinte, onde teremos agora

$$S = 1 \dotplus 0 \dotplus 0 = 1 \quad , \quad T = 1 \cdot 0 \dotplus 1 \cdot 0 \dotplus 0 \cdot 0 = 0$$

e assim sucessivamente. Deste modo, o computador acaba por calcular a soma dos números por meio de operações lógicas elementares:

$$\begin{array}{r} 1\;1\;1\;0\;1\;1 \\ +\,1\;0\;1\;0\;1\;1 \\ \hline 1\;1\;0\;0\;1\;1\;0 \end{array}$$

Para multiplicar dois números escritos no sistema binário, o computador segue a regra usual da multiplicação neste sistema, utilizando a tabuada da multiplicação no conjunto $\{ 0, 1 \}$ e somando sucessivamente os produtos parciais deslocados sucessivamente de uma casa para a esquerda. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 1\;0\;1\;1\;1\;0 \\ \times\,1\;0\;1 \\ \hline 1\;0\;1\;1\;1\;0 \\ 1\;0\;1\;1\;1\;0\;\; \\ \hline 1\;1\;1\;0\;0\;1\;1\;0 \end{array}$$

Apesar de trabalharem fundamentalmente no sistema binário, os computadores electrónicos recebem os dados e fornecem os resultados no sistema decimal, mediante um mecanismo adequado de conversão. Convém ainda que o aluno tome conhecimento dos seguintes factos:

1) *Os mais potentes computadores electrónicos efectuam cerca de um milhão de adições por segundo e cerca de trezentas mil multiplicações por segundo, com números de 12 algarismos decimais. Assim, um sistema de 100 equações lineares com 100 incógnitas, que dantes levaria anos a resolver, pode agora ser resolvido em cerca de 5 segundos.*

2) *Os computadores efectuam não só cálculos, mas também raciocínios, e estão a substituir cada vez mais o homem em toda a espécie de trabalho intelectual* de rotina, *em fábricas, minas, laboratórios, estabelecimentos bancários, etc., etc. Entrámos na* Era da Automação, *em que o trabalho monótono do homem acabará por ser quase todo feito pela máquina.*

3) *A sonda espacial enviada pelos Estados Unidos para exploração do planeta Marte forneceu todas as informações, inclusive fotografias da superfície marciana, em código binário, que foi depois rapidamente traduzido na Terra por computadores.*

4) *As dimensões e o consumo de energia dos computadores diminuiu consideravelmente, depois que se tornou possível substituir as válvulas electrónicas por transístores.*

5) *Dois dos grandes matemáticos que mais contribuíram para o desenvolvimento dos computadores (J. Von Neumann e Norbert Wiener) abriram igualmente caminho a um novo método de estudo do sistema nervoso e da psicologia, em que os neurones são equiparados a elementos de circuitos lógicos. Assim nasce uma nova ciência: a* neurocibernética.