J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(2.º E 3.º VOLUMES)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

I

INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA

1. A introdução à trigonometria *poderá* e *deverá* ser feita com motivação concreta, apta a despertar interesse suficiente no espírito do aluno ([1]).

Comecemos pelo problema de tipo clássico:

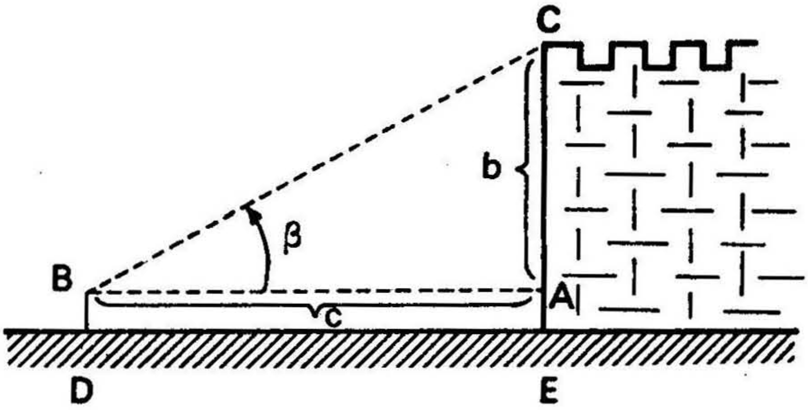
Calcular a altura de uma torre por meio de medições efectuadas no solo (sem subir à torre).

Pede-se aqui algo que pode parecer impossível a uma pessoa que não tenha formação matemática. A beleza do assunto está precisamente nisto: o impossível torna-se possível por dedução matemática, baseada nos axiomas da geometria euclidiana (induzidos da experiência). Eis, pois, aqui um exemplo simples do êxito do método matemático aplicado à natureza. Aliás, o aluno já deve saber

---

([1]) Cf. *Algebra e Trigonometria*, para os IV, V e VI anos liceais, de Francisco Dias Agudo (1938). A introdução à trigonometria adoptada nesse livro é em parte semelhante à que vamos aqui preconizar, mas, que, como é de ver, não se coaduna com a orientação estatuída pelo actual programa clássico.

neste momento como se resolve o problema por semelhança de triângulos.

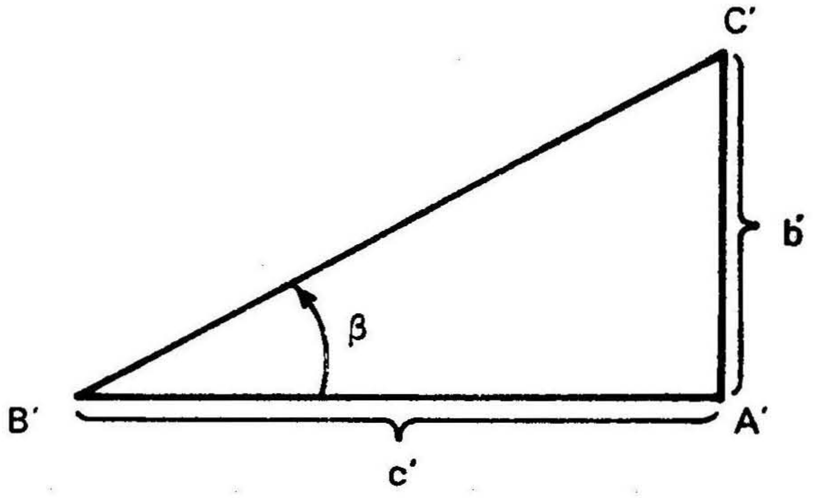


Para simplificar a questão, suponhamos que o terreno junto à torre é plano e horizontal (caso da figura). Com um instrumento do género do teodolito, colocado em B, poderá medir-se o ângulo $A\hat{B}C$, sendo A um ponto da torre situado no plano de nível de B e sendo C um ponto do cimo da torre situado na vertical de A. Seja β a medida desse ângulo. Por outro lado, seja c a medida do lado $\overline{AB}$ e seja d a medida de $\overline{BD}$ (distância de B ao solo) igual à de $\overline{AE}$ em virtude da hipótese feita sobre o terreno.

Resta-nos pois determinar a medida, b, de $\overline{AC}$, visto que a altura, h, da torre será:

$$h = b + d$$

Ora, a medida *b* pode ser determinada, *indirectamente,* com os elementos de que dispomos, e o próprio aluno, com os conhecimentos adquiridos no 2.º ciclo sobre semelhança de triângulos, já está em condições de dizer como se pode resolver o problema graficamente:



Começa-se por desenhar, num papel ou no próprio terreno, um triângulo rectângulo [A'B'C'], que verifique a seguinte condição:

$$A'\hat{B}'C' \cong A\hat{B}C \text{ (1)}$$

Os ângulos $A'\hat{B}'C'$ e $A\hat{B}C$ têm, portanto, a mesma medida β (que podemos supor expressa em graus ou em graus e minutos).

O cateto A'B' pode ser traçado *arbitrariamente*. Sabe-se como é possível depois traçar o outro cateto, A'C', e a hipotenusa, B'C'.

Designemos por b' e c', respectivamente, as medidas dos catetes A'C' e A'B'. *É claro que estas medidas podem ser determinadas directamente no papel (ou no terreno)*.. A partir deste momento, pode-

---

(1) Como foi anteriormente estabelecido, o sinal $\cong$ lê-se *'geometricamente igual a'*. Se não há perigo de confusão, pode substituir-se pelo sinal =, e ler-se *'igual a'*, embora isto seja um abuso de linguagem.

mos calcular a medida *b* procurada, atendendo à semelhança dos triângulos [ABC] e [A'B'C']. Tem-se, com efeito

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

donde

$$b = \frac{b'}{c'} c$$

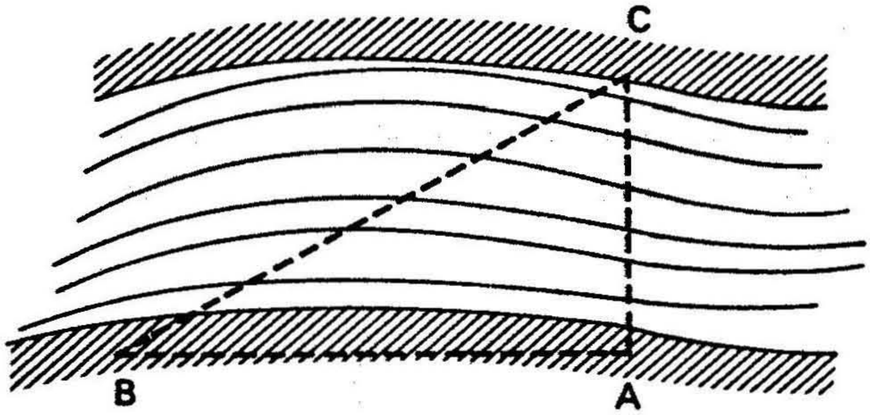
(Entre as célebres obras de ficção científica de Júlio Verne, há uma, particularmente interessante, que vem muito a propósito citar aqui: «A ILHA MISTERIOSA». Nesta obra, o autor descreve como um dos personagens – o Eng. Smith – consegue calcular a altura a que se encontra uma gruta escavada numa rocha junto ao mar, por meio de medições efectuadas na praia.)

Convirá também recordar o processo, mais rudimentar, que consiste em medir as sombras projectadas no solo pela torre e por uma haste vertical, bem como a altura da haste. Aliás, este processo dá aproximação suficiente para diversos fins análogos: por exemplo, para achar a altura de uma árvore. Supondo, por exemplo, que a haste, a sombra da haste e a sombra da árvore medem respectivamente 1m, 1,6 m e 7,4 m, a altura da árvore será:

$$(1) \qquad h = \frac{1}{1{,}6} \times 7{,}4 \approx 4{,}6 \text{ (metros)}$$

Segundo se diz, foi Tales de Milete (600 a.C.) quem primeiro calculou a altura das pirâmides do Egipto, utilizando o método da sombra. A este facto se refere Plutarco, historiógrafo grego do século I a. C., nos seguintes termos[1]:

'Eu admiro-vos sobretudo porque, colocando o vosso bastão na extremidade da sombra de uma pirâmide, formastes com os raios do sol dois triângulos, e demonstrastes que a altura da pirâmide está para a altura do bastão, como a sombra da pirâmide para a sombra do bastão'.



Um problema ainda do mesmo tipo, que se pode resolver pelo referido processo gráfico (mas não pelo processo da sombra), é o que consiste em achar a largura de um rio por meio de medições efectuadas numa das margens (sem atravessar o rio).

Neste momento, pode-se sugerir ao aluno que, por processos análogos, será possível determinar a distância da Terra à Lua, da Terra ao Sol, etc. Mas, neste caso, para obter resultados satisfatórios, as medições dos ângulos terão de ser bastante mais rigorosas, exigindo aproximação até aos segundos. Então, o *método gráfico* terá de ser abandonado, por dar aproximação insuficiente — e é aqui que

(1) Cf. Emma Castelnuovo, 'Geometria Intuitiva', para a Escola Média (correspondente ao 1.º ciclo em Portugal, com mais um ano).

se torna necessário recorrer ao *método numérico* (ou *analítico*), fornecido pela trigonometria.

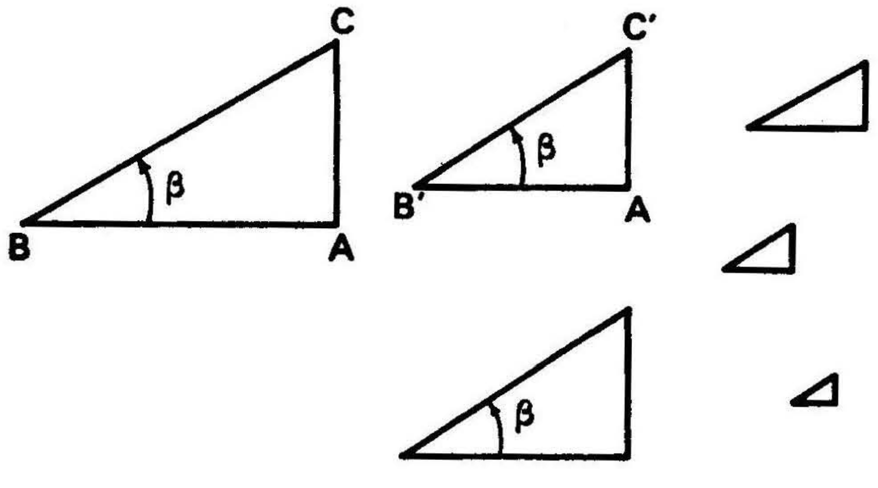
2. Começa-se por fazer notar ao aluno o seguinte facto fundamental:

A razão b/c *entre os catetos* $\overline{AC}$ *e* $\overline{AB}$ *dum triângulo rectângulo* [ABC] *depende univocamente da medida* β *do ângulo agudo* $A\hat{B}C$.

Mais precisamente:

Qualquer que seja o triângulo [A'B'C'], *rectângulo em* A', *tal que* $A'\hat{B}'C' \cong A\hat{B}C$, *a razão entre os catetos* A'C' *e* A'B' *é constante, isto é, tem-se*:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$



Ora bem, chama-s e *tangente do ângulo* β e designa-se abreviadamente por

tang β   ou por   tg β

essa razão constante entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de que se trata (depois se verá por que se chama 'tangente' a esta razão) [1].

Assim, no exemplo anterior da sombra da árvore, a tangente do ângulo β oposto ao cateto representado pela haste ou pela árvore será:

$$\text{tang } \beta = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$$

e, segundo (1), *a altura da árvore é igual ao produto da tangente desse ângulo pelo comprimento da sombra da árvore.*

Se, por acaso, a haste e a sua sombra tivessem comprimentos iguais, o problema simplificava-se: a altura da árvore seria igual ao comprimento da sua sombra. Neste caso, em que os catetos são iguais, o ângulo é de 45° e vê-se deste modo que

$$\text{tang } 45^\circ = 1$$

Fica, portanto, assim definida uma função que faz corresponder a cada ângulo α *agudo* (isto é, tal que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$) um determinado número real, que se representa por tang α ou simplesmente por tg α.

---

[1] Como se verá mais tarde em pormenor, há que distinguir três espécies de entidades: *ângulo, grandeza de ângulo* (classe de equivalência de todos os ângulos geometricamente iguais ao ângulo dado) e *medida de ângulo* (número que define a grandeza do ângulo, relativamente à unidade adoptada). Por exemplo, uma coisa é um *ângulo de* 30 *graus,* outra coisa é 30 *graus* (grandeza desse ângulo) e outra coisa ainda é o número 30 (medida dessa grandeza tomando para unidade o grau). No entanto, por *abuso cómodo de linguagem,* usa-se muitas vezes a palavra 'ângulo' para qualquer desses conceitos distintos.

Pergunte-se, agora, aos alunos:

Como determinar a tangente de um dado ângulo agudo, por exemplo, de 23°?

Os alunos responderão, naturalmente, que basta construir um triângulo rectângulo com um ângulo de 23° e achar a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente (depois de os medir).

Será então conveniente que os alunos façam isto efectivamente e que resolvam também, graficamente, problemas de tipo inverso, como por exemplo o seguinte:

Achar a medida de um ângulo agudo cuja tangente seja 2,35 (usando um transferidor). Quantos ângulos agudos existem nestas condições?

Põe-se, agora, a seguinte questão:

Dado um ângulo agudo qualquer (por exemplo de 64°) será sempre possível calcular, com a aproximação que se queira, a tangente desse ângulo?

A resposta dos alunos será certamente negativa.

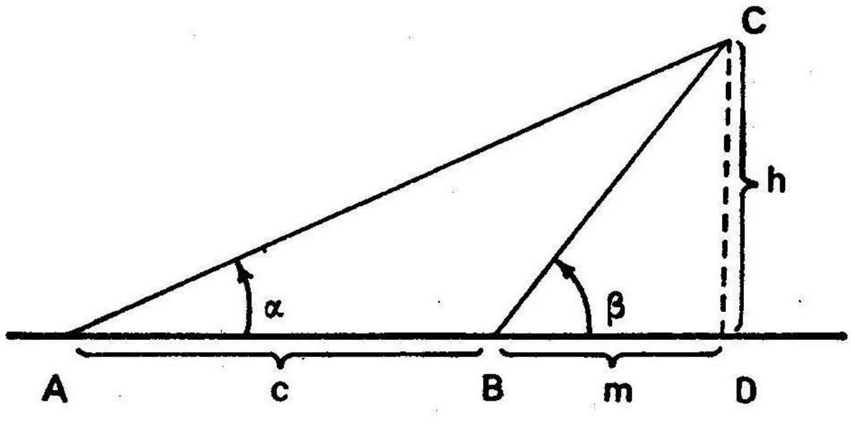
Como calcular então, com a aproximação que se queira (por exemplo a menos de 10^{-6}), a tangente de um dado ângulo?

Só mais tarde serão estudados processos de cálculo para esse fim e só então se poderá dizer que a *função tangente está efectivamente definida.*

Chegou, agora, o momento de dizer ao aluno que se encontram já construídas por tais processos *tabelas numéricas,* que fornecem, com certa aproximação (por exemplo a menos de 10^{-5}), as tangentes dos ângulos agudos de grau em grau, de meio grau em meio grau, de minuto em minuto, etc. E convirá então resolver alguns problemas simples com tais tabelas (de funções naturais), escolhendo o grau de aproximação conveniente em cada caso concreto: seria, por exemplo, ridículo exigir aproximação até aos milímetros na altura duma torre ou duma árvore; em qualquer dos casos um centímetro a mais ou a menos não tem importância.

Convirá, agora, informar o aluno de que a sua régua de cálculo lhe permite resolver rapidamente muitos destes problemas, com aproximação suficiente, e *adestrá-los no uso da régua para esse fim.*

3. Posto isto, é conveniente passar à resolução de problemas menos triviais, por exemplo o seguinte:



Calcular a altura de uma torre, por meio de medições efectuadas no solo, em plano horizontal, supondo que a base da torre é visível, mas não acessível para medições.

Supondo ainda que a base da torre se encontra no mesmo plano horizontal, o problema reduz-se ao seguinte:

Sendo [ABC] *um triângulo obliquângulo, achar a medida* h *da altura* $\overline{CD}$, *relativa ao lado* $\overline{AB}$, *conhecendo os seguintes dados:* c, *medida de* $\overline{AB}$; α, *medida de* $B\hat{A}C$ *(ângulo interno agudo);* β, *medida de* $C\hat{B}D$ *(ângulo externo também agudo).*

Designando por *m* a medida da $\overline{BD}$ e considerando os triângulos rectângulos [ADC] e [BDC], o aluno chegará sem dificuldade às duas seguintes equações nas incógnitas h e m:

$$(1) \qquad \frac{h}{m} = \operatorname{tg}\beta \quad , \quad \frac{h}{c+m} = \operatorname{tg}\alpha$$

É claro que o aluno também não terá dificuldade em resolver este sistema de duas equações em *h* e *m*. *E convém precisamente que o faça como exercício, sem ajuda alheia* (exercícios ensinados a resolver pouco ou nenhum mérito podem ter).

O que vem a seguir é apenas para conferir a resolução efectuada: De (1) deduz-se:

$$h = m \ \operatorname{tg}\beta \quad , \quad h = (c+m) \ \operatorname{tg}\alpha,$$

portanto

$$m \ \operatorname{tg}\beta = (c+m) \ \operatorname{tg}\alpha$$

donde

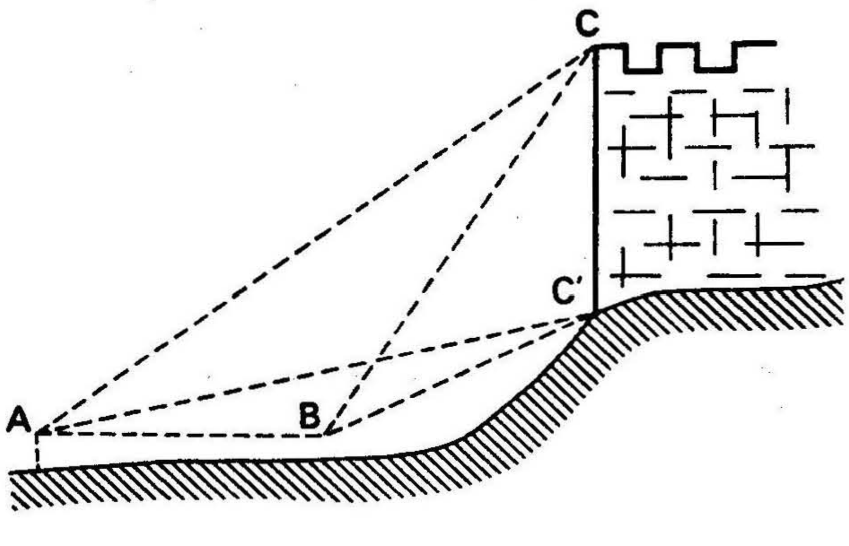
$$m = \frac{c \ \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$$

e, finalmente

$$h = \frac{c \ \mathrm{tg}\,\alpha \ \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha}$$

Terá interesse fazer uma ou duas aplicações numéricas desta fórmula com a régua de cálculo, bem como a respectiva verificação gráfica.

Pode, agora, considerar-se o caso mais geral (e mais *real*), em que a base da torre está acima do plano horizontal onde se efectuam as medições.

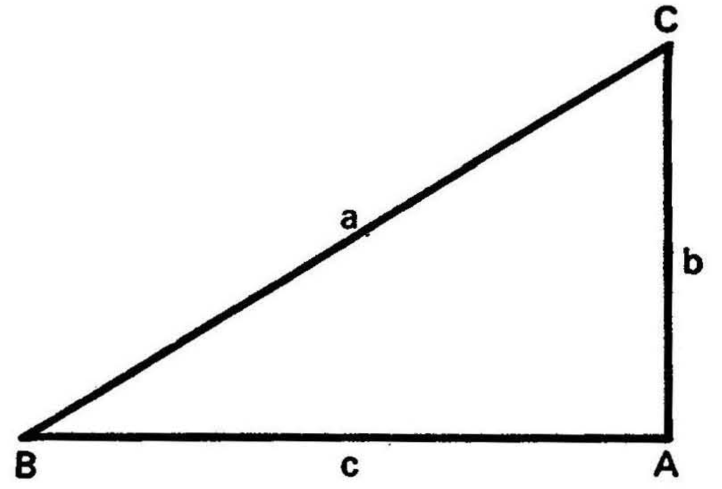


A figura mostra como a resolução do problema, neste caso, se reduz à de dois problemas do tipo anterior. Não valerá a pena fazer aplicações numéricas.

Mas, entretanto, convirá observar ao aluno que, neste caso, se torna já necessária maior precisão nas medidas dos ângulos. *E o aluno começará a compreender como tem sido possível calcular, por exemplo, a distância da Torre ao Sol, a distância do Sol aos diferentes planetas, etc., tudo por triangulações.*

4. Até agora temos estado muito cingidos ao concreto, como na verdade convém a princípio. Mas é tempo de nos afastarmos a pouco e pouco desse terreno.

O aluno terá provavelmente curiosidade em saber como se procede, quando são dados a hipotenusa e um ângulo agudo, ou a hipotenusa e um cateto, para determinar os restantes elementos dum triângulo rectângulo. É então oportuno introduzir as notações usuais relativas a um triângulo [ABC]. Os ângulos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$ são designados respectivamente por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ ou simplesmente por A, B, C (abuso cómodo de escrita); e os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente por a, b, c, desde que não haja risco de confusão [1].



Segundo a definição anterior de tangente, tem-se:

(1) $$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$$

[1] Já sabemos que, muitas vezes, por abuso cómodo de linguagem, se confunde um segmento $\overline{AB}$ com o seu comprimento $|AB|$ (grandeza) ou mesmo com a sua medida (número), em relação à unidade adoptada.

ou seja

(2) $$b = c \text{ tg } B$$

É claro que, nesta fórmula, se exige apenas que *b* e *c* sejam *catetos* e que B seja o *ângulo oposto a* b (num triângulo rectângulo qualquer). Podemos, pois, trocar b com c e B com C:

$$\text{tg } C = \frac{c}{b} \quad \text{ou seja} \quad c = b \text{ tg } C$$

Pode-se introduzir agora a definição:

Chama-se *cotangente* dum ângulo agudo B do triângulo [ABC] rectângulo em A, e designa-se por cot B, a razão c/b entre o cateto adjacente a B e o cateto oposto a B; isto é:

(3) $$\text{cot } B = \frac{c}{b}$$

ou seja

(4) $$c = b \text{ cot } B$$

Analogamente

$$\text{cot } C = \frac{b}{c} \quad \text{ou seja} \quad b = c \text{ cot } C$$

Assim, traduzindo por palavras as fórmulas (2) e (4):

Num triângulo rectângulo, qualquer cateto é igual ao produto *do outro cateto pela tangente do ângulo oposto ou pela cotangente do ângulo adjacente.*

De (1) e (3) resulta imediatamente:

$$\cot B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}$$

isto é: *a cotangente dum ângulo é sempre o inverso aritmético da tangente desse ângulo.*

Por outro lado, como $C = 90° - B$, tem-se:

$$\operatorname{tg}(90° - B) = \operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = \cot B$$

ou seja

$$\cot B = \operatorname{tg}\ (90° - B)$$

Portanto, a cotangente dum ângulo é sempre igual à tangente do ângulo complementar (donde a designação 'cotangente').

5. Posto isto, poderá chamar-se a atenção para o seguinte facto, análogo ao que se passa com os catetos:

A razão b/a *entre um cateto e a hipotenusa é função (unívoca) do ângulo* B *oposto ao cateto.* Esta razão chama-se *seno* do ângulo B e designa-se por sen B. Assim, por definição,

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$$

ou seja

$$b = a \text{ sen } B$$

Analogamente, permutando as variáveis:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a} \quad \text{ou seja} \quad c = a \text{ sen } C$$

Mas a razão b/a *também é função (unívoca) do ângulo* C *adjacente ao cateto.* Esta razão chama-se *co-seno do ângulo* C e designa-se por cos C. Assim

$$\cos C = \frac{b}{a} \quad \text{ou seja} \quad b = a \cos C$$

Analogamente, permutando as variáveis:

$$\cos B = \frac{c}{a} \quad \text{ou seja} \quad c = a \cos B$$

Em resumo:

Num triângulo rectângulo, qualquer cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto ou pelo co-seno do ângulo adjacente.

Imediatamente se reconhece que

$$\cos B = \text{sen } (90^\circ - B)$$

A letra B designa *qualquer ângulo agudo* (ou, mais precisamente, qualquer grandeza de ângulo agudo). Em vez desta letra podem usar-se aqui outros símbolos, tais como α, φ, ω, x, etc.

Em seguida, deve levar-se o aluno a redescobrir as identidades fundamentais:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad [\text{observar que } \operatorname{sen}^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha)^2, \text{ etc.}]$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Destas, por sua vez, deduz-se:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Assim, as funções *seno, co-seno, tangente* e *cotangente,* definidas por enquanto no conjunto]0°, 90°[, estão relacionadas entre si pelas fórmulas anteriores: *uma vez dado o valor de uma, podem ser calculados os valores das outras, sem ambiguidade.* Mas, para comodidade de cálculos, as tábuas fornecem os valores de todas, aproveitando apenas as fórmulas dos ângulos complementares, que reduzem a metade a extensão das tábuas:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha), \\ \operatorname{sen}\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \\ \operatorname{tg}\alpha = \cot(90^\circ - \alpha) \end{cases}$$

Finalmente, as duas últimas fórmulas anteriores podem servir de pretexto para introduzir as funções *secante* e *co-secante*. Por definição:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

tendo-se, manifestamente, $\operatorname{cosec}\alpha = \sec(90^\circ - \alpha)$.

Agora as duas fórmulas referidas podem escrever-se:

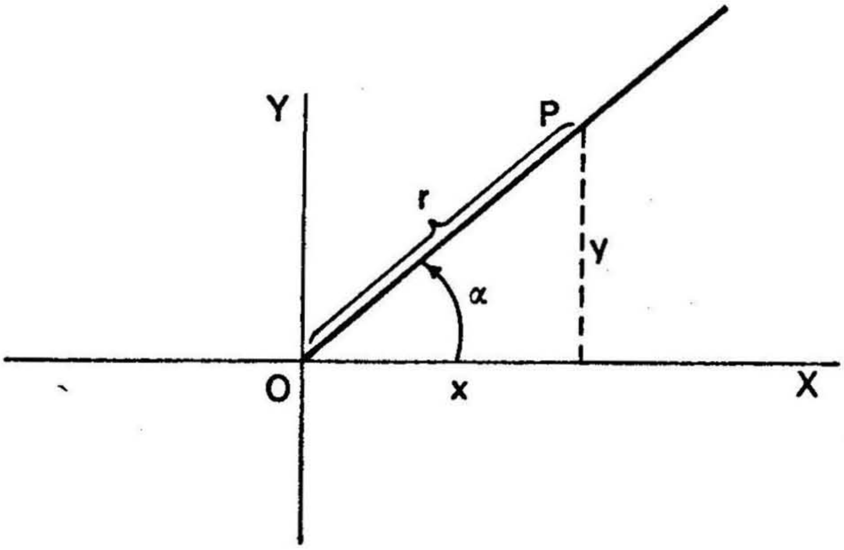
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \quad , \quad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

Assim ficará completa a lista das *funções trigonométricas* (directas), às quais, oportunamente, se dará a designação sinónima de 'funções circulares'. Em vez de 'trigonométricas' também se pode dizer 'goniométricas' (do grego *gônia*, ângulo; por isso, 'trígono' é sinónimo de 'triângulo' e 'trigonometria' significa etimologicamente 'medição de triângulos').

Podem agora fazer-se exercícios numéricos sobre os vários casos de resolução de triângulos rectângulos, utilizando primeiro a régua de cálculo e introduzindo em seguida as tábuas logarítmicas, mostrando que se obtém assim maior aproximação.

6. Chegou agora o momento de *prolongar* as funções trigonométricas a ângulos quaisquer (tomando como base de estudo o *Compêndio de Trigonometria* adoptado). Primeiro que tudo há que introduzir o conceito generalizado de 'ângulo orientado', partindo da noção intuitiva de 'rotação no plano' e admitindo a possibilidade de um número qualquer de rotações completas nos dois sentidos: o sentido que se toma para *positivo* e o sentido *negativo*.

Não será oportuno introduzir já a noção de radiano, porque isso vem desviar do objectivo imediato em vista, que é o prolongamento das funções trigonométricas ao conjunto de todas as grandezas de ângulo ou arco.



Bastará definir directamente, à maneira usual, as funções *seno, co-seno, tangente*

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

porquanto as funções *co-secante, secante* e *cotangente* continuam a definir-se como inversos aritméticos das anteriores.

Convém que o aluno seja levado a notar espontaneamente os seguintes factos:

1) Para ângulos α tais que $0° < \alpha < 90°$, estas definições coincidem com as anteriormente dadas: as funções trigonométricas tomam então só *valores positivos.*

2) Nos restantes casos, podem-nos aparecer valores negativos ou nulos e, quando $x = 0$, surge um problema para a tangente: como interpretar o símbolo $y/0$, sendo $y \neq 0$? A discussão desse problema será feita mais tarde.

3) Em qualquer dos casos, vê-se, por semelhança de triângulos, que o valor do seno e do co-seno não depende *propriamente* da posição do ponto P, considerado no segundo lado do ângulo (ou da distância, r, de P à origem), mas sim do ângulo α, sendo portanto sen α e cos α funções *unívocas* de α. O mesmo para tg α, excluindo por enquanto o caso em que $x = 0$.

4) Mantêm-se válidas, para *qualquer ângulo* α, as fórmulas:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \qquad (\text{com } \cos\alpha \neq 0)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} \qquad (\text{com sen } \alpha \neq 0)$$

das quais se deduzem como anteriormente:

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \quad , \quad 1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$$

5) Mantêm-se igualmente as fórmulas:

$$\cos\alpha = \text{sen}\ (90^\circ - \alpha) \quad , \quad \cot\alpha = \text{tg}(90^\circ - \alpha),$$

Para as demonstrar com toda a generalidade, convém recorrer à simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares, que muda x em y e α em $90^\circ - \alpha$ (considerar ângulos nos vários quadrantes).

A observação 3) conduz, de modo natural, à representação geométrica do seno e do co-seno por meio do círculo trigonométrico. Por sua vez, esta representação permite, como é sabido, fazer comodamente o estudo geral das funções seno e co-seno, no que se refere a *contradomínio, zeros, sinal* e *sentido de variação.*

Um facto que deve surgir espontaneamente ao espírito do aluno é a *periodicidade destas duas funções, com o período de* 360°.

Deve seguir-se a representação gráfica das duas funções, mas é muito importante notar o seguinte:

a) o domínio das funções não é agora IR, mas sim o *conjunto das grandezas e ângulo* (ou *arco);*

b) O comprimento escolhido para representar o grau, no eixo das abcissas, deve ser muito mais pequeno do que o comprimento escolhido para representar o número 1, no eixo das ordenadas;

c) se um ângulo fosse dado em graus, minutos e segundos, seria necessário reduzir a sua expressão só a graus.

7. Quanto ao estudo da função *tangente,* convém neste momento recordar a noção de '*declive duma recta*' definida no 6.° ano, como razão entre a diferença das ordenadas de dois pontos e a diferença das respectivas abcissas. O aluno já deve ter-se apercebido da ligação entre os dois conceitos, mas, para formular essa ligação de modo preciso, há que introduzir o conceito de '*inclinação duma recta*', tal como se define no *Compêndio de Geometria Analítica Plana.* Assim, o declive aparece como *tangente da inclinação.*

É agora o momento de recordar as considerações intuitivas

feitas no Guia do 6.° ano, *a propósito de declive infinito, na* p. 60. Será então natural escrever:

$$\text{tg } 90^\circ = \infty \quad , \quad \text{tg } 270^\circ = \infty \quad , \quad \text{etc.}$$

e a fórmula $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ passa a ser válida mesmo no caso em que $\cos \alpha = 0$ (considerações análogas para a cotangente .

Torna-se ao mesmo tempo intuitivo que, por exemplo, tg α *tende para* $+\infty$ *quando* α *tende para* 90° *por valores menores que* 90° *e que* tg α *tende para* $-\infty$ *quando* α *tende para* $-\infty$. Estas intuições serão *legalizadas* na teoria dos limites, *mas é pedagogicamente acertado que apareçam antes.*

Nenhuma dificuldade terá agora o aluno em redescobrir como se representa geometricamente a tangente por meio do círculo trigonométrico (representação que justifica a designação 'tangente'), bem como em reconhecer por si mesmo a identidade

$$\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha$$

e, mais ainda, que *a função* tang *é periódica de período* 180°.

Segue-se o estudo geral, no que se refere a *contradomínio, zeros, sinais e sentido de variação* desta função, bem como a sua representação gráfica.

Não vale a pena fazer tal estudo para as funções cot, sec *e* cosec. Quando muito poderá, a título de curiosidade, indicar-se como se representa geometricamente a secante, por meio do círculo trigonométrico.

A representação das funções trigonométricas por meio de um círculo justifica a designação 'funções circulares', que se atribui igualmente a tais funções.

8. As relações entre senos, co-senos e tangentes de *ângulos associados* também podem e devem ser redescobertas pelo aluno.

Deve-se dar uma atenção especial às fórmulas

$$\text{sen}(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \cos(90^\circ+\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha,$$

que se podem estabelecer directamente ou deduzir das anteriores.

A *redução ao primeiro quadrante* aparece como aplicação prática, permitindo achar, por meio de tábuas, o valor das funções trigonométricas de qualquer ângulo (com a aproximação permitida pela tábua).

Convirá ainda resolver equações dos tipos:

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\,\alpha \quad , \quad \cos x = \cos\alpha \quad , \quad \text{tg}\,x = \text{tg}\,\alpha$$

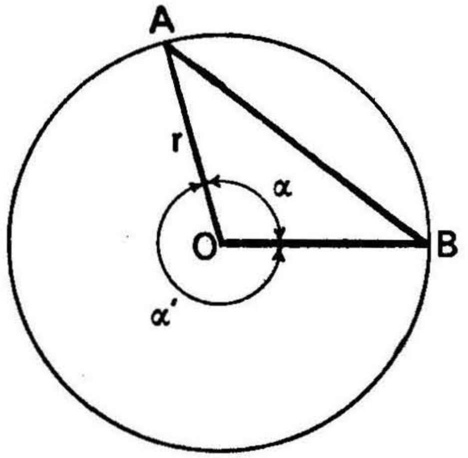
$$\text{sen}\,x = k \quad , \quad \cos x = k \quad , \quad \text{tg}\,x = k$$

sendo α e k *dados* e x a *incógnita.*

Quanto a exercícios, vêm a propósito as recomendações de ordem geral feitas no início deste Guia. Todos os assuntos até agora tratados são na verdade muito simples, muito elementares, e não convém estar a complicá-los com dificuldades artificiais, que consomem tempo e energia.

9. Será, agora, oportuno apresentar ao aluno o problema clássico:

Dada uma circunferência de raio r, *determinar o comprimento duma corda* AB *como função da grandeza* α *do arco* AB *correspondente.*



Trata-se de um problema como outro qualquer. Mas, desde logo, surge uma questão:

Quantos arcos correspondem a uma corda $\overline{AB}$?

Na realidade, *dois*. Assim, a designação $\overset{\frown}{AB}$ é *ambígua*, a não ser que se convencione designar por este símbolo o *menor dos arcos*. Mesmo assim, a ambiguidade subsiste no caso particular das semicircunferências.

Seja então α a grandeza do menor dos arcos, supondo

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Já se disse atrás, nas CONSIDERAÇÕES DE ORDEM GERAL, que todo o exercício com algum interesse tem uma ideia-chave e que deve ser o aluno a encontrar essa ideia. Aqui, a ideia-chave é conduzir pelo centro O da circunferência uma perpendicular a AB. Posto isto, o que o aluno já sabe sobre a geometria da circunferência e sobre a trigonometria dos triângulos rectângulos, conduz facilmente ao resultado:

$$(1) \qquad |AB| = 2r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \text{ [1]}$$

Primeiro que tudo, esta fórmula permite esclarecer a etimologia da palavra 'seno'. Deve, agora, notar-se que a fórmula continua a ser válida nos seguintes casos:

a) substituindo α pela grandeza α' do outro arco de extremos A, B;

b) nos casos extremos em que $\alpha = 0°$ e $\alpha = 180°$ (por verificação directa).

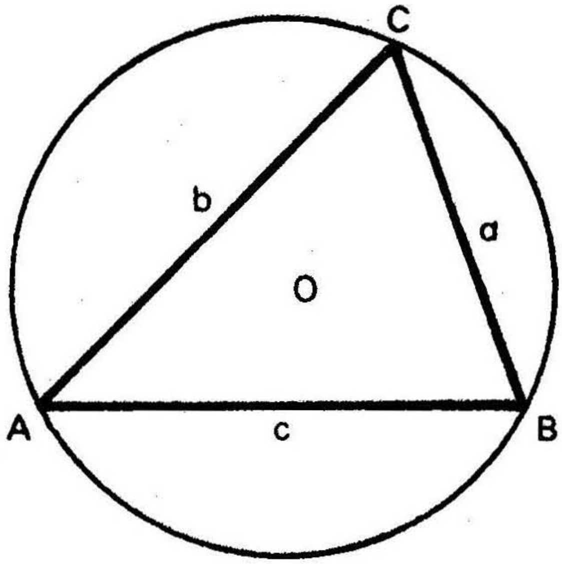
Posto isto, há que fazer duas espécies de aplicações da fórmula:

1.º *Dedução do seno, do co-seno e da tangente de* 30°, 45° *e* 60°.

2.º *Dedução da fórmula dos senos, para triângulos quaisquer.* Neste caso, seguindo sempre o método heurístico, o professor perguntará como se determina a circunferência que passa pelos vértices A, B, C dum triângulo.

---

(1) Designamos por |AB| o comprimento do segmento $\overline{AB}$ (classe de equivalência dos segmentos geometricamente iguais a este). Pode, no entanto, por abuso cómodo de escrita, escrever-se $\overline{AB}$ em vez de |AB|.



Suponhamos traçada a circunferência e apagadas todas as linhas auxiliares. Formula-se, agora, o objectivo:

Relacionar os lados do triângulo com os ângulos opostos.

Aqui, a ideia-chave é unir o centro com os vértices e relacionar cada ângulo interno (inscrito) com o ângulo ao centro correspondente, aplicando o respectivo teorema. A aplicação da fórmula anterior e a eliminação de r conduz, então, ao objectivo final:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \tag{2}$$

É este um resultado imprevisto, que impressiona pela singela beleza, *independentemente de qualquer aplicação.* De acordo com o que se disse nas CONSIDERAÇÕES DE ORDEM GERAL, é muito importante que o aluno tome consciência do aspecto estético da matemática.

Resta um pormenor de crítica sobre a validade lógica da anterior dedução. Três casos se podem dar quanto à posição do centro O em relação ao triângulo: ou é interior ao triângulo, ou é exterior ou está sobre um dos lados. A figura a que normalmente se refere a dedução está no primeiro caso. *Ora a dedução deve ser independente da figura*. Há, portanto, que analisar os outros dois casos. Não é difícil ver, com as observações que se fizeram acerca da fórmula (1), que a fórmula (2) continua a ser verdadeira(1).

Mais uma vez se confirma pois o que foi dito sobre as duas fases da investigação: uma fase inicial, em que predomina a intuição, e uma fase final, de crítica e apuramento lógico dos resultados. Ambas as fases são fundamentais, como aspectos complementares do pensamento matemático.

10. É agora e só agora que, a nosso ver, vem a propósito tratar do conceito de radiano e da conversão de graus em radianos ou vice-versa (deve também falar-se do sistema centesimal). A questão que importa depois focar é a seguinte:

O domínio das funções circulares, tais como estas foram até agora definidas, é o conjunto de todas as grandezas de ângulo (ou de arco), que não se confunde com o conjunto $\mathbb{R}$. Por exemplo, sabemos o que significa a expressão sen 30° (seno da *grandeza 30* graus), cujo valor é 1/2, mas não definimos, significado da expressão sen 30 (seno do *número* 30). Podíamos, é certo, convencionar dizer que *seno de* 30 é o mesmo que *seno de 30 graus*. Mas por que razão deve *sen 30* ser o

(1) Convirá fazer uma aplicação numérica ao caso de um triângulo obliquângulo, do qual são dados um lado e dois ângulos adjacentes, e se pede um dos outros lados.

mesmo que *seno de 30 graus* e não o mesmo que *seno de 30 grados* ou *seno de 30 radianos?* Haverá porventura alguma afinidade que para esse fim mereça preferência?

Pois bem, a resposta é esta:

Existe efectivamente uma unidade que merece preferência para esse fim: é o radiano.

Agora, o aluno está no direito de perguntar porquê. É claro que se tem de responder:

Só mais tarde, a propósito do estudo das derivadas, se pode conhecer a razão desta preferência.

Assim, por definição, o *seno de um número real* x será o *seno da grandeza* x *radianos,* isto é:

DEFINIÇÃO. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x \text{ rad}) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

E analogamente para as restantes funções trigonométricas.

Por exemplo:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos\pi = \cos 180^\circ = -1 \quad , \text{ etc.}$$

É claro que as novas funções assim definidas, embora designadas pelos mesmos símbolos, sen, cos, tg, cot, sec, cosec, e chamadas ainda *'funções circulares'* ou *'funções trigonométricas'*, não são as mesmas que as anteriores, uma vez que o seu domínio é diferente: o conjunto IR, em vez do conjunto das grandezas do ângulo. Só por comodidade se mantém a mesma terminologia e a mesma notação.

Devem-se agora traduzir na nova linguagem todos os resultados anteriores.

Mais tarde se verá que:

$$D \operatorname{sen} x = \cos x \quad , \quad D \cos x = - \operatorname{sen} x \quad , \quad D \operatorname{tg} x = \sec^2 x$$

As fórmulas das derivadas das funções circulares seriam mais complicadas se, porventura, na definição anterior, se tivesse escolhido uma unidade diferente do radiano: eis a razão da preferência que, ao tratar do assunto das derivadas, será apontada ao aluno.

Convém, pois, salientar o seguinte:

Esta mudança de ponto de vista no estudo das funções circulares (sendo o domínio o conjunto R *em vez do conjunto das grandezas de ângulo ou arco), dá-se precisamente quando é preciso passar do âmbito da trigonometria – ramo da matemática aplicada que está na base da topografia, da geodesia e da astronomia – ao domínio muito mais amplo da análise matemática, como ciência pura. Ver-se-á depois como tais funções podem ser representadas analiticamente por meio de séries.*

11. As funções circulares inserem-se naturalmente no quadro da análise matemática, por intermédio dos números complexos, como

se faz no 3.º vol. do *Compêndio. Aí se indica a maneira, a nosso ver mais natural, de deduzir as fórmulas de adição de ângulos.*

É claro que este assunto só poderá ser tratado depois da introdução ao cálculo vectorial que, por sua vez, convém que seja precedida dos elementos de geometria analítica no espaço (sem vectores) que são dados no *Guia do 6.º ano* ([1]) e que, de futuro, deverão ser introduzidos precisamente no 6.º ano (quanto às cónicas, só depois das matrizes convirá fazer o seu estudo). Os assuntos começam a interpenetrar-se, a associar-se entre si, num processo fecundo de *complexificação* que caracteriza toda a marcha ascensional do pensamento – e não seria portanto pedagógico separá-los artificialmente, ocultando as suas múltiplas correlações. Mas convém, desde já, ter uma ideia de como se completa o estudo das funções circulares.

Esse estudo adquire agora unidade e simplicidade, graças à função E, que tem a propriedade notável:

$$E(\alpha+\beta) = E(\alpha)\ E(\beta) \tag{1}$$

Esta fórmula, da qual irão sair as fórmulas trigonométricas de adição e outras mais, diz-nos que a função E transforma a adição em multiplicação, à semelhança do que sucede com qualquer função exponencial. E, na verdade, em matemática superior, acaba-se por identificar E(x) com a exponencial e^{ix}. Mas convém notar, de passagem, que esta função é uma aplicação *não biunívoca* do conjunto

---

([1]) Parece-nos vantajoso que o aluno tome o *primeiro contacto* com a geometria analítica pela via mais elementar possível, a fim de facilitar a aplicação do método heurístico.

$\mathbb{R}$ sobre o conjunto dos números complexos de módulo 1 (cuja imagem é uma circunferência).

Tal aplicação não é, portanto, um isomorfismo do *grupo aditivo* $\mathbb{R}$ sobre o *grupo multiplicativo* dos números complexos de módulo 1, visto não ser injectiva; mas, como é sobrejectiva e transforma a adição em multiplicação, segundo (1), diz-se que é um *homomorfismo* do primeiro grupo sobre o segundo.

12. A propósito das *fórmulas de bissecção,* é importante observar o seguinte:

Essas fórmulas, *restringidas* ao 1.º *quadrante,*

$$(2) \qquad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\,, \quad \operatorname{sen}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

fornecem um processo de cálculo numérico do seno e do co-seno dum ângulo com a aproximação que se quiser. Será, portanto, esse *um* dos meios de resolver o problema que ficou em aberto nos n.ºs 1 e 2 deste capítulo, após ter-se verificado que o método gráfico não permite ir além de certo grau de aproximação, insuficiente para muitos fins.

Suponhamos que se toma para unidade o ângulo recto. Já se conhecem o seno e o co-seno dos ângulos de medidas 0, 1/2 e 1. Em seguida as fórmulas (2) permitem calcular o seno e o co-seno do ângulo de medida 1/4, que são respectivamente iguais ao co-seno e ao seno do ângulo de medida 3/4.

Posto isto, as fórmulas (2) permitem calcular o seno e o co-seno dos ângulos de medidas

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad , \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

que são iguais, respectivamente, ao co-seno e ao seno dos ângulos de medidas

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad , \quad 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Analogamente se calculam o seno e o co-seno dos ângulos de medidas

$$\frac{1}{16} \; , \; \frac{3}{16} \; , \; \frac{5}{16} \; , \; \frac{7}{16} \; , \; \frac{9}{16} \; , \; \frac{11}{16} \; , \; \frac{13}{16} \; , \; \frac{15}{16}$$

E assim sucessivamente, repetindo as operações de bissecção e de passagem ao ângulo complementar.

Suponhamos, por exemplo, que se pretendia calcular sen 63°. Ora 63° é igual a 0,7 do ângulo recto e tem-se, sucessivamente:

$$\frac{1}{2} < 0{,}7 < \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{8} < 0{,}7 < \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{11}{16} < 0{,}7 < \frac{12}{16}$$

....

o que permite calcular valores aproximados de sen 63°, por defeito e por excesso, com erro tão pequeno quanto se queira.

Os cálculos exigidos por este processo são laboriosos, mas, quando se dispõe de um bom computador, podem ser efectuados rapidamente. No entanto, mesmo quando se trabalhe com um bom computador, procura-se sempre, entre vários métodos de aproximação, aquele que seja mais *expedito* e mais fácil de *programar*, porquanto o objectivo, nestes casos, é obter *a máxima economia de tempo e de energia*, que se traduz em *economia de dinheiro*. No caso das funções circulares, recorre-se normalmente a desenvolvimentos em série, para o cálculo numérico por meio de computadores.

Entretanto, convém não esquecer este pormenor: *do ponto de vista pedagógico, é sempre importante que o aluno conheça, pelo menos, um processo de cálculo, mesmo que não seja o mais expedito.*

13. Quanto ao *teorema dos co-senos* (ou *de Carnot*), já se disse que convém apresentá-lo em íntima ligação com a noção de produto interno, como se indica no *3.° vol., do Compêndio*. Aliás essa noção, bem como as suas aplicações à geometria analítica, pode ser tratada logo a seguir ao estudo dos números complexos.

O desenvolvimento a dar a estes assuntos dependerá, evidentemente, do estado de adiantamento de cada turma-piloto. Haverá casos em que seja preciso susbtituir as demonstrações por esclarecimentos de carácter intuitivo e haverá assuntos que terão de ser mesmo omitidos.

Há, no entanto, deduções que o aluno deverá ficar a saber sem hesitações, como sejam por exemplo aquelas relativas a números complexos sob forma trigonométrica. Por outro lado, há assuntos sobre os quais o aluno deverá ficar a ter ideias bastante claras, como por exemplo *vectores, transformações geométricas, representação analítica de afinidades e cálculo matricial* (com matrizes quadradas de 2.ª ordem).

14. Todo o conceito é introduzido com uma determinada *finalidade:* quanto menos o conceito surgir ligado à sua finalidade, menos interesse poderá despertar. Qual é, por exemplo, o interesse das funções circulares inversas? Porque se introduziram os símbolos arc sen, arc cos, etc.? Se estes símbolos não fossem necessários para algum fim, ninguém se teria provavelmente lembrado de os inventar.

O interesse das funções circulares inversas aparece no problema na integração de funções tais como $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, etc. O momento mais oportuno para as introduzir será, talvez, o que se segue ao estudo das derivadas das funções circulares directas e *não muito antes da introdução ao cálculo integral.*

As funções circulares inversas podem aparecer com dois aspectos: a) como funções plurívocas; *b*) como determinados ramos unívocos de tais funções.

Por exemplo, a expressão

'arco cujo seno é 1/2'

é ambígua, uma vez que existe uma infinidade de arcos (ou de números), cujo seno é 1/2. Mas já a expressão

$$\iota_\alpha \left(\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \ \wedge\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

não é ambígua: o seu valor é $\pi/6$.

Normalmente, adoptam-se as seguintes definições de funções circulares inversas unívocas:

$$\text{arc sen } x = \iota_y \left(x = \text{sen } y \;\wedge\; -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{arc cos } x = \iota_y \left(x = \cos y \;\wedge\; 0 \leqslant y \leqslant \pi\right)$$

$$\text{arc tg } x = \iota_y \left(x = \text{tg } y \;\wedge\; -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

Como se vê, trata-se de funções *reais* de variável *real*. A primeira tem por domínio o intervalo $[-1, 1]$ e por contradomínio o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$: é a função inversa da função *seno, restringida esta ao intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$. O aluno terá facilidade em reconhecer o domínio e o contradomínio das outras duas[1].

Para isto convém, é claro, examinar os gráficos das funções circulares inversas plurívocas (que podemos representar pelas exrpressões Arc sen, Arc cos, Arc tg) e *destacar desses* os gráficos das funções arc sen, arc cos, e arc tg.

Das definições anteriores deduz-se, pela regra de derivação das funções inversas:

$$D \text{ arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \text{ arc cos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D \text{ arc tg } x = \frac{1}{1+x^2}$$

E com isto terminará propriamente o estudo da trigonometria no curso-piloto.

---

(1) É manifesto o carácter convencional destas definições. Convém lembrar que também, por exemplo, a função $x \mapsto x^2$ não é biunívoca e que se representa pelo símbolo $\sqrt{}$ a inversa dessa função *restringida ao intervalo* $[0, +\infty[$.

Índice