J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(2.º E 3.º VOLUMES)

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

II

OBSERVAÇÕES ACERCA DO CAPÍTULO I DO 2.º VOLUME

1. O n.º 1 deve constituir assunto para discussão na aula e leitura em casa. A 'Nota Histórica' do Cap. IV do *Compêndio de Álgebra* (6.º ano), relativamente a filósofos gregos, bem como as palavras de Castelnuovo citadas no início deste *Guia*, também deveriam ser motivo de leitura e reflexão.

Aliás, logo na primeira aula se deve começar (ou recomeçar) o uso da régua de cálculo, que põe o aluno em contacto directo com a ideia de aproximação.

Numa outra aula deverá dizer-se que há dois tipos principais de computadores (ou calculadores): os computadores *numéricos* (ou *digtiais*) e os computadores *analógicos*. Os primeiros fornecem directamente os resultados dos cálculos com algarismos exactos em maior ou menor número; os segundos baseiam-se na medição de grandezas (tais como comprimentos, tensões eléctricas, etc.), geralmente com um grau de aproximação não muito elevado, variável e pouco preciso. Os computadores digitais vão desde a simples máquina de somar de Pascal até aos modernos computadores electrónicos, com transistores. Os computadores analógicos vão desde a simples régua de cálculo até aos computadores análógicos modernos, igualmente transistorizados. Em particular, os métodos gráficos, cujo estudo sistemático se chama *nomografia*, podem ser incluídos na classe dos sistemas analógicos. E a propósito, chamando a atenção dos alunos para um campo de pesquisa hoje em rápida expansão, convém citar os sistemas analógicos da autoria da Senhora Dr.ª D. Marília de Lima Monteiro, bem como os computadores eléctricos de valores lógicos da autoria dos alunos do Liceu D. João de Castro, Senhores António Vítor Adragão Anunciada e Luís Henrique Borges de Almeida.

2. No n.º 1 fala-se já de probabilidades. Embora este assunto, segundo aconselha a experiência adquirida, deva ser reservado para o final do 7.º ano, conviria que o conceito empírico de probabilidades fosse dado mais cedo, de *maneira informal*, em conversa, partindo de exemplos sugestivos, susceptíveis de despertar curiosidade e conduzir a discussão. Um tal exemplo poderia ser a seguinte frase:

'É pequena a probabilidade de ouvir boa música em emissores portugueses de radiodifusão'

Não se trata agora de discutir o valor lógico desta afirmação, mas apenas o seu significado. Compare-se esta frase com as seguintes:

'É impossível ouvir boa música em emissores portugueses de radiodifusão'

'É raro ouvir boa música em emissores portugueses de radiodifusão'

O aluno imediatamente reconhece que a primeira não equivale à segunda, mas tem praticamente o significado da terceira. Como definir esse significado?

Primeiro que tudo, é preciso supor que se dispõe de um critério que permita distinguir *música boa* de *música que não é boa* (critério necessariamente discutível). Posto isto, teria de se proceder a uma *estatística,* que consistiria em sintonizar um receptor *ao acaso,* em numerosas ocasiões com emissores portuguesse. Se for *m* o número de provas (ou experiências) em que se ouviu boa música e *n* o número total de provas em que se ouviu música, o número m/n (que se pode exprimir em percentagens) dará um valor aproximado da *probabilidade de ouvir boa música em emissores portugueses* — valor este que será *tanto mais aproximado quanto maior for* n.

Suponhamos que o valor achado foi cerca de 4 % (ou 0,04), isto é, que, *em* 100 *emissões de música, há em média* 4 *que dão música boa.* Será pequena neste caso a probabilidade? Parece bem que sim: mas é claro que este juízo terá igualmente carácter subjectivo.

Tudo isto pode ser desenvolvido em diálogo. *Não quer dizer que deva ser logo numa das primeiras aulas, mas sim num momento oportuno, em que convenha variar de assunto para amenizar.* Numa outra ocasião, poderá fazer-se a experiência do lançamento da moeda ou da *punaise* (por exemplo, cada aluno fará 20 provas e reúnem-se depois numa única as estatísticas parciais). Assim, quando mais tarde se iniciar o estudo sistemático das probabilidades, já o aluno estará *mentalizado* para o assunto e o rendimento será bem maior.

3. A majoração do erro duma soma, dum produto ou dum quociente, e os respectivos problemas inversos, são *assuntos centrais,* aos quais é preciso dedicar uma atenção especial. Aliás, o assunto só começa a adquirir um certo grau de dificuldade (e portanto maior interesse), no problema inverso relativo ao produto (n.º 9).

A orientação seguida no texto *não é cem por cento heurística*. As seguintes observações permitirão ao professor aproximar-se mais deste tipo de orientação, com vantagem para o aluno, que entrará assim muito mais facilmente no assunto.

Depois de formular o problema como se faz na pg. 32 e de o esclarecer como vem nas últimas cinco linhas da pg. 33, pergunta-se ao aluno:

Qual é a fórmula que parece indicada para resolver este problema?

O aluno dirá certamente que é a fórmula deduzida no número anterior:

$$|\Delta(xy)| \leqslant \hat{x}\,|\Delta x| + \hat{y}\,|\Delta y|$$

Mas deve ser usada em sentido contrário, raciocinando do seguinte modo:

Se $|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, então

$$|\Delta(xy)| \leqslant (\hat{x}+\hat{y})\,\varepsilon$$

Logo, para que seja $|\Delta(xy)| < \delta$, *basta que seja*

$$(\hat{x}+\hat{y})\,\varepsilon < \delta$$

ou, o que é equivalente,

$$(1) \qquad \varepsilon < \frac{\delta}{\hat{x} + \hat{y}}$$

O problema *parece* pois resolvido, *mas não está*. Porquê? Tem de intervir neste momento o *espírito crítico*. O que são $\hat{x}$ e $\hat{y}$? Segundo a convenção anterior, $\hat{x}$ é um majorante de $|x|$, enquanto $\hat{y}$ é um majorante de $|y|$ e de $|y_1|$. Mas y_1 é precisamente um dos valores *procurados*. Portanto, a fórmula (1) não permite, sem mais, determinar ε, visto que não se conhece ainda y_1. *A dificuldade está pois neste pequeno pormenor, à primeira vista insignificante* (podem mudar-se os papéis de x e de y, mas a dificuldade subsiste).

Para simplificar o problema, comecemos por supor x e y positivos. Então $|x| = x \quad , \quad |y| = y$.

Em que consiste a *ideia-chave* aqui?

Em obrigar *primeiro* $\hat{x}$ e $\hat{y}$ às condições

$$\hat{x} \geqslant x \quad , \quad \hat{y} > y$$

e em procurar *depois* um número positivo ε, que verifique não só a condição (1), mas também a seguinte:

> *Se* y_1 *é um valor positivo aproximado de* y *a menos de* ε, *então* $y_1 < y$ (deste modo y ficará a ser, automaticamente, majorante de $|y|$ *e* de $|y_1|$).

Impõe-se, neste momento, *recorrer à intuição geométrica* para acabar de resolver o problema. Convide-se o aluno a representar sobre um eixo y e $\hat{y}$ de modo que se verifique a relação $0 < x < \hat{y}$:

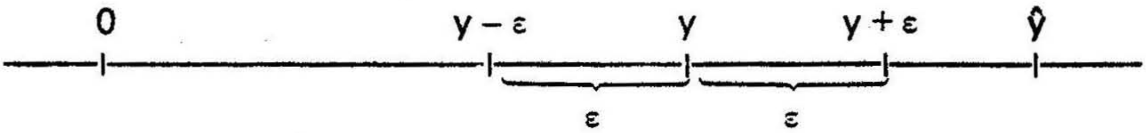
O problema está, agora, reduzido ao seguinte:

A que condições deve satisfazer ε para que todo o valor aproximado de y a menos de ε seja menor que y?

Olhando para a figura não é difícil responder:

À condição $\varepsilon < \hat{y} - y$.

Convide-se o aluno a indicar na mesma figura uma vizinhança (ε) de y nestas condições. Por exemplo:



O raciocínio, pode agora, aparecer sob forma puramente lógica, independente da intuição geométrica:

Se $\varepsilon \leqslant \hat{y} - y$, tem-se $y + \varepsilon \leqslant \hat{y}$. Então, se y_1 é valor aproximado de y a menos de ε, tem-se:

$$y_1 < y + \varepsilon \quad \text{e portanto} \quad y_1 < \hat{y}$$

Assim, o problema está resolvido quando se consideram apenas números positivos: basta tomar ε de modo que se tenha simultaneamente

$$\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{\hat{x} + \hat{y}} \quad , \quad \varepsilon \leqslant \hat{y} - y$$

sendo $\hat{x} \geqslant x$ e $\hat{y} > y$.

No caso geral de números reais quaisquer (e não apenas números positivos), é preciso passar aos módulos e *basta então aplicar o teorema 2 da pg. 26. para o problema ficar reduzido ao caso anterior.* E assim se chega ao teorema da pg. 35.

Vale a pena gastar tempo com este teorema porque, uma vez esclarecido o assunto, tudo o resto virá com facilidade, por acréscimo. Podemos mesmo dizer que este é um dos *teoremas-chave* da teoria dos limites: o tipo de raciocínio que exige vai repetir-se várias vezes com pequenas variantes.

Uma dessas variantes aparece logo no n.º 11, a propósito do *problema análogo para o quociente.* Neste caso, o bom aluno já será capaz de caminhar facilmente pelo seu próprio pé.

Problemas análogos se apresentam depois a propósito da potência e da raiz. *Mas aí não valerá a pena fazer as deduções para o problema inverso: bastará indicar o resultado (que não será preciso fixar no caso da potência).*

Note-se que a demonstração, aliás facultativa, do teorema do n.º 13, pg. 47, é feita segundo uma orientação diametralmente oposta à do método heurístico. Como se pode verificar, essa demonstração oculta a *génese das ideias,* não deixando traços do caminho seguido na investigação, para chegar àquele resultado. As demonstrações como esta – *do tipo expositivo clássico* – apresentam a matemática como ciência feita, estática, cem por cento lógica, e não como ciência em via de crescimento, impulsionada pela intuição criadora. Tal orientação só permite ao aluno conhecer a matemática *por fora,* dando-lhe a impressão de que jamais poderia colaborar na construção desta ciência.

3. *As fórmulas aproximadas dos desvios* têm a vantagem de familiarizar desde logo o aluno com *regras de derivação* (ou diferenciação), que só mais tarde virá a identificar como tais. Em particular, a fórmula aproximada do desvio da raiz será utilmente aplicada, logo a seguir, na redescoberta do método de Newton para raízes de índice qualquer.

Quanto a *erros relativos,* bastará que o aluno adquira a noção. Será interessante dizer-lhe, a propósito, que os melhores *computadores analógicos* permitem uma aproximação da ordem de 0,05 %, o que já pode ser considerado muito bom para certos fins. Também haverá interesse em que o aluno aprenda, de *modo informal,* que o desvio relativo do *produto* é aproximadamente igual à soma dos desvios relativos dos factores, etc.

4. O assunto do n.º 18 coloca o aluno imediatamente em contacto com a ideia dos métodos de aproximação, que domina toda a *análise numérica moderna, ligada ao uso de computadores.* Constitui, por isso também, uma excelente motivação concreta para a introdução do conceito de convergência duma sucessão. O aluno *sente* que tal conceito é algo de real e de importante, que interessa estudar a fundo. Convém, pois, dedicar um *interesse* especial ao referido assunto, fazendo-o surgir e desenvolver-se de modo acentuadamente heurístico. Como? Discorrendo mais ou menos do seguinte modo:

Uma vez que tenhamos um valor aproximado, x_1, de $\sqrt{a}$, o seu quadrado, x_1^2, será um valor aproximado de *a*. Então, se designarmos x_1^2 por a_1, *a fórmula aproximada do desvio da raiz* dá(1):

(1) Há, aqui, apenas uma troca entre os papéis de a e a_1, relativamente à fórmula que foi dada. Mas o aluno já está habituado a essa espécie de simetria das fórmulas, em relação ao valor aproximado e ao valor exacto (consequência do princípio de substituição de variáveis aparentes em quantificadores universais).

$$\sqrt{a} - \sqrt{a_1} \approx \frac{a - a_1}{2\sqrt{a_1}}$$

ou seja

$$\sqrt{a} - x_1 \approx \frac{a - x_1^2}{2x_1}$$

ou ainda

$$(1) \qquad \sqrt{a} \approx x_1 - \frac{x_1^2 - a}{2x_1}$$

Mostra a experiência (e depois se verá porquê) que é sempre mais eficaz começar com um valor x_1 aproximado *por excesso:* foi, por isso, que escrevemos $x_1^2 - a$ em vez de $a - x_1^2$, mudando o sinal.

Mas a fórmula (1) *é apenas aproximada.* Quer dizer, se pusermos:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_2 - a}{2x_1}$$

x_2 será um novo valor aproximado de $\sqrt{a}$. O que interessa é que x_2 seja *mais próximo de* $\sqrt{a}$ *que* x_1.

Vamos ver se isso acontece, na hipótese em que $x_1^2 > a$. Neste caso, a fórmula (1) mostra imediatamente que $x_2 < x_1$. Resta saber se $\sqrt{a} < x_2$. Para isso, basta considerar a diferença $x_2 - \sqrt{a}$ e ver que é positiva, como se fez no *Compêndio.*

Surge, agora, espontânea a ideia de proceder para x_2 *como se fez para* x_1, *pondo:*

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - a}{2x_2}$$

e para x_3 *como se fez para* x_2*, pondo:*

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - a}{2x_3}$$

e assim sucessiva e indefinidamente.

Deste modo se gera uma *sucessão,* cujo primeiro termo é x_1 e cujos termos seguintes são dados pela *fórmula de recorrência*

$$(2) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \quad , \quad \forall_n \in \mathbb{N}$$

e fica automaticamente provado, pelo princípio de substituição das variáveis aparentes, que

$$\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$$

Posto isto, o aluno *pressente* que os valores aproximados $x_1, x_2, \ldots$ são *cada vez mais próximos de a,* isto é, tem a intuição de que a sucessão assim definida *converge* para $\sqrt{a}$. Uma primeira justificação intuitiva deste facto é dada nas páginas 57 e 58 do texto, *mas pode ser omitida* (os exemplos numéricos dados a seguir já são bastante esclarecedores, nesta fase introdutória). A demonstração rigorosa só pode ser dada por meio da teoria dos limites, que tem assim, no estudo anterior, uma boa motivação.

5. Os processos de recorrência (baseados no princípio da indução matemática, que depois será estudado em pormenor) constituem um dos muitos assuntos da matemática que têm sido postos na ordem do dia pelos computadores.

Uma vez *escolhido* o valor inicial x_1, da sucessão atrás considerada, a determinação dos valores $x_2, x_3, \ldots$ segue-se automaticamente – *mecanicamente* – por meio da fórmula de recorrência. E é esse *automatismo,* essa *rotina,* que o computador – como servo fidelíssimo do homem – executa com velocidade prodigiosa. Vê-se neste exemplo, bem delimitado, o que compete à máquina e o que compete ao homem([1]).

Convirá talvez, para esclarecimento do assunto, que o aluno resolva um exercício, no caso da raiz quadrada, efectuando os cálculos pelos processos usuais. Mas não fará sentido maçá-lo com cálculos fastidiosos que competem à máquina. Nas cidades onde haja computadores electrónicos acessíveis à população escolar, será do maior interesse que se organizem *visitas de estudo,* em que os alunos vejam como a máquina executa programas, relativos a problemas desta ou de outra natureza.

6. A teoria dos limites, que se começa a desenvolver no n.º 19 com todo o rigor lógico moderno, está na base do *cálculo infinitesimal* (ou *análise infinitesimal*). Mas convém, na devida oportunidade (nota da pg. 71), analisar o significado etimológico da palavra 'infinitésimo', em ligação com a história do cálculo infinitesimal, que

---

([1]) Também se pode dizer, num certo sentido, que os computadores mais evoluídos são capazes de efectuar *escolhas* e tomar *decisões.* Uma análise aprofundada do assunto permitirá mostrar que tudo isso é feito segundo planos preestabelecidos pelo homem e em que não se exclui eventualmente a intervenção do acaso, segundo as leis do cálculo das probabilidades. Mas isto conduz-nos ao campo da *cibernética,* em que as opiniões se dividem: há quem pretenda que o cérebro humano não é mais do que um computador extremamente evoluído e há quem considere essa hipótese simplesmente absurda.

também poderíamos chamar *'cálculo de infinitésimos'* (ou *'de quantidades infinitamente pequenas'*).

O aluno já sabe o que significa 'um décimo', 'um centésimo', 'um milésimo', etc. Por exemplo, um milésimo de uma dada grandeza, que se toma para unidade, é a grandeza que se obtém dividindo a unidade por 1000 (ou, como também se diz, em *mil partes iguais*). O que será então *um infinitésimo*? Deveria ser a grandeza que se obtém dividindo a unidade *num número infinito de partes iguais*. Mas o que se pode obter, dividindo por exemplo um segmento de recta num número infinito de partes iguais? Obtêm-se *pontos,* dirão os alunos. Como o comprimento dos pontos é nulo, um infinitésimo deveria ser então uma grandeza nula. *Mas como pode um comprimento não nulo resultar da soma de comprimentos nulos*? A intuição diz-nos que tal não é possível: somando grandezas nulas, por maior que seja o seu número, apenas se obtêm grandezas nulas. Mas é pensando assim que se chega ao *paradoxo da seta* – um dos três paradoxos com os quais Zenão pretendia provar que o movimento é uma ilusão dos sentidos.

Por isso, os precursores do cálculo infinitesimal foram levados a conceber um infinitésimo como *algo que é ao mesmo tempo nulo e não nulo* (o que é impossível, segundo o PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO), ou então como *algo que está numa posição intermédia entre ser nulo e não ser nulo* (o que é impossível, segundo o PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO). Esses matemáticos tinham mais ou menos consciência de que tal conceito era ilógico; mas, como, por outro lado, conseguiam obter assim facilmente resultados certos e úteis, não se preocupavam com a validade dos meios, atendendo apenas aos resultados.

É verdade que está hoje posta de lado essa ideia contraditória de infinitésimo (chamado 'infinitésimo actual'), a qual foi substituída pela ideia de 'infinitésimo potencial' (como *variável que tende para zero*). Mas, no fundo, continua-se muitas vezes, em considerações de ordem intuitiva (sobretudo em matemática aplicada e em física), a fazer uso implícito de tal ideia, como veremos a propósito de conceito de diferencial.

Nesses casos, chama-se 'infinitésimo' a uma *quantidade tão pequena que pode ser considerada como nula para certos efeitos* (embora não seja necessariamente nula).

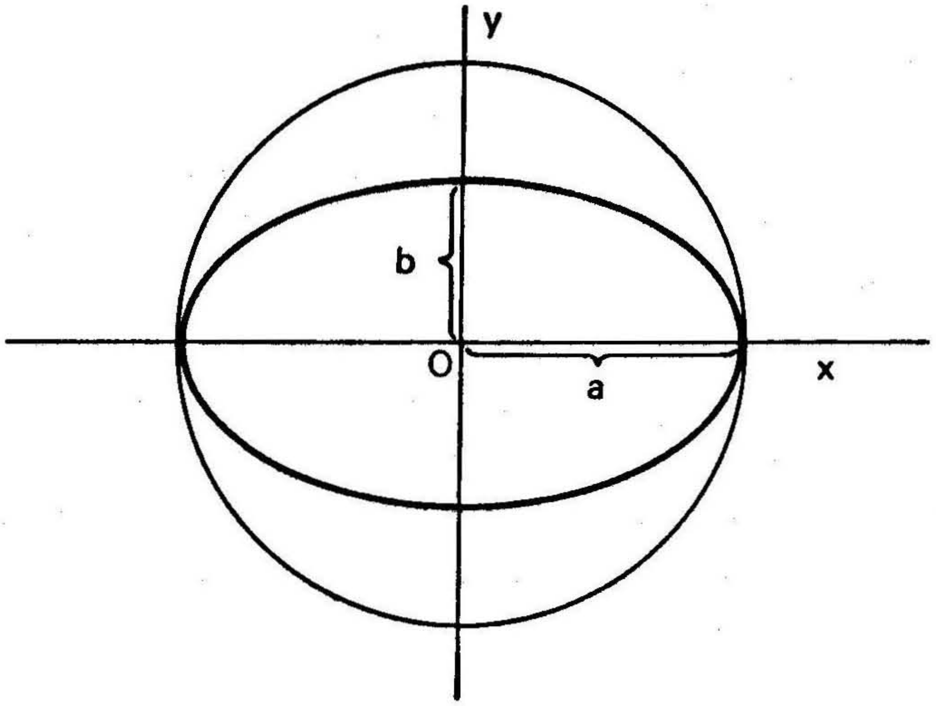
Como quer que seja, o método dos infinitésimos conserva um valor heurístico considerável, do qual há que tirar partido no ensino da matemática, se queremos que este seja autenticamente vivo e fecundo – ensino de *ciência que se faz* e não ensino de *ciência feita*.

Na 'Nota Histórica' do capítulo V do *Compêndio de Álgebra* indica-se como o método dos infinitésimos pode ser usado para *descobrir* a fórmula da área do círculo (uma vez conhecida a fórmula do perímetro). Poder-se-ia então encorajar os alunos a *redescobrirem* por este método a fórmula do volume da esfera, supondo já conhecidas as fórmulas que dão o volume do cone e a área da esfera(1).

Mas isto, afinal, já deveria ter sido feito no 2.º ciclo, antes de se passar à demonstração pelo método dos limites, que, como é sabido, permite alcançar mais tarde um completo rigor lógico. Na verdade, o interesse do aluno será muito maior, quando se trata de redescobrir um facto que seja *realmente novo* para ele. Um exemplo simples e sugestivo, no 3.º ciclo, será o da *fórmula da área da elipse,* redescoberta pelo referido método, a partir da fórmula da área do círculo.

---

(1) Estas considerações podem ser transmitidas ao aluno sob a forma de leituras, antes de se entrar no cálculo integral.



Consideremos uma elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

num referencial ortonormado[1]. Resolvendo a equação em ordem a y obtém-se:

$$(1) \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

([1]) Não é indispensável que, nesta altura, já tenha sido feito o estudo sistemático das cónicas. Basta que o aluno saiba que é esta a equação da elipse, quando se tomam para eixos coordenados os eixos de simetria da elipse, ficando o eixo maior (de comprimento 2a) sobre o eixo dos x, e o eixo menor (de comprimento 2b) sobre o eixo dos y. Antecipações *informais* como esta podem mesmo ser úteis do ponto de vista didáctico.

Consideremos, por outro lado, a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Resolvendo esta em ordem a y obtém-se, agora:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \tag{2}$$

Comparando (2) com (1), vê-se que se passa afinal da circunferência para a elipse, por meio da transformação que *transforma cada ponto da circunferência no ponto da elipse de igual abcissa, sendo a ordenada desta igual ao produto da ordenada da primeira por* b/a. Como b/a é constante, vê-se que as ordenadas são assim todas *reduzidas* na mesma proporção, enquanto as abcissas se mantêm inalteradas (esta transformação é pois uma *afinidade,* como poderá ser reconhecido mais tarde).

Consideremos, agora, várias rectas paralelas ao eixo dos y, *muito próximas entre si.* O círculo limitado pela circunferência e o domínio limitado pela elipse ficam assim decompostos em *tiras muito estreitas, que se aproximam de rectângulos.* Usando a linguagem intuitiva dos infinitésimos, pode então dizer-se que cada um dos referidos domínios fica decomposto numa *infinidade de rectângulos de bases infinitésimas.* Então a área de cada um desses domínios é a soma das áreas dos respectivos rectângulos. Ora a área de cada rectângulo é o produto da base pela altura respectiva. Além disso, a cada rectângulo em que fica decomposto o círculo corresponde na elipse um rectângulo de igual base e de altura igual à do primeiro multiplicada por b/a. Logo a área limitada pela elipse será igual ao produto da área do círculo por b/a [1]. Representando a primeira por A,

---

[1] Subentende-se que o aluno é levado a fazer *por si* todas estas considerações, de contrário o método perderá o seu interesse, que é essencialmente *heurístico.*

virá, pois:

$$A = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi a b \tag{3}$$

Assim, a validade desta fórmula surge clara ao nosso espírito, por via da intuição. É como se estivéssemos a *vê-la directamente com os olhos do espírito* (usando a linguagem de Platão). Mas impõe-se depois a *análise crítica* do resultado, lembrando mais uma vez o seguinte: o método usado é intuitivo, mas não rigoroso; não devemos confiar inteiramente na intuição, pois esta por vezes ilude-nos. A fórmula (3) pode ser estabelecida com rigor, pelo método dos limites. Aliás, como se verá depois, o cálculo integral oferece meios por assim dizer *mecânicos,* para a dedução desta e de outras fórmulas de áreas e de volumes. Trata-se porém de *técnicas de cálculo,* sem dúvida muito valiosas, e que por isso mesmo convém aprender e dominar, mas que *não iluminam o espírito com aquele lampejo de visão intuitiva imediata, própria do método heurístico dos infinitésimos.*

Foi aplicando este método que o frade italiano Cavalieri, professor de matemática na Universidade de Bolonha a partir de 1629, conseguiu descobrir várias fórmulas novas de áreas e de volumes. Em 1627, Cavalieri escrevia a Galileu, de quem fora aluno:

'Aperfeiçoei uma obra de geometria [...] e é coisa nova, não só quanto às coisas encontradas, mas também quanto ao modo de encontrá-las, por ninguém utilizado até agora, que eu saiba'.

Mas, de acordo com o que sucede geralmente na história da ciência, a novidade do método de Cavalieri é relativa. Ele próprio admite como seu precursor Kepler, e é muito provável que tenha sido também influenciado por Galileu. O *método dos indivisíveis* foi aperfeiçoado por Torricelli, que o aprecia nos seguintes termos:

'A nova teoria dos indivisíveis vai pelas mãos dos doutos como milagre de ciência, e por ela aprendeu o mundo que os séculos de Arquimedes e de Euclides foram os anos da infância para a ciência da nossa adulta geometria!'

Mas, como era inevitável, começaram a chover as críticas ao novo método, às quais respondia Pascal do seguinte modo em 1568:

'Tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la riguer et à la manière des anciens. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté, dans la suite, d'utiliser ce langage'.

Aliás, é muito provável que também os antigos, em especial Arquimedes, tivessem seguido na investigação caminho semelhante ao deste método e o que só depois tivessem procurado demonstrar com rigor, aliás relativo, os resultados obtidos.

Note-se que os fundadores do cálculo infinitesimal foram fortemente influenciados por Cavalieri. Assim, por exemplo, Newton adoptou os termos 'fluentes' e 'fluxões' (introduzidos por Cavalieri), para designar, respectivamente, as funções e as respectivas derivadas. E os indivisíveis reaparecem sob a forma de diferenciais com Leibniz, que introduziu o sinal $\int$ de integral (deformação da letra S, inicial de 'soma'), para representar a soma dos indivisíveis, segundo Cavalieri.

A análise infinitesimal procurava exprimir o que, segundo os antigos, era inexprimível: a *mudança,* o eterno *fluir* da realidade, também chamado *devir* (do francês 'devenir'), simbolizado por Heráclito na sua célebre imagem do rio que *nunca é o mesmo*. Para os filósofos racionalistas (ou filósofos do Ser), cujo pensamento se reflecte na estruturação lógica da geometria, *a mudança* (e, em particular, *o movimento*) é uma série de contradições (ver os paradoxos de Zenão). Não é, pois, de admirar que tais contradições reapareçam no método dos infinitésimos cujo objectivo era nada menos do que matematizar o *fluir* do mundo físico. Ainda em fins do século XVIII Lagrange resumia nos seguintes termos o estado da análise infinitesimal (ver 'Nota Histórica' do Cap. V, *Compêndio de Álgebra*):

'Esta ciência é um formigueiro de contradições e se, apesar disso, conduziu a grandes resultados, é poque a infinita clemência de Deus dispôs as coisas de modo que os erros se compensassem uns aos outros'.

Tais contradições só puderam ser completamente eliminadas em fins do século passado, depois de se ter construído a análise sobre uma *teoria dos limites,* deduzida logicamente de uma axiomática *não contraditória* (p. ex. a das grandezas ou a dos números reais). Mas, note-se bem: aquelas contradições não impediram que a análise, associada à física, tivesse sido até então o mais rico manancial de ideias e de resultados, em toda a história da matemática. Mais, ainda, na logificação da análise, perde-se um elemento precioso, sem o qual é impossível qualquer progresso na ciência: *o dinamismo da intuição criadora.* Por isso mesmo, é de toda a conveniência que, na *fase inicial da investigação,* bem como na fase *heurística do ensino,* e nas *aplicações concretas,* se continue a usar a linguagem intuitiva, embora contraditória, dos infinitésimos, como se pode ver claramente a propósito dos integrais. Se não se proceder assim, corre-se o grave risco de criar sucessivas gerações deformadas mentalmente, inibidas de criar, por uma preocupação intempestiva de rigor lógico.

7. A teoria dos limites de sucessões, tal como se desenvolve no *Compêndio,* em estreita ligação com o cálculo numérico aproximado, estabelece desde logo uma *síntese da teoria com a prática,* na forma em que esta se apresenta com mais viva *actualidade:* a do cálculo numérico por meio de computadores. Escusado será acentuar quanto esta orientação deverá contribuir para despertar o interesse do aluno, que reage quase sempre com desagrado ao aspecto exclusivamente teórico e abstracto de uma teoria dos limites dada *a priori,* sem qualquer motivação. E note-se que, ao estímulo prático-intuitivo, se segue depois uma estruturação lógica perfeitamente rigorosa. É claro que falta ainda, como base, uma teoria dos números reais. Mas esta só deve ser dada *a posteriori,* segundo o método analítico da investigação, tal como se indica na ADVERTÊNCIA. E, deste modo, também se estará a seguir em parte a ordem histórica.

No n.º 30 faz-se o estudo do limite da função exponencial a^n, definida em $\mathbb{N}$, depois aplicado ao estudo da série geométrica no n.º 31. Desnecessário salientar a importância destes assuntos. No que se refere às expressões sinónimas 'crescimento exponencial' e 'crescimento em progressão geométrica' bastará lembrar que estas fazem hoje parte da linguagem das pessoas cultas; e adquiriram actualidade, aliás, inquietante, a propósito da tendência para crescimento exponencial que se manifesta hoje na população do Globo, e, por isso, também na *população escolar* (fenómeno conhecido por 'explosão escolar'), no consumo da energia eléctrica, etc.

O exemplo histórico do tabuleiro de xadrez deveria ser familiar a todos os alunos que passam pelo ensino secundário.

Aliás, estes e outros assuntos deveriam ser tratados logo no 2.º ciclo, por via intuitivo-racional, como se fazia há cerca de 35 anos. O programa de matemática no 2.º ciclo era então bastante mais desenvolvido e, sem dúvida dúvida, mais interessante, mais rico em sugestões e em ligações com o concreto, portanto mais atraente e formativo. É certo que o regime de 3 tempos lectivos por semana não chegava para um desenvolvimento eficaz desse programa. Mas três circunstâncias concorriam para que os bons professores pudessem cumpri-lo de maneira satisfatória, pelo menos em relação aos alunos bem dotados: 1) menor número médio de alunos por turma; 2) inexistência de colecções de exercícios-cliché, como as que se difundem actualmente, criando a ansiedade de os resolver, em número cada vez maior, *para se conseguir passar no exame;* 3) menor extensão dos programas de carácter informativo, que exigem grande esforço de memória e bloqueiam o espírito do aluno, impedindo-o de se concentrar e reflectir.

Nos tempos actuais o já referido fenómeno da *explosão escolar*, aumentando rapidamente a *quantidade* dos alunos, tende a degradar a *qualidade* do ensino.

A instituição de turmas-piloto, como está a ser feita em vários países, tem exactamente por fim salvar da avalanche a qualidade do ensino.

8. Impõe-se aqui uma observação quanto aos exercícios I, *b*), *d*), *e*) da p. 110 do 2.º volume. Bastará considerar o primeiro. Uma vez resolvido o exercício I, *a*), o aluno não terá dificuldade em *descobrir* a ideia-chave do que se lhe segue. Tem-se:

$$\sqrt[n]{5^n + 2^n} = \sqrt[n]{5^n\left[1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]} = 5\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

Ora

$$1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n \rightarrow 1 + 0 = 1$$

Por intuição ou por hábito em situações análogas, o aluno aceitará em seguida que

$$\sqrt[n]{1 + (\frac{2}{5})^n} \to \sqrt[n]{1} = 1$$

Dum modo geral ele aceitará que

$$(1) \qquad x_n \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \to 1$$

qualquer que seja a sucessão x_n que tenda para 1. Porém, a demonstração rigorosa deste facto não é tão fácil como à primeira vista parece. O que se pode e convém é levar sucessivamente o aluno a tomar consciência do seguinte:

1.º Nenhum dos anteriores teoremas sobre limites permite demonstrar (1), pois que, no caso presente, o radicando e o índice da raiz *são ambos variáveis.*

2.º Utilizando, por exemplo, logaritmos decimais, tem-se:

$$\sqrt[n]{x_n} = (10^{\log x_n})^{1/n} = 10^{\frac{1}{n} \log x_n}$$

donde se deduz $\sqrt[n]{x_n} \to 10^{\frac{1}{\infty}} = 1$, admitindo que

$$(2) \qquad \lim (\log u_n) = \log (\lim u_n)$$

$$(3) \qquad \lim 10^{u_n} = 10^{\lim u_n}$$

quaisquer que sejam as sucessões convergentes u_n e v_n, sendo $u_n > 0$, $\forall n$. Mais geralmente, vê-se deste modo que

$$(1') \qquad x_n \to a \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \to 1 \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

3.º Não vale a pena demonstrar, por enquanto, os factos intuitivos (2) e (3), aos quais se *reduz* a demonstração de (1').

Estaremos assim, mais uma vez, a proceder à semelhança do que se faz em investigação. Se porventura Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace e outros mais tivessem ficado à espera de uma demonstração rigorosa dos seus resultados antes de os publicarem, não teriam sido possíveis os enormes progressos que, desde então até hoje, se têm realizado em matemática e nas ciências afins.

Os referidos exercícios conduzem, de modo natural, a *redescobrir* um método geral para o cálculo numérico de *todas* as raízes de uma equação algébrica: o *método de Graffe*. Os fundamentos deste método, relativamente elementar, são acessíveis a qualquer bom aluno que, porventura, sinta curiosidade pelo assunto. Por outro lado, as dificuldades de cálculo numérico inerentes ao método estão hoje em grande parte removidas pelos computadores electrónicos. Por isso não resistimos à tentação de o inserir no texto, a título facultativo, com exemplos numéricos, pensando sobretudo numa das várias incongruências que se verificam no *ensino universitário da matemática:* os alunos aprendem aí teorias, mais ou menos profundas, relativas a equações algébricas; mas se alguém lhes perguntar *como se calculam todas as raízes de uma dada equação algébrica, de grau arbitrário, com a aproximação que se queira,* terão de reconhecer que *não sabem*. Isto dá bem a nota de quanto o ensino tradicional da matemática tem sido afastado da realidade.

9. Para um ensino realista e actual da matemática, afigura-se indispensável a *síntese da análise numérica com a análise infinitesimal.*

A separação dos dois aspectos parece-nos um erro pedagógico, pelo menos na fase de iniciação.

Já se viu como os teoremas de cálculo numérico aproximado, de que se tratou no capítulo I, servem para demonstrar os teoremas do limite da soma, do produto, etc. No fundo, esses teoremas dizem-nos que *as funções* $x + y$, xy, x/y (com $y \neq 0$) e $\sqrt[p]{x}$ (com $p \in \mathbb{N}$) *são contínuas,* tal como se observa no n.º 39, p. 147-148.

Depois, as *fórmulas dos desvios,* em que esses mesmos teoremas se baseiam, vão-nos fornecer as *regras de derivação da soma, do produto, do quociente e da raiz.* Deste modo, a coesão entre os diversos assuntos é reforçada consideravelmente e estamos a aproximar-nos de um dos ideais em ciência e pedagogia, que é: A UNICIDADE NA MULTIPLICIDADE.

Mas a ideia inicial, lançada no § 1. do capítulo I, ainda não foi explorada completamente. Para apreender todas as suas potencialidades, há que introduzir o *conceito de diferencial.* Aliás, este é indispensável para realizar eficazmente a *síntese da análise infinitesimal com as ciências experimentais (em especial com a física)*, o que se impõe igualmente na fase de iniciação. E é ainda o ponto de vista do cálculo numérico que nos permitirá introduzir tal conceito de modo simples e natural, tornando-o palpável. Eis pois a orientação que propomos, para corrigir o aspecto demasiado formal com que o conceito é introduzido no texto.

Consideraremos, por exemplo, as FÓRMULAS APROXIMADAS DOS DESVIOS DA POTÊNCIA E DA RAIZ:

$$\Delta(x^n) \approx nx^{n-1}\,\Delta x \quad , \quad \Delta\sqrt[n]{x} \approx \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,\Delta x$$

Como se vê, os coeficientes de Δx são, respectivamente, as *derivadas de* x^n *e de* $\sqrt[n]{x}$ *em ordem a* x. Assim, dum modo geral, dada uma função f que admita derivada finita num ponto x, é-se levado a considerar como *fórmula aproximada do desvio de* f(x) a seguinte:

$$\Delta f(x) \approx f'(x)\, \Delta x$$

ou ainda, pondo $f(x) = y$:

$$\Delta y \approx f'(x)\, \Delta x \tag{1}$$

sendo Δy o desvio (ou acréscimo) correspondente a Δx, isto é:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Resta, porém, saber qual o *grau de aproximação* que a fórmula (1) pode fornecer. Para isso, recordemos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Então, se pusermos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = r$$

vê-se, por um lado, que

$$r \to 0 \quad \text{quando} \quad \Delta x \to 0$$

e, por outro lado, que

$$\Delta y = f'(x)\, \Delta x + r\, \Delta x \tag{2}$$

Mas o termo $r\Delta x$, *dividido por* Δx, tende para 0 com Δx. Portanto, passa-se da fórmula exacta (2) para a fórmula aproximada (1), desprezando o termo $r\Delta x$, que é *um infinitésimo com* Δx *de ordem superior à de* Δx. Na prática, isto quer dizer o seguinte:

O erro que se comete ao adoptar a fórmula (1) *para calcular* Δy *torna-se desprezável quando* $|\Delta x|$ *é suficientemente pequeno.*

Mas, o significado desta afirmação não será devidamente apreendido pelo aluno, se não se der logo em seguida um exemplo numérico simples. Seja

$$y = x^2 \quad , \quad x = 1{,}3 \quad , \quad \Delta x = 0{,}02$$

Então $y' = 2x$ e, assim:

$$\Delta y \approx 2x\Delta x = 2 \times 1{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}052 \tag{3}$$

Ter-se-á, pois:

$$y + \Delta y \approx x^2 + 2x\,\Delta x = 1{,}3^2 + 0{,}052 = 1{,}742$$

Por outro lado, o valor exacto de Δy é:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 = 0{,}0524$$

O erro que se comete usando (3) é portanto $(\Delta x)^2 = 0{,}0004$, e *será desprezável se quisermos apenas* o *resultado amenos de* 0,001.

Posto isto, podem seguir-se as considerações da p. 155 do texto, a partir da linha 13, assim como a do n.º 42 sobre as regras de diferenciação. A propósito destas convém talvez chamar desde já a atenção do aluno para o seguinte:

A fim de simplificar as notações, convenciona-se escrever dx^2 em vez de $(dx)^2$, dx^3 em de $(dx)^3$, etc. Assim, sendo *n* um número natural qualquer, a potência *n* de dx será representada por dx^n e o diferencial de x^n por $d(x^n)$, isto é:

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$$

Por isso, também conviria escrever a fórmula aproximada do desvio da potência sob a forma

$$\Delta(x^n) \approx n\,x^{n-1}\,\Delta x$$

Índice

Págs.