J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(2.º E 3.º VOLUMES)

Curso Complementar
do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

III

OBSERVAÇÕES AO CAPÍTULO II DO 2.º VOLUME

1. A análise infinitesimal é, sem dúvida, uma das mais belas e úteis criações do espírito, impondo-se quer pela elegância e fecundidade dos métodos, quer pela importância das aplicações. *Mais é sobretudo no cálculo integral que estes aspectos adquirem vulto.* Foi pelo cálculo integral que o método matemático afirmou, desde Newton, as suas altas potencialidades, numa das mais audaciosas tentativas da inteligência humana para interpretar o *devir* do mundo físico, de modo a ser capaz de prever, tanto quanto possível, os fenómenos naturais e de intervir no curso dos acontecimentos, produzindo-os ou evitando-os, conforme interessa. Não foi sem razão que Newton deu à sua obra o título PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA (1).

Daí o elevado valor formativo do cálculo integral, desde que seja ensinado de maneira conveniente (2). Excluí-lo por completo do ensino liceal é privar os alunos de um dos factores essenciais de

---

(1) Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.

(2) Não se deve no entanto minimizar o interesse do cálculo diferencial, que permitiu a Newton *deduzir* das leis de Kepler a lei da gravitação universal.

formação de *cultura científica,* condicionando-os demasiado à ciência imobilista dos Gregos, que não puderam ir além da geometria e da estática. E quem diz 'cultura científica', diz 'cultura moderna'. Pois pode haver cultura sem base científica, na era em que vivemos?

Por outro lado, é preciso ter presente que o cálculo integral e o cálculo diferencial nasceram conjuntamente como frutos da mesma intuição, como aspectos complementares do mesmo método e como meios para o mesmo fim: a aplicação da matemática ao estudo dos fenómenos naturais. Portanto, separá-los inteiramente no ensino é uma amputação deplorável, um erro pedagógico que se irá repercutir mais tarde em inibições mais ou menos profundas no espírito do aluno.

E recordemos uma vez mais este facto várias vezes apontado: a análise infinitesimal nasceu com a física e com esta assumiu rápido incremento, num processo típico de interacção. Grandes matemáticos — tais como Newton, Lagrange, Fourier, Gauss, Hamilton, etc. — foram ao mesmo tempo grandes físicos. E ainda hoje é da física que a análise recebe o estímulo mais vigoroso. Mantêm viva actualidade as seguintes palavras de Henri Poincaré na sua obra intitulada '*La valeur de la science*':

> Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature.
>
> Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique.
>
> Elles doivent aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps.
>
> Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte nouvelle leur ouvre une perspective inattendue; et la joie qu'ils éprouvent ainsi n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y prennent aucune part? Peu de privilégiés sont appelés à la goûter pleinement, cela est vrai, mais n'est-ce pas ce qui arrive pour les arts les plus nobles?

C'est pourquoi je n'hésite pas à dire que les mathématiques méritent d'être cultivées pour elles-mêmes et que les théories qui ne pouvent être appliquées à la physique doivent l'être comme les autres.

Quand même le but physique et le but esthétique ne seraient pas solidaires, nous ne devrions sacrifier ni l'un l'autre.

Mais il y a plus: ces deux buts sont inséparables et le meilleur moyen d'atteindre l'un c'est de viser l'autre, en du moins de ne jamais le perdre de vue. C'est ce que je vais m'efforcer de démontrer en précisant la nature des rapports entre la science pure et ses applicatinos.

Le mathématicien ne doit pas être pour le physicien un simple fournisseur de formules; il faut qu'il y ait entre eux une collaboration plus intime.

La physique mathématique et l'analyse pure ne sont pas seulement des puissances limitrophes, entretenant des rapports de bon voisinage; elles se pénétrent mutuellement et leur esprit est le même.

C'est ce que l'on comprendra mieux quand j'aurai montré ce que la physique reçoit de la mathématique et ce que la mathématique, en retour, emprunte à la physique'.

Poincaré indica primeiro o que a física deve à matemática:

'Le physicien ne peut demander à l'analyste de lui révéler une vérité nouvelle; tout au plus celui-ci pourrait-il l'aider à la pressentir.

Il y a longtemps que personne ne songe plus à devancer l'experience, ou à construire le monde de toutes pièces sur quelques hypothèses hâtives. De toutes ces constructions ou l'on se complaisait encore naivement il y a un siècle, il ne reste plus aujourd'hui que des ruines.

Toutes les lois sont donc tirées de l'expérience; mais pour les énoncer, il faut une langue spéciale; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis.

Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques: elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler'.

E mais adiante:

'Mais ce n'est pas tout; la loi sort de l'expérience, mais elle n'en sort pas immédiatement. L'expérience est individuelle, la loi qu'on en tire est générale;

l'expérience n'est qu'approchée, la loi est précise ou du moins prétend l'être. L'expérience se fait dans des conditions toujours complexes, l'énnoncé de la loi élimine ces complications. C'est ce qu'on appelle «corriger les erreurs systématiques».

En un mot, pour tirer la loi de l'expérience, il faut généraliser; c'est une nécessité qui s'impose à l'observateur le plus circonspect.

Mais comment généraliser? Toute vérité particulière peut évidemment être étendue d'une infinité de manières. Entre ces mille chemins qui s'ouvrent devant nous, il faut faire un choix, au moins provisoire; dans ce choix, qui nous guidera?

Ce ne pourra être que l'analogie. Mais que ce mot est vague! L'homme primitif ne connait que les analogies grossières, celles qui frappent les sens, celles des couleurs ou des sons. Ce n'est pas lui qui aurait songé à rapprocher par exemple la lumière de la chaleur rayonnante.

Qui nous a appris à connaitre les analogies véritables, profundes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine?

C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure. C'est lui qui nous a enseigné à nommer du même nom des êtres qui ne diffèrent que par la matière, à nommer du même nom par exemple la multiplication des quaternions et celle des nombres entiers.

Si les quaternions, dont je viens de parler, n'avaient été si promptement utilisés par les physiciens anglais, bien des personnes n'y verraient sans doute qu'une rêverie oiseuse, et pourtant, en nous appienant à rapprocher ce que les apparences séparent, ils nous auraient déjà rendus plus aptes à pénétrer les secrets de la nature.

Voilà les services que le physicien doit attendre de l'analyse, mais pour que cette science puisse les lui rendre, il faut qu'elle soit cultivée de la façon la plus large, sans préoccupation immédiate d'utilité, il faut que le mathématicien ait travaillé en artiste.

Ce que nous lui demandons c'est de nous aider à voir, à discerner notre chemin dans le dédale qui s'offre à nous. Or, celui qui voit le mieux, c'est celui qui s'est élevé le plus haut!

E, depois de examinar alguns exemplos históricos que ilustram o seu ponto de vista (a lei da gravitação universal de Newton, a teoria matemática do electromagnetismo de Maxwel, que precedeu de 20 anos a descoberta experimental das ondas hertzianas, e as analogias matemáticas que permitiram aproximar a hidrodinâmica, do electromagnetismo e da termodinâmica), Poincaré conclui:

'Ainsi les analogies mathématiques, non seulement peuvent nous faire pressentir les analogies physiques, mais encore ne cessent pas d'être utiles, quand ces dernières font défaut.

En résumé, le but de la physique mathématique n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles.

Il est encore, il est surtout de lui faire connaitre l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'un nouveau biais.

De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, ce sont les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir!

Em seguida Poincaré aponta o que a matemática deve à física:

'Il faudrait avoir complètement oublié l'histoire de la science pour ne pas se rappeler que le désir de connaitre la nature a ou sur le développement des mathématiques l'influence la plus constante et la plus heureuse.

En premier lieu, le physicien nous pose des problèmes dont il attend de nous la solution. Mais en nous les proposant, il nous a payé largement d'avance le service que nous pourrons lui rendre, si nous parvenons à les résoudre.

Si l'on veut me permettre de poursuivre ma comparaison avec les beaux-arts, le mathématicien pur qui oublierait l'existence du monde extérieur, serait semblable à un pointre qui saurait harmonieusement combiner les couleurs et les formes, mais à qui les modèles feraieht défaut. Sa puissance créatrice serait bientôt tarie.'

E mais adiante:

'Mais ce n'est pas tout; la physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières.

Elle nous fait pressentir la solution; elle nous suggère des raisonnements.

J'ai parlé plus haut de l'équation de Laplace que l'on rencontre dans une foule de théories physiques fort éloignées les unes des autres. On la retrouve en géométrie, dans la théorie de la représentation conforme et en analyse pure, dans celle des imaginaires.

De cette façon, dans l'étude des fonctions de variables complexes, l'analyste, à côté de l'image géométrique, qui est son instrument habituel, trouve plusieurs images physiques dont il peut faire usage avec le même succès.

Grâce à ces images, il peut voir d'un coup d'oeil ce que la déduction pure ne lui montrerait que successivement. Il rassemble ainsi les éléments épars de la solution, et par une sorte d'intuition devine avant de pouvoir démontrer.

Deviner avant de démontrer! Ai-je besoin de rappeler que c'est ainsi que se sont faites toutes les découvertes importantes?

Combien de vérités que les analogies physiques nous permettent de pressentir et que nous ne sommes pas en état d'établir par un raisonnement rigoureux!'

2. É, portanto, útil que o ensino da análise não seja inteiramente dissociado do das ciênicas físico-naturais. Torna-se aqui bem evidente o facto a que diversas vezes temos aludido e que Poincaré deixou expresso em termos lapidares: a intuição precede geralmente a lógica, no processo de criação matemática. E o ensino deve respeitar esta ordem, se não quisermos abafar no aluno o espírito de pesquisa, obrigando-o a admirar passivamente (ou a detectar) uma construção acabada e perfeita.

Convém recordar, por outro lado, que os métodos da análise se tornavam inaplicáveis em muitos casos – sobretudo no domínio da técnica – por originarem cálculos numéricos inexequíveis. Mas os computadores trouxeram a possibilidade de vencer grande parte dessas dificuldades, com repercussões no progresso técnico-científico, hoje patentes ao mundo inteiro. Assim, para estar de acordo com o espírito da época, a iniciação na análise infinitesimal – e, mais ainda, no cálculo integral – deve subordinar-se, tanto quanto possível, ao ponto de vista do cálculo numérico automático.

3. É claro que, dos elementos de cálculo integral, só podemos exigir, no ensino secundário, o *quantum satis*. Mas a escolha terá de ser muito criteriosa, para que não se esteja a fazer sementeira inútil ou, pior ainda, prejudicial. O objectivo é lançar algumas ideias mestras, *de maneira que possam realmente germinar*. Exactamente o oposto do que se está fazendo cada vez mais: afogar desde logo as ideias em cálculos puramente formais, que o aluno acabará por executar mecanicamente – e mal. Não quer isto dizer, de modo algum, que não se devam também fazer alguns cálculos! Sucede até que os exercícios de primitivação, *especialmente os de primitivação imediata*, oferecem uma excelente oportunidade para que o aluno se possa aperfeiçoar nas técnicas de cálculo, que requerem uma certa iniciativa e um certo desembaraço, quando se trata de transformar uma dada expressão numa outra equivalente, *adaptando-a ao fim em vista*.

Mas é na motivação concreto-intuitiva do conceito de integral e na sua definição que se deve pôr o máximo de empenho, procurando fazer sentir ao aluno a beleza e o interesse empolgante do assunto. O que é essencial aqui, mais uma vez, é acender-lhes no espírito a chama da ideia: *o resto virá por acréscimo*. Que estejam seguros desta verdade eterna os mestres a quem comece a minguar a fé, o que é aliás compreensível, atendendo ao condicionalismo geral do nosso ensino.

Se não houver tempo – o que é bem provável – podem-se omitir as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar, pelas razões acima invocadas.

4. Quanto aos *métodos elementares de primitivação*, pode-se, em caso de necessidade, omitir, na prática, os dois últimos: primitivação por partes e primitivação por substituição. Importa, no entanto,

fazer-lhes uma breve referência, dizendo que provêm, respectivamente, das regras de derivação do produto e da função composta, e dando um ou dois exemplos, mas só de primitivação por partes. *Isto pode ser feito antes de introduzir o conceito de integral, ao contrário do que se indica em nota no* Compêndio, *uma vez que se gaste pouco tempo com o assunto.*

É certo que aparecem depois exemplos importantes em que intervém o método de substituição. Um desses exemplos é o da função *exponencial integral,* dada pela fórmula $Ei(x) = Li(e^x)$; mas nesse caso basta verificar directamente (aplicando a regra de derivação das funções compostas) que se tem, pondo $e^x = u$,

$$
\begin{aligned}
D_x Ei(x) &= D_u Li(u) \cdot D_x u \\
&= \frac{1}{\log u} \cdot e^x = \frac{e^x}{x}
\end{aligned}
$$

e que, portanto, $Ei(x)$ é *uma primitiva de* e^x/x.

O outro exemplo é o cálculo da área da elipse, por meio do integral

$$\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Mas aí pode-se evitar o cálculo do integral por meio da primitiva, notando que o valor de

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

é precisamente a *área de um quarto de círculo de centro* O *e raio* a. Ter-se-á, pois:

$$\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} \frac{\pi a^2}{4} = \frac{1}{4} \pi ab$$

e, assim, a área pedida será πab (cf. n.º 6 deste *Guia*). É claro que neste cálculo intervém a propriedade segundo a qual o *integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo integral da função.*

Deste modo se evita submergir desde logo o aluno em cálculos mais ou menos fastidiosos, o que, como se observou atrás, só contribui para lhe ocultar o mais importante, que são as ideias.

5. No exemplo da p. 240 do *Compêndio*, houve um erro curioso, e convém desde já mostrar o partido que se pode muitas vezes tirar, pedagogicamente, *de certos erros.*

Está subentendido, no texto, que os valores aproximados foram obtidos segundo a fórmula

$$S_n = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$

em que $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ são os valores da função integranda f nos *extremos inferiores* dos intervalos de decomposição:

$$y_0 = f(x_1) \quad , \quad y_1 = f(x_1) \quad , \quad \ldots \quad , \quad y_{n-1} = f(x_{n-1})$$

Se, em vez disso, considerarmos os valores de f nos extremos superiores dos referidos intervalos, obtemos, para o cálculo dos valores aproximados do integral, a fórmula

$$T_n = \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

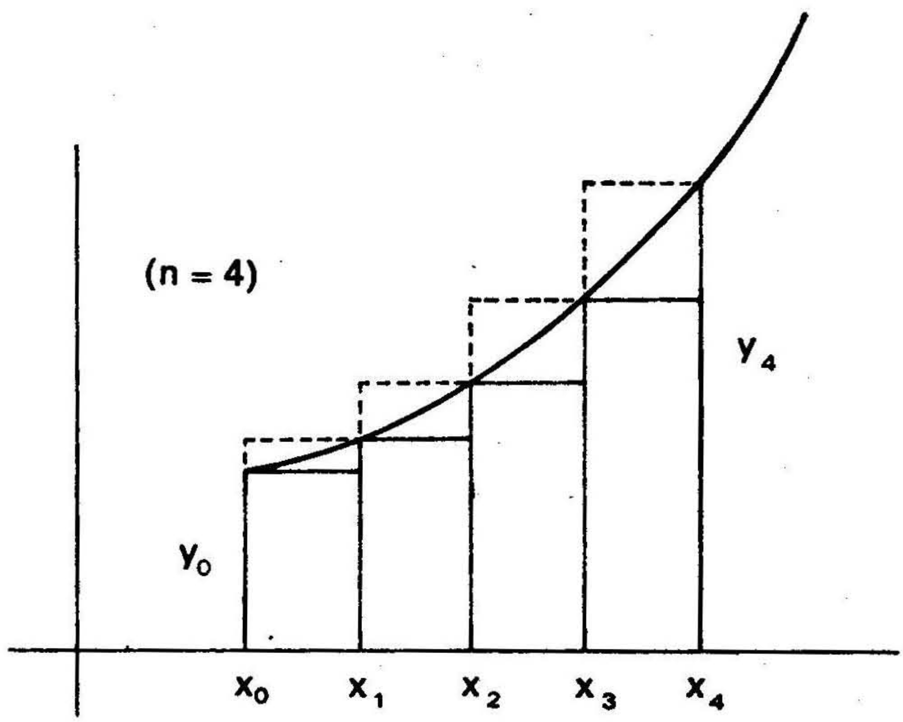
em que $y_n = f(x_n)$.

Ora sucede que, neste caso, a função integranda, e^x/x, é *crescente no intervalo de integração* [1,5], como se pode ver facilmente por meio da derivada. Ter-se-á, pois:

$$y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n$$

donde se conclui que

$$S_n < T_n$$



Mais ainda, o significado geométrico do integral mostra-nos claramente que se tem, neste caso:

$$S_n < \int_a^b f < T_n$$

para todo o valor de n.

Então, um majorante do erro de S_n, como valor aproximado do integral, será:

$$T_n - S_n = \frac{b-a}{n} [(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1})]$$

$$= \frac{b-a}{n} (y_n - y_0)$$

ou seja:

$$T_n - S_n = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)]$$

Ora, no caso em estudo, tem-se $a = 1$, $b = 5$ e (¹)

$$f(1) = e \approx 2{,}7 \quad , \quad f(5) = \frac{e^5}{5} \approx \frac{150}{5} = 30$$

(¹) Basta utilizar a régua de cálculo.

donde, para n = 1280:

$$T_n - S_n \approx \frac{4 \times 27{,}3}{1280} < \frac{110}{1280} < 0{,}1$$

O erro será, portanto, inferior a 0,1 e a observação da figura mostra que não deve andar longe de metade de 0,1, ou seja 0,05. Assim, o último valor obtido por este processo só deveria estar aproximado até às décimas, ou seja com 3 algarismos exactos (38,2). Como se explica que, pelo contrário, apareça com 5 algarismos exactos (ou mesmo 6), nos cálculos efectuados?

A razão, que depois apurámos, é a seguinte:

Pela força do hábito, o programa elaborado para este fim no L.N.E.C. não mandava calcular os valores da função nos extremos inferiores nem nos extremos superiores – mas sim nos *pontos médios* dos intervalos parciais! Daí resultou, sem qualquer agravamento de trabalho para a máquina, *uma precisão muito maior,* o que aliás se compreende recorrendo mais uma vez à figura: neste caso, cada rectângulo estará compreendido entre dois, correspondentes aos dois casos anteriores, o que dá uma compensação considerável dos respectivos erros.

Este simples exemplo mostra como, por vezes, uma ligeira modificação no método de cálculo numérico adoptado, pode aumentar grandemente a sua eficiência. E mostra também como a prática do cálculo automático pode chamar a atenção para factos importantes. *Na verdade, o uso dos computadores tem vindo a acentuar a importância do método experimental na investigação matemática, permitindo aperfeiçoar processos ou mesmo abrir caminhos inteiramente novos.*

Interessa, agora, ver quais os valores aproximados que se obtêm pelos dois primeiros processos indicados. São os seguintes, para $n = 40, 80, 160, 320, 640, 1280$:

S_n	T_n
36,961691	39,658128
37,620962	38,969180
37,954306	38,628415
38,121906	38,458961
38,205937	38,374465
38,248011	38,332275

Como se vê, o último valor é de facto aproximado apenas até às décimas.

Surge, entretanto, a ideia de tomar como valores aproximados as semi-somas de S_n com T_n. Ora

$$\frac{S_n + T_n}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$$

Assim, os valores obtidos serão as somas dos números

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0 + y_1}{2}, \dots, \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

que dão as áreas de sucessivos trapézios de altura $(b-a)/n$ e de bases $y_0, y_1, \dots, y_n$: trata-se do *método dos trapézios,* que consiste em substituir a função integranda, em cada intervalo parcial, pela *função linear* que toma o mesmo valor nos extremos, o que equivale a substituir o gráfico pela respectiva *corda* (Cf. p. 291 do *Compêndio*).

Os valores obtidos por este método são os seguintes:

38,309909
38,285071
38,291361
38,290433
38,290201
38,290143

Comparando-os com os valores obtidos pelo primeiro processo (p. 240 do *Compêndio*), vê-se que não houve vantagem sensível.

Há, no entanto, um método bastante mais potente que o dos trapézios, para o cálculo de integrais: é a *regra de Simpson,* que consiste em substituir a função integranda, em cada par de intervalos sucessivos, pela função quadrática que toma os mesmos valores nos três extremos consecutivos (Cf. p. 292 e 196-197 do *Compêndio*).

38,290137 $(n = 40)$
38,290125 $(n = 80)$
38,290124 $(n = 160)$

Estes valores mostram que, logo no primeiro, correspondente a $n = 40$, se obteve a mesma aproximação que com os primeiros – ou sejam precisamente 5 algarismos exactos. Neste caso, como se vê, a vantagem da regra de Simpson é grande. Observe-se que o menor número de parcelas diminui consideravelmente os erros de arredondamento, permitindo-nos agora garantir que o algarismo das décimas milésimas é efectivamente exacto.

Mas, neste caso, em que a função integranda é e^x/x, o método mais aconselhável é de longe o método de integração por séries, que se pode aplicar a esta função (Cf. p. 304-305 do

Compêndio). Neste caso, o tempo de cálculo na máquina é insignificante: praticamente, o que conta é o tempo da teleimpressão. Aliás, convém aqui observar que a maior parte dos cálculos automáticos a que se referem os exemplos do *Compêndio* foram programados em *linguagem Algol*, que é muito cómoda para o programador, mas exige bastante mais tempo do que o *código de máquina*.

Observe-se ainda como bastou um exemplo, tomado como *centro de interesse*, para pôr imediatamente o aluno em contacto com várias linhas mestras do cálculo integral, do ponto de vista teórico-prático, e para mostrar em que consiste afinal, no campo da análise, a *verdadeira prática*, muito diferente da pseudoprática dos cursos tradicionais, secundários ou universitários, feita à base de inúmeras receitas que na maioria dos casos nunca virão a ser aplicadas.

Haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino destes assuntos fosse normalmente orientado a partir de centros de interesse como o anterior – e tanto quanto possível *laboratorial*, isto é, baseada no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo.

Índice