J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(2.º E 3.º VOLUMES)

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

IV

PROBABILIDADES, ESTATÍSTICA, E CIÊNCIA EXPERIMENTAL

1. A introdução ao cálculo das probabilidades terá de ser muito mais breve do que se projectou inicialmente e deverá ser tratada no final do 7.º ano. Os assuntos a manter serão aqueles tratados nos seguintes números do último capítulo do *Compêndio de Matemática, 1.º volume, 2.º tomo:*

N.º 7 (sem referência necessária à lógica de atributos), n.º 9 (exceptuada a definição 2 e tudo o que se lhe segue), n.ºs 10, 11, 12 e 13, n.º 19 (excepto o que se refere à distribuição binomial) e n.º 20 (excluídos os pormenores relativos a seguros de vida, a partir da p. 275). Convém ainda que os alunos leiam a nota da p. 223.

No n.º 7 é preciso dar exemplos de operações lógicas sobre acontecimentos. Pode-se recorrer aos exemplos das bolas que se tiram duma urna, dos resultados de um desafio de futebol, etc. Assim, se tivermos numa urna bolas brancas e bolas pretas numeradas de 1 a 20 e se designarmos, respectivamente, por α e por β os acontecimentos *sair bola branca* e *sair número par*, então $\alpha\beta$ é o acontecimento *sair bola branca com número par*, $\alpha + \beta$ é o acontecimento *sair bola branca ou número par*, $\tilde{\alpha}$ o acontecimento não sair bola branca (equivalente neste caso a *sair bola preta*), etc.

No n.º 9 as propriedades das frequências relativas devem ser introduzidas a partir de exemplos como os anteriores. A propriedade IV pode ser omitida, bastando considerar a propriedade V, caso particular da primeira, e que se pode introduzir facilmente a partir do exemplo inicial dos resultados de um desafio de futebol. A demonstração no caso geral é fácil:

Seja *n* o número total de provas, μ a frequência absoluta de α e ν a frequência absoluta de β. Como α e β são *incompatíveis*, o acontecimento $\alpha+\beta$ (α ou β) verifica-se ao todo $\mu+\nu$ vezes na sequência de n provas. Portanto a frequência relativa de $\alpha+\beta$ será:

$$\text{fn}\ (\alpha+\beta) = \frac{\mu+\nu}{n} = \frac{\mu}{n} + \frac{\nu}{n} = \text{fr}(\alpha) + \text{fr}(\beta)$$

Devem seguir-se exemplos com bolas.

O conceito empírico, quantitativo, da probabilidade (p. 231) deve ser introduzido experimentalmente, por lançamento de moedas e de *punaises*. É imprescindível que o aluno não fique a ter a *ideia errada* de que a probabilidade é o limite para que tende a frequência relativa, quando o número de provas tende para infinito. O que se pode dizer apenas é o seguinte:

Em certos casos de prática, podemos admitir que a frequência relativa se aproxima cada vez mais de um certo número (a probabilidade do acontecimento), quando o número de provas aumenta consideravelmente. Mas esta aproximação não se faz, de modo nenhum, com o rigor lógico da teoria dos limites: é uma *aproximação empírica*, em que intervêm sempre as irregularidades e as contingências do acaso. Aliás, na prática, não faz sequer sentido falar de *valor exacto* da probabilidade de um acontecimento, do mesmo modo que não faz sentido falar da *medida exacta* do comprimento de uma mesa ou da energia eléctrica gasta num certo período. É preciso pois, mais uma vez, adoptar aqui a atitude mental própria da matemática aplicada, em que o *rigor lógico* cede o lugar à *intuição* e ao *bom senso*. É claro que também no n.º 12 o teorema 3 poderá ser omitido.

2. Há um mínimo de elementos de estatística que se impõe dar no ensino secundário, em anos futuros, se não quisermos ficar lamentavelmente atrasados em relação a outros países. Aliás, esses elementos deverão ser introduzidos progressivamente, desde muito cedo, logo a partir do 1.º ciclo, juntamente com *aplicações da matemática à vida corrente, à economia,* etc. Tal introdução pressupõe, evidentemente, um aumento do número de tempos lectivos de matemática, no 1.º e no 2.º ciclos, elevando-o, se possível, até seis horas por semana, à semelhança do que se verifica em vários países estrangeiros. Observe-se entretanto que, há uns 35 anos, o programa de matemática do 2.º ciclo incluía *juros compostos, anuidades,* etc., além do estudo dos logaritmos. A pouco e pouco, pelas razões atrás expostas, o ensino da matemática nos nossos liceus foi-se esvaziando de todo o conteúdo concreto, até se reduzir a um formalismo quase inteiramente oco, que o aluno não consegue dominar, em grande parte porque esse jogo de símbolos não lhe diz nada. É tempo de começar a remar contra a corrente.

3. Entre os elementos de estatística a introduzir no 3.º ciclo figura imprescindivelmente o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO A PROBLEMAS DE REGRESSÃO.

O método de indução experimental, tal como se descreve no

Compêndio, aplica-se apenas ao estabelecimento de leis qualitativas, tais como:

'O gelo flutua na água'

'O calor dilata os gases'

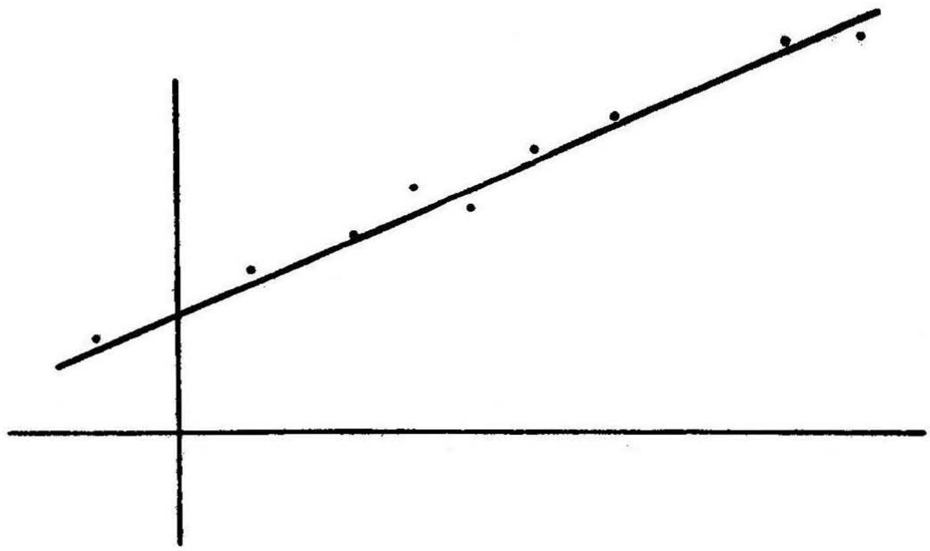
'O volume dum gás diminui quando a pressão aumenta', etc.

Porém, as leis de maior interesse, as que marcam um nítido progresso científico em relação às primeiras, são as LEIS QUANTITATIVAS. Por exemplo, pode ter algum interesse prático saber que o calor dilata os gases, mas tem muito mais interesse saber *de que modo o volume de um gás varia quantitativamente com a temperatura.*

Suponhamos que se ignorava esta lei e que se queria investigar, por exemplo, como o volume de uma dada porção de hidrogénio varia com a temperatura. Então o que haveria a fazer seria um *número razoável de experiências em que o gás fosse submetido a diversas temperaturas sob pressão constante* [1] *e proceder a medições, tão precisas quanto possível, das temperaturas e dos respectivos volumes.* Os dados experimentais assim colhidos seriam registados numa *tabela numérica.* Contudo, para poder tirar conclusões das experiências, estaria indicado recorrer a uma *representação gráfica* dos pares de números obtidos, tomando por exemplo, para abcissas, as temperaturas e para ordenadas os volumes correspondentes.

---

[1] Uma vez verificado que a pressão é o outro factor que influi no volume do gás.



Verificar-se-ia então que os pontos se encontram *sensivelmente* em linha recta. Isto viria logo reforçar no espírito a seguinte *ideia* (ou *hipótese*), que se tem *a priori*, por intuição:

O volume do gás é uma função linear da temperatura.

Todavia, em rigor, os pontos nunca estarão em linha recta, visto que as medidas são sempre aproximadas, a pressão nunca pode ser rigorosamente constante, etc. Nestas condições, não existe nenhuma recta que passe pelos referidos pontos: existem apenas rectas que se *aproximam mais ou menos* desses pontos, considerados em conjunto. Qual dessas rectas convém pois escolher, isto é, qual é a função linear que mais *se ajusta* a exprimir a variação do volume com a temperatura?

Estamos aqui em presença de um PROBLEMA DE REGRESSÃO, e mais precisamente, de um PROBLEMA DE REGRESSÃO LINEAR.

Suponhamos, agora, que se tratava de averiguar como o volume do gás (hidrogénio) varia com a pressão, a temperatura constante. Neste caso, a experiência mostraria que o volume do gás se reduz sensivelmente a metade, a um terço, etc., quando a pressão duplica, triplica, etc. A hipótese que se apresenta agora é a de uma LEI DE PROPORCIONALIDADE INVERSA, isto é, uma lei do tipo:

$$pv = k \quad , \quad \text{com } k \text{ constante}$$

O gráfico de uma tal relação é, como se sabe, uma hipérbole equilátera, que tem por assímptotas os eixos coordenados. Mas, na prática, não existirá nenhuma dessas hipérboles que passe rigorosamente pelos pontos representativos dos pares de valores observados. *Em geral, a hipótese estatística não se verifica exactamente: o que se trata então é de determinar a constante* k *de modo que a hipérbole se ajuste o mais possível ao conjunto de pontos.*

Mas, por enquanto, não sabemos ainda, precisamente, o que significa a expressão 'ajusta-se o mais possível'. Estamos agora em presença de um PROBLEMA DE REGRESSÃO CURVILINEA.

Antes de ver como se resolvem tais problemas, observemos que o *raciocínio de indução* interveio no estabelecimento das leis de Gay-Lussac e de Mariotte do seguinte modo:

A ideia de que o *volume de um gás é função linear da temperatura (a pressão constante) e é inversamente proporcional à pressão (a temperatura constante)* tem sido confirmada *aproximadamente* num grande número de experiências, efectuadas não só com o hidrogénio mas também com vários outros gases – desde que a temperatura ou a pressão variem dentro de certos limites, dependentes da natureza do gás. Isto não dá, porém, a *certeza absoluta* de que essas leis não venham a falhar de maneira muito acentuada numa experiência futura.

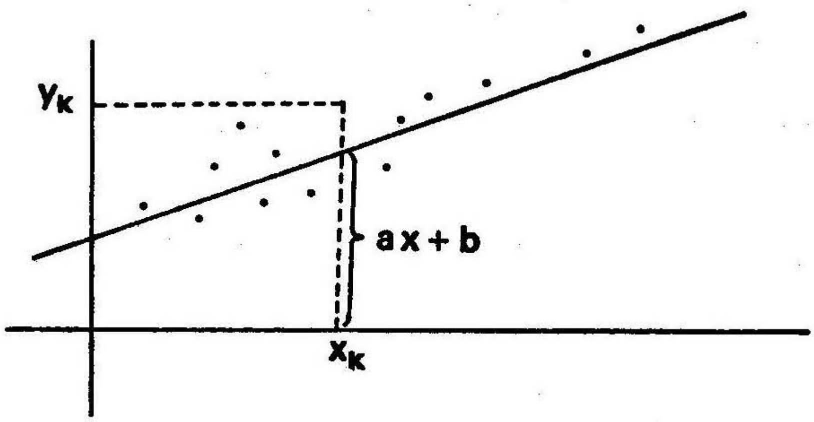
Por outro lado, é sabido que a *equação de Van der Waals* dá, nestes casos, uma aproximação bastante melhor do que a fornecida pela *equação dos gases perfeitos,* que engloba as duas referidas leis.

4. Para a resolução dos problemas de regressão existem vários métodos não equivalentes, cuja escolha é mais ou menos arbitrária. Um desses é o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, que passamos a expor, no caso da regressão linear. Suponhamos o seguinte:

Admite-se a hipótese de que certa grandeza Y seja aproximadamente função linear de outra gradeza X. Para verificar esta hipótese, fizeram-se várias experiências e obtiveram-se *n* pares de números,

$$(x_k, y_k) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

em que, para cada valor de k, x_k é uma medida de X e y_k é uma medida correspondente de Y.



Representaram-se graficamente estes pares de números (usando um referencial cartesiano) e verificou-se que os pontos obtidos são *aproximadamente* colineares (1). Pretende-se, agora, calcular dois números *a* e *b* de modo que a função linear

$$(1) \qquad y = ax + b$$

(1) Aqui a palavra 'aproximadamente' será tomada num sentido mais ou menos lato, conforme o assunto a ser estudado.

se *ajuste o mais possível* ao conjunto dos pontos obtidos. Este problema de *ajustamento* (ou de *regressão*) pode ser interpretado de vários modos, um dos quais é o que vamos descrever:

Quaisquer que sejam os números *a* e *b*, a fórmula (1) dá, para cada valor x_k de x, o valor

$$y_k^* = ax_k + b\,, \tag{2}$$

que, *em geral*, é distinto de y_k (para k = 1, ..., n). A diferença $y_k^* - y_k$ entre o *valor calculado*, y_k^*, e o *valor observado*, y_k, chama-se *desvio*. Posto isto, pretende-se determinar *a* e *b*, de modo que a soma *dos quadrados dos desvios*

$$Q = (y_1^* - y_1)^2 + (y_2^* - y_2)^2 + \ldots + (y_n^* - y_n)^2$$

seja *mínima*.

Trata-se agora, como se vê, de um problema de MATEMÁTICA PURA, enunciando de maneira precisa – problema que vamos resolver. Atendendo a (2), a soma dos quadrados dos desvios será:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} (y_k^* - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2 \tag{3}$$

Ora(¹)

$$(ax_k+b-y_k)^2 = a^2x_k^2 + b^2+y_k^2 + 2abx_k - 2ax_ky_k - 2by_k$$

(¹) É fácil ver que se tem $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Somando, agora, as *n* expressões que resultam desta para $k = 1, 2, \ldots, n$ e usando simplesmente o sinal Σ em vez de $\sum_{k=1}^{n}$, obtemos:

$$Q = a^2 \Sigma x_k^2 + nb^2 + \Sigma y_k^2 + 2ab\,\Sigma x_k - 2a\,\Sigma x_k y_k - 2b\,\Sigma y_k$$

Ponhamos, para simplificar:

$$\Sigma x_k y_k = [xy] \quad , \quad \Sigma x_k^2 = [xx] \quad , \quad \Sigma y_k^2 = [yy]$$

$$\Sigma x_k = [x] \quad , \quad \Sigma y_k = [y]$$

Então $\Sigma(y_k^* - y_k)^2$ será igual a

$$(4) \qquad Q = [xx]\,a^2 + nb^2 + [yy] + 2\,[x]\,ab - 2\,[xy]\,a - 2\,[y]\,b$$

Como se vê, Q é uma função quadrática das variáveis *a* e *b*. O que se pretende é determinar *a* e *b* de modo que o *valor da função seja mínimo*. Ora, *para cada valor atribuído* b, a função reduz-se a um polinómio do 2.º grau em *a*, em que o coeficiente de a^2 é $[xx] > 0$. Assim, sendo b constante, existe um valor de *a* que torna a função mínima; esse valor é o que *anula a derivada da função em ordem a* a:

$$(5) \qquad Q'_a = 2\,[xx]\,a + 2\,[x]\,b - 2\,[xy]$$

Analogamente se vê que, *para cada valor atribuído* a, existe um valor de b que torna a função mínima; esse valor é o que *anula a derivada em ordem a* b:

$$(6) \qquad Q'_b = 2nb + 2\,[x]\,b - 2\,[y]$$

Parece, pois, que Q tomará um valor *menor que qualquer outro,* sse *a* e *b* verificarem simultaneamente (5) e (6), isto é, sse verificarem o sistema de equações:

$$\begin{cases} [xx]\ a + [x]\ b = [xy] \\ [x]\ a + n\,b = [y] \end{cases}$$

Ora este sistema tem sempre uma única solução, que é dada pelas fórmulas:

$$a = \frac{n[xy] - [x]\ [y]}{n[xx] - [x]^2}\ , \quad b = \frac{[xx]\ [y] - [x]\ [xy]}{n\ [xx] - [x]^2}$$

Serão, pois, estas fórmulas que resolvem o problema, tal como foi posto(1).

EXEMPLO. O exemplo que vamos apresentar encontra-se na obra de Finney *'An introduction to statistical science in agriculture'* e é uma adaptação de resultados expostos pelo Sr. Engenheiro Augusto José de Oliveira, num seu trabalho de investigação publicado na revista 'Agronomia Lusitana', vol. 8 (1946), pp. 147-159 (Estação Agronómica Nacional). Trata-se do seguinte problema:

Averiguar se a percentagem de proteína nas sementes de trigo depende da densidade de produção (isto é, da quantidade de sementes produzidas por unidade de área) e se essa dependência pode ser traduzida razoavelmente por uma função linear.

---

(1) Omitimos aqui a demonstração deste facto.

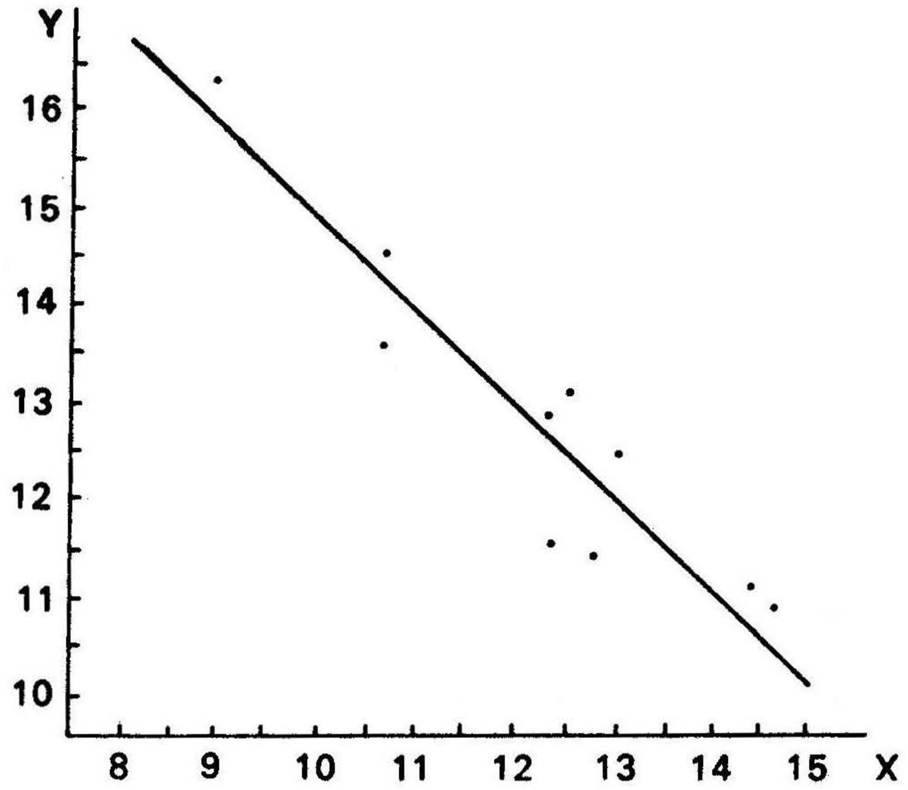
Os dados experimentais, relativos a 10 talhões, onde se colheu o trigo, encontram-se registados na tabela seguinte, em que os valores de x são as medidas da densidade de produção, em cwt por acre (cwt ≈ 50,802 kg, acre ≈ 0,40467 ha); e os valores de y são as percentagens de proteína observadas.

N.º do talhão	x = produção em cwt/acre	y = proteína %
1	14,3	10,8
2	12,8	11,4
3	12,7	13,0
4	10,6	14,6
5	10,7	13,8
6	13,0	12,2
7	14,4	10,7
8	12,5	12,8
9	8,7	16,2
10	12,2	11,8

A equação de regressão obtida neste caso, pelo processo atrás indicado, é.

$$y = 0{,}95x + 24{,}3$$

A recta correspondente está representada na figura seguinte.



Vê-se então que o teor das sementes em proteínas diminui quando a densidade de produção aumenta e que essa variação se *aproxima* efectivamente de uma lei linear. Também é visível que a recta de regressão *se ajusta* razoavelmente ao conjunto de pontos marcados.

Em que casos se deve considerar como *significativo,* isto é, como revelador de alguma relação de *causa-efeito,* um dado ajustamento deste tipo? Existem critérios estatísticos *(testes de significância)* que permitem excluir, como não significativos, certos ajustamentos. Os não excluídos ficarão ainda sujeitos ao veredicto posterior da experiência, até poderem ser admitidos com relativa segurança. Nessas exclusões adopta-se um grau de exigência (chamado *'nível de significância'*), que é variável com a questão em estudo: será, por exemplo, maior numa questão de física que numa de biologia.

5. Há muitos casos em que as leis lineares não se prestam, de modo nenhum, para exprimir aproximadamente uma grandeza como

função de outra, mas em que existem outros tipos de funções, relativamente simples, que se adaptam bem ao mesmo fim. Entre essas figuram as funções polinomiais

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p$$

de grau p pouco elevado. Para ajustar o mais possível uma tal função a uma sequência de pontos

$$(x_k, y_k) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

determinados experimentalmente, pode ainda seguir-se o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, calculando os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, de modo a minimizar a *soma dos quadrados dos desvios*

$$Q = \sum_{k=1}^{n} (y_k^* - y_k)^2$$

em que $y_k^* = a_0 + a_1 x_k + \ldots + a_p x_k^p$. Raciocinando como no caso particular das funções lineares, conclui-se que existe *uma e uma só* sequência $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ que torna mínima a soma Q e que tal sequência é a solução do sistema

$$a_0 + [x]\ a_1 + \ldots + [x^n]\ a_n = [y]$$

$$[x]\ a_0 + [x^2]\ a_1 + \ldots + [x^{n+1}]\ a_n = [xy]$$

....

$$[x^n] a_0 + [x^{n+1}] a_1 + \ldots + [x^{2n}]\ a_n = [x^n y]$$

em que se põe $[x^r y^s] = \sum_{k=1}^{n} x_k^r y_k^s$, para r, s = 0, 1, ..., p.

Assim fica resolvido o PROBLEMA DA REGRESSÃO POLINOMIAL.

De modo inteiramente análogo se resolve o PROBLEMA DA REGRESSÃO LINEAR para mais de duas variáveis, isto é, o problema que consiste em ajustar uma função linear

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p$$

a uma sequência de pontos de espaço $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$(y_k, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{pk}) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ou, mais geralmente, o PROBLEMA DA REGRESSÃO POLINOMIAL, para mais de duas variáveis.

6. Mas há ainda casos em que as funções polinomiais não são as mais aptas a descrever o fenómeno em estudo. Pode estar indicada, por exemplo, uma função de *tipo exponencial:*

$$y = C\,a^x \quad , \quad \text{com} \quad C,\ a \in \mathbb{R}^+$$

ou uma função do *tipo potência:*

$$y = C\,x^{\alpha} \quad , \quad \text{com} \quad C \in \mathbb{R}^+ \ \text{e} \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Para efectuar o ajustamento, no primeiro caso, o que se costuma fazer é passar a logaritmos. Pondo $u = \log y$, $a_0 = \log C$ e $a_1 = \log a$, vem:

$$u = a_0 + a_1 x$$

Assim, a função é *linearizada*. Para determinar a_0 e a_1, usa-se o método dos mínimos quadrados, com u em vez de y.

Neste caso, será cómodo, para a representação gráfica, dispor de papel em que, no eixo das ordenadas, cada ponto é representado por um *número* y *cujo logaritmo é a distância* u *do ponto à origem* (sendo portanto $y = e^u$, no caso dos logaritmos neperianos). Diz-se então que se adopta sobre este eixo *uma escala logarítmica* (como as das réguas de cálculo, para multiplicações e divisões). Por outro lado, a escala do eixo das abcissas deve ser a usual (isto é, *linear*).

Nestas condições, bastará marcar directamente os valores y_k de y no eixo das ordenadas e os valores x_k de x no eixo das abcissas: se os pontos correspondentes aos pares (x_k, y_k) se apresentarem aproximadamente em linha recta, está indicada a *regressão linear* entre log y e x, correspondente a uma lei exponencial, $y = C a^x$.

Chama-se *papel semilogarítmico* o papel em que estão traçadas linhas coordenadas (paralelas aos eixos), usando escala linear num dos eixos e escala logarítmica no outro eixo.

Além do papel semilogarítmico, também se usa *papel logarítmico* (isto é, com escalas logarítmicas em ambos os eixos). Se os pontos correspondentes aos pares (x_k, y_k), marcados em papel logarítmico, se apresentarem *aproximadamente* em linha recta, está indicada uma função do *tipo potência*, $y = C x^\alpha$. Com efeito, passando a logaritmos e pondo $\log y = v$, $\log x = u$ e $\log C = b$, vem

$$v = \alpha u + b$$

relação linear entre as variáveis u e v, cujos valores são, respectivamente, as abcissas e as ordenadas dos pontos no sentido usual. Neste caso, os valores mais convenientes de α e de b serão determinados pelo método dos mínimos quadrados, como se indicou anteriormente (com $u = \log x$ em vez de x e $v = \log y$ em vez de y).

Em particular, pode-se obter, aproximadamente:

$$\alpha = 2 \quad , \quad \alpha = 3 \quad , \quad \alpha = -1 \quad , \quad \alpha = -2 \quad , \quad \alpha = 1/2 \quad , \quad \text{etc.}$$

No 1.º caso y será *proporcional ao quadrado de* x, no 2.º caso y será *proporcional ao cubo de* x, no 3.º caso y será *inversamente proporcional* a x, no 4.º caso y será *proporcional à raiz quadrada de* x, etc.

Quando $\alpha = -1$, já sabemos que o gráfico é uma hipérbole que tem por assímptotas os eixos. Mais geralmente, uma função homográfica do tipo

$$y = \frac{1}{ax + b}$$

terá, por gráfico, uma hipérbole que tem por assímptotas as rectas $y = 0$ e $x = -b/a$. Uma tal função pode ser linearizada por meio de mudança de variável $u = 1/y$ que a transforma na função

$$u = ax + b$$

7. Muitas vezes, na prática, ao procurar uma *lei quantitativa,* isto é, uma relação funcional que se aplique aproximadamente a certos fenómenos, já se tem alguma ideia sobre o tipo dessa relação — umas vezes por intuição directa, *a priori,* outras vezes por deduções feitas a partir de dados intuitivos ou experimentais anteriores. Por exemplo, a *lei exponencial para os fenómenos de crescimento biológico* é deduzida, *por cálculo integral,* a partir do seguinte *facto intuitivo:*

O aumento populacional dx *num intervalo de tempo* [t, t + dt] *relativamente pequeno é proporcional à população* x *existente no* *instante* t *e ao tempo* dt (cf. *Compêndio de Matemática, 2.° volume,* pp. 222-223).

Analogamente, a *lei exponencial da desintegração radioactiva* é deduzida, *por cálculo integral,* a partir do seguinte facto, *induzido da experiência:*

A perda de massa de uma substância radioactiva num intervalo de tempo [t, t + dt] *suficientemente pequeno é proporcional à massa da substância no instante* t *e ao intervalo de tempo* dt (ibidem, pp. 220-221.

Intuição, experiência, lógica indutiva, lógica dedutiva – todos estes meios se alternam constantemente na investigação científica, numa cadeia sem fim em que é difícil destrinçar uns dos outros. Vêm a propósito as seguintes palavras, sempre oportunas, de Claude Bernard na sua obra prima 'Introduction à l'étude de la médicine expérimentale', no parágrafo intitulado 'L'intuition ou le sentiment engendre l'idée expérimentale':

Nous avons dit plus haut que la méthode expérimentale s'appuie sucessivement sur le *sentiment,* la *raison* et l'*expérience.*

Le sentiment engendre l'idée ou l'hipothèse expérimentale, c'est-à-dire l'interprétation anticipée des phénomènes de la nature. Toute l'initiative expérimentale est dans l'idée, car c'est elle qui provoque l'expérience. La raison ou le raisonnement ne servent qu'à déduire les conséquences de cette idée et à les soumettre à l'expérience.

Une idée anticipée ou une hypothèse est donc le point de départ nécessaire de tout raisonnement expérimental. Sans cela on ne saurait faire aucune investigation ni s'instruire; on ne pourrait qu'entasser des observations stériles. Si l'on *expérimentait* sans idée préconçue, on irait à l'aventure; mais d'un autre côté, ainsi que nous l'avons dit ailleurs, si l'on *observait* avec des idées préconçues, on ferait de mauvaises observations et l'on serait exposé à prendre les conceptions de son esprit pour la réalité.

Il n'y a pas de règles à donner pour faire naître dans le cerveau, à propos d'une observation donnée, une idée juste et féconde qui soit pour l'expérimentateur une sorte d'anticipation intuitive de l'esprit vers une recherche heureuse. L'idée une fois émise, on peut seulement dire comment il faut la soumettre à des préceptes définis et à des règles logiques précises dont aucun expérimentateur ne saurait s'écarter; mais son apparitien a été toute spontanée, et sa nature est tout individuelle. C'est un sentiment particulier, un *quid proprium* qui constitue l'originalité, l'invention ou le génie de chacun. Une idée neuve apparaît comme une relation nouvelle o inrattendue que l'esprit aperçoit entre les choses.

Il arrive même qu'un fait ou une observation reste très longtemps devant les yeux d'un savant sans lui rien inspirer; puis tout à coup vient un trait de lumière, et l'esprit interprète le même fait tout autrement qu'auparavant et lui trouve des rapports tout nouveaux. L'idée neuve apparaît alors avec la rapidité de l'éclair comme une sorte de révélation subite; ce qui prouve bien que dans ce cas la découverte réside dans un sentiment des choses qui est non seulement personnel, mais qui est même relatif à l'état actuel dans lequel se trouve l'esprit.

La méthode expérimentale ne donnera donc pas des idées neuves et fécondes à ceux qui n'en ont pas; elle servira seulement à diriger les idées chez ceux qui en ont et à les développer afin d'en retirer les meilleurs résultats possible.

L'idée expérimentale résult d'une sorte de pressentiment de l'esprit qui juge que les choses doivent se passer d'une certaine manière. On peut dire sous ce rapport que nous avons dans l'esprit l'intuition ou le sentiment des lois de la nature, mais nous n'en connaissons pas la forme. L'expérience peut seule nous l'apprendre(1).

Les hommes qui ont le pressentiment des vérités nouvelles sont rares; dans toutes les sciences, le plus grand nombre des hommes développe et poursuit les idées d'un petit nombre d'autres. Ceux qui font des *découvertes* sont les promoteurs d'idées neuves et fécondes.

---

(1) Note-se que as palavras de Claude Bernard são de longa data anteriores à introdução sistemática dos métodos estatísticos na investigação experimental. Essa introdução deve-se principalmente às obras de Pearson e de Fisher, neste século.

8. Os cálculos exigidos pelos métodos estatísticos são geralmente muito laboriosos. Por esse facto, não será fácil nem aconselhável resolver nas aulas problemas numéricos de estatística, mesmo simples, sem o auxílio de máquinas de calcular (a régua de cálculo não está indicada para esse fim).

O que não é difícil e nos parece muito aconselhável, é resolver alguns problemas gráficos, com papel milimétrico normal, papel logarítmico e papel semilogarítmico, para ver qual o tipo de função que mais parece convir para exprimir a lei de variação de uma grandeza com outra e para fazer uma primeira determinação gráfica aproximada dos parâmetros dessa função.

Note-se que actualmente, em certos laboratórios, nomeadamente laboratórios de física nuclear, a investigação experimental de rotina é feita em grande parte por computadores electrónicos que controlam as experiências, registam um enorme número de observações e seleccionam os dados, submetendo-os inclusivamente a análises estatísticas e acabando algumas vezes por fazer os ajustamentos necessários, para obter a lei que descreve os fenómenos.

Pode perguntar-se qual é então o papel que resta ao investigador experimental. A resposta é simples: na investigação propriamente dita será preciso, cada vez mais – *pensar.* E assim, com a expansão do uso dos computadores, será cada vez maior o número de pessoas que precisam de *saber pensar,* o que pressupõe, primeiro que tudo, *liberdade criadora do espírito,* como contrapartida do *predomínio da máquina em trabalhos de rotina.* Ainda neste ponto mantêm actualidade as palavras de Claude Bernard na sua obra atrás citada; diz o grande fisiologista no parágrafo intitulado *L'expérimentateur doit douter, fuir les idées fixes et garder toujours sa liberté d'esprit:*

La première condition que doit remplir un savant qui se livre à l'investigation dans les phénomènes naturels, c'est de conserver une entière liberté d'esprit assise sur le doute philosophique. Il ne faut pourtant point être sceptiques; il faut croire à la science, c'est'à 'dire au déterminisme, au rapport absolu et nécessaire des choses, aussi bien dans les phénomènes propros aux êtres vivants que dans tous les autres; mais il faut en même temps être bien convaincu que nous n'avons ce rapport que d'une manière plus ou moins approximative, et que les théories que nous possédons sont loin de représenter des vérités immuables. Quand nous faisons une théorie générale dans nos sciences, la seule chose dont nous soyons certains, c'est que toutes ces théories sont fausses absolument parlant. Elles ne sont que des vérités partielles et provisoires qui nous sont nécessaires, comme des degrès sur lesquels nous nous reposons, pour avancer dans l'investigation; elles ne représentent que l'état actuel de nos connaissances, et, par conséquent, elles devront se modifier avec l'accroissement de la science, et d'autant plus souvent que les sciences sont moins avancées dans leur évolution.

É preciso pois evitar, por um lado, o empirismo excessivo, que conduz ao cepticismo, e, por outro lado, o racionalismo *à outrance*, a fé absoluta nas teorias, que são apenas simplificações da realidade e não a própria realidade. Esta forma de platonismo tem efeito equivalente ao do cepticismo, ou pior ainda, criando ilusões perigosas. É esse apego a esquemas rígidos, voltando as costas à realidade, que Claude Bernard critica, apontando os seus perigos no campo particular da medicina:

Si un médecin se figurait que ses raisonnements ont la valeur de ceux d'un mathématicien, il serait dans la plus grande des erreurs et il serait conduit aux conséquences les plus fausses. C'est malheureusement ce qui est arrivé et ce qui arrive encore pour les hommes que j'appellerai des systématiques. En effet, ces hommes partent d'une idée fondée plus ou moins sur l'observation et qu'ils considèrent comme une vérité absolue. Alors ils raisonnent logiquement et sans experimenter et arrivent, de conséquence en conséquence, à construire un système qui est logique, mais qui n'a aucune réalité scientifique. Souvent les personnes superficielles se laissent éblouir par cette apparence de logique, et c'est ainsi que se renouvellent parfois de nos jours des discussions dignes de l'ancienne scolastique. Cette foi trop grande dans le raisonnement, qui conduit un physiologiste à une fausse simplification des choses, tient d'une part à l'ignorance de la science dont il parle, et d'autre part à l'absence du sentiment de complexité des phénomènes naturels. C'est pourquoi nous voyons quelquefois des mathématiciens purs très grands esprits d'ailleurs, tomber dans des erreurs de ce genre; ils simplifient trop et raisonnent sur les phénomènes tels qu'il les font dans leur esprit, mais non tels qu'ils sent dans la nature.

Le grand principe expérimental est donc le doute, le doute philosophique qui laisse à l'esprit sa liberté et son iniciative, et d'ou dérivent les qualités les plus précieuses pour un investigateur en physiologie et en médicine. Il ne faut croire à nos observations, à nos théories que sous bénéfice d'inventaire expérimental. Si l'on croit trop, l'esprit se trouve lié et rétréci par les conséquences de son propre raisonnement; il n'a plus de liberté d'action et manque par suite de l'initiative que possède celui qui sait se dégager de cette foi aveugle dans les théories, qui n'est au fond qu'une superstition scientifique.

A estas palavras de Claude Bernard só falta acrescentar: o que se diz para a investigação em fisiologia ou medicina, aplica-se, em certa medida, à investigação matemática, isto é, não será possível a criação matemática sem liberdade de espírito e sem aquela atitude interrogativa que implica a dúvida sistemática e leva a evitar os esquemas abstractos que não se apliquem a situações concretas, fora ou dentro da matemática.

Estas considerações estendem-se ao ensino e muito especialmente ao ensino liceal. É certo que a maioria dos alunos não irão ser investigadores. Mas não é menos certo que as profissões modernas estão a exigir cada vez mais a iniciativa pessoal e a imaginação que se requerem de um investigador. Quer dizer: *os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação*. De tudo isto há a concluir o seguinte:

Um ensino da matemática que atenda exclusivamente ao aspecto demonstrativo, desprezando as intuições, o método heurístico e as aplicações concretas, pode tornar-se altamente deformativo, em vez de formativo que pretende ser.

9. Além da indução propriamente dita, um dos tipos vulgares de inferência indutiva, em que intervém o conceito de probabilidade, é o chamado 'raciocínio plausível'. Consideremos o seguinte exemplo:

'A apendicite manifesta-se geralmente por vómitos, febre e dores agudas na parte inferior direita do abdómen.

Ora eu tenho vómitos, febre e dores na parte inferior direita do abdómen.

Logo tenho uma apendicite'.

É claro que não se trata aqui de um silogismo correcto, mas sim de *paralogismo:* estamos a concluir do *particular para o geral,* e portanto, mesmo admitindo que as premissas são verdadeiras, não podemos garantir que a conclusão o seja. *No entanto, poderíamos dizer que a conclusão tem certa probabilidade de ser verdadeira.* Nesta ordem de ideias, a conclusão correcta seria:

É provável (ou plausível) que eu tenha uma apendicite.

Mesmo assim, o raciocínio é *vago,* sobretudo porque a 1.ª premissa nada nos diz a respeito da frequência relativa dos casos de apendicite, entre as doenças que se manifestem com os referidos sintomas.

Vejamos outro exemplo. Consideremos o seguinte cálculo, com a respectiva prova dos nove:

$$\begin{array}{r} 538 \\ 96 \\ \hline 3228 \\ 4842 \\ \hline 51648 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 7 & 6 \\ \hline 6 & 6 \end{array}$$

Analisemos, agora, a seguinte maneira de raciocinar:

'Se esta conta está certa, a sua prova dos nove dá certa. Ora a prova dos nove desta conta dá certa. Logo a conta está certa'.

Estamos em presença de um paralogismo já apontado no *Compêndio de Matemática, 1.º volume, 1.º tomo,* p. 42. Também aqui se conclui do *particular para o geral* e, assim, não podemos garantir que a conclusão seja verdadeira. Por exemplo, se o resultado da operação tivesse sido 51738, a prova continuaria a dar certa e a conta estaria errada. O máximo que podemos concluir objectivamente das premissas é o seguinte:

'Há uma probabilidade não nula de a conta estar certa'.

Porém, agora, analisando a questão mais a fundo, podemos ter uma ideia um pouco mais precisa da probabilidade em causa. Escolhendo os 5 algarismos do produto inteiramente *ao acaso* e supondo que a prova dava certa, a probabilidade de a conta estar certa seria cerca de $1/10^4$ – na verdade pequeníssima. Todavia, nos casos normais, os algarismos não são escolhidos ao acaso. Se a pessoa que faz a conta domina bem o processo de cálculo e tem o desejo de acertar, a situação muda radicalmente de aspecto: a probabilidade de a conta estar certa, quando a prova dos nove dá certa, é bastante próxima de 1 ([1]). Por outras palavras:

Quando se conhece bem o processo de cálculo e se deseja acertar, é raro que a conta esteja errada quando a prova dos nove dá certa.

([1]) Mais precisamente, se for p a probabilidade de a *pessoa errar a conta,* será p/9 a probabilidade de *a conta estar errada, dando a prova dos nove certa.*

Este facto, que pode ser previsto por intuição, é confirmado pela experiência.

Convém, agora, observar que as teorias físicas se baseiam cada vez mais em raciocínios plausíveis, do género da prova dos nove. Na verdade, as teorias físicas mais evoluídas partem de *hipóteses* (tomadas como *axiomas*) que, em geral, não são acessíveis à experiência, isto é, não podem ser verificadas *directamente* por meio de experiências. No entanto, essas hipóteses implicam diversos factos ou leis (a que podemos chamar *teoremas*), que já podem ser verificados experimentalmente, com maior ou menor aproximação – e é essa *verificação experimental indirecta*, que leva a considerar tais hipóteses como verdadeiras. Mas, se exprimirmos por $\mathcal{H}$ a conjunção dessas hipóteses e por $\mathcal{T}$ a conjunção dos factos verificados experimentalmente, essa maneira de raciocinar é traduzida pelo seguinte esquema

$$\begin{array}{r} \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T} \\ \mathcal{T} \\ \hline \therefore \quad \mathcal{H} \end{array}$$

que constitui manifestamente um paralogismo, o qual porém, neste caso, é usado como *raciocínio plausível.*

Todavia, como veremos mais adiante com exemplos, não podemos sequer dizer:

'Há certa probabilidade de $\mathcal{H}$ ser verdadeira'

mas apenas:

'É cómodo admitir que as referidas hipóteses são verdadeiras, porque explicam um grande número de factos conhecidos, unifi-

cando-os, e permitem por outro lado prever e descobrir novos factos' (¹).

Sob este aspecto, a teoria física é afinal uma *teoria hipotética-dedutiva* (portanto uma teoria matemática) que se desenvolve, por lógica dedutiva, a partir do sistema $\mathcal{H}$ de axiomas, conduzindo não somente a factos conhecidos, *mas ainda a outros, que são descobertos pelo método matemático* e depois confirmados experimentalmente. *A teoria será então aplicável no domínio dos fenómenos em que os seus teoremas são confirmados pela experiência com aproximação razoável; para lá desse domínio, quando começa a ser nitidamente negada pela experiência, a teoria terá de ser abandonada, cedendo porventura o lugar a outra mais próxima da realidade (mas que se pode reduzir aproximadamente à primeira no domínio inicial).*

O primeiro exemplo de teoria física que se nos apresenta, nesta ordem de ideias, é a *geometria de Euclides.* Como verificar *experimentalmente* o axioma das paralelas? Como verificar *directamente* que duas rectas de um plano não se encontram? A verdade é que, *em rigor,* não existem rectas no mundo físico, e muito menos *rectas complanares que não se encontrem:* duas verticais, num dado lugar, são *aproximadamente* paralelas e, contudo, encontram-se *teoricamente* no centro da Terra (aliás, a existência de um tal ponto é igualmente *teórica*). Trata-se, pois, de *ficções cómodas.* Mas a teoria que se constrói sobre estas e outras ficções – a geometria de Euclides – conduz a um grande número de factos utilíssimos (o teorema segundo o qual a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois rectos, o

---

(¹) Não é portanto necessário, sequer, *acreditar* nas hipóteses: *basta que estas sejam eficientes.*

teorema de Pitágoras, os teoremas da trigonometria, etc.), que são confirmados experimentalmente, com grande aproximação, *no mundo médio* – isto é, numa zona próxima do homem, situada entre a *escala atómica* e a *escala astronómica*. Fora desse domínio deixa de ser aplicável.

Depois da geometria de Euclides, aparecem sucessivamente outras teorias físicas, hipotético-dedutivas: a *mecânica de Newton*, a *termodinâmica de Carnot-Clausius*, a *teoria matemática do electromagnetismo* (cujos axiomas são as equações de Maxwell), *a teoria da relatividade*, a *mecânica quântica ondulatória*, etc.

A teoria do electromagnetismo permitiu descobrir, por exemplo, as ondas electromagnéticas, que foram depois produzidas experimentalmente por Hertz. A teoria da relatividade, partindo de hipóteses sugeridas pelo electromagnetismo e pelas experiências históricas de Michelson e Morley sobre a velocidade da luz, conduziu, pelo método matemático, a factos revolucionários, hoje confirmados brilhantemente, quer no domínio astronómico, quer no domínio atómico – em particular relacionados com a produção de energia nuclear. *Os próprios conceitos de matéria e de energia acabaram por se revelar também como ficções cómodas e úteis, à semelhança dos conceitos geométricos.* A mecânica quântica, que baniu praticamente as fronteiras entre *matéria* e *energia*, conseguiu conciliar duas teorias rivais, contraditórias entre si – a *teoria corpuscular* e a *teoria ondulatória* – cada uma das quais era confirmada experimentalmente por certos fenómenos, que infirmavam a outra. E – coisa curiosa – esforçando-se por ser uma *ciência do concreto*, a física tem-se tornado cada vez mais *abstracta*, substituindo progressivamente por formalismos matemáticos, na interpretação do mundo atómico, os modelos materiais sugeridos pelo mundo macroscópico (v. os sucessivos modelos do átomo). E assim, à medida que progride, tornando-se mais humilde, mais consciente das suas próprias limitações – *a física tem-se tornado muito mais eficiente e alcançado os seus êxitos mais espectaculares.*

Ultimamente, como é sabido, utilizando aparelhagem cada vez mais dispendiosa, em que dominam os grandes aceleradores de partículas atómicas (sincrotrões, betatrões), têm-se descoberto vários fenómenos que levam a admitir sucessivamente a existência de novas partículas. E os físicos teóricos fazem actualmente grandes esforços para fundar uma *teoria das partículas elementares,* que permita explicar, de maneira lógica, *sem contradições,* os fenómenos relativos às novas partículas. Mas esbarram em sérias dificuldades, que são em grande parte, como era de prever, *dificuldades de ordem matemática.* Esperemos que, tal como tem sucedido nos casos anteriores, esses problemas da física venham a determinar novos progressos da MATEMÁTICA PURA, tendentes a resolvê-los.

10. O físico e filósofo austríaco Ernst Mach (1838-1916) enunciou no século passado um princípio metodológico, aparentemente sem grande interesse, mas que viria a ter repercussões incalculáveis no desenvolvimento da física:

Uma proposição só tem significado (físico) se pode ser verificada experimentalmente.

Nesta ordem de ideias, o significado de uma proposição consiste precisamente no *processo físico da sua verificação.* Por exemplo, a proposição:

'A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180 graus'

significa o seguinte:

'Se medirmos os ângulos internos de um triângulo qualquer, tomando para unidade o grau, e se depois somarmos os números obtidos, obtemos aproximadamente 180'.

Analogamente, o significado de um conceito consistiria na maneira de aplicar fisicamente, *operacionalmente,* esse conceito, Por exemplo, os conceitos de 'triângulo equilátero' e 'triângulo equiângulo' têm ambos significado, na medida em que é possível verificar se dois triângulos têm lados iguais ou ângulos iguais; esses significados são *diferentes,* pois que se trata de processos diferentes de verificação; mas são *equivalentes,* de acordo com a seguinte proposição, que se pode *verificar fisicamente:*

'Se um triângulo é equilátero, também é equiângulo, e reciprocamente'.

Mas consideremos, agora, a seguinte proposição:

'Se duas rectas distintas, cortadas por uma terceira, formam com esta ângulos correspondentes iguais, essas duas rectas não se encontram'.

É claro que nunca podemos verificar uma tal proposição e, portanto, segundo o princípio de Mach tal como foi atrás enunciado, esta proposição seria desprovida de sentido. Mas então seriam também desprovidas de sentido várias hipóteses que têm vindo a ser introduzidas em física. Simplesmente, essas hipóteses, assim como a anterior proposição, podem ser verificadas *indirectamente,* por meio das suas *consequências lógicas,* que lhes conferem incontestável valor *explicativo e heurístico.* Isso obrigou, desde logo, a alargar o princípio de Mach, que se apresentava demasiado restritivo.

Daqui, em parte, nasceu uma nova corrente de filosofia natural – o *neopositivismo do Círculo de Viena* – em que, ao empirismo clássico, de origem britânica (Locke, Berkeley e Hume), se associa um largo uso da matemática e da lógica simbólica, sobretudo na *análise lógica da linguagem,* tendente a eliminar jogos de palavras (sem sentido) e a evitar discussões puramente verbais, que se arrastavam em filosofia desde a antiguidade. As figuras mais representativas dessa escola são L. Wittgenstein ('Tratactus Logico-Philosophicus') e R. Carnap ('Logische Syntax der Sprache'). Bertrand Russell é um dos pioneiros do movimento ([1]).

Mas, ainda antes disso, as concepções de Mach influíram poderosamente no advento das *teorias relativistas* (Mach é considerado, ele próprio, um precursor dessas teorias) as quais, por sua vez, contribuíram substancialmente para a estruturação do pensamento filosófico do Círculo de Viena.

Antes das experiências de Michelson-Morley, admitia-se a HIPÓTESE DO ÉTER, segundo a qual a luz e as radiações electromagnéticas se propagavam por meio de ondas de um *meio elástico* chamado 'éter'. Este seria uma espécie de *fluido imaterial,* que se distinguia da matéria por ser *contínuo,* ao contrário desta, e por encher todo o espaço, mantendo-se *absolutamente imóvel,* no seu conjunto,

---

([1]) O empirismo e, mais explicitamente, o positivismo apresentam-se como a antítese da *metafísica,* identificada esta, de certo modo, com o racionalismo cem por cento apriorístico, que constrói teorias *não verificáveis* e, portanto, *sem sentido.* Porém, como todas as correntes filosóficas, o positivismo tende a exagerar e a fazer extrapolações que, em certos casos, parecem pouco legítimas, podendo assim criar barreiras à liberdade criadora do espírito. Para ver até que ponto podem variar neste campo as opiniões basta comparar as duas seguintes frases: 'Para criar uma sã filosofia, é preciso renunciar à metafísica e ser apenas bom matemático' (B. Russell). 'A matemática é a única boa metafísica' (Lord Kelvin).

mas susceptível de vibrações, à semelhança da pele de um tambor ou da superfície ligeiramente ondulada da água de um lago. Esta hipótese, como se vê, era apenas uma espécie de *metáfora* (como as imagens poéticas) sugerida pela observação do mundo macroscópico, para dar conta dos fenómenos electromagnéticos. Era, por assim dizer, o próprio *espaço absoluto* da mecânica clássica, considerado como *substância*.

Mas, as referidas experiências vieram mostrar que esta hipótese, além de inútil, era também um obstáculo para a explicação dos fenómenos observados, que se tornavam *absurdos,* admitindo tal hipótese. Ora, quando uma teoria está em desacordo com a experiência, o que há a fazer é pôr de parte a teoria e tentar substituí-la por outra. Por isso, e porque também estava em desacordo com a própria teoria do electromagnetismo que se mostrava amplamente satisfatória, foi abandonada a hipótese do éter. *Mas, com esta, ruíram conceitos seculares, nomeadamente o de 'espaço absoluto', o de 'tempo absoluto' e o de 'matéria (ou massa) absoluta'.* A tarefa ingente a que se propôs Einstein, foi a de *criar uma nova mecânica que fosse, por um lado, compatível com a teoria do electromagnetismo, e, por outro lado, coincidisse praticamente com a mecânica clássica de Newton, para velocidades bastante inferiores à velocidade da luz.*

Ora, uma das *regras de ouro* que nortearam constantemente Einstein nas suas investigações físico-matemáticas foi precisamente o *princípio de Mach.* Tendo chegado à conclusão de que *não há nenhuma experiência capaz de revelar o que seja movimento absoluto ou repouso absoluto (em relação a qualquer coisa como o éter) ou o que seja simultaneidade de dois acontecimentos (por exemplo na Terra e em Júpiter),* Einstein, aplicando a referida regra, aboliu os conceitos de espaço absoluto e de tempo absoluto, como ilusões que embaraçam o pensamento – como preconceitos inúteis e enganadores, arreigados no nosso espírito por um longo hábito estabelecido, sem reflexão. E não hesitou perante afirmações como esta:

'Tanto faz dizer que a Terra tem um movimento de rotação em relação ao conjunto das estrelas, como dizer que o conjunto das estrelas tem um movimento de rotação em relação à Terra'.

11. Não é só na física, mas também na química, na biologia, na psicologia, etc. que se pocura chegar a teorias hipotético-dedutivas, consideradas como o produto mais avançado e eficiente do método científico, baseado na razão e na experiência. Assim, é que se procura hoje, por exemplo, explicar certos *macrofenómenos* de psicologia, tais como os reflexos condicionados e outros, mediante *modelos neuronais,* que assimilam os neurones a elementos lógicos de um circuito, segundo o ponto de vista da CIBERNÉTICA.

A própria GENÉTICA procede de maneira análoga, partindo de hipóteses que muito se assemelham a axiomas de uma teoria hipotético-dedutiva.

Compreende-se, então, que a matemática (nomeadamente as álgebras de Boole, o cálculo das probabilidades, etc.), intervenham cada vez mais nestas investigações.

Outro facto que ressalta das considerações anteriores é o papel que, a par da intuição, desempenha a *imaginação criadora* na investigação científica. É pela imaginação que o cientista *inventa* hipóteses mais ou menos plausíveis, mais ou menos felizes, sugeridas pela experiência. Foram as *leis macroscópicas de* Dalton, Richter e Proust, relativas à combinação de elementos químicos, que sugeriam as *hipóteses atómica* e *molecular,* e ainda as *fórmulas de estrutura, planas ou espaciais.*

Justificam-se, deste modo, as seguintes palavras de Tyndall:

'Com experimentação acurada e trabalho minucioso de observação sobre as experiências, a imaginação torna-se o arquitecto de toda a teoria física'.

E as de Max Planck, criador da teoria quântica:

'Uma vez, outra e outra, o plano de imaginação sobre o qual tentamos erigir uma ordem vem abaixo, e depois experimentamos outro ainda. A *visão imaginativa* e *fé no êxito final* são indispensáveis([1]). Aqui, o racionalista puro não tem lugar'.

Por sua vez Einstein:

'No caminho lógico para a descoberta... Há só o caminho da intuição...'.

A intuição pertence, em grande parte, ao domínio do subconsciente e, como tal, dificilmente pode ser analisada. Mas, a intuição criadora de ciência também é produto de esforço e de educação. Vejamos o que a tal respeito diz o cientista W. Beveridge, no seu livro' The art of scientific investigation':

'As circunstâncias mais características de uma intuição consistem num período de trabalho intenso sobre o problema, acompanhado pelo desejo da sua solução, depois abandono do trabalho com a atenção dirigida em qualquer outro sentido e, finalmente, a aparição da ideia de maneira espectacular e repentina, muitas vezes com o sentimento da certeza. Experimenta-se então, geralmente, uma intensa alegria e, às vezes, surpresa por não ter ocorrido mais cedo uma tal ideia'. [Muitas vezes é *uma espécie de ovo de Colombo...*].

([1]) O sublinhado é nosso, não de Max Planck.

Assim, a investigação científica não é em si mesma uma ciência, mas antes uma arte (o que justifica o título da referida obra).

Não é, então, de admirar que os ambientes de elevado nível cultural e científico sejam óptimos estimulantes da criação científica. É conhecido o interesse que muitos cientistas – e em especial matemáticos – manifestam pela música, na qual sentem certas afinidades com as recônditas harmonias do pensamento abstracto. Conta-se a respeito de Einstein que, quando era apenas um rapazinho de catorze anos, tendo-lhe perguntado um amigo, estudante universitário, como conseguia resolver, sem a mínima dificuldade, os mais complexos problemas de matemática, o jovem Alberto (que os seus professores tinham na conta de 'aluno lento e distraído'), respondeu:

'É tão fácil! Tudo na geometria e na álgebra é maravilhosamente claro como... como uma sonata de Beethoven'.

Quanto à possível correlação entre o cultivo das artes plásticas e o desenvolvimento científico, bastará lembrar os exemplos da Grécia antiga e da Itália renascentista. Sob este aspecto, Leonardo da Vinci é um símbolo.

A referida correlação foi sintetizada por Fernando Pessoa nestes dois versos:

'O binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo. O que há é pouca gente para dar por isso'.

Para o vulgo, ciência e poesia são dois pólos contrários. Ouçamos agora Antero de Quental:

'O chão sobre que assenta a *certeza* de hoje, formou-se pelas aluviões sucessivas da *intuição* antiga. O que é ciência foi já poesia: o sábio foi já cantor, o legislador poeta; e a evidência uma adivinhação, um admirável *palpite*, cujas profundas conclusões são ainda o espanto, e porventura o desespero das mais rigorosas filosofias. E, se nadamos hoje em plena luz da razão, foi entretanto a poesia, foi essa doce mão que nos guiou por entre o pálido crepúsculo dos velhos sonhos. Velhos? Não: sonhos eternos ([1])'.

Se o nosso poeta-filósofo tivesse podido contactar com cientistas, teria verificado que esta transição gradual da poesia para a ciência não é apenas um processo secular: dá-se a cada momento, no acto da criação científica. Weierstrass não estava a sonhar quando observou:

'Um matemático que não seja ao mesmo tempo um pouco poeta não será nunca um matemático completo'.

Na verdade as intuições, primeiro nebulosas, inexprimíveis, depois balbuciantes e pouco a pouco concretizadas por meio de *imagens, analogias* ou *metáforas* – antes da formulação lógica precisa – tudo isso que é senão poesia? Como fantasmas shakespearianos, as verdades vão-se aproximando através de uma neblina. Porém, depois, ao contrário do que sucede na poesia, a intuição cede o lugar à lógica inflexível do *ser ou não ser;* a neblina vai-se dissipando ao sol da razão – e, em vez de fantasmas, encontram-se muitas vezes *factos positivos*. É aí que está a diferença.

Que ilações nos podem sugerir, do ponto de vista pedagógico, as considerações anteriores? É bem simples:

Um ensino das ciências, que não seja acompanhado de uma

([1]) Extraímos esta citação do interessante ensaio do Dr. António Lobo Vilela, 'Ciência e Poesia'.

boa educação estética e que não fale à imaginação dos alunos, está condenado *a priori*, pela sua própria aridez, a afastar muitos dos melhores talentos. Por isso acontece, especialmente entre nós, que muitos se voltam para outros interesses.

Possamos nós, professores, orientar em boa parte a imaginação poética da nossa juventude, para os sonhos lúcidos, no campo imenso onde germinam e florescem as grandes ideias da ciência contemporânea.

Índice