J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA
PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(2.º E 3.º VOLUMES)

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

VI

RACIONALIZAÇÃO MATEMÁTICA DO CONTÍNUO

'A harmonia do universo não conhece senão uma forma musical — o *legato*; enquanto a sinfonia dos números só conhece o oposto — o *staccato*'.

TOBIAS DANTZIG (*O número, linguagem da ciência*)

1. O conceito de número irracional, que obriga a substituir o *esquema discreto* dos números inteiros pelo *esquema contínuo* dos números reais, nasceu de um drama na história do pensamento: a descoberta dos incomensuráveis em geometria, *por necessidade de coerência lógica*. 'Diz-se que as pessoas que primeiro divulgaram os números irracionais pereceram todos num naufrágio; porque o inexprimível, o informe, deve ser mantido absolutamente secreto'. O que estas palavras de Procio encerram de emoção dramática deve surpreender todos aqueles que, não tendo vivido a experiência da investigação, se obstinam em ver na matemática uma ciência árida e fria.

Só em fins do século passado se conseguiu chegar a uma teoria lógica dos números reais, com a qual se procura racionalizar o devir contínuo do mundo físico. Dizia Platão: '*O Tempo é a imagem móvel da Eternidade*'. Modernamente, os filósofos do devir, desde

Hegel a Bergson, dizem algo de semelhante em sentido inverso, que se pode traduzir mais ou menos nestes termos:

'O contínuo matemático é uma imagem imóvel da mobilidade; uma imitação descontínua do devir contínuo'([1]).

Os paradoxos de Zenão renascem, sob novos aspectos, no campo filosófico. A polémica entre nominalistas e realistas ressurge, mais acesa do que nunca, sob novas e variadas vestes, revelando uma inquietude de espírito que é sempre salutar, dentro de certos limites.

Mas, entretanto, continua o êxito espectacular da análise infinitesimal na exploração do mundo físico. O sistema dos números reais é apenas um *esquema lógico*, como tantos outros, que há muito não pretende ser uma imagem fiel da realidade, mas que se tem revelado indubitavelmente *cómodo* e *eficiente*. Interessa, portanto, estudar a fundo esse esquema, aperfeiçoá-lo de maneira a eliminar dele toda a possibilidade de contradição interna e assentar sobre essa base sólida, por via dedutiva, todo o edifício da análise.

2. Vimos como, nas demonstrações mais delicadas relativas a números naturais, intervém essencialmente o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, que traduz uma propriedade característica do grupóide ($\mathbb{N}$, +), e que dá origem a novos tipos de raciocínio dedu-

---

([1]) Para Bergson, o protótipo da continuidade é o tempo, considerado como *duração pura*, essência da vida, de que tomamos consciência no interior do nosso eu. Assim, o tempo é reunião de passado e presente, num *processo evolutivo* em que há interpenetração de estados conscientes, e que não se reduz portanto a um conjunto de *elementos distintos* (instantes). Segundo Bergson, 'distintos' significa 'sem ligação mútua', o que é precisamente o oposto da *continuidade*.

tivo. Pergunta-se agora: 'Não haverá, no sistema dos números reais, uma propriedade análoga (embora diferente) na qual se baseiem necessariamente as demonstrações mais delicadas? Vamos ver que sim. *Mas para isso é necessário substituir o princípio de indução matemática em* $\mathbb{N}$ *por um outro equivalente, formulado em termos da relação* $<$.

Seja A um conjunto de números naturais. Diz-se que um número m é *elemento máximo* de A, sse *m* pertence a A e é superior ou igual a todo o elemento de A, isto é, sse:

$$m \in A \ \wedge \ \forall x \in A \ : \ m \geqslant x$$

Analogamente se define 'elemento mínimo'. Há conjuntos de números naturais que não têm elemento máximo (por exemplo, o próprio conjunto $\mathbb{N}_0$, o conjunto dos números pares, o conjunto dos números primos, etc.); mas, quando um conjunto A de números naturais tem um elemento máximo, *não pode ter mais nenhum elemento máximo,* como é fácil ver (se tivesse dois, um deles teria de ser menor que o outro e não seria, portanto, máximo).

O elemento máximo de um conjunto A, quando existe, representa-se por max A, e também se chama *último elemento de* A. O elemento mínimo de A representa-se por min A e também se chama *primeiro elemento de* A. Exemplos (em $\mathbb{N}$):

$$\max\{3,\ 2,\ 7,\ 5\} = 7 \quad , \quad \min\{3,\ 1\} = 1$$

$$\max\{5\} = \min\{5\} = 5$$

$$\max\{x\colon 5x \leqslant 23\} = 4 \quad , \quad \min\{x\colon 5x > 23\} = 5$$

$$\max\{n\colon n^2 \leqslant 27\} = 5 \quad , \quad \min\{n\colon n^2 > 27\} = 6$$

$$\max\{n\colon n \dashv a \wedge n \dashv b\} = \text{m. d. c. } (a,\ b)$$

$$\min\{m\colon a \dashv m \wedge b \dashv m\} = \text{m. m. c. } (a,\ b)$$

Aliás, estas notações podem ser introduzidas com vantagem logo no 6.º ano, *ou mesmo antes,* e usadas em diversos exercícios, sem qualquer teoria prévia.

Diz-se que um conjunto A de números naturais é *limitado,* sse existe pelo menos um número natural k superior ou igual a todo o elemento de A. É óbvio que, se A tem elemento máximo, A é limitado (pela própria definição). Mas a recíproca também será verdadeira? A intuição diz-nos que sim, isto é, diz-nos que:

PROPOSIÇÃO 1. *Se um conjunto* A *não vazio de números naturais é limitado, tem com certeza elemento máximo.*

Mas, para demonstrar esta proposição (que nos parece *evidente,* por intuição), temos de recorrer ao MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, associado ao MÉTODO DE REDUÇÃO AO ABSURDO[1]. Suponhamos que A *é limitado, mas não tem elemento máximo,* e designemos por X o conjunto constituído por *todos os números naturais inferiores ou iguais a algum elemento de* A, isto é:

$$X = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \exists y \in A \ : \ x \leqslant y\}$$

Então $1 \in X$ e é fácil ver que, se $n \in X$, também $n+1 \in X$ (de contrário *n* seria elemento máximo de A). Logo $X = \mathbb{N}$. Mas existe um número natural k superior ou igual a todo o elemento de A (*porquê?*) e esse número será também superior ou igual a todo o elemento de X (*porquê?*). Mas isto é impossível, por ser $X = \mathbb{N}$.

(1) Esta demonstração e as seguintes são aqui dadas apenas a título de curiosidade.

A partir da proposição anterior, demonstra-se agora facilmente a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2. *Todo o conjunto* A *não vazio de números naturais tem elemento mínimo.*

(Basta considerar o conjunto A' dos números inferiores ou iguais a todo o elemento de A e ver que: 1.° A' não é vazio; 2.° A' é limitado; 3.° max A' = min A.)

O mais curioso é que, a partir da PROPOSIÇÃO 2 e dos axiomas A1-A4 dos números naturais, se pode demonstrar o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM IN (definindo a relação $<$ a partir da adição, como se tem indicado, e o número 1 como o *primeiro elemento de* IN).

Com efeito, seja X um subconjunto de IN que verifica as duas seguintes condições:

$$1 \in X \quad , \quad n \in X \Rightarrow n+1 \in X$$

Queremos provar que X = IN. Suponhamos o *contrário*, isto é, que X ≠ IN, e seja Y o complementar de X em IN, isto é:

$$Y = \mathbb{N} \setminus X$$

Então Y *não é vazio* e tem, portanto, um elemento mínimo, *m*. Mas $m \neq 1$ e $m-1 \in X$ (*porquê?*). Portanto $m \in X$ (*porquê?*). *Mas isto é impossível, porque* $m \in Y$.

Assim, em conclusão:

A PROPOSIÇÃO 2 é equivalente ao PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM IN, desde que se admitam os axiomas A1-A4, bem como as referidas

definições da relação $<$ e do número 1. E o mesmo se pode dizer quanto à PROPOSIÇÃO 1, visto que:

$$\text{PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM } \mathbb{N} \Rightarrow \text{PROPOSIÇÃO 1}$$

$$\text{PROPOSIÇÃO 1} \Rightarrow \text{PROPOSIÇÃO 2}$$

$$\text{PROPOSIÇÃO 2} \Rightarrow \text{PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM } \mathbb{N}$$

Verifica-se, pois, *equivalência* entre as três proposições consideradas, desde que se admitam os axiomas A1-A4 e as referidas definições [1]. E não haverá *círculo vicioso* na teoria dedutiva, desde que *uma* destas proposições seja admitida como axioma.

3. Vejamos, agora, o que se passa no universo $\mathbb{R}$, quanto às propriedades de máximo e de mínimo. Para isso, convém desde já introduzir as seguintes definições:

Dado um conjunto A de números reais, diz-se que um número real k é *majorante de* A, sse k é superior ou igual a todo o elemento de A, isto é, sse:

$$\forall x \in A \ : \ k \geqslant x$$

Diz-se que k é *minorante* de A, sse:

$$\forall x \in A \ : \ k \leqslant x$$

---

[1] Pode parecer que, para provar que a prop. 1 implica a prop. 2, seja necessário admitir como axioma a existência do primeiro elemento de $\mathbb{N}$. Uma análise mais fina da questão mostra que tal não é necessário.

O conjunto A diz-se *limitado superiormente*, sse existe pelo menos um majorante de A em $\mathbb{R}$; diz-se *limitado inferiormente*, sse existe pelo menos um *minorante* de A em $\mathbb{R}$; diz-se *limitado*, sse é limitado superiormente e limitado inferiormente. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}^+$ é limitado inferiormente, o conjunto $\mathbb{R}^-$ é limitado superiormente e o conjunto $[0,1]$ é limitado.

Se existe um majorante de A que seja elemento de A, este chama-se *elemento máximo (ou último elemento) de* A, e representa-se por max A. Se existe um minorante de A que seja elemento de A, este chama-se *elemento mínimo* (ou *primeiro elemento) de* A, e representa-se por min A. Por exemplo:

$$\max\,[0,1] = 1 \quad , \quad \min\,[0,1] = 0$$

Estas definições podem ser estendidas a *qualquer conjunto ordenado*, em vez de $\mathbb{R}$. Quando se trata do conjunto ordenado $(\mathbb{N}, <)$, todo o conjunto A contido em $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente; por isso, neste caso, dizer que o conjunto A é *limitado superiormente* equivale a dizer que é *limitado*, o que justifica a definição deste conceito dada no número anterior.

Voltemos ao universo $\mathbb{R}$ e seja A, por exemplo, o conjunto dos *números positivos menores que* 1, isto é:

(1) $$A = \{x : 0 < x < 1\} =]0,1[$$

Este conjunto é, evidentemente, limitado: são majorantes de A o número 1 e qualquer número maior que 1; são minorantes de A, o número 0 e qualquer número negativo. Mas, pergunta-se:

Tem este conjunto elemento máximo? Tem este conjunto elemento mínimo?

A resposta a qualquer das perguntas é negativa, *embora o conjunto seja limitado*. Com efeito, vejamos:

O número 1 é majorante de A, *mas não pertence a* A. Se existisse um elemento m máximo de A, teria de ser, segundo (1):

$$m < 1$$

Mas então existiria, pelo menos, um número real m' tal que

$$(2) \qquad m < m' < 1 \quad , \quad \text{por exemplo } m' = m + \frac{1-m}{2}$$

Então, segundo (1), m' seria elemento de A, e, segundo (2), m não seria elemento máximo de A, contra a hipótese.

Analogamente se prova que não existe mínimo de A.

Assim, como se vê, a PROPOSIÇÃO 1 do número anterior não se estende a IR. No entanto, observa-se o seguinte:

A demonstração anterior mostra que 1 é *o menor dos majorantes de* A e que 0 é o *maior dos minorantes de* A. Exprimem-se estes factos dizendo que 1 é o *extremo superior* (ou o *supremo*) *de* A e que 0 é o *extremo inferior* (ou o *ínfimo*) *de* A; e escrevendo:

$$1 = \sup A \quad , \quad 0 = \inf A$$

Dum modo geral:

DEFINIÇÕES. Diz-se que k é o *supremo* de um conjunto A (limitado superiormente), sse k é o menor dos majorantes de A, isto é, o elemento mínimo do conjunto dos majorantes de A. Diz-se que *k* é o *ínfimo* de um conjunto A (limitado inferiormente), sse k é o maior dos minorantes de A, isto é, o elemento máximo do conjunto dos minorantes de A. No primeiro caso escreve-se $k = \sup A$ e no segundo $k = \inf A$.

Facilmente se reconhece que um conjunto não pode ter mais de um supremo nem mais de um ínfimo. Por outro lado, é evidente que

$$\sup A = \max A \quad , \quad \text{sse} \quad \sup A \in A$$

$$\inf A = \min A \quad , \quad \text{sse} \quad \inf A \in A$$

Por exemplo:

$$\sup\,]0, 2] = \max\,]0, 2] = 2$$

$$\inf\, [0, 2[\, = \min\, [0, 2[\, = 0$$

Mas *não existe* $\max\, [0, 2[$, porque $2 \notin [0, 2[$, etc.

Analogamente, se designarmos por M o conjunto dos *números inversos dos números naturais,* isto é:

$$M = \left\{ 1 \;,\; \frac{1}{2} \;,\; \frac{1}{3} \;,\; \dots \;,\; \frac{1}{n} \;,\; \dots \right\}$$

teremos $\sup M = 1 = \max M$, $\inf M = 0 \notin M$.

Ora a propriedade que, em $\mathbb{R}$, substitui a PROPOSIÇÃO 1 (em $\mathbb{N}$) é a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1'. *Todo o conjunto de números reais limitado superiormente tem supremo em* $\mathbb{R}$.

Esta propriedade pode ser demonstrada, *se admitirmos que os números reais são representados pelas dízimas infinitas (precedidas ou não do sinal −), com as convenções usuais relativas à relação* $<$.

Com efeito, seja A um conjunto de números reais limitado superiormente. Dois casos se podem dar:

1.º $\exists x \in A: x > 0$. Ponhamos $A^+ = \{x: x \in A \wedge x > 0\}$. Então A^+ não é vazio e o conjunto das *partes inteiras* dos elementos de A^+ é limitado *(porquê?)*. Seja a_0 o elemento máximo desse conjunto de inteiros e designemos por A_1^+ o conjunto dos elementos de A^+ cuja parte inteira é a_0. Então A_1^+ não é vazio. Seja a_1 o *maior dos algarismos das décimas* dos elementos de A_1^+. Dum modo geral, seja (¹)

$$\begin{cases} a_n = \text{máx. algarismo decimal de ordem } n \text{ dos elementos de } A_n^+ \\ A_{n+1}^+ = \{x : x \in A_n^+ \wedge \text{algarismo decimal de ordem n de } x = a_n\} \end{cases}$$

Posto isto, seja s o número representado pela dízima infinita cuja parte inteira é a_0 e cujo algarismo decimal de ordem n é a_n, $\forall n \in \mathbb{N}$; isto é, *em notação intuitiva:*

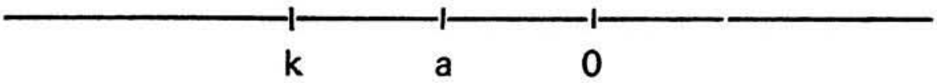
$$s = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \quad (^2)$$

Então $s = \sup A^+ = \sup A$ *(porquê?)*.

(¹) Seria mais correcto dizer: 'a_n é o maior dos números representados pelos algarismos decimais de ordem *n* dos elementos de A^+'.

(²) Se a dízima for periódica de período 9, pode substituir-se pela dízima normal equivalente.

2.º $\forall x \in A$: $x \leqslant 0$. Tomemos arbitrariamente $a \in A$, $k < a$, e seja B o conjunto dos números $y = x - k$ com $x \in A$.



Então $0 < a - k \in B$ e assim B está no 1.º caso:

Seja $r = \sup B$, $s = r + k$. Então $s = \sup A$ *(porquê?)*.

DA PROPOSIÇÃO 1' fácilmente se deduz a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2'. *Todo o conjunto de números reais limitado inferiormente tem ínfimo em* $\mathbb{R}$.

Com efeito, se for A um tal conjunto e se designarmos por M o conjunto dos minorantes de A, M é limitado superiormente e é fácil ver que $\sup M = \max M = \inf A$.

De modo análogo podíamos deduzir a PROPOSIÇÃO 1' da PROPOSIÇÃO 2'. Ora bem:

A PROPOSIÇÃO 1' *(ou a* PROPOSIÇÃO 2' *equivalente) é muitas vezes tomada como axioma da teoria dos números reais, desempenhando aí papel análogo ao do* PRINCÍPIO DE INDUÇÃO EM $\mathbb{N}$

4. Para ver como a PROPOSIÇÃO 1' pode ser tomada para axioma de uma teoria dedutiva dos números reais, convém adoptar o ponto de vista geral das *estruturas de ordem.*

Consideremos um conjunto ordenado $(U, \preceq)$ qualquer (subentende-se que se trata de uma relação de *ordem total estrita).* As definições de 'majorante', 'minorante', 'supremo', 'ínfimo', etc. podem ser dadas como em $\mathbb{R}$. Para indicar que um elemento k de U é majorante ou minorante de um subconjunto A de U, escreveremos, respectivamente:

$$A \preceq k \quad , \quad k \preceq A$$ (1)

Será pois, *por definição:*

$$A \preceq k \Leftrightarrow \forall x \in A \; : \; x \preceq k$$

e analogamente para $k \preceq A$.

Por sua vez, as definições de *sup* e *max* serão:

$$m = \sup A \Leftrightarrow A \preceq m \wedge (A \preceq k \underset{k}{\Rightarrow} m \preceq k)$$

$$m = \max A \Leftrightarrow m = \sup A \wedge m \in A$$

Analogamente se definem *inf* e *min*.

Designando agora por $\mathcal{L}_s$ a classe dos conjuntos limitados superiormente em U, tem-se, *por definição:*

$$A \in \mathcal{L}_s \Leftrightarrow \exists k \in U \; : \; A \preceq k$$

Analogamente se define a classe $\mathcal{L}_i$ dos conjuntos *limitados inferiormente*. Posto isto:

DEFINIÇÃO. Diz-se que o conjunto ordenado U é *completo*

---

(1) Recordemos que o sinal $\preceq$ se lê 'precede ou é igual a'.

sse todo o conjunto limitado superiormente em U tem supremo em U, isto é, sse:

$$\forall A \in s \quad , \quad \exists m \in U \quad : \quad m \mathcal{L} = \sup A$$

Facilmente se reconhece que esta condição é equivalente à seguinte:

$$\forall A \in \mathcal{L}^i \quad , \quad \exists m \in U \quad : \quad m = \inf A$$

À propriedade de *ser completo* chamaremos *'completude'*.

Desde logo se vê que são completos os conjuntos IN, IN_0 e Z, com a relação de ordem usual. Mas, em qualquer destes casos, o *supremo* é sempre *máximo* e o *ínfimo* é sempre *mínimo*.

Vejamos ainda um exemplo concreto. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto das palavras do *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, de Cândido de Figueiredo. É evidente que $\mathcal{D}$, com a ordem alfabética, é um *conjunto ordenado completo* (limitado). Seja $\mathcal{D}_B$ o conjunto das palavras de $\mathcal{D}$ começadas por 'B'; o supremo de $\mathcal{D}_B$ é a palavra 'Bisantino', que, por pertencer a $\mathcal{D}_B$, é também o máximo (ou último elemento) deste conjunto.

Aliás, é intuitivo e pode-se provar que:

Se um conjunto ordenado U *é finito, todo o subconjunto de* U *tem primeiro elemento e último elemento (e portanto* U *é completo).*

A recíproca desta proposição também é verdadeira e pode servir para uma nova definição de *'conjunto finito'*.

Vejamos mais dois exemplos:

1) Designemos por $\mathbb{Q}^*$ o conjunto de todos os números reais que podem ser representados por *dízimas finitas*, precedidas ou não

do sinal −. É claro que $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{Q}$. Será $\mathbb{Q}^*$ um conjunto ordenado completo (com a relação de ordem usual)? É fácil ver que não. Seja, por exemplo, A o conjunto dos números

$$0{,}6 \; ; \; 0{,}66 \; ; \; 0{,}666 \; ; \; \ldots \; ,$$

representados por todas as dízimas finitas cuja parte inteira é 0 e cujos algarismos decimais são todos 6. O conjunto A tem supremo em $\mathbb{Q}$ (o número 2/3), mas não em $\mathbb{Q}^*$, visto que 2/3 não é representável por nenhuma dízima finita.

2) O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, ordenado segundo o critério usual, não é completo. Seja, por exemplo, A o conjunto dos números racionais cujo quadrado é menor que 2:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \; : \; x^2 < 2\}$$

Este conjunto tem supremo em $\mathbb{R}$ (o número $\sqrt{2}$), mas não em $\mathbb{Q}$, visto que $\sqrt{2}$ não é racional.

O conjunto ordenado $\mathbb{R}$ obtém-se precisamente *completando* $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}^*$).

5. Chegou, agora, o momento de apresentar uma *axiomática* dos números reais em termos de *'adição'*, *'multiplicação'* e *'relação de grandeza'*. Trata-se de caracterizar axiomaticamente o sistema $(\mathbb{R}, +, \times, <)$. Uma tal caracterização pode ser a seguinte:

I) $\mathbb{R}$ é um corpo a respeito das operações + e ×.

II) $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado completo, a respeito da relação $<$.

III) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad : \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$

IV) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad : \quad a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

A propriedade III é a *monotonia da adição* e a propriedade IV, a *monotonia parcial da multiplicação.*

É claro que esta axiomática se apresenta já extremamente condensada. Assim, o axioma I é a conjunção dos seguintes: axiomas de grupo comutativo ($\mathbb{R}$, +), axiomas de semigrupo comutativo ($\mathbb{R}$, ×), axiomas da existência de elemento unidade, axioma da existência de inverso para todo o elemento $\neq 0$ e distributividade da multiplicação a respeito da adição. Por sua vez, o axioma II é a conjunção dos seguintes: axioma de conjunto ordenado e *axioma da completude.*

Provaremos mais adiante que esta axiomática é *categórica,* isto é, que *duas realizações da axiomática são necessariamente isomorfas* (a respeito das operações +, × e da relação <). Por conseguinte, a axiomática define efectivamente a *estrutura do corpo ordenado* ($\mathbb{R}$, +, ·, <), mas não o conceito de *número real.*

Assim, todas as proposições verdadeiras relativas a números reais – todos os *teoremas de análise real* – podem ser demonstradas a partir do anterior sistema de axiomas e das definições que forem sendo introduzidas para simplificar a linguagem.

Quanto ao *conceito de número real,* já sabemos que surge naturalmente no PROBLEMA DA MEDIÇÃO DE GRANDEZAS (de que trataremos mais adiante), assim como o *conceito de número natural* nasce do problema da CONTAGEM DOS ELEMENTOS DE UM CONJUNTO FINITO.

6. Observemos entretanto que, nos conjuntos ordenados $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}$, etc., se verifica a seguinte propriedade, muito importante:

Quaisquer que sejam os elementos a, b, *sendo* a $\neq$ b, *existe sempre, pelo menos, um elemento* x *do conjunto situado entre* a *e* b.

Com efeito, em qualquer dos conjuntos considerados, existe por exemplo o número $x = \frac{a+b}{2}$, que está situado entre *a* e *b*. Assim, se for por exemplo $a < b$, tem-se $2a < a + b < 2b$, donde, dividindo por 2:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Ora bem:

I. Diz-se que um conjunto ordenado U é *denso*, sse tem mais de um elemento e possui a referida propriedade. Esta pode traduzir-se do seguinte modo:

$$\forall a,b \in U \quad : \quad a \prec b \Rightarrow \exists x \in U \quad : \quad a \prec x \prec b$$

II. Diz-se que um conjunto ordenado U é *contínuo*, sse é denso *e* completo.

Desde logo se vê que:

1) Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ *não são densos* e, portanto, *não são contínuos*, embora sejam *completos*.

2) Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^*$ são *densos*, mas *não contínuos*, visto que *não são completos*.

3) O conjunto $\mathbb{R}$ é *denso e completo*, portanto *contínuo*. E o mesmo se pode dizer dos conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ e, dum modo geral, de todos os intervalos em $\mathbb{R}$ que não se reduzem a um ponto.

Convém, agora, registar uma terceira definição:

III. Diz-se que um conjunto ordenado U é *discreto*, sse todo o subconjunto limitado de U, não vazio, tem máximo e tem mínimo em U.

Desde logo se vê que *todo o conjunto discreto é completo, mas não contínuo*. Com efeito, seja *a* um elemento qualquer de um conjunto discreto; então, três casos se podem dar:

1.° $\exists x \in U \ : \ a \prec x$. Neste caso, seja x_0 um tal elemento e ponhamos

$$A = \{x \in U \ : \ a \prec x \prec x_0\}$$

Como A é limitado tem mínimo em U: seja min A = b. Então é claro que $\sim \exists x \in U: a \prec x \prec b$ e diz-se que b é *o sucessor de* a (ou que a é *o antecessor de* b).

2.° $\exists x \in U \ : \ x \prec a$. Analogamente se prova que, neste caso, a *tem antecessor em* U.

3.° U tem um só elemento. Neste caso U *também não é denso*, por definição.

Posto isto, não é difícil reconhecer que:

Todo o conjunto ordenado discreto, com primeiro elemento e sem último elemento, é isomorfo a $\mathbb{N}$. *Todo o conjunto ordenado discreto sem primeiro e sem último elemento é isomorfo a* $\mathbb{Z}$. *Todo o conjunto ordenado discreto com primeiro e com último elemento é finito.*

Vemos pois, aqui, caracterizações axiomáticas dos conjuntos ordenados $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}_0$) e $\mathbb{Z}$.

Quando um conjunto discreto U tem *primeiro* elemento, chama-se *segundo* elemento de U o sucessor do primeiro, *terceiro* elemento de U o sucessor do segundo, e assim sucessivamente. Os adjectivos 'primeiro', 'segundo', 'terceiro', etc., são *numerais ordinais*, que se distinguem nitidamente dos *numerais cardinais* 'um', 'dois', 'três', etc.

Convém ainda notar que um conjunto ordenado pode não ser discreto e não ser contínuo; exemplos: os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^*$, etc.

7. Põe-se, agora, a seguinte questão:

Entre as noções anteriores, qual o mínimo que se deverá exigir a um aluno do 3.º ciclo?

Em primeiro lugar, parece-nos que seria conveniente dar-lhes as noções de 'majorante', 'minorante', 'supremo', 'ínfimo', 'máximo', 'mínimo' (de um conjunto), bem como as de 'conjunto ordenado completo', 'conjunto ordenado denso', 'conjunto ordenado contínuo' e 'conjunto ordenado discreto' – com exemplos, mas sem demonstrações.

Em segundo lugar, haveria todo o interesse em apresentar-lhes uma axiomática da teoria dos números reais, como a anterior.

Mas não conviria ficar por aqui: mais tarde, quando o condicionalismo do nosso ensino secundário o permitisse, deveriam fazer-se algumas demonstrações em que interviesse o AXIOMA DA COMPLETUDE, para o aluno ficar a ter uma ideia do seu papel na estruturação lógica da análise – papel esse comparável ao do PRINCÍPIO DE INDUÇÃO em $\mathbb{N}$, como já foi observado atrás. Na verdade, quase todos os teoremas importantes da análise fazem intervir o axioma da completude: deixam de ser verdadeiros num domínio em que não se verifique tal axioma (por exemplo em $\mathbb{Q}$).

Exemplos de teoremas em que intervém o axioma da completude:

1) *Teoremas de Cauchy e de Weierstrass sobre funções contínuas* (em particular, o teorema de Cauchy permite afirmar a existência de $\sqrt[n]{a}$ e $\log_b a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}^+$; $n \in \mathbb{N}$, com $b \neq 1$).

2) *Os teoremas que relacionam o sinal da derivada de uma função num dado intervalo com o sentido da variação da função nesse intervalo.*

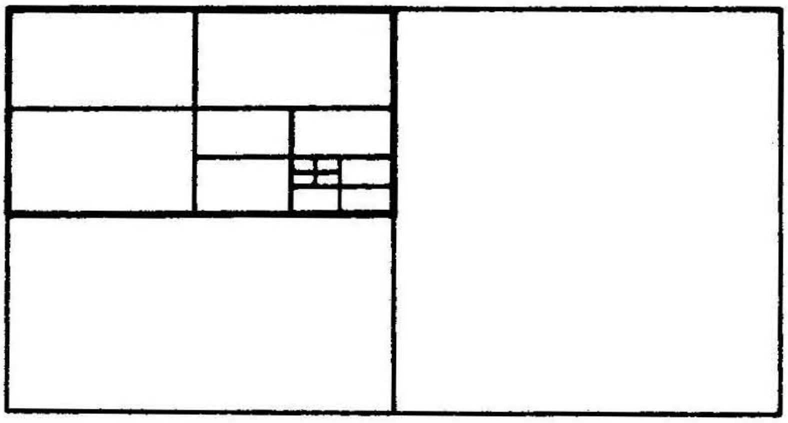
3) *O teorema segundo o qual toda a função contínua num intervalo limitado e fechado é integrável nesse intervalo.*

4) *O teorema segundo o qual toda a função monótona num intervalo limitado é integrável nesse intervalo.*

Acontece, porém, que as demonstrações destes teoremas são pouco acessíveis a alunos do 3.º ciclo, a não ser talvez as dos teoremas indicados em 1) e 2), que foram admitidos intuitivamente (trata-se efectivamente de factores muito intuitivos).

Haveria bastante interesse em que, pelo menos os alunos *muito bons,* vissem a demonstração de alguns desses teoremas. E, para tornar mais atraente o assunto , conviria mostrar-lhes primeiramente que, tal como sucede com o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, o PRINCÍPIO DE COMPLETUDE dá origem a *novos métodos de raciocínio dedutivo,* alguns dos quais se podem apresentar com aspecto bastante pitoresco, apto a excitar a imaginação juvenil. Um desses é o MÉTODO DAS SUBDIVISÕES SUCESSIVAS DE INTERVALOS, a que certo matemático chamou humoristicamente, 'MÉTODO DE CAÇAR LEÕES'. Em vez de 'leões', poderíamos falar de 'jacarés', 'bandidos', 'pulgas', 'mixordeiros', etc.: depende do gosto e da fantasia de cada um. Adoptando a interpretação de caça aos bandidos' ou 'caça aos mixordeiros' o método pode ser apresentado sob a forma de *história de tipo policial,* que, como já sabemos, se presta muito para exemplificações de raciocínio lógico. Imaginemos a seguinte versão:

'Na cidade X do país Y começaram a aparecer no mercado grandes quantidades de carne ensacada imprópria para o consumo. Posta em campo a polícia, descobriu-se que o artigo provinha de certo bairro da cidade.



Para proceder metodicamente, a polícia marcou, numa planta da cidade, o bairro em questão, traçando à sua volta um rectângulo R, que dividiu em 4 rectângulos iguais. Após várias pesquisas, as suspeitas concentraram-se principalmente num desses rectângulos, R_1. Este foi então dividido em quatro rectângulos, R_2. Procedendo assim, *por aproximações sucessivas,* a polícia acabou por se encontrar defronte de um tapume alto, entre dois prédios. Ora, atrás do tapume e encoberto por este, achava-se uma vivenda de aspecto romântico, meio arruinada: era ali que se fabricavam (pelo menos em parte) os referidos produtos de salsicharia. Com grande surpresa, verificou-se que estes eram feitos com carne de jumento!'(1)

---

(1) O caso deu muito que falar e a argúcia dos detectives foi justamente louvada. Aliás, tudo decorreu pacatamente – sem aquelas cenas emocionantes

Como se pode ajuizar por este exemplo pitoresco, o MÉTODO DAS SUBDIVISÕES SUCESSIVAS é já em si um *método de aproximações sucessivas.* Na realidade, os variadíssimos métodos de aproximações sucessivas que se usam na prática do cálculo numérico *exigem o axioma da completude, para poderem ser inteiramente justificados.*

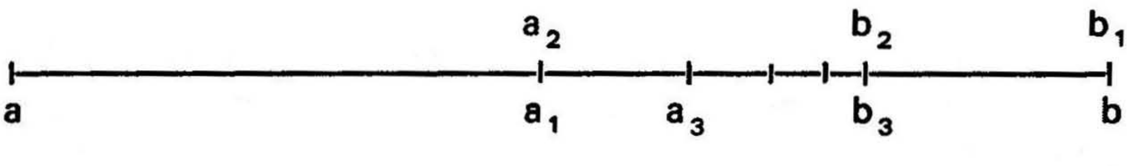
No exemplo anterior, tal como foi esboçado, o método é aplicado no plano. Na recta, em vez dos rectângulos R, R_1, R_2, ..., é-se conduzido a uma sucessão de intervalos,

$$I = [a, b] \quad , \quad I_1 = [a_1, b_1] \quad , \quad \ldots \quad , \quad I_n = [a_n, b_n] \quad , \ldots$$

cada um dos quais, a partir do segundo, é uma metade do anterior:

$$(1) \qquad a \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \quad , \quad b \geqslant b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$$

$$(2) \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \; , \; b_2 - a_2 = \frac{b-a}{4} \; , \; \ldots \; , \; b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \; , \; \ldots$$



Nestas condições, a sucessão a_n *converge para um número* λ (por ser limitada e crescente em sentido lato), a sucessão b_n *con-*

---

dos filmes de *suspense*, com que, por esse mundo fora, a TV se esforça por melhorar o intelecto e os instintos dos cidadãos. O método seguido foi, na verdade, engenhoso. É claro que há muitos outros processos para detectar mixordeiros. Mas, como a imaginação humana não tem limites, são também muitos os modos de vender carne de jumento.

verge para um número μ (por ser limitada e decrescente em sentido lato) e tem-se $\lambda = \mu$, visto que, de (2), resulta:

$$\lim b_n - \lim a_n = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0$$

Em conclusão:

Existe um e um só ponto λ *que pertence a todos os intervalos* $I, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ *nas condições indicadas.*

Este ponto λ é o *leão que foi caçado,* segundo a primeira interpretação humorística que foi citada ([1]).

Resta um ponto importante a esclarecer:

Onde intervém aqui o axioma da completude?

É precisamente na existência do limite das sucessões a_n, b_n. No *2.° volume do Compêndio,* p. 85, o CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DAS SUCESSÕES MONÓTONAS é demonstrado, *admitindo que os números reais são representados pelas dízimas infinitas segundo as convenções usuais.* Ora é aí mesmo que intervém o axioma.

([1]) No plano, as considerações são análogas, tomando as coordenadas dos vértices dos sucessivos restângulos considerados. Analogamente para o espaço, tomando paralelipípedos em vez de rectângulos.

Índice