

Instituto Superior de Agronomia

ELEMENTOS DE

GEOMETRIA DESCRITIVA

Segundo as lições do Ex.^{mo} Professor

Doutor Sebastião e Silva

Coligidas por

E. Cortesão

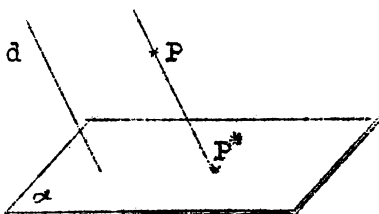
Elementos de

Geometria Descritiva

A Geometria Descritiva ensina a representar as figuras do espaço tridimensional sobre um plano, mediante um sistema de convenções que permite reconstituir as propriedades geométricas da figura - a sua forma e as suas dimensões reais.

Para resolver este problema utiliza-se o :

Conceito de projecção - Dados um plano α e uma direcção d não paralela a α , chama-se projecção dum ponto P sobre



bre α , segundo a direcção d ao ponto P^* , intersecção de α com uma recta paralela a d conduzida por P .

Como d não é paralela a α , cada ponto do espaço tem uma, e uma só, projecção sobre α , segundo a direcção d .

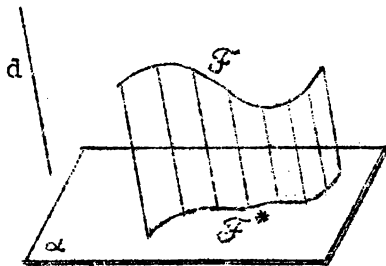
As rectas com a direcção d dizem-se projectantes; entre estas, a que passa por P diz-se a projectante de P .

Dado um ponto M qualquer sobre α , existem infinitos pontos do espaço cuja projecção sobre α segundo a direcção d coincide com M : todos os pontos da recta paralela a d conduzida por M .

Em particular, quando d é perpendicular a α , a projecção diz-se ortogonal; por conseguinte: projecção ortogonal do ponto P sobre o plano α é o pé da perpendicular a α conduzida por P . Neste caso, as rectas projectantes serão as rectas perpendiculares a α (a projectante de P será a recta que passa por P e é perpendicular a α).

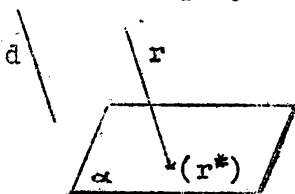
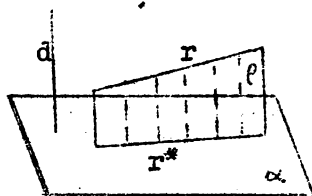
Projecção duma figura $\mathcal{F}$ sobre um plano α segundo a

direcção $\underline{d}$ é o conjunto $\mathcal{F}^*$ das projecções de todos os pontos de $\mathcal{F}$, sobre α segundo a direcção $\underline{d}$.



Consideremos o caso em que a figura $\mathcal{F}$ é uma recta $\underline{r}$ não paralela a $\underline{d}$; as rectas projectantes dos pontos de $\underline{r}$, ou sejam as rectas que se apoiam em $\underline{r}$ e são parale-

las a $\underline{d}$ têm como lugar geometrico um plano ρ - o plano que passa por $\underline{r}$ e é paralelo a $\underline{d}$ - plano este que se chama plano projectante de $\underline{r}$ segundo a direcção $\underline{d}$ e que intersecta o plano α segundo uma recta $\underline{r}^*$ - projecção de $\underline{r}$ sobre α segundo a direcção $\underline{d}$. (Quando se trata de projecções ortogonais, o plano projectante de $\underline{r}$ será o plano que passa por $\underline{r}$ e é perpendicular ao plano de projecção).



Se $\underline{r}$ fôr projectante, as projectantes dos seus pontos coincidem com $\underline{r}$ e todos os pontos se projectam num só; designaremos esse ponto por $(\underline{r}^*)$.

Em Geometria Descritiva usam-se varios sistemas de representação; estudaremos dois: o da dupla projecção ortogonal (ou de

Monge) e o das projectões cotadas.

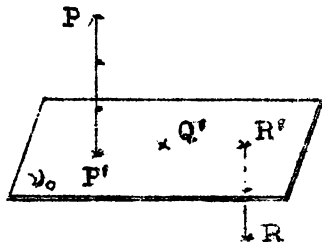
A) Método das projecções cotadas

Neste método, o plano de projecção (quadro ou plano de referência) supõe-se geralmente em posição horizontal; designa-lo-emos pela notação $\mathcal{V}_0$.

Representação do ponto - Dado um ponto P , chamaremos projectão horizontal ou simplesmente projectão de P , à projecção ortogonal de P sobre $\mathcal{V}_0$; representa-la-emos por P' .

Por outro lado chama-se cota de P a distância de P a α , com o sinal + ou o sinal -, conforme P estiver situado acima ou abaixo de α ; em particular, a cota será nula se o ponto estiver sobre α .

Segundo o que vimos, existem infinitos pontos do espaço cuja projecção horizontal coincide com a de P . Por conseguinte, não basta dar a projecção P' de P , para que este ponto fique determinado.



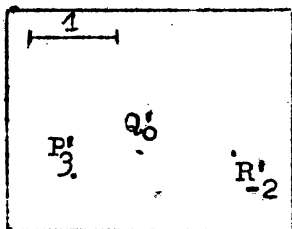
Mas o ponto P ficará determinado se, à projecção P' , associarmos a cota de P . Mais ainda: pode

estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço e os pares (P', z) constituídos por um ponto do plano α e por um número real z .

Resulta este facto das seguintes considerações:

Dado um ponto do espaço existe sempre um determinado ponto de α que é a sua projecção horizontal e um determinado número real que é a sua cota. Reciprocamente, dados um ponto M' de α e um número real z , existe um e um só ponto M do espaço cuja projecção é M' e cuja cota é z ; com efeito, existe uma só perpendicular a α conduzida por M' , o semi-espaço em que M se encontra está determinado pelo sinal de z , e sobre MM' , nesse semi-espaço, existe um e um só ponto M tal que $|MM'| = |z|$.

Na prática considera-se como plano de projecção o plano do papel sobre o qual se faz o desenho, escrevendo-se a cota como índice do símbolo representativo da projecção do ponto (à figura anterior corresponderia a figura junta).



Também é costume desenhar ao lado da figura um segmento que representa a unidade de medida.

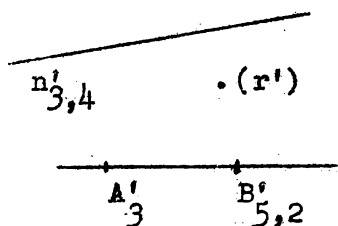
Chama-se distância horizontal de dois pontos à distância entre as suas projecções horizontais e distância vertical ao valor absoluto da diferença das suas cotas.

Dum modo geral, no sistema de projecções cotadas, ao

falar de projectão duma figura $\mathcal{F}$, subentende-se que se trata da sua projectão ortogonal sobre o quadro, isto é, sobre ν_0 . A projectão de $\mathcal{F}$ será designada por $\mathcal{F}'$.

Representação da recta - Chamam-se rectas horizontais ou de nível as rectas paralelas ao plano de projectão. Chamam-se rectas verticais, rectas projectantes, ou simplesmente projectantes, as rectas perpendiculares ao plano de projectão.

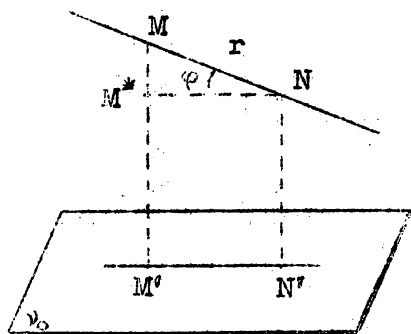
Uma recta horizontal, n , fica perfeitamente determinada pela sua projectão, n' , associada a um índice que representa a cota comum de todos os seus pontos (p.ex., $n'_{3,4}$, representa uma horizontal de cota 3,4). Uma recta vertical r fica perfeitamente determinada pela ^{sua} projectão (r') que se reduz a um ponto.



No caso geral, podemos representar uma recta r por meio das projectões cotadas de dois dos seus pontos; a projectão r' será a recta que une as projectões desses pontos; mas é claro que r' é insuficiente para determinar r .

Definições - Chama-se declive duma recta r à tangente trigonométrica do ângulo que r forma com o plano do quadro e intervalo de r ao inverso do declive de r .

Suponhamos a recta r definida por dois dos seus pontos M, N , e seja M^* o ponto da projectante de M cuja cota é



igual à de N ; designando por φ o ângulo que r faz com o quadro, deduz-se do triângulo rectângulo $[MM^*N]$ que o declive de r é:

$$d = \operatorname{tg} \varphi = \frac{|MM^*|}{|M^*N|} = \frac{|MM^*|}{|M'N'|}.$$

O declive duma recta será pois igual à razão entre a distância vertical de dois pontos quaisquer da recta e a

sua distância horizontal.

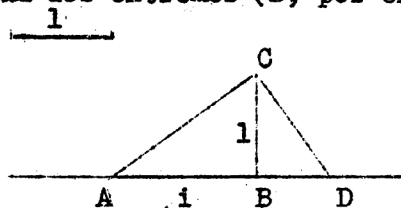
O intervalo de r é:

$$i = \cotg \varphi = \frac{|M^* N|}{|M M^*|};$$

em particular, se $|M M^*| = 1$, será $i = |M^* N|$; quer dizer: o intervalo é a distância horizontal de dois pontos da recta cujas cotas diferem de uma unidade.

O declive costuma exprimir-se em percentagens; assim uma recta com o declive de 5% será uma recta cujo declive é igual a 5/100. Por exemplo, dizer que uma estrada tem, num dado troço, o declive de 5% quer dizer que, a um percurso de 100 metros medidos em projecção horizontal (supondo o declive constante), corresponde nesse troço uma diferença de cotas de 5 metros.

Gráficamente pode construir-se o intervalo, dado o declive, ou o declive, dado o intervalo. Sobre uma recta qualquer marquemos $|AB| = i$ e sobre a perpendicular a AB num dos extremos (B, por exemplo) marquemos $|BC| = 1$; tra-

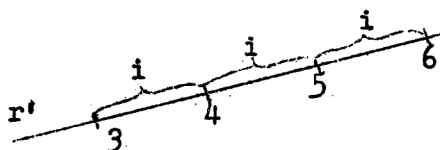


çando, agora $CD \perp AC$ obtemos sobre a recta AB um ponto D tal que $|BD| = d$; com efeito, como o triângulo $[ACD]$ é rectângulo em C, vem:

$$1^2 = i \cdot |BD|$$

donde $|BD| = \frac{1}{i} = d$.

Em projecções cotadas, costuma geralmente representar-se uma recta oblíqua r desenhando sobre o quadro a sua projecção r' , e marcando sobre r' as projecções de alguns



pontos de r , cujas cotas sejam números inteiros consecutivos. Diz-se que as projecções destes pontos constituem a gradação ou escala de declive da recta e o in-

tervalo desta será manifestamente a distância entre dois quaisquer pontos consecutivos da gradação.

Fácilmente se reconhece que o declive duma recta vertical é 00 e o seu intervalo é zero, enquanto numa recta

horizontal o declive é zero e o intervalo é infinito.

Representação do plano - Um plano α pode ocupar, em relação ao quadro, uma das seguintes posições:

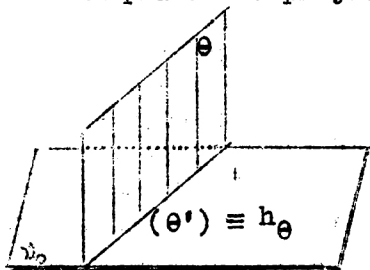
- a) paralelo ao quadro - plano horizontal ou de nível;
- b) perpendicular ao quadro - plano vertical ou projectante;
- c) nem paralelo nem perpendicular ao quadro - plano oblíquo

Um plano de nível não tem representação especial e designa-se por ν_n sendo n a cota comum de todos os seus pontos, ou simplesmente por ν , quando a cota não interesse.

Em particular, ν_0 é o plano de nível de cota 0 - o plano de referência.

Chama-se traço horizontal ou simplesmente traço dum plano α (não horizontal), a intersecção de α com ν_0 ; designá-lo-emos por h_α .

Se um plano θ é projectante, é claro que todos os



seus pontos se projectam sobre o traço horizontal de θ ; o plano fica então determinado pela sua projecção horizontal, que se reduz a uma recta coincidente com h_θ e que designaremos por (θ') .

Um plano oblíquo ficará perfeitamente determinado

pelas projecções cotadas de tres quaisquer seus pontos

$\ast A'_3$

$\ast B'_2$

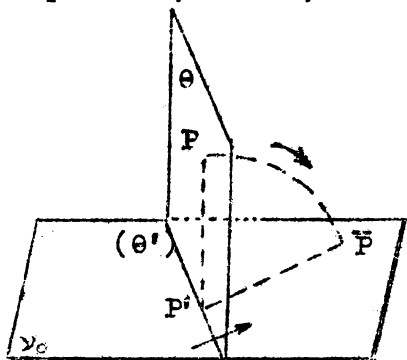
$\ast C'_4$

não colineares; por exemplo, o plano π definido pelos pontos A,B,C, ficará determinado pelas projecções cotadas de A,B,C, indicadas na figura junta. Mas na prática costuma utilizar-se um processo de representa-

ção mais cómodo.

Entre todas as rectas dum plano α , as que têm menor declive são as horizontais (o seu declive é nulo, e as suas projecções são paralelas a h_α) e as que têm maior declive são as rectas perpendiculares às horizontais (rectas

comprimento; isto é, se designarmos por $\bar{P}$ a posição de P depois do rebatimento, ter-se-á:



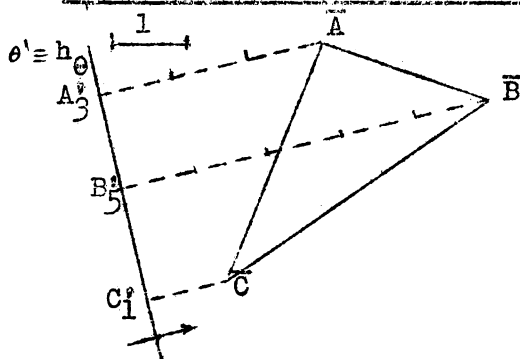
$$P'\bar{P} \perp (\theta')$$

e

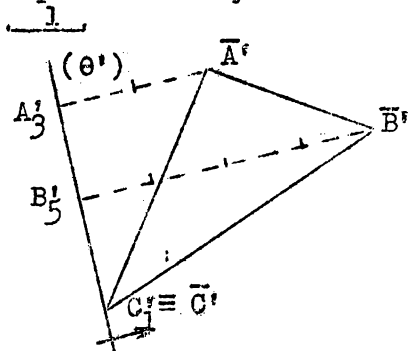
$$|P'\bar{P}| = |P'P| = |\text{cota de } P|$$

Em conclusão: Para obter o rebatimento de P (isto é, a posição de P depois do rebatimento de θ sobre ν_c), basta conduzir por P' uma

perpendicular a (θ') e sobre essa perpendicular marcar um segmento $|P'\bar{P}|$ de comprimento igual ao valor absoluto da cota de P , num ou noutro sentido, conforme o sinal da cota e conforme o lado para que se tiver feito o rebatimento; o ponto $\bar{P}$ será então o rebatimento de P .



(θ') (Na figura a seta indica o sentido considerado positivo para a marcação das cotas, após o rebatimento).



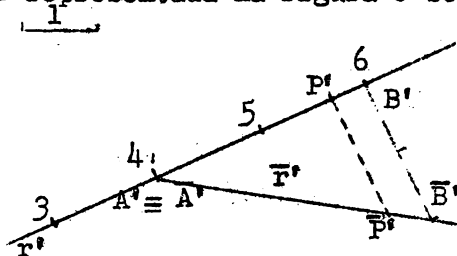
Na figura junta considerou-se um triângulo $[ABC]$, assente em θ , e determinou-se o rebatimento $[A\bar{B}\bar{C}]$ deste triângulo, achando os rebatimentos dos vértices pelo processo indicado. Como os vértices tem todos cota positiva, ficaram, depois do rebatimento, todos para um mesmo lado de

Se, em vez do rebatimento sobre ν_c , se pretendesse efectuar o rebatimento de θ sobre um plano de nível qualquer, o processo a seguir seria em tudo análogo ao anterior, com a única diferença de que, em vez das cotas dos pontos se deveriam marcar as diferenças entre

as cotas dos pontos e a cota do plano de nível sobre o qual se faz o rebatimento. Na última figura da página anterior considerou-se o rebatimento de θ sobre o plano de nível de cota 1.

Problemas:

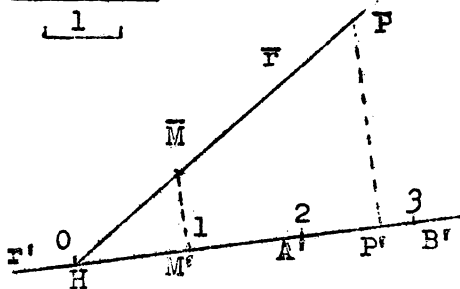
Dada a projecção dum ponto numa recta oblíqua determinar a cota desse ponto, supondo a recta definida pela sua escala de declive - Consideremos, por exemplo a recta r representada na figura e seja P' a projecção dum ponto



de r . Para determinar a cota de P temos dois métodos:

1º - Método gráfico - Consiste em rebater o plano projectante da recta sobre um plano de nível de cota inteira (na figura o rebatimento está feito sobre o plano de nível de cota 4).

Basta então achar os rebatimentos de dois pontos da recta, segundo o processo atrás indicado, e unir depois os pontos obtidos. No caso da figura escolheram-se os pontos A e B , de cotas 4 e 6 respectivamente (é claro que o ponto A se mantém fixo no rebatimento, por existir no plano de nível de cota 4 sobre o qual se faz o rebatimento). Unindo $\bar{A}$ com $\bar{B}$ tem-se $\bar{r}$, rebatimento de r . Em seguida, conduz-se por P' uma perpendicular a r' que vai encontrar $\bar{r}$ em P . A cota de P é portanto igual à cota do plano sobre o qual se fez o rebatimento aumentada da medida algebrica do segmento $[P'\bar{P}]$ (no caso da figura teremos cota de $P = 4 + 1,7 = 5,7$).



2º - Método numérico - Continuemos a considerar uma recta r definida pela sua projecção graduada, sendo dada a projecção P' dum ponto de r . Suponhamos efectuado o rebatimento do plano projectante de r sobre o plano π_0 . O ponto H

de cota 0 mantem-se fixo e o ponto M de cota 1 passará a ocupar a posição $\bar{M}$; o rebatimento P do ponto P estará sobre $\bar{r}$; Dos triângulos semelhantes $[H \bar{M} M']$ e $[H P P']$ deduz-se:

$$\frac{|\bar{P} P'|}{|\bar{M} M'|} = \frac{|H P'|}{|H M'|} ;$$

como $|\bar{M} M'| = 1$ e $|H M'| = i$, o comprimento do segmento $[\bar{P} P']$ é :

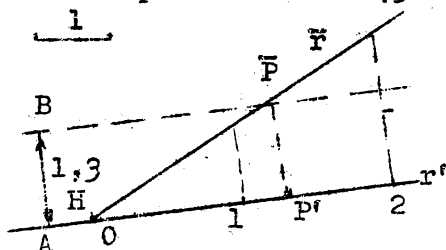
$$|\bar{P} P'| = \frac{|H P'|}{i} ,$$

querer dizer: a cota do ponto P é, em valor absoluto, igual ao cociente da distância de P' ao traço horizontal da recta, pelo intervalo da mesma.

Na prática, em geral, o que se mede não é a distância da projecção do ponto P dado ao traço horizontal da recta, mas sim a distância de P' à projecção do ponto A da recta, de cota inteira imediatamente inferior; dividindo esta distância pelo intervalo da recta e somando o resultado obtido à cota do ponto A considerado, obtém-se a cota de P .

Quando se não exige grande rigor, calcula-se a cota procurada por estimativa, vendo qual é a parte do intervalo compreendida entre a projecção do ponto de cota inteira imediatamente inferior e a projecção do ponto dado. (No caso da figura anterior como $|A' P'|$ é sensivelmente igual a 0,7 do intervalo da recta, a cota de P será aproximadamente $2 + 0,7 = 2,7$).

Dada a cota dum ponto duma recta determinar a projecção do ponto - Suponhamos por exemplo que se trata de determinar o ponto de cota 1,3 da recta r representada na fi-



gura

1ª - Método gráfico - Faz-se o rebatimento do plano projectante da recta sobre um plano de nível (sobre ν , por exemplo). Determinada $\bar{r}$ (rebatimento de r), marca-se a partir de r' , no senti-

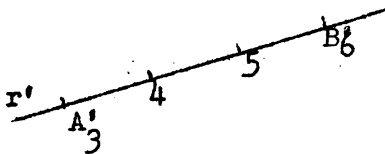
do conveniente, um segmento $[AB]$ perpendicular a r' e de comprimento igual ao valor absoluto da diferença entre a

cota do ponto e a do plano sobre o qual se fez o rebatimento (no caso da figura 1,3 - 0 = 1,3); pelo ponto B conduz-se uma paralela a r' que vai encontrar r no ponto P; não temos agora mais do que inverter o rebatimento para obter P' (isto é, P' será o pé da perpendicular baixada de P sobre r').

2º- Método numérico - O método é análogo ao usado para o problema anterior; reportando-nos à mesma figura teremos: $|HP'| = i \cdot |\overline{P'P}|$, em que são conhecidos o intervalo i e o comprimento $|P'P| = |cota de P|$. Então, calculado $|HP'|$, marca-se este comprimento sobre r' , a partir de H, no sentido conveniente. Em geral, o que se faz na prática é multiplicar o intervalo pela diferença entre as cotas do ponto P e do ponto A da recta de cota inteira imediatamente inferior; o resultado obtido dá-nos a distância de A' a P' ; para ter P' basta pois marcar essa distância a partir de A' , no sentido crescente das cotas.

Graduar uma recta - Em particular, o que acabámos de estabelecer permite-nos resolver o problema que consiste em graduar uma recta definida pelas projecções cotadas de dois seus pontos A e B. Se as cotas dos pontos dados

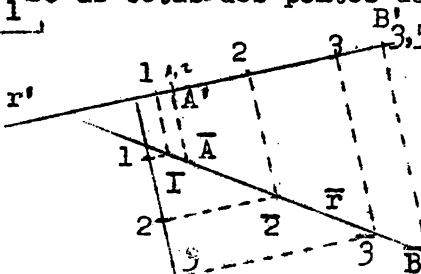
1



forem inteiras (3 e 6, por exemplo) basta dividir o segmento $[A'B']$ num número n de partes iguais, sendo n igual ao valor absoluto da diferença entre as cotas de A e B. No caso da figura, $n = 6 - 3 = 3$ e os pontos de

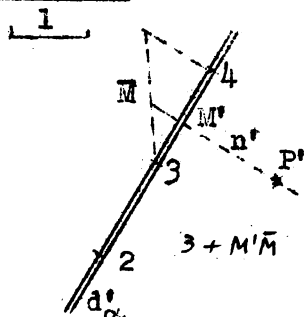
divisão dão-nos os pontos de cotas 4 e 5, ficando portanto a recta graduada.

1 Se as cotas dos pontos dados não são inteiras (1,2 e 3,5, por exemplo), procedemos como no problema anterior: rebate-se sobre α o plano projectante da recta r e sobre uma perpendicular a r' marcam-se, a partir de r' segmentos iguais a 1, 2, 3 unidades; pelos extremos destes segmentos conduzem-se paralelas a r' que vão en-



contrar $\bar{r}$ nos pontos $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$; não temos agora mais do que inverter o rebatimento.

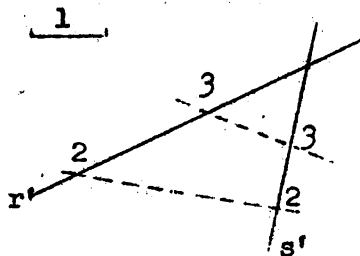
Dada a projecção dum ponto dum plano determinar a cota do ponto - Consideremos um plano α definido pela esca-



la de declive e seja P' a projecção de um ponto P de α . Para determinar a cota de P , basta utilizar a horizontal n' do plano que passa por P ; conduzindo por P' uma perpendicular a d'_α tem-se n' , que encontra d'_α em M' , ponto de d'_α com cota igual à de P . O problema reduz-se portanto a achar a cota do ponto M da recta d'_α conheci-

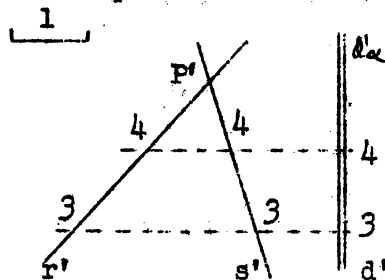
da a projecção de M - o que se pode resolver por qualquer dos processos atrás indicados.

Verificar se duas rectas são ou não complanas - Suponhamos as rectas dadas pelas suas escalas de declive. Se as duas rectas existem num mesmo plano as rectas que unem



pontos da mesma cota serão rectas de nível desse plano e então as suas projecções horizontais serão paralelas (no caso da figura, r' e s' não são complanas). A condição é não só necessária, como também suficiente, isto é, se as rectas que

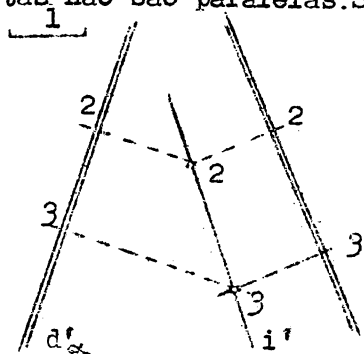
unem pontos da mesma cota são paralelas, as duas rectas são complanas. Podemos então representar o plano das duas



rectas pela sua escala de declive, atendendo a que a projecção d'_α duma linha de maior declive do plano é perpendicular às projecções das rectas de nível. Para determinar a cota do ponto P de encontro das rectas r, s , bastava resolver o problema considerando P como ponto dum

plano das rectas, do qual é conhecida a projecção P' (intersecção de r' com s').

Intersecção de dois planos - Suponhamos que os planos estão definidos pelas suas escalas de declive e que estas não são paralelas. Sejam α, β os planos dados. Como



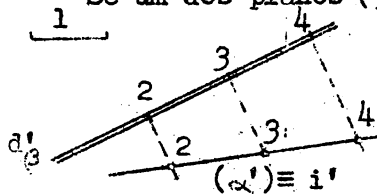
as escalas de declive de α e β não são paralelas, também o não são as rectas de nível da mesma cota dos dois planos; mas duas rectas de nível da mesma cota, uma de α e outra de β existem no mesmo plano de nível, logo encontram-se num ponto que pertence à intersecção de α com β ;

basta portanto determinar dois pontos nestas condições para obter a intersecção i dos dois planos, já graduada.

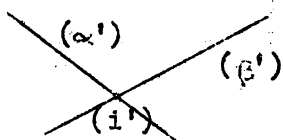
Se as escalas de declive são paralelas, já o problema não pode ser resolvido assim, mas este caso não nos interessa por agora.

Se um dos planos (por exemplo α) é de nível, sem o ser o outro plano, a intersecção de α com β será a horizontal de β cuja cota é igual à do plano α .

Se um dos planos (por exemplo α) é projectante, sem



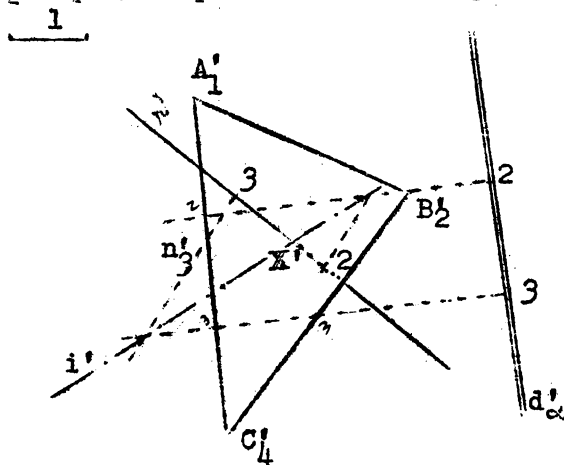
o ser o outro plano, a projecção de i será coincidente com (α') , obtendo-se imediatamente a gradação de i , como está indicado na figura.



Finalmente se ambos os planos são projectantes, é evidente que a intersecção i dos dois planos (se existe) será uma recta também perpendicular a ν_0 ; a sua projecção (i') é portanto a intersecção de (α') com (β') .

Intersecção duma recta r com um plano α - Começemos pelo caso em que r e α não são perpendiculares nem paralelos a ν_0 . O método geralmente usado consiste em conduzir por r um plano θ arbitrário não projectante. Determinando a intersecção i de α com θ , como r e i são coplanares, o seu ponto de encontro (se existe) será o ponto X procurado.

duma recta com o plano dum triângulo. Seja o triângulo $[ABC]$; pode proceder-se do seguinte modo:

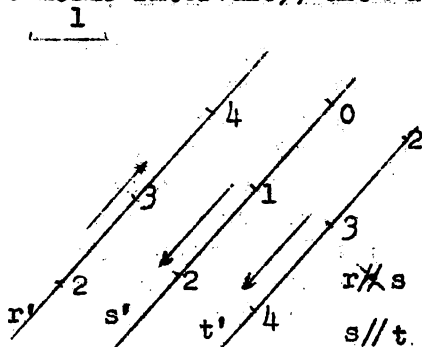


Determina-se a escala de declive do plano α do triângulo; toma-se um plano qualquer θ passando por r , o qual fica definido por r' e pela direcção das rectas de nível; determina-se a intersecção i dos dois planos e finalmente o ponto X procurado será a intersecção de i com r .

Supondo o triângulo opaco convencionam-se considerar como invisíveis os pontos situados abaixo do triângulo e visíveis os pontos situados acima (a parte invisível desenha-se a pontuado).

Questões de paralelismo

Se duas rectas são paralelas, as suas projecções serão também paralelas, e, como formam ângulos iguais com o plano de referência, têm o mesmo declive (e portanto o mesmo intervalo); além disso as cotas hão-de crescer no mesmo sentido.



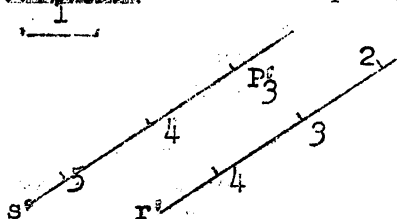
Por outro lado, facilmente se reconhece que, verificadas estas condições, as rectas são paralelas (na figura as setas indicam os sentidos de crescimento das cotas)

Portanto:

"É condição necessária e suficiente para que duas rectas sejam paralelas, que tenham projecções paralelas, intervalos iguais e cotas crescentes no mesmo sentido"

tenham projecções paralelas, intervalos iguais e cotas crescentes no mesmo sentido"

Problema - "Conduzir por P uma recta s paralela à recta r "

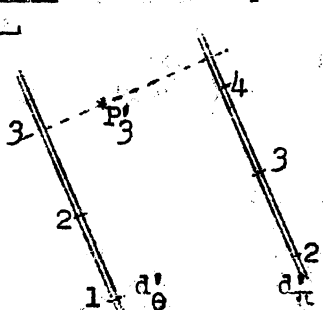


Conduz-se s' passando por P' e paralela a r' ; depois gradua-se s' a partir de P' de modo que os intervalos sejam iguais aos de r e as cotas cresçam no mesmo sentido.

É ainda fácil reconhecer que dois planos paralelos têm escalas de declive paralelas e que reciprocamente, dois planos são paralelos, desde que as suas escalas de declive o sejam. Portanto:

"Condição necessária e suficiente de paralelismo de dois planos é que tenham paralelas as projecções das escalas de declive, intervalos iguais e cotas crescentes no mesmo sentido"

Problema - "Conduzir por P um plano θ paralelo ao plano π "



Começa-se por determinar a recta de nível do plano θ de cota igual à do ponto P (essa recta será perpendicular a d_π); depois traça-se $d'_\theta \parallel d'_\pi$ e gradua-se d'_θ com intervalos iguais e cotas crescendo no mesmo sentido que d'_π .

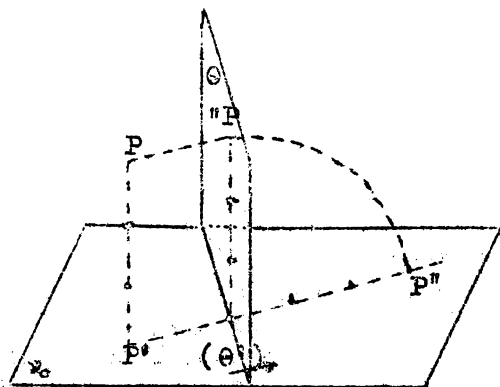
Utilização de um segundo plano de projecção

Muitas vezes é cómodo o uso de um plano auxiliar como 2º plano de projecção, o qual dáve ser vertical.

Seja, por exemplo o plano projectante θ , representado na figura pela sua projecção (θ') . Suponhamos dado um ponto P definido pela sua projecção cotada; conduzindo por P uma perpendicular a θ , esta recta vai encontrar θ num ponto " P " que é a projectão ortogonal de P sobre θ ; rebatendo em seguida θ sobre π , o ponto " P " irá

ocupar uma nova posição que designaremos por P'' , sendo fácil reconhecer que a distância de P'' a (θ') é igual ao va-

lor absoluto da cota de P. (Na 2ª figura estão representados em perspectiva os planos ν_0 e θ , o ponto P e a sua projecção sobre θ , antes e depois do rebatimento). Por conseguinte, podemos concluir:



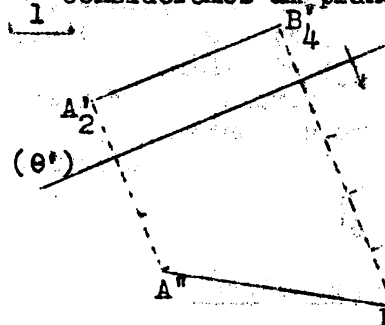
Para obter P'' , projecção rebatida de P sobre θ , basta conduzir por P' uma

perpendicular a (θ') e sobre ela marcar a partir de (θ') a cota de P, num ou noutro sentido, conforme o sinal da cota.

Na 1ª figura, a seta indica o sentido considerado positivo para a marcação da cota.

Exemplos de aplicação: 1) Distância de dois pontos A, B -

Consideremos um plano projectante θ paralelo à recta AB; a sua projecção



(θ') será paralela à projecção $A'B'$ da recta AB.

As projecções (rebatidas) dos pontos A, B sobre θ obtêm-se tal como foi há pouco indicado. Como o segmento [AB] é paralelo a θ , a sua projecção ortogonal sobre θ será um segmen-

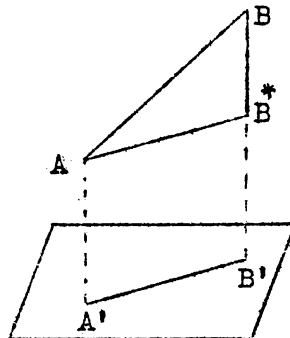
to igual. A distância dos pontos A, B é portanto dada por $|A''B''|$.

É claro que para resolver este problema, bastaria rebater o plano projectante da recta AB.

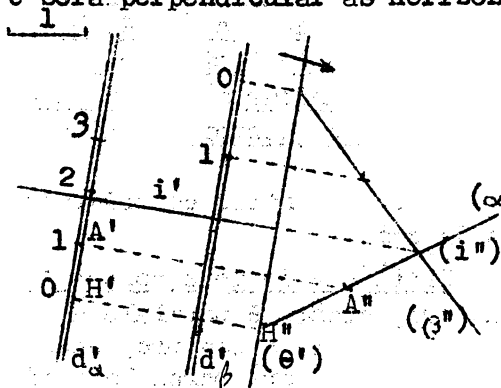
De resto, é fácil reconhecer que a distância dos dois pontos A, B é igual à hipotenusa dum triângulo rectângulo cujos catetos sejam iguais à distância horizontal e à distância vertical dos pontos considerados. Com efeito, o triângulo $[ABB'']$, rectângulo em B' , tem por catetos:

$|AB^*| = |A'B'| = \text{distância horizontal de A, B}$
 $|BB^*| = \text{diferença de cotas de A, B}$

2) Intersecção de dois planos α , β com escalas de declive paralelas - Já atrás nos referimos a este problema sem indicar como se resolve.



Tomemos um plano projectante θ cuja projecção (θ') seja paralela a d'_α e d'_β ; então θ será perpendicular às horizontais de α , β e portanto



a esses planos. Como $\alpha \perp \theta$, a projecção (rebatida) de α sobre θ reduz-se a uma recta (α''); para a obter determinamos as projecções H'' , A'' de dois pontos H , A de d_α (de cotas 0 e 1) e unimos A'' com H'' . Procedendo análogamente para β , tem-se (β''). Como α e β são perpendiculares a θ , também

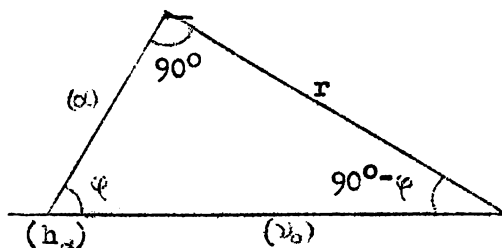
a intersecção, i , destes planos é perpendicular a θ ; a projecção de i sobre θ será portanto um ponto (i''), intersecção de (α'') com (β''). Para ter i' , resta conduzir por (i'') uma perpendicular a (θ'). Finalmente, a cota de i é dada pela distância de (i'') a (θ').

Questões de perpendicularidade

Para deduzir a condição de perpendicularidade entre uma recta e um plano, consideremos uma recta r e um plano α , perpendiculares entre si. É fácil ver que o plano projectante de r (plano que designaremos por ρ) é perpendicular ao traço do plano α em v_0 ; portanto ρ cortará os diedros formados por α e v_0 segundo rectilíneos e, como a medida dum diedro é igual à medida do seu rectilíneo, deduzimos da figura (pág. seguinte) que

$$\varphi = \hat{\alpha} v_0 \text{ (ângulo de } \alpha \text{ com } v_0) \quad 90^\circ - \varphi = \hat{r} v_0 \text{ (âng. de } r \text{ com } v_0)$$

Isto é: o ângulo que o plano α forma com v_0 é complementar do ângulo que a recta r forma com v_0 . Mas o declive do plano é $\text{tg } \varphi$ e o declive da recta é



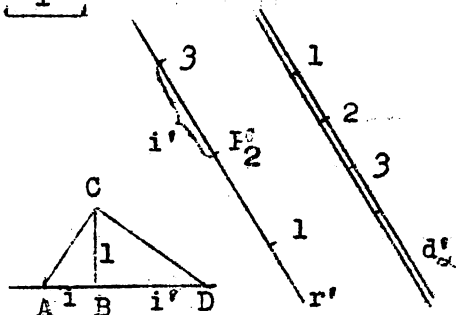
$$\text{tg } (90^\circ - \varphi) = \cotg \varphi = \frac{1}{\text{tg } \varphi};$$

logo os declives de r e α são inversos e portanto o intervalo da recta será também inverso do intervalo do plano (condição necessária de perpendicularidade de r e α).

É fácil reconhecer, por outro lado, que sendo r perpendicular a α a projecção de r é perpendicular às rectas de nível de α e portanto paralela às rectas de maior declive de α ; além disso as cotas dos pontos de r e de α crescem em sentidos opostos

Podemos finalmente estabelecer a seguinte regra:
"Condição necessária e suficiente de perpendicularidade entre uma recta e um plano é que: a projecção da recta seja paralela à projecção das rectas de maior declive do plano, os intervalos da recta e do plano sejam inversos e as cotas cresçam em sentidos contrários."

Problema - Conduzir por um ponto P uma recta perpendicular a um plano α .



Por P' traça-se $r' // d'_\alpha$; depois determina-se o recíproco i' do intervalo i de α e gradua-se r' com o intervalo i' determinado e cotas a crescer em sentido contrário às de d'_α .

Para determinar i' gráficamente marca-se sobre uma recta um segmento

$[AB]$ de comprimento igual a i ; numa das extremidades deste segmento (B , por exemplo) traça-se $BC \perp AB$, sendo $[BC] = 1$; por C conduz-se a recta CD perpendicular a AC e que encontra a recta AB num ponto D ; do triângulo $[ACD]$ tira-se:

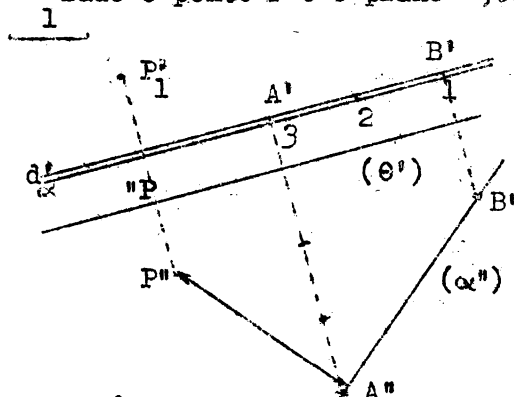
$|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$ ou $1 = i \cdot i'$ donde $i' = \frac{1}{i}$
 é pois $|BD| = i'$ o intervalo da recta.

De maneira análoga à anterior se resolve o problema de conduzir por um ponto um plano perpendicular a uma recta.

Problema - "Determinar a distância de um ponto a um plano". - Podemos resolver este problema conduzindo pelo ponto dado P uma recta perpendicular ao plano, determinando a intersecção X desta perpendicular com o plano e achando em seguida a distância $|PX|$.

Mas o problema pode resolver-se mais comodamente utilizando um 2º plano de projecção.

Dado o ponto P e o plano α , tomemos como plano auxiliar um plano de projecção θ perpendicular ao plano α ; a sua projecção horizontal será (θ') // d_α' . Como $\alpha \perp \theta$, a projecção (rebatida) de α sobre θ reduz-se a uma recta (α'') . Para determinar P" e (α'') , procede-se como já foi indicado em problemas anteriores. Finalmente como α é perpendicular a θ , a distancia de P a α é precisamente a distancia de P" a (α'') .

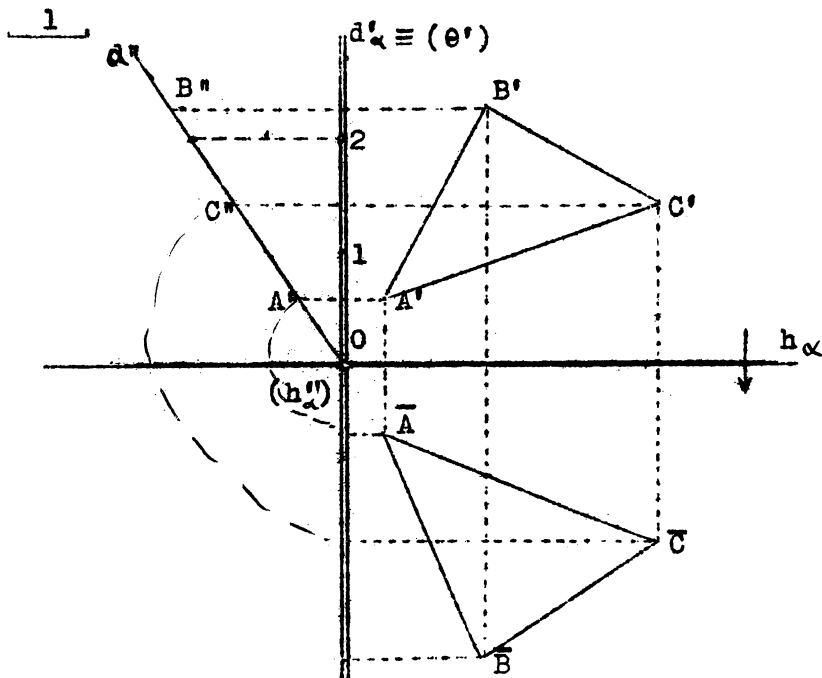


Rebatimentos

Como atrás foi dito, rebater um plano α sobre um plano β consiste em fazer rodar α em torno da intersecção dos dois planos até fazer coincidir α com β ; a intersecção dos dois planos chama-se charneira do rebatimento. Vimos também como se executa o rebatimento dum plano projectante sobre um plano de nível; vejamos agora como se executa o rebatimento dum plano oblíquo sobre o - ou, mais geralmente, sobre um plano de nível qualquer.

Consideremos um plano α definido pela sua escala de declive e suponhamos dada a projecção $[A'B'C']$ dum triân-

gulo $[ABC]$ existente em α ; pretende-se rebater α sobre α_0 e determinar a posição do triângulo depois do rebatimento. A charneira do rebatimento é h_α e enquanto α gira em torno da charneira os pontos do plano descrevem arcos



de circunferências de centros em h_α e cujos planos são perpendiculares a h_α ; além disso, as distâncias dos pontos à charneira mantêm-se constantes. Portanto para ter o rebatimento do ponto A, bastará conduzir por A' uma perpendicular a h_α e sobre ela marcar, no sentido conveniente, um ponto A cuja distância a h_α seja igual à distância de A a h_α (e analogamente para os pontos B e C)

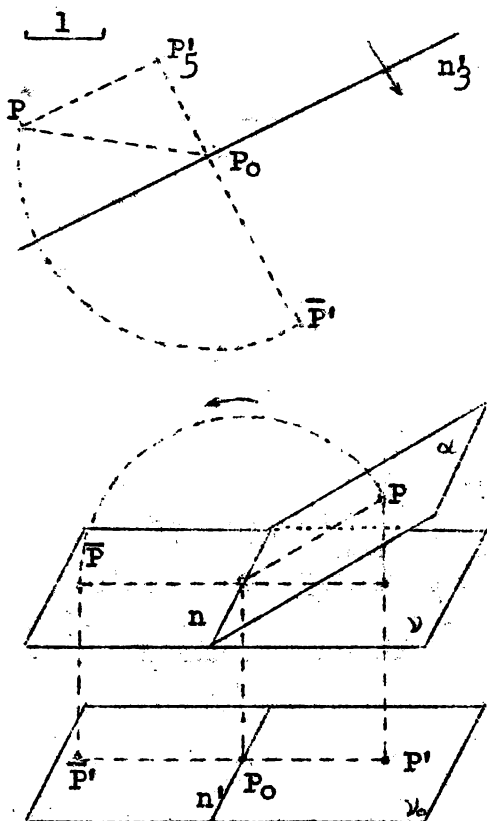
Mas como achar a distância de A a h_α ?

Para isso podemos recorrer a um plano de projecção θ perpendicular a h_α e que pode ser o próprio plano projectante de d_α . A projecção de h_α sobre θ reduz-se a um ponto (h_α'') , e a projecção de α sobre θ reduz-se a uma recta (α'') . Na figura determinámos (α'') , achando a projecção sobre θ do ponto de cota 2 de d_α e unindo-a com (h_α'') . A projecção A'' de A estará sobre (α'') e a dis-

distância de A a (h_α) será precisamente igual à distância de A'' a (h''_α) - o que responde à questão formulada.

Determinados os rebatimentos $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ dos pontos A, B, C, basta uni-los para ter o rebatimento do triângulo [ABC]

Triângulos de rebatimento - Suponhamos agora que se trata de fazer o rebatimento dum plano oblíquo α sobre um plano de nível ν , qualquer; então a charneira será a horizontal n , intersecção de α com ν . No caso da figura supõe-se o plano α definido pela horizontal n (de cota 3) e por um ponto P fora de n . Para ter o ponto P em rebati-



mento, basta conduzir por P' uma perpendicular a n' e marcar sobre ela, no sentido conveniente, um ponto $\bar{P}'$ cuja distância a n' seja igual à distância de P a n . Ora esta distância como se pode verificar é igual à hipotenusa dum triângulo rectângulo cujos catetos sejam iguais à distância de P' a n' e à diferença das cotas de P e de ν (2 no caso da figura). Um tal triângulo (chamado triângulo de rebatimento) pode construir-se, traçando o segmento $[P'P^*]$ paralelo a n' e igual à diferença de cotas de P e ν , e unindo P^* com o ponto P_0 , pé da perpendicular baixada de P' sobre n' . A distância de P à charneira será então igual ao segmento $[P_0P^*]$.

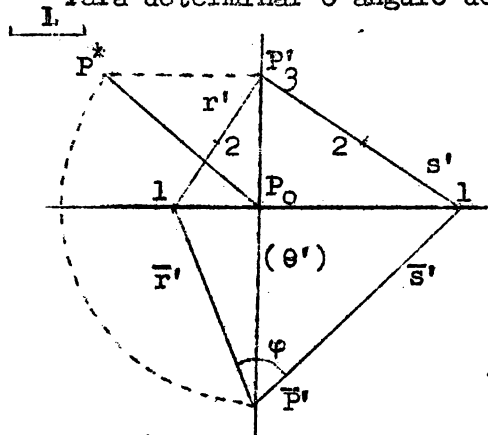
Aplicações dos rebatimentos - É fácil reconhecer que toda a figura $\mathcal{F}$ existente num plano paralelo a ν tem como projecção uma figura $\mathcal{F}'$ igual a $\mathcal{F}$; diz-se então que $\mathcal{F}$ se

projecta em verdadeira grandeza. Ora, se a figura dada existe num plano α , obliquo ou projectante, para obter essa figura em verdadeira grandeza, basta rebater o plano α sobre um plano de nível - em particular sôbre ν .

Exemplos - 1) "Determinar o ângulo de duas rectas".

Como o ângulo de duas rectas não complanas é igual ao ângulo de duas paralelas a essas rectas conduzidas por um ponto qualquer, o problema reduz-se sempre à determinação do ângulo de duas rectas complanas.

Para determinar o ângulo de duas rectas r, s com um



ponto comum P , basta rebater o plano α definido pelas duas rectas, sobre um plano de nível. No caso da figura, o rebatimento é feito sobre o plano de nível de cota 1 e portanto a charneira será a horizontal de cota 1 de α que se obtém unindo os pontos de cota 1 de r e s . O rebatimento de P pode obter-se pelo método

do do triângulo de rebatimento, há pouco indicado. Como os pontos de cota 1 das duas rectas se mantêm fixos, basta unir P com esses pontos para obter os rebatimentos de r, s .

O ângulo ϕ das duas rectas é pois o ângulo formado por $\bar{r}'$ e $\bar{s}'$.

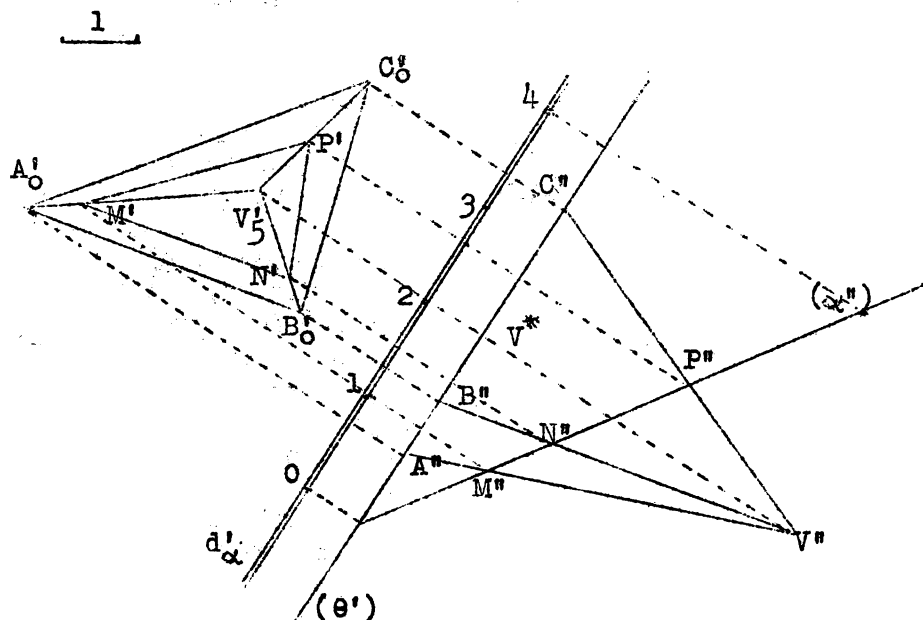
2) "Determinar o ângulo de dois planos". Como o ângulo de dois planos α, β é igual ao ângulo de duas rectas que lhes sejam perpendiculares, para determinar o ângulo $\hat{\alpha}\beta$ basta conduzir por um ponto P qualquer do espaço duas rectas r, s respectivamente perpendiculares a α e a β , e achar depois o ângulo $\hat{r}s$.

3) "Determinar o ângulo duma recta r com um plano α ".

Basta conduzir por um ponto P qualquer de r uma recta $t \perp \alpha$. O ângulo de r com α será o complementar do ângulo de r com t .

Secções planas de pirâmides e prismas - Consideraremos apenas o caso duma pirâmide triangular com a base assente em ν_0 (no caso geral, o método a usar é análogo).

Para determinar a intersecção da pirâmide $[ABCV]$ com um plano α definido pela escala de declive, podemos recorrer a um 2º plano de projecção, θ , perpendicular a α

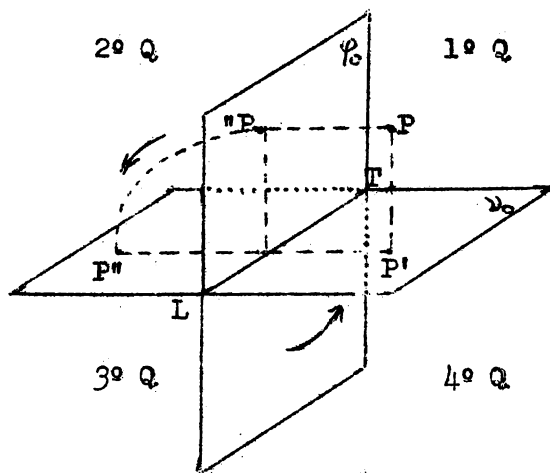


(será $(\theta') \parallel d'_{\alpha}$). As projecções A'' , B'' , C'' , V'' dos pontos A , B , C , V determinam-se como foi atrás indicado. Como $\alpha \perp \theta$, a projecção de α sobre θ reduz-se a uma recta, (α'') ; a secção $[MNP]$ feita na pirâmide pelo plano α terá portanto a sua projecção $[M''N''P'']$ na recta (α'') . Os pontos M , N , P são as intersecções de α com as arestas AV , BV , CV , respectivamente; as projecções A' , B' , C' estarão pois sobre as projecções horizontais das respectivas arestas. Resta portanto conduzir por M'' , N'' , P'' perpendiculares a (θ') até encontrar $A'V'$, $B'V'$ e $C'V'$, respectivamente. Para ter a secção em verdadeira grandeza, bastaria rebater sobre ν_0 o plano α , o que seria fácil agora recorrendo à projecção $[M''N''P'']$ da secção, sobre θ .

B) Método da dupla projecção ortogonal
ou método de Monge

No sistema de Monge usam-se sistematicamente dois planos de projecção. Um destes - 1º plano de projecção ou plano horizontal de projecção - supõe-se em posição horizontal e será designado pela notação ν_0 , enquanto o outro - o 2º plano de projecção ou plano vertical de projecção - será designado pela notação φ_0 . A intersecção destes dois planos tem o nome de linha de terra e designa-se por LT.

O plano ν_0 divide o espaço em duas regiões - uma das



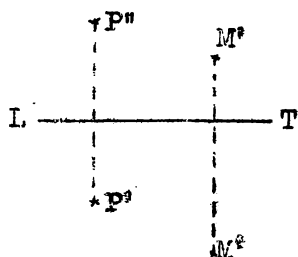
quais se dirá superior (acima de ν_0) e a outra inferior (abaixo de ν_0). Analogamente, o plano φ_0 divide o espaço em duas regiões - uma das quais se dirá anterior (aquém de φ_0) e a outra posterior (além de φ_0).

Dado um ponto P qualquer do espaço, a sua projecção ortogonal sobre ν_0 chama-

se primeira projecção ou projecção horizontal de P e designa-se por P' ; a sua projecção ortogonal sobre φ_0 chama-se segunda projecção ou projecção vertical de P - designa-la-emos por P'' .

Desta maneira ficam os pontos do espaço representados sobre dois planos distintos; mas como o objectivo da Geometria Descritiva é ter as figuras do espaço representadas sobre um único plano recorre-se ao seguinte artifício: rebate-se o 2º plano de projecção sobre o 1º, de modo que a parte superior de φ_0 vá coincidir com a parte posterior de ν_0 (indo portanto a parte inferior de φ_0 coincidir com a parte anterior de ν_0). Como é fácil reco-

nhecer a projecção horizontal e a projecção vertical dum mesmo ponto ficam, depois do rebatimento, numa mesma



perpendicular a LT.

As perpendiculares à linha de terra chamam-se linhas de referência. A projecção vertical rebatida do ponto P passará, por comodidade de linguagem, a chamar-se simplesmente projecção vertical de P; designá-la-emos por P''. Em todas as questões práticas tratadas

pelo método de Monge, iremos supor que o plano horizontal de projecção é o plano (do papel ou da ardósia) sobre o qual se executa o desenho.

A cada ponto do espaço fica, por este processo, a corresponder um e um só sistema de dois pontos do plano situados numa mesma linha de referência, sendo o primeiro a projecção horizontal e o segundo a projecção vertical do ponto.

Reciprocamente, dado arbitrariamente um sistema (M;M'') de dois pontos do plano situados numa mesma linha de referência, corresponder-lhe-á, segundo este critério, um e um só ponto M do espaço. Com efeito, se invertermos o rebatimento do plano φ , levando-o a ser novamente perpendicular a φ_0 , o ponto M'' tomará uma nova posição, M'; se, em seguida, conduzirmos por M' e M'' perpendiculares respectivamente a φ_0 e a φ , estas rectas irão encontrarem-se num dado ponto M que tem M' por projecção horizontal e M'' por projecção vertical (rebatida).

Os dois planos φ e φ_0 dividem o espaço em 4 diedros (quadrantes) que se numeram como está indicado na figura: 1º quadrante (limitado pela parte anterior de φ_0 e pela parte superior de φ); 2º quadrante (limitado pela parte superior de φ_0 e pela parte posterior de φ); 3º quadrante (limitado pela parte posterior de φ_0 e pela parte inferior de φ), e 4º quadrante (limitado pela parte inferior de φ_0 e pela parte anterior de φ).

Chama-se cota do ponto P à distância de P a φ_0 , com o sinal +, se está acima, e com o sinal -, se está abaixo de φ_0 (mula se está em φ_0).

Chama-se afastamento do ponto P à distância de P a φ_0 , com o sinal +, se está aquém de φ_0 , e com o sinal -, se está além de φ_0 (nulo se está em φ_0).

Por conseguinte, se o ponto não está em nenhum dos planos de projecção, terá:

no 1º quadrante	-	cota	<u>positiva</u>	e	afastamento	<u>positivo</u>
no 2º	"	-	"	<u>positiva</u>	e	" <u>negativo</u>
no 3º	"	-	"	<u>negativa</u>	e	" <u>negativo</u>
no 4º	"	-	"	<u>negativa</u>	e	" <u>positivo</u>

Um ponto sobre λ tem cota nula, sobre φ_0 tem afastamento nulo (sobre LT terá cota e afastamento nulos).

Como facilmente se reconhece, a cota de P é igual à distância de P" a LT - positiva se P" está acima e negativa se P" está abaixo de LT; e o afastamento de P é igual à distância de P' a LT - positivo se P' está abaixo e negativo se P' está acima de LT.

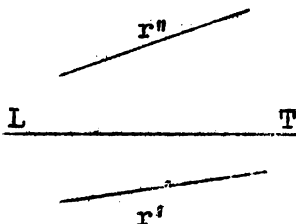
Em particular, se P' está em LT, o afastamento é nulo e o ponto está em φ_0 ; se P" está em LT, a cota é nula e o ponto está em λ .

Dada uma figura $\mathcal{F}$, qualquer do espaço, chama-se projecção horizontal de $\mathcal{F}$, e designa-se por $\mathcal{F}'$, a sua projecção ortogonal sobre λ ; chama-se projecção vertical de $\mathcal{F}$, e designa-se por $\mathcal{F}''$, a sua projecção ortogonal sobre φ_0 .

Representação da recta - Dá-se o nome de recta de perfil a toda a recta perpendicular a LT, isto é, existente sobre um plano perpendicular a LT (plano de perfil).

Quando uma recta não é de perfil, fica sempre determinada pelas suas projecções, nenhuma das quais é perpendicular a LT. Reciprocamente, dado um sistema de duas

rectas que não sejam perpendiculares a LT, existe sempre uma e uma só recta do espaço que tem a primeira como projecção horizontal e a segunda como projecção vertical.



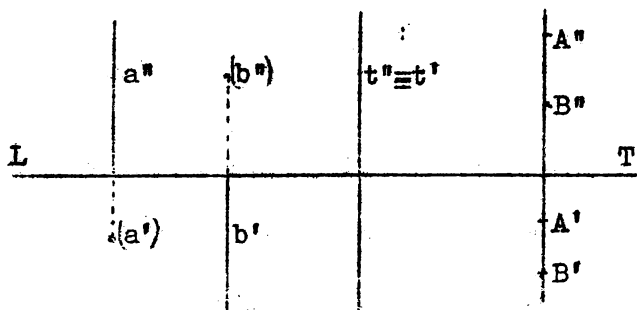
Nas rectas de perfil há ainda a distinguir o caso de a recta ser perpendicular a um dos planos de projecção :

a) perpendicular ao plano horizontal - diz-se então que é uma recta projectante horizontal ou uma recta vertical.

b) Perpendicular ao plano vertical - diz-se então que é uma recta projectante vertical ou uma recta de topo.

Em qualquer dos casos a recta ainda fica determinada pelas suas projecções: no primeiro caso, a projecção horizontal da recta reduz-se a um ponto, enquanto a projecção vertical é perpendicular a LT (recta a da figura); no segundo caso, a projecção vertical da recta reduz-se a um ponto, enquanto a projecção horizontal é perpendicular a LT (recta b da figura).

Mas uma recta de perfil que não seja projectante, já

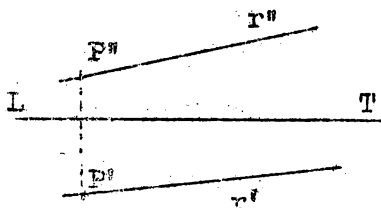


não fica definida pelas suas projecções, visto que todas as rectas não projectantes existentes no mesmo plano têm as mesmas projecções ($t' \equiv t'' \perp LT$).

Para uma tal recta ficar determinada basta dar as projecções de dois seus pontos distintos (recta AB da figura).

Problemas: - Dada a projecção horizontal dum ponto P duma dada recta representada pelas suas projecções, determinar a projecção vertical de P (supõe-se que a recta não é de perfil).

Como P'' tem de estar sobre r'' e tem de estar na linha de referência que passa por P' será o ponto de encontro de r'' com a linha de referência que passa por P'.



Dada a cota dum ponto P duma recta a não de perfil, determinar as suas projecções.

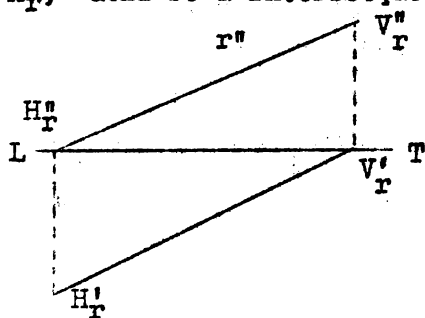
Sobre uma linha de refe-

rência qualquer, marca-se um ponto M a uma distância de LT igual à cota (para cima ou para baixo conforme a cota é positiva ou negativa); por M conduz-se uma paralela a LT que vai encontrar a'' em P'' ; P' fica determinada por a' e pela linha de referência que passa por P'' .

Em particular, o ponto em que uma recta r não paralela a ν_0 encontra este plano, é o seu ponto de cota nula (traço horizontal de r) e terá a sua projecção vertical em LT ; designa-lo-emos por H_r .

O ponto em que uma recta r , não paralela a ν_0 , encontra este plano, é o seu ponto de afastamento nulo (traço vertical de r) e terá a sua projecção horizontal em LT ; designa-lo-emos por V_r .

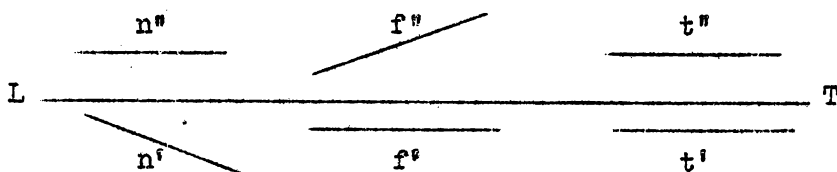
Dada uma recta r não paralela a ν_0 , para determinar H_r , acha-se a intersecção de r'' com LT , que nos dá H_r'' ;



condazindo por H_r'' uma linha de referência, esta irá encontrar r' em $H_r' \equiv H_r$. De maneira análoga se determina o traço vertical (quando o haja)

As rectas paralelas a ν_0 chamam-se rectas de nível ou horizontais e as rectas paralelas a φ_0 chamam-se rectas de frente ou frontais.

Imediatamente se reconhece que a projecção vertical duma recta de nível n é paralela a LT e de duas uma:



ou n'' coincide com LT e então a recta n está assente

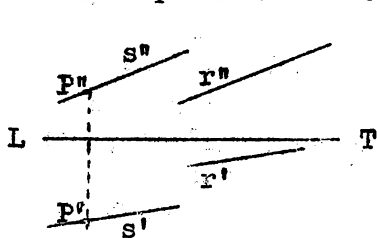
em φ_0 ; ou n'' não coincide com LT e então a recta n não tem traço horizontal (a distância finita).

Analogamente a projecção horizontal duma recta de frente f é paralela a LT, e de duas uma: ou $f' \equiv LT$, e então f está assente em φ_0 , ou $f' \neq LT$, e então a recta não tem traço vertical.

Ainda se pode dar o caso de ambas as projecções da recta serem paralelas a LT: - trata-se então duma recta paralela a LT.

Paralelismo de rectas - Condição necessária para que duas rectas sejam paralelas é que as suas projecções homónimas sejam paralelas. Excluído o caso das rectas de perfil, esta condição é não só necessária, como também suficiente.

Problema - "Dados um ponto P e uma recta r , não de perfil, conduzir por P uma recta s paralela a r ."



É claro que basta conduzir por P'' uma recta $s'' // r''$, e por P' uma recta $s' // r'$, para ter as projecções s' , s'' da recta s pedida.

Representação do plano por meio dos traços - Chama-se traço horizontal dum plano

α , não paralelo a φ_0 , à sua intersecção com φ_0 ; representá-lo-emos por h_α . Chama-se traço vertical dum plano α não paralelo a φ_0 à sua intersecção com φ_0 ; representá-lo-emos por v_α .

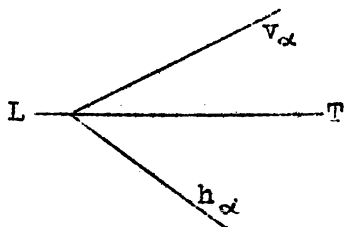
Em particular os planos paralelos a φ_0 - planos de nível ou horizontais - não têm traço horizontal; um tal plano fica perfeitamente determinado pelo seu traço vertical, que é paralelo a LT.

Os planos paralelos a φ_0 - planos de frente - não têm traço vertical; um tal plano fica perfeitamente determinado pelo seu traço horizontal, que é paralelo a LT.

feitamente determinado pelo seu traço horizontal, que é paralelo a LT.

Se o plano não for paralelo a nenhum dos planos de projecção ficará determinado pelos seus dois traços, horizontal e vertical, excepto no caso em que o plano passa por LT.

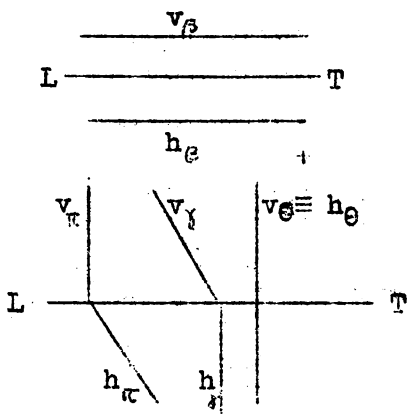
É fácil reconhecer que os dois traços se encontram num ponto de LT ou são ambos paralelos a LT.



É claro que o traço horizontal dum plano α é uma recta de v_0 e, como tal, coincide com a sua projecção horizontal; a sua projecção vertical estará em LT. Por sua vez o traço vertical de

α é uma recta de φ_0 e portanto coincide com a sua projecção vertical; a sua projecção horizontal estará em LT.

Um caso particular importante é aquele em que o plano é paralelo a LT; neste caso os traços do plano são paralelos à linha de terra.



Um plano perpendicular a um dos planos de projecção diz-se projectante: plano projectante horizontal ou plano vertical se for $\perp v_0$; plano projectante vertical ou plano de topo se for $\perp \varphi_0$.

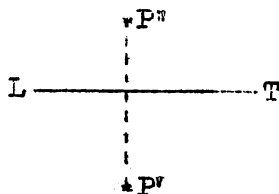
Os planos de nível são um caso particular dos planos de topo e os planos de frente são um caso particular dos

planos verticais (nestes dois casos, o plano além de ser perpendicular a um dos planos de projecção é paralelo ao outro).

Excluídos estes casos particulares, podemos dizer que um plano vertical tem sempre o traço vertical $\perp$ LT, e um plano de topo tem sempre o traço horizontal $\perp$ LT.

Um plano de perfil é ao mesmo tempo projectante horizontal e projectante vertical - os seus traços são pois perpendiculares a LT e portanto coincidentes ($v_0 \equiv h_0$).

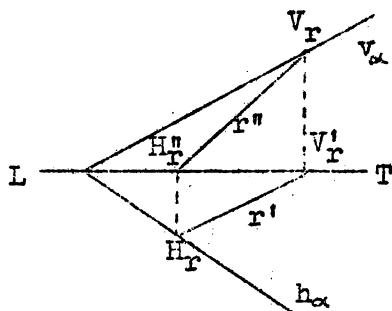
Como já dissemos um plano que passe por LT não é determinado pelos seus traços, pois que ambos coincidem com LT. Para que um plano nestas condições fique determinado basta dar um seu ponto qualquer fora de LT.



Dum modo geral um plano fica determinado quando se conhecem: tres pontos quaisquer do plano que não estejam em linha recta; ou uma recta do plano e um ponto do mesmo situado fora da recta; ou duas rectas distintas

do plano - paralelas ou concorrentes.

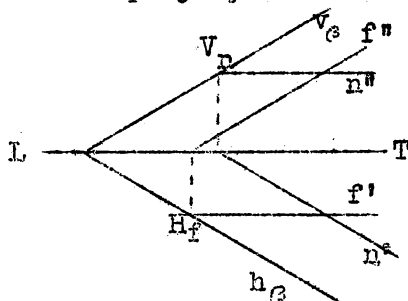
Condição de pertença duma recta a um plano - Quando uma recta r tem traços distintos, $H_r \neq V_r$, condição necessária e suficiente para que r esteja sobre um dado plano α é que os seus traços estejam sobre os traços homónimos do plano.



Problema - Dados um plano α representado pelos seus traços e conhecida a projecção horizontal r' duma recta r de α , determinar a projecção vertical de r .

É claro que H_r será o ponto de encontro de r' com h_α ; a partir de H_r determinamos H_r'' que está em LT. Por sua vez V_r' será o ponto de encontro de r' com LT; determinamos em seguida V_r que está em v_α . Finalmente r'' será a recta que une H_r'' com V_r .

Analogamente se resolvía o problema, que consiste em, dada a projecção vertical da recta determinar a sua projecção horizontal.

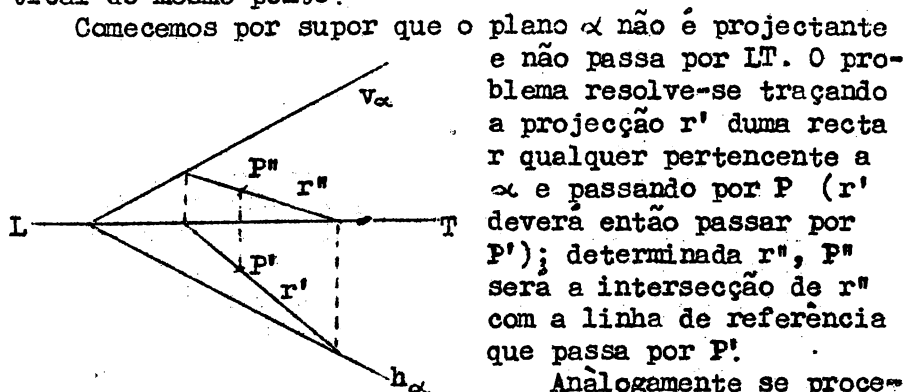


Em particular pode acontecer que a projecção horizontal da recta seja paralela ao traço horizontal do plano. Então é fácil reconhecer que se trata duma recta de nível do plano. Dada a projecção horizontal n' duma recta nestas condições,

para ter a projecção vertical de n , basta determinar o seu traço vertical e por êle conduzir $n''//LT$.

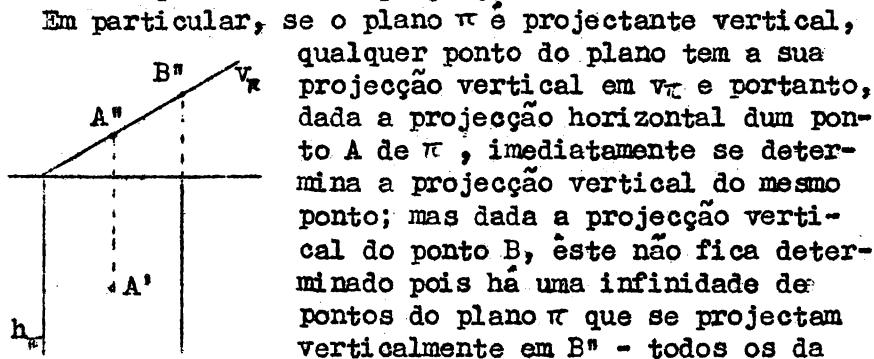
Analogamente as rectas frontais do plano terão a sua projecção vertical paralela ao traço vertical do plano.

Problema - "Dado um plano α e conhecida a projecção horizontal P' dum ponto P de α , determinar a projecção vertical do mesmo ponto".



Começemos por supor que o plano α não é projectante e não passa por LT. O problema resolve-se traçando a projecção r' duma recta r qualquer pertencente a α e passando por P (r' deverá então passar por P'); determinada r'' , P'' será a intersecção de r'' com a linha de referência que passa por P' .

Analogamente se procederia, se fôsse dada a projecção vertical dum ponto do plano e se pedisse a sua projecção horizontal.



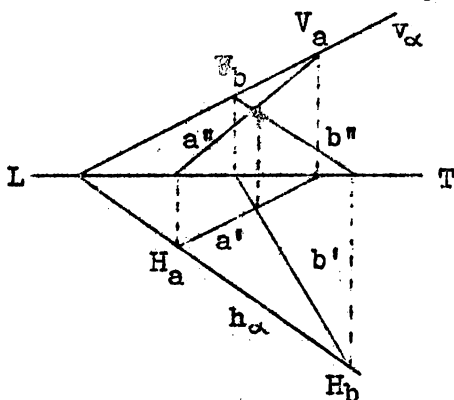
Em particular, se o plano π é projectante vertical, qualquer ponto do plano tem a sua projecção vertical em v_π e portanto, dada a projecção horizontal dum ponto A de π , imediatamente se determina a projecção vertical do mesmo ponto; mas dada a projecção vertical do ponto B , este não fica determinado pois há uma infinidade de pontos do plano π que se projectam verticalmente em B'' - todos os da recta de topo cuja projecção vertical coincide com B'' .

Problema - "Dado um plano α definido por duas rectas distintas a, b , determinar os traços do plano".

Já atrás foi recordado que dadas duas rectas distintas, paralelas ou concorrentes, fica sempre definido o plano que as contém. Para que duas rectas a, b (não de perfil) se encontrem é necessário e suficiente que os pontos de encontro das projecções homónimas estejam

na mesma linha de referência

Para determinar os traços



do plano bastará determinar H_a, H_b e V_a, V_b ; se fôr $H_a \neq H_b$ e $V_a \neq V_b$, bastará unir H_a com H_b para ter h e unir V_a com V_b para ter v

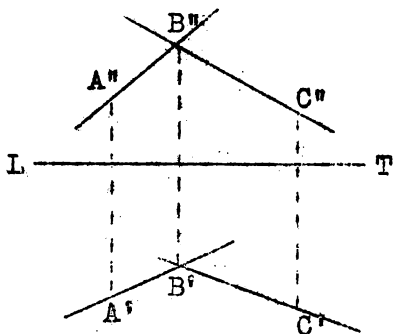
Como os traços do plano se encontram num mesmo ponto da linha de terra bastava determinar H_a, H_b , uni-los para obter h e depois unir o ponto em que

h encontra LT com o traço vertical duma das rectas

Se os traços horizontais ou os traços verticais das duas rectas coincidissem determinávamos o traço do plano homónimo dos traços não coincidentes (unindo estes) e pelo seu ponto de encontro com LT e pelos traços coincidentes das duas rectas determinávamos o outro traço do plano

Em particular se as duas rectas se encontram num ponto de LT para determinar os traços do plano teríamos de utilizar outra recta do plano definida por um ponto de cada uma das rectas dadas

Se o plano estiver definido por tres pontos não em linha recta passamos para o caso anterior unindo dois dos pontos com o terceiro; por exemplo se fosse $\equiv A B C$, ficaria $\equiv a, b$ com $a \equiv A B$ e $b \equiv B C$

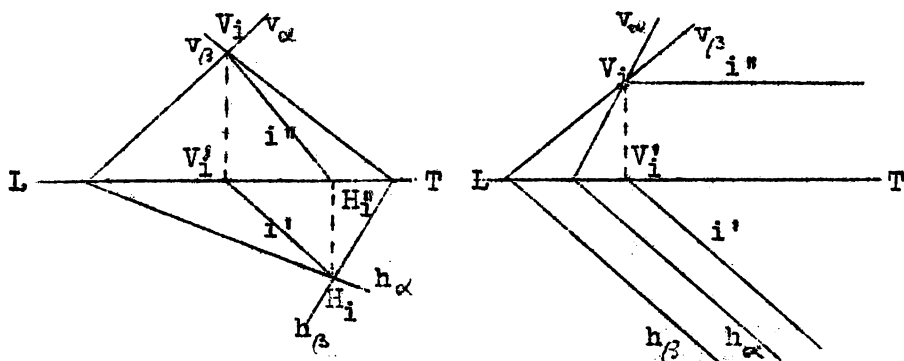


Intersecção de planos - Vamos supor os planos definidos pelos traços (o que é sempre possível desde que o plano não passe por LT) Como a intersecção é a recta comum aos dois planos, o seu traço horizontal (se existe) tem de estar sobre os traços horizontais dos dois

planos: será pois o ponto de encontro destes traços; análogamente para os traços verticais Para obter as projec-

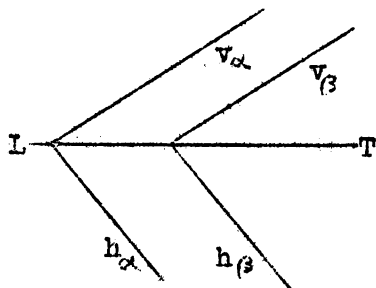
ções da intersecção i de α , β não temos mais do que unir V_i com H_i^1 obtendo i'' e V_i^1 com H_i obtendo i' - isto, na hipótese de a recta ter traços horizontal e vertical distintos.

Podem, porém apresentar-se posições particulares. Por exemplo, se os traços horizontais dos dois planos



α , β são paralelos e distintos, sem o serem os traços verticais, a intersecção i de α com β não tem traço horizontal: é portanto uma recta de nível. Por outro lado V_i é a intersecção de v_α com v_β . Portanto, a projecção vertical de i passa por V_i e é $\parallel LT$, enquanto a projecção horizontal de i passa por V_i^1 e é paralela aos traços horizontais dos dois planos (visto ser recta de nível de α e de β).

Outro caso particular análogo é aquele em que os traços verticais são paralelos, sem o serem horizontais.

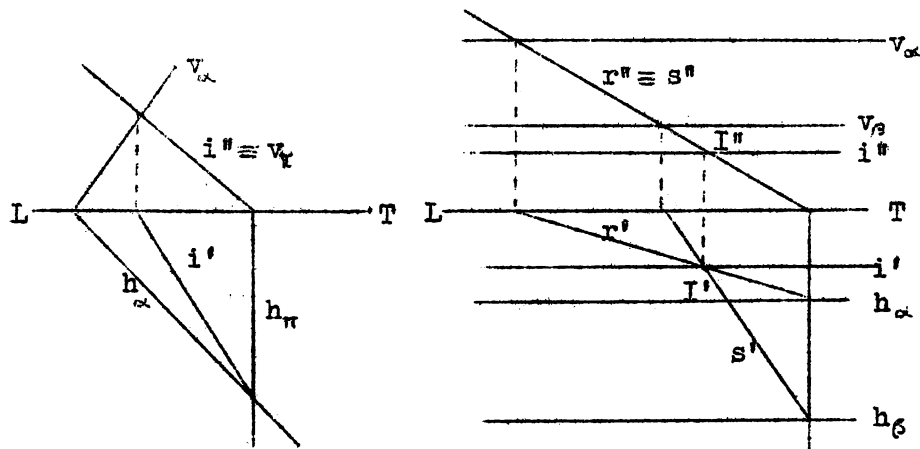


Se os traços homónimos dos planos são paralelos, isto é, se $v_\alpha \parallel v_\beta$ e $h_\alpha \parallel h_\beta$ os dois planos são paralelos, excepto no caso dos planos serem todos paralelos a LT (neste caso os planos podem ser ou não ser paralelos).

Suponhamos agora que um dos planos é projectante - por exemplo projectante vertical.

Sendo π projectante vertical todos os seus pontos

têm projecção vertical em v_π ; portanto, $i'' \equiv v_\pi$. A projecção horizontal i' determina-se como no caso geral.



Para determinar a intersecção de 2 planos paralelos a LT, pode recorrer-se a um plano auxiliar, e convém que este seja projectante (mas não de perfil, nem paralelo a nenhum dos planos de projecção).

Sejam os planos α, β paralelos a LT e consideremos um plano auxiliar π projectante vertical (mas não de nível nem de perfil). Determinada a intersecção r de π com α e a intersecção s de π com β , acha-se o ponto I de encontro das rectas r, s (se estas são concorrentes). Por I deve passar a intersecção i de α com β e, como i deve também ser // LT, basta conduzir por I' e por I'' paralelas a LT, para ter respectivamente i' e i'' .

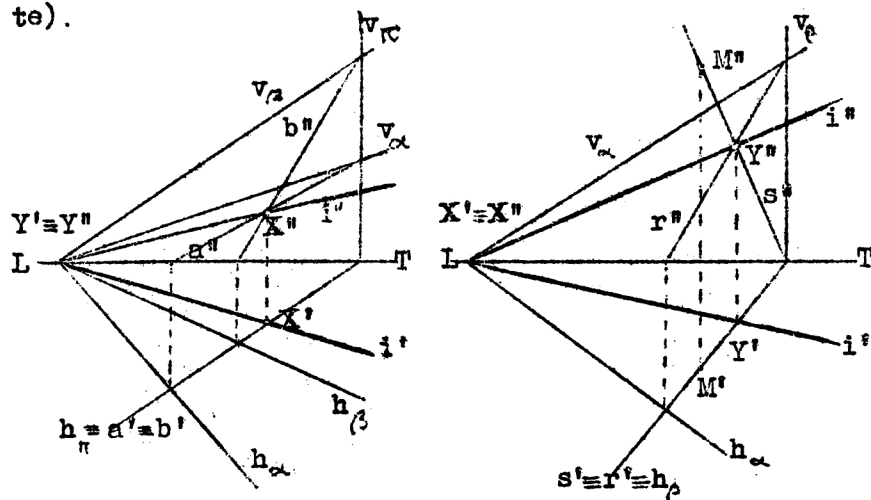
Se as rectas r, s fôsssem paralelas, podemos concluir que os planos α, β também o são.

Este método do plano projectante auxiliar pode ainda ser utilizado noutros casos particulares.

1ª) - "Os dois planos α, β encontram-se num mesmo ponto de LT e por consequência os traços de α, β encontram-se todos nesse ponto."

Utilizando um plano projectante horizontal π , determinaremos sucessivamente a intersecção a de π com α , a intersecção b de π com β e o ponto X de encontro de a com b . É claro que X pertence à intersecção i de α com β e, como o ponto Y de encontro dos traços com LT também pertence à intersecção, esta fica definida pelos pon-

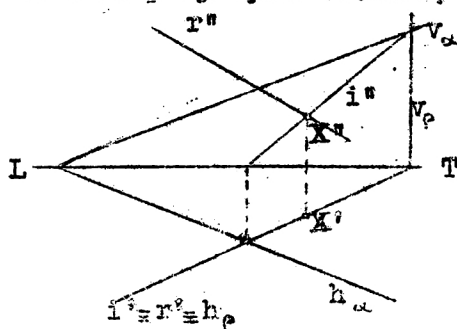
tos X, Y , isto é: $i' \equiv X'Y'$, $i'' \equiv X''Y''$ (figura seguinte).



2º) "Caso em que um dos planos passa por LT "

O ponto X de encontro dos traços com LT pertence à intersecção. Para determinar um outro ponto, podemos utilizar um plano projectante horizontal ρ , tal que h_ρ passe por M (M é um ponto do plano que passa por LT) mas não por X . Determinadas as intersecções r, s do plano ρ respectivamente com α, β , o ponto Y em que as rectas r, s se encontram pertencerá também à intersecção; esta será portanto a recta i definida pelos pontos X, Y (É claro que s'' deve passar por M'' e pelo ponto de encontro de h_ρ com LT).

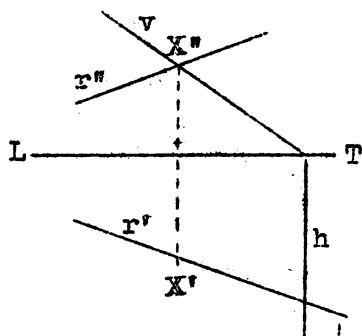
Intersecção duma recta r com um plano α - Como no sistema de projecções cotadas, o método geral para resolver este problema consiste em utilizar um plano auxiliar, arbitrário, passando por r . Mas agora convém que o plano seja projectante - por exemplo, o plano projectante horizontal da recta; este plano que designaremos por ρ , intersecta o plano α segundo uma recta i



(desde que ρ não seja paralelo a α). Como as rectas i , r estão num mesmo plano, de duas uma: ou se cruzam num ponto X que é o ponto procurado ou são paralelas e então $r \parallel \alpha$. Na primeira hipótese, X'' é a intersecção de r'' com i'' e X' a intersecção de r' com a linha de referência que passa por X'' .

Estivemos a supor, implicitamente, que nem o plano α nem a recta r são projectantes.

Se o plano α é projectante, o problema simplifica-se. Suponhamos, por exemplo, que α é projectante vertical;



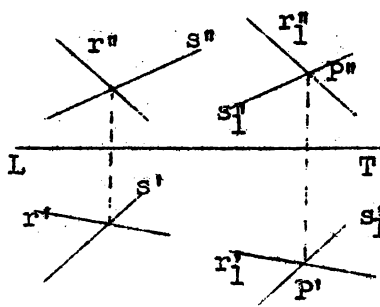
então, de duas uma; ou r'' corta v_α ou tal não sucede. Na primeira hipótese, r encontra α num ponto X , cuja projecção vertical está necessariamente em v_α (visto α ser projectante vertical). Na segunda hipótese, será $r \parallel \alpha$.

Finalmente, suponhamos que r é projectante - por exemplo projectante horizontal (sem o ser α). Então, r encontra α num

ponto X , tendo-se $X' \equiv r'$; trata-se portanto de achar a projecção vertical do ponto de α cuja projecção horizontal é X' - problema que já sabemos resolver.

Problema - "Dados um plano α e um ponto P , conduzir por P um plano β paralelo a α ".

Se o plano α estiver definido por duas rectas r , s ,



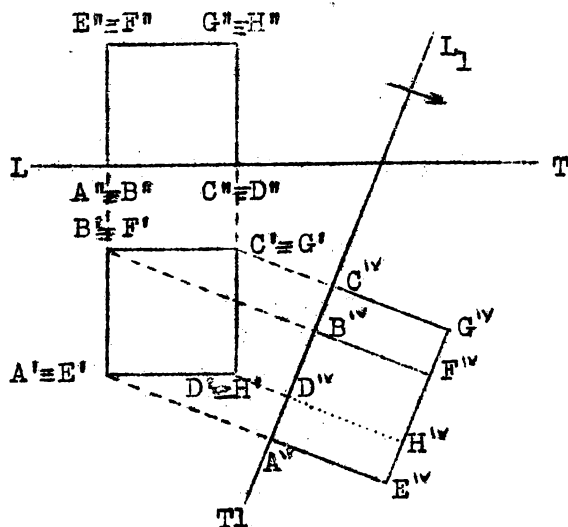
bastará conduzir por P as rectas r_1, s_1 , respectivamente paralelas a r, s : o plano definido pelas rectas r_1, s_1 , é, evidentemente o plano procurado.

Suponhamos agora que o plano α está definido pelos traços; se quizermos que o plano β fique também definido pelos traços, convém proceder da seguinte maneira:

conduz-se por P uma horizontal ou uma frontal paralela a α - por exemplo a horizontal $n \parallel \alpha$ (será $n'' \parallel h_\alpha$, $n' \parallel LT$); determinado V_n , conduz-se por V_n a recta $v_\beta \parallel v_\alpha$ e pelo ponto em que v_β encontra LT , traça-se a recta $h_\beta \parallel h_\alpha$. É fácil

do lado para o qual se tiver, arbitrariamente, rebatido a parte superior de π).

Mais geralmente consideremos uma figura qualquer - por



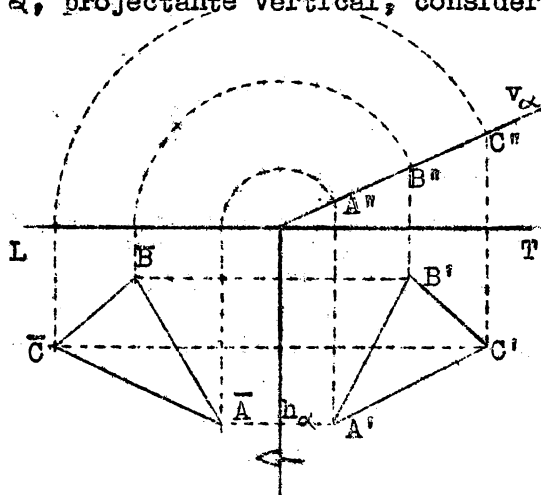
exemplo um cubo com uma face assente em ν_0 e outra paralela a φ_0 . Tomemos um novo plano vertical de projecção, definido pelo seu traço horizontal $L_1 T_1$; para obter a nova projecção ~~real~~ do cubo, não temos mais do que aplicar a cada um dos vértices o processo indicado.

Estas considerações referem-se a mu-

danças de plano vertical de projecção. Mas é fácil ver que, de maneira analoga, se executam mudanças de plano horizontal de projecção.

Rebatimentos

Começaremos por estudar o rebatimento dum plano projectante sobre ν_0 ou sobre φ_0 . Limitar-nos-emos ao caso dum plano α , projectante vertical, considerando o seu rebatimento sobre ν_0 .



Imaginemos um triângulo $[ABC]$ colocado sobre o plano α . A charneira do rebatimento é h_α . Enquanto α roda em torno de h_α , cada ponto P do plano descreve um arco de circunferência de centro em h_α e existente num plano perpendicular a h_α (portanto $\parallel \varphi_0$); um tal arco de circunferência

projecta-se horizontalmente segundo um segmento de recta perpendicular a h_α e projecta-se verticalmente segundo um arco igual, de centro no ponto em que h_α encontra LT . Então, para obter o rebatimento de P , basta proceder do seguinte modo: fazendo centro no ponto em que h_α encontra LT , traçar um arco de circunferência passando por P'' , até encontrar LT num ponto (à direita ou à esquerda conforme o lado para o qual se efectua o rebatimento); conduzir por este ponto e por P' rectas perpendiculares, respectivamente a LT e a h_α . A intersecção destas rectas é o ponto $\bar{P}$ procurado.

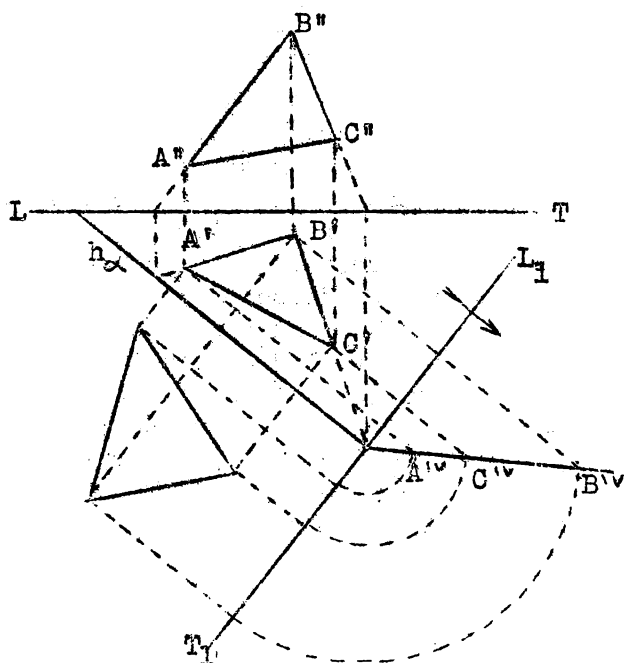
Procedendo como acaba de ser indicado para os pontos A, B, C , obtém-se o rebatimento $[A' B' C']$ do triângulo $[ABC]$, - o qual fica assim representado em verdadeira grandeza, visto ter sido transportado para v_0 .

Se em vez dum plano projectante vertical se tratar dum plano qualquer, que se pretende rebater sobre v_0 , podemos previamente torná-lo projectante vertical por meio duma mudança de plano vertical efectivando depois o rebatimento como foi indicado. Suponhamos, por exemplo, que se

trata de rebater de rebater um plano α não projectante, definido por tres pontos A, B, C .

Começaremos por determinar os traços horizontais de duas rectas do plano (BA, BC , por ex.) que unidos dêem h_α .

Tomando agora $L_1 T_1 \perp h_\alpha$, determinaremos A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} , como se disse ao tratar da mudança de planos (A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} devem ficar colineares, pois o plano agora é projec-



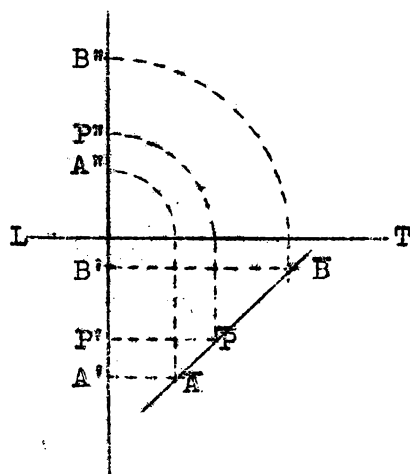
tante relativamente ao novo plano vertical).

Finalmente podemos rebater α sobre ν_0 como no caso anterior, referindo-nos ao novo sistema de projecções.

Aplicações dos rebatimentos - No método de Monge, os rebatimentos encontram as mesmas aplicações que no método das projecções cotadas. Se uma dada figura $\mathcal{F}$ existe num plano α não paralelo a nenhum dos planos de projecção, para conhecer essa figura em verdadeira grandeza, basta rebater o plano α sobre um dos planos de projecção (ou sobre um plano paralelo a esse); então a figura rebatida $\mathcal{F}'$, terá como projecção sobre o plano considerado uma figura igual a $\mathcal{F}$ e portanto a $\mathcal{F}$. Podem assim resolver-se varios problemas relativos a ângulos e distâncias, tal como se fez em projecções cotadas.

Em particular, os problemas relativos a rectas de perfil, que deixamos atrás em suspenso, podem resolver-se pelo método dos rebatimentos. Como vimos, uma recta de perfil não fica determinada pelas suas projecções; para que fique determinada é necessário dar, por exemplo, as projecções de dois dos seus pontos.

Para resolver problemas sobre rectas de perfil, podemos rebater o plano de perfil da recta sobre um dos planos de projecção; resolve-se então o problema proposto na figura rebatida e inverte-se depois o rebatimento.



Seja por exemplo o problema:

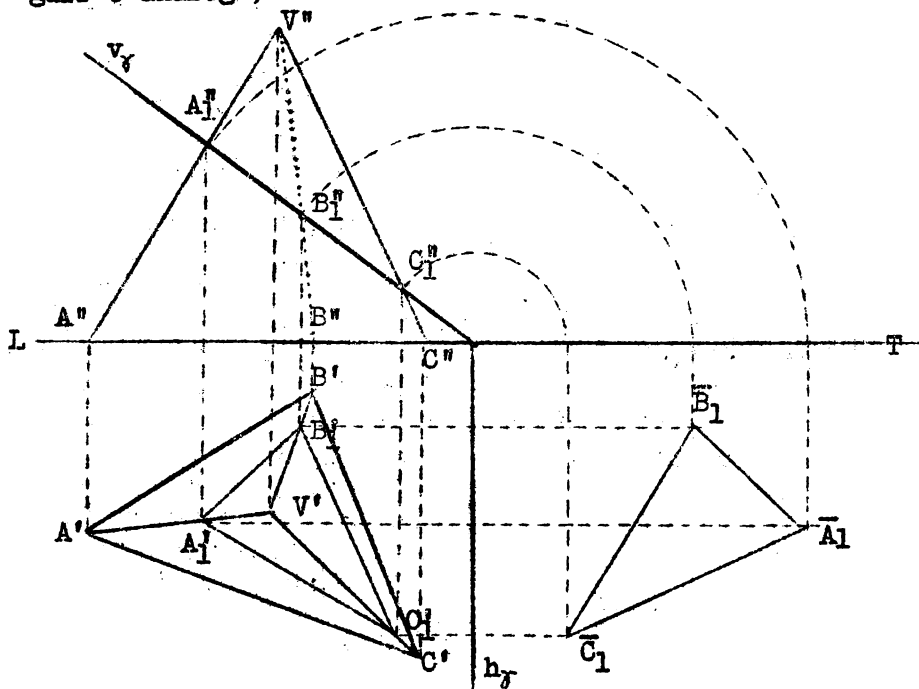
"Dada uma recta de perfil AB e conhecida a projecção horizontal P' dum dos seus pontos, determinar a projecção vertical P'' desse ponto".

Rebatendo sobre ν_0 o plano de perfil da recta AB, obtemos a recta $\bar{A}\bar{B}$, sobre a qual se encontra o rebatimento $\bar{P}$ de P. Portanto, conduzindo por P' uma recta paralela a LT , essa recta irá encontrar $\bar{A}\bar{B}$ em $\bar{P}$. Invertendo o rebatimento obtem-se P'' .

Secções planas de prismas e de pirâmides

Basta-nos considerar o caso de secções feitas por planos projectantes, pois que, se o plano secante não fôr projectante, podemos sempre levá-lo a essa posição mediante uma conveniente mudança de plano.

Limitar-nos-emos a estudar a secção feita por um plano γ , de topo, numa pirâmide $[ABCV]$, com a base $[ABC]$ assente em v_0 (Em qualquer outro caso, o método a seguir é análogo).

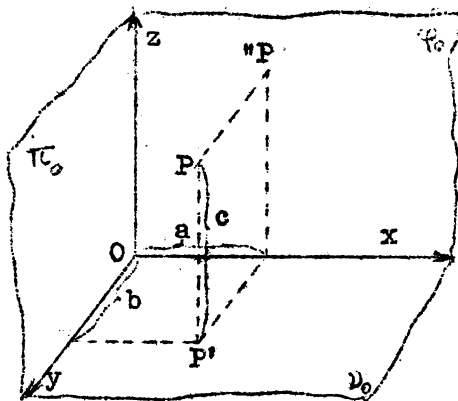


No caso da figura, o plano γ encontra as arestas VA , VB , VC , respectivamente nos pontos A_1 , B_1 , C_1 . Portanto A_1'' , B_1'' , C_1'' são os pontos de encontro de v_γ com as projecções verticais $V''A''$, $V''B''$, $V''C''$, das arestas correspondentes; por outro lado, A_1' , B_1' , C_1' são os pontos de encontro das projecções horizontais das mesmas arestas com as linhas de referência que passam respectivamente por A_1'' , B_1'' , C_1'' .

Para ter a secção em verdadeira grandeza, não temos mais do que rebater o plano secante sobre v_0 .

C) Passagem da geometria analítica à geometria descritiva

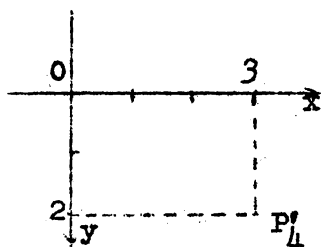
Representação do ponto - Consideremos um sistema $O\ x\ y\ z$ de eixos coordenados rectangulares. Relativamente a este referencial,



cada ponto P do espaço é, como sabemos, determinado por um sistema (a, b, c) de três números reais, chamados respectivamente a abscissa, a ordenada (ou afastamento) e a cota de P .

Em tudo o que se segue, tomaremos o plano xy para plano horizontal de projecção (plano v_0).

Então o ponto P ficará determinado pela sua projecção horizontal, P' , (projecção ortogonal de P sobre v_0) e pela sua cota, c ; por sua vez o ponto P' é dado pelas suas coordenadas a, b a respeito do sistema $O\ x\ y$. Portanto, supondo que o plano dos $x\ y$ (ou seja o plano v_0) coincide com o plano do papel ou da ardósia, sobre o qual se

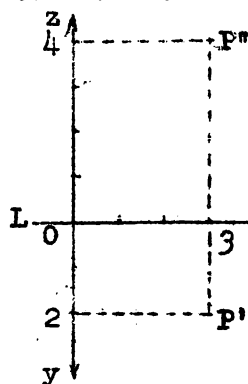


em projecções cotadas.

desenha, uma vez fixado nesse plano o sistema $O\ x\ y$, podemos marcar P' , utilizando as suas coordenadas a, b . O ponto P ficará representado pela sua projecção cotada, P'_c . Por exemplo, na segunda figura, fez-se a representação do ponto $P(3, 2, 4)$

Nota: Na 2ª figura considerámos o eixo dos x orientado da esquerda para a direita e o dos y , orientado de cima para baixo, (ou melhor, de trás para diante), para que houvesse acordo com a 1ª figura. Mas como se trata duma questão de convenção é claro que temos a liberdade de adoptar a orientação que nos aprouver.

Para a representação do ponto $P(a,b,c)$ pelo método de Monge, identificaremos o plano xy com ν_0 e o plano xz com φ_0 ; então, os números b, c dão-nos respectivamente o afastamento e a cota de P ; o eixo dos x será a



linha de terra. Feito o rebatimento de φ_0 sobre ν_0 à maneira usual, e supondo ν_0 coincidente com o plano do desenho, o eixo dos y , bem como o eixo dos z rebatido, coincidirão com uma mesma perpendicular a LT ; mas, enquanto o primeiro fica orientado de cima para baixo, o segundo fica orientado de baixo para cima (o eixo dos x supõe-se orientado

da esquerda para a direita). Então, a abscissa a de P (a respeito da origem O fixada sobre LT) dá-nos a linha de referência correspondente a P , sobre a qual marcamos P' e P'' , segundo o processo já conhecido, atendendo à cota e ao afastamento de P . Na 3ª figura está representado o ponto $(3,2,4)$ pelas suas projecções P', P'' .

Representação da recta - Continuemos a referir-nos ao sistema de eixos $O x y z$. Como sabemos, uma recta r pode sempre ser representada por um sistema de equações do tipo:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

em que x_0, y_0, z_0 são as coordenadas de um ponto P_0 de r e a, b, c as componentes dum vector $\vec{u}$ não nulo com a direcção de r .

Para ver como se pode passar destas equações para a representação usual da recta em projecções cotadas (segundo as convenções precedentes), convem distinguir dois casos:

1º caso - $a = b = 0$. Então as equações da recta reduzem-se a $x-x_0=0, y-y_0=0$ (ou seja $x=x_0, y=y_0$); trata-se, como é fácil ver, duma recta projectante horizontal (perpendicular ao plano xy); a recta ficará portanto determinada pela sua projecção (r'), que é o ponto do

plano xy de coordenadas a, b .

2º caso - a, b não são simultaneamente nulos. Então é fácil reconhecer que a equação

$$b(x-x_0) = a(y-y_0)$$

representa no plano xy a projecção r' de r (projecção ortogonal de r sobre esse plano). Podemos pois traçar r' servindo-nos daquela equação e reportando-nos ao referencial Oxy . Para graduar a recta, há ainda que distinguir duas hipóteses:

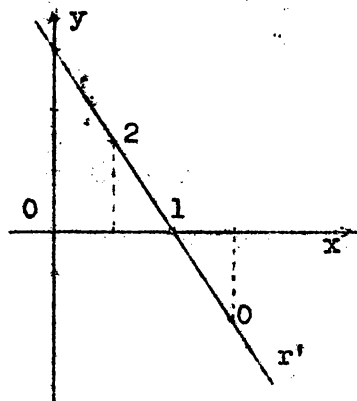
I) $c=0$. Então uma das equações da recta será $z-z_0=0$, ou seja $z=z_0$; trata-se portanto duma horizontal de cota z_0 , bastando escrever essa cota como índice da notação r' (ao lado da projecção) para que a recta fique representada.

II) $c \neq 0$. Como a, b não são simultaneamente nulos, seja por exemplo $a \neq 0$. Então, atribuindo a z sucessivos valores inteiros, 0, 1, 2, ..., podemos determinar as abscissas correspondentes pela formula:

$$x = x_0 + \frac{a}{c} (z-z_0) ;$$

marcando depois na recta r' os pontos com essas abscissas, teremos representados os pontos de r de cotas 0, 1, 2, ... e a recta ficará portanto graduada.

Exemplos: 1) Seja a recta de equações $\frac{2-x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$.



A equação $\frac{2-x}{2} = \frac{y}{3}$ dá-nos a recta r' , que podemos traçar, atendendo a que é $y=3$ para $x=0$ (ordenada na origem e $x=2$ para $y=0$ (abscissa na origem).

Por outro lado a equação

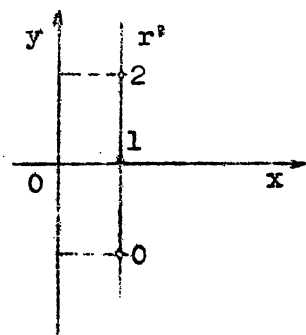
$$\frac{2-x}{2} = \frac{z-1}{2} \quad \text{ou seja} \quad x=3-z$$

dá-nos: $x=3$, para $z=0$; $x=2$, para $z=1$; $x=1$, para $z=2$. Podemos então graduar a recta em

conformidade com estas indicações.

2) Seja a recta de equações $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$.

Neste caso a equação de r' é.



$$x-1 = 0 \quad \text{ou seja} \quad x = 1;$$

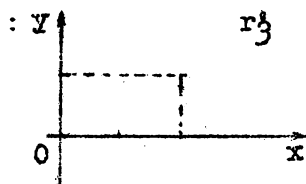
Trata-se portanto da paralela a Oy de abscissa 1. A recta gradua-se de maneira análoga à anterior.

3) Seja a recta de equações

$$x = 2 \quad y = \frac{z-3}{0}.$$

A equação de r' é

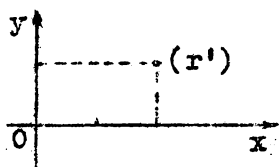
$$x = 2 \quad y.$$



Por outro lado, como se tem $z-3=0$ sobre r , trata-se duma horizontal de cota 3.

4) Seja a recta de equações

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{0} = z.$$



Trata-se, como é fácil ver, da recta projectante que encontra o plano xy no ponto $(2,1)$.

Para obter a representação da recta r de equações

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

no sistema de Monge, basta observar que a equação

$$b(x-x_0) = a(y-y_0)$$

representa a projecção horizontal r' a respeito do referencial Oxy ; enquanto a equação

$$c(x-x_0) = a(z-z_0)$$

representa a projecção vertical, r'' , a respeito do referencial Oxz (sem esquecer que, depois dos rebatimentos os eixos Oy e Oz ficam orientados em sentidos contrários). Em particular, se $a=0$ a recta é paralela ao plano yz , sendo portanto uma recta de perfil; para a definir, será necessário determinar dois pontos da recta,

o que se consegue por exemplo atribuindo a z dois valores arbitrários mas diferentes, e calculando os valores correspondentes de y por meio da fórmula

$$y = y_0 + \frac{b}{c} (z - z_0).$$

Representação do plano - A respeito do referencial $Oxyz$, um plano α pode sempre ser representado por uma equação do tipo

$$A x + B y + C z + D = 0,$$

sendo A, B, C não simultaneamente nulos.

Para ver como desta equação se pode passar para a representação usual do plano em geometria cotada, convém distinguir dois casos.

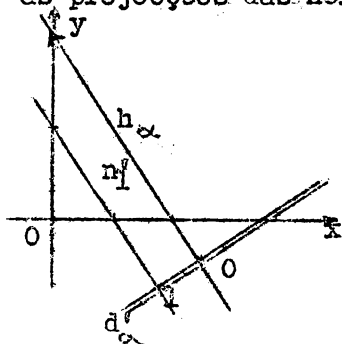
1º caso $C=0$. Então, já sabemos que se trata dum plano projectante horizontal; o plano α ficará portanto determinado pela sua projecção (α'), que é a recta do plano α de equação

$$A x + B y + D = 0$$

2º caso $C \neq 0$. Neste caso há ainda a distinguir duas hipóteses:

I) $A = B = 0$. Então a equação do plano reduz-se a $Cz + D = 0$ ou seja $z = -D/C$; trata-se pois do plano de nível de cota $-(D/C)$ que, como vimos, não tem representação especial em geometria cotada.

II) A, B não são simultaneamente nulos. Fazendo sucessivamente $z = 0, 1, 2, \dots$ na equação do plano, obtêm-se as equações $Ax + By + D = 0$, $Ax + By + (C+D) = 0$, $Ax + By + (2C+D) = 0, \dots$, que nos dão, como é fácil ver, as projecções das horizontais de cotas $0, 1, 2, \dots$ do plano α . Representadas estas horizontais, imediatamente se determina a escala de declive do plano α .
Exemplo - Seja o plano de equação $3x + 2y + 3z = 6$.



Fazendo sucessivamente $z=0$ e $z=1$, obtêm-se as equações

$$3x + 2y = 6, \quad 3x + 2y = 3$$

que nos dão as horizontais de cotas 0 e 1 do plano α , a partir das quais se constroem uma escala de declive de α .

Para obter a representação do plano de equação

$$A x + B y + C z + D = 0$$

no sistema de Monge, basta observar que o traço horizontal (se existe) é a recta do plano xy de equação

$$A x + B y + D = 0;$$

enquanto o traço vertical (se existe) é a recta do plano xz de equação

$$A x + C z + D = 0.$$

Em particular, se $A = D = 0$, o plano α passa pelo eixo dos x (ou seja, por LT); para definir, será necessário dar um ponto de α não pertencente a LT , o que se consegue, atribuindo por exemplo a z um valor arbitrário, não nulo, e calculando o valor correspondente de y por meio da fórmula:

$$y = \frac{-B}{C} z.$$

Resolução analítica e resolução gráfica de problemas de geometria do espaço - Como se viu, os métodos da geometria analítica e os da geometria descritiva permitem-nos resolver os problemas relativos ao espaço tridimensional, por duas vias diferentes: analiticamente (isto é, por meio de cálculos numéricos ou algébricos) e gráficamente (isto é, por meio de desenhos sobre um plano). É claro que o primeiro processo terá sempre um rigor absoluto, enquanto o segundo será sempre aproximado. Mas, em certos casos, o segundo é mais expedito e satisfaz plenamente, para o fim prático que se tenha em vista.

Do ponto de vista pedagógico, oferece interesse resolver um problema pelos dois processos e confrontar depois os resultados obtidos. É este um modo de o aluno se familiarizar com qualquer desses métodos e desenvolver a sua intuição geométrica.