INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

MATEMÁTICAS GERAIS

SEGUNDO AS LIÇÕES
DO EX.MO PROFESSOR DOUTOR SEBASTIÃO E SILVA



COLIGIDAS
POR
E. CORTESÃO

Instituto Superior de Agronomia

MATEMÁTICAS GERAIS

Segundo as lições do Ex^mo Professor

Doutor Sebastião e Silva

Coligidas por

E Cortesão

1º Volume

Reservados todos os direitos

Noções de lógica matemática

Termos e proposições - Entre as expressões duma língua, distinguem-se duas categorias principais: os termos (ou designações) e as proposições.

Os termos servem para nomear seres: pessoas, coisas, animais ou entidades abstractas.

Proposição é toda a expressão da qual se pode dizer que é verdadeira ou falsa.

Por exemplo : "Lisboa" é um termo; "Lisboa é capital de Portugal" - uma proposição verdadeira.

Esta classificação estende-se à linguagem simbólica da matemática Assim, por exemplo, as expressões

$$3 \ , \ 2+5 \ , \ \frac{3}{7} \ , \ \sqrt{5}$$

são termos ou designações porque nomeiam entidades (números); mas as expressões :

$$3 = 7 - 4 \ , \ 2<5 \ , \ 7>9 - 2$$

são proposições, as duas primeiras verdadeiras e a terceira falsa.

Diz-se que dois termos são equivalentes ou sinónimos quando designam o mesmo ser. Para indicar que duas expressões são equivalentes escreve-se entre elas o sinal = por exemplo, tem-se:

$$5 = 2 + 3,$$

visto que as expressões "5" e "2+3" são maneiras diferentes de nomear um mesmo número. Portanto o sinal = exprime identidade, não entre as expressões que liga, mas entre os seres nomeados por essas expressões.

Operações lógicas sôbre proposições - Consideraremos apenas três operações: conjunção, disjunção e negação

Dadas duas proposições α e β chama-se conjunção (ou produto lógico) de α e β à proposição que consiste em

afirmar simultaneamente α e β Simbòlicamente,a conjunção de α e β escreve-se :

$$\alpha \cap \beta \qquad \text{e lê-se} \qquad \text{"}\alpha \text{ e } \beta\text{"} .$$

Chama-se <u>disjunção</u> (ou <u>soma lógica</u>) das proposições α, β à proposição que consiste em afirmar que <u>uma pelo menos</u> das proposições α, β é verdadeira. Escreve-se

$$\alpha \cup \beta \quad \text{e lê-se} \quad \text{"}\alpha \text{ ou } \beta\text{"} .$$

Chama-se <u>negação</u> da proposição α à proposição que consiste em negar a proposição α ; escreve-se:

$$\sim \alpha \quad \text{e lê-se} \quad \text{"não } \alpha\text{"}$$

<u>Exemplos</u>:

A proposição $(2=7-5) \cap (3>7)$ é falsa porque o é a proposição $3>7$; mas já a proposição $(2=7-5) \cup (3>7)$ é verdadeira porque o é a proposição $2=7-5$.

A proposição $\sim(3>7)$ é verdadeira.

As definições destas operações podem esquematizar-se nos quadros seguintes em que V,F são respectivamente as iniciais de "verdadeira" e de "falsa"

α	β	$\alpha \cap \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

α	β	$\alpha \cup \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

α	$\sim\alpha$
V	F
F	V

Para indicar que duas proposições $\overset{\alpha,\beta}{\vee}$ são ambas verdadeiras ou ambas falsas escreve-se $\alpha = \beta$.

Tanto a conjunção como a disjunção são operações comutativas, associativas e cada uma delas é distributiva em relação à outra; isto é, tem-se,quaisquer que sejam as proposições α, β, γ:

$$\alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha \quad ; \qquad \alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha \quad ;$$

$$(\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \alpha \cap (\beta \cap \gamma) \; ; \quad (\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma) ;$$

$$(\alpha \cup \beta) \cap \gamma = (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta \cap \gamma)$$

$$(\alpha \cap \beta) \cup \gamma = (\alpha \cup \gamma) \cap (\beta \cup \gamma).$$

Tem-se, por outro lado:

$$\sim(\sim\alpha) = \alpha$$

e a 1ª lei de Morgan :

$$\sim(\alpha \cap \beta) = \sim\alpha \cup \sim\beta$$

("Dizer que as proposições α, β não são ambas verdadeiras equivale a dizer que uma delas pelo menos é falsa").

Variáveis e funções - O que distingue fundamentalmente a linguagem simbólica da matemática da linguagem comum é o uso de variáveis.

Variável é um símbolo (geralmente uma letra) que designa um ser indeterminado, isto é, um ente que pode ser escolhido arbitràriamente entre os elementos duma classe C. A esta classe C dá-se o nome de campo de variação da variável considerada.

Por exemplo : chama-se variável natural a qualquer símbolo, m, n, p,... que represente um número natural indeterminado; o campo de variação é, neste caso, a totalidade dos números naturais (isto é, inteiros e positivos).

Quanto às expressões simbólicas em que figuram variáveis, temos a considerar dois casos:

1º Caso - A expressão converte-se numa designação quando se substituem as variáveis por constantes. Seja a expressão $x + \frac{3}{y-x}$; fazendo, por exemplo, x=2 e y=1, esta expressão converte-se no termo $2 + \frac{3}{1-2}$ que designa um número determinado; deste modo a expressão $x + \frac{3}{y-x}$ designa um número indeterminado, que só se torna conhecido quando se atribuem valores determinados a x e a y. Diz-se então que o valor da expressão considerada é função de x e de y (função designatória).

Duas expressões deste tipo dizem-se formalmente equivalentes, ou, simplesmente, equivalentes, quando designam o mesmo ente para iguais determinações das variáveis; e, para indicar êste facto, escreve-se entre as duas expres-

sões o sinal $\equiv$. Por exemplo, tem-se .

$$(x-y)^2 \equiv x^2 - 2\,x\,y + y^2 .$$

Para designar funções duma só variável x, usam-se notações tais como :

$$f(x),\ g(x),\ \varphi(x)\ ,\ \ldots\ ;$$

e para funções de duas variáveis x,y, usam-se as notações;

$$f(x,y),\ g(x,y),\ \varphi(x,y)\ ,\ \ldots\ ;$$

e anàlogamente para funções de mais de duas variáveis.

2º caso - A expressão converte-se numa proposição quando se substituem as variáveis por constantes; assim, por exemplo, se na expressão :

$$x < y + 1$$

substituirmos x por 2 e y também por 2, a expressão converte-se em:

$$2 < 2 + 1 \qquad \text{proposição verdadeira}$$

mas se fôr x=2 e y=1, a expressão converte-se em :

$$2 < 1 + 1 \qquad \text{proposição falsa .}$$

Às expressões dêste tipo dá-se o nome de funções proposicionais.

Como abreviatura duma função proposicional da variável x podem usar-se expressões tais como:

$$\alpha(x),\ \beta(x)\ ,\ \ldots\ ;$$

anàlogamente para funções proposicionais das variáveis x,y :

$$\alpha(x,y),\ \beta(x,y),\ \ldots$$

e da mesma forma para funções proposicionais de mais de duas variáveis .

Diz-se que duas funções proposicionais são formalmente equivalentes ou, simplesmente, que são equivalentes quando se tornam verdadeiras para as mesmas determinações das variáveis; por exemplo, as expressões :
"x é um múltiplo de 3 e de 5" e "x é um múltiplo de 15",

são funções proposicionais equivalentes pois os valores da variável x que tornam verdadeira uma qualquer delas, tornam verdadeira a outra Usa-se também o sinal $\equiv$ para indicar a equivalência entre funções proposicionais.

Dadas duas funções proposicionais $\alpha(x,y,\ldots)$, $\beta(x,y,\ldots)$ diz-se que a primeira <u>implica</u> a segunda, e escreve-se:

$$\alpha(x,y,\ldots) \rightarrowtail \beta(x,y,\ldots)$$

quando todos os valores das variáveis que tornam verdadeira a primeira, também tornam verdadeira a segunda. Exemplo :

$$x < 3 \rightarrowtail x < 7 .$$

Se fôr simultâneamente :

$$\alpha(x,y,\ldots) \rightarrowtail \beta(x,y,\ldots)$$

e

$$\beta(x,y,\ldots) \rightarrowtail \alpha(x,y,\ldots)$$

as duas funções proposicionais serão equivalentes, isto é:

$$\alpha(x,y,\ldots) \equiv \beta(x,y,\ldots)$$

visto que os valores das variáveis que tornam verdadeira uma delas, também tornam verdadeira a outra.

As operações que definimos a respeito de proposições podem estender-se agora a funções proposicionais.

Assim dadas duas funções proposicionais $\alpha(x,y,\ldots)$, $\beta(x,y,\ldots)$, a expressão :

$$\alpha(x,y,\ldots) \cap \beta(x,y,\ldots)$$

é ainda uma função proposicional de $x,y,\ldots$; as determinações de $x,y,\ldots$ que a verificam são aqueles que tornam verdadeiras, <u>simultaneâmente as duas primeiras</u>. Por exemplo a função proposicional :

$$(3<x<7) \cap (5<x<9)$$

é equivalente a esta outra :

$$5<x<7.$$

Por sua vez a expressão :

$$\alpha(x,y,\ldots) \cup \beta(x,y,\ldots)$$

é ainda uma função proposicional de x, y, ... que será verdadeira quando uma, pelo menos, das funções proposicionais dadas o fôr. Por exemplo, seja a função proposicional:

$$(3<x<7) \cup (5<x<9);$$

os valores de x que a tornam verdadeira são os que tornam verdadeira uma pelo menos das funções proposicionais ;

$$3<x<7 \quad , \quad 5<x<9$$

logo ter-se-á :

$$(3<x<7) \cup (5<x<9) \equiv (3<x<9).$$

Finalmente, a expressão :

$$\sim \alpha(x,y,\ldots)$$

é ainda uma função proposicional de x,y,..., que será verdadeira quando $\alpha(x,y,\ldots)$ fôr falsa. Exemplo:

$$\sim(3<x<7) \equiv (x \geqslant 7) \cup (x \leqslant 3).$$

Quantificadores - Consideremos uma função proposicional de x: $\alpha(x)$. Pode acontecer que $\alpha(x)$ seja verificada para todos os valores possíveis de x; para indicar êste facto escreveremos : $\bigcap_x \alpha(x)$; o símbolo $\bigcap_x$ deve ler-se "Qualquer que seja x". Por exemplo, a expressão :

$$\bigcap_x (x < x+1)$$

é uma proposição verdadeira no campo dos números reais.

Para indicar que existe pelo menos um valor de x que verifica a função proposicional $\alpha(x)$ escreveremos $\bigcup_x \alpha(x)$; o símbolo $\bigcup_x$ deve ler-se: "Existe pelo menos um x tal que" . Exemplo: a expressão :

$$\bigcup_x (x^2 = -1)$$

é uma proposição falsa no campo dos números reais, mas verdadeira no campo dos números complexos.

Os símbolos $\bigcup_x$ e $\bigcap_x$ são chamados quantificadores .

Verifica-se entre eles a chamada 2ª lei de De Morgan:

$$\sim \bigcap_x \alpha(x) = \bigcup_x \sim\alpha(x)$$

("Dizer que $\alpha(x)$ não é verdadeira qualquer que seja x equivale a dizer que existe pelo menos um valor de x para o qual $\alpha(x)$ é falsa").

Os quantificadores podem também aplicar-se a funções proposicionais de mais de uma variável Por exemplo, a proposição :

$$\bigcap_x \bigcup_y (y<x)$$

é verdadeira no campo dos números reais, mas não no campo dos números inteiros . Outro exemplo é a definição de "divisor":

$$x \text{ é divisor de } y \equiv \bigcup_z (y=xz)$$

no campo dos números inteiros.

CONJUNTOS

Na linguagem corrente costuma fazer-se a distinção entre "nomes próprios" e "nomes comuns" . Os nomes próprios (tais como "Lisboa", "Sol", etc.) designam indivíduos, enquanto os nomes comuns (tais como "cidade","astro", etc.) designam classes . Todavia, os conceitos de indivíduo e de classe são correlativos pois uma classe pode ser tomada como elemento duma nova classe e, por sua vez, um indivíduo já pode ser uma classe doutros indivíduos.

Em matemática usa-se o termo "conjunto" como sinónimo de"classe" na mais larga acepção possível.

Um conjunto de números, um conjunto de pontos, um conjunto de figuras, um conjunto de palavras, etc, são exemplos de conjuntos que podem intervir em questões de matemática.

Um conjunto diz-se finito quando, pelo menos teòricamente, é possível determiná-lo indicando todos os seus elementos um por um; caso contrário diz-se infinito . Por exemplo, o conjunto dos números naturais é infinito.

Usaremos a notação :

$$\{a, b, c, \cdots\}$$

para designar o conjunto que tem por elementos a, b, c . . . :

Para indicar que um dado ente a é elemento dum dado conjunto C, costuma escrever-se: $a \in C$ (ler: "a pertence a C") Para indicar que a não é elemento de C escreve-se: $a \notin C$ (ler: "a não pertence a C").

Para indicar que dois entes a, b são elementos do conjunto C escreve-se:

$$a, b \in C .$$

Exemplo: $3 \in \{1,2,3\}$, $5 \notin \{1,2,3\}$.

Dados dois conjuntos A e B diz-se que A está contido em B ou que A é um sub-conjunto de B, quando todo o elemento de A é elemento de B; escreve-se para indicar êste facto:

$$A \subset B .$$

Para exprimir o mesmo facto também se diz que B contém A ou que B é um sôbre-conjunto de A e escreve-se:

$$B \supset A .$$

É evidente que a expressão $A \subset B$ equivale a esta outra:

$$x \in A \longmapsto x \in B .$$

Pode acontecer em particular que se tenha ao mesmo tempo $A \subset B$ e $B \supset A$, isto é, pode acontecer que todo o elemento de A seja elemento de B e que reciprocamente, todo o elemento de B seja elemento de A; nesse caso, A e B representam o mesmo conjunto e pode escrever-se então :

$$A = B .$$

Por exemplo, representando por M_6 e M_3, respectivamente, os conjuntos dos múltiplos de 6 e dos múltiplos de 3, será

$$M_6 \subset M_3 .$$

Outro exemplo: o conjunto dos triângulos equiláteros e o conjunto dos triângulos equiângulos coincidem, pois que todo o triângulo equilátero é equiângulo e reciprocamente, todo o triângulo equiângulo é equilátero

Operações lógicas sôbre conjuntos : a) Intersecção -Dados dois conjuntos A e B chama-se intersecção (ou produto lógico) de A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem ao mesmo tempo a A e a B. A intersecção de A e B representa-se por :

$$A \cap B.$$

b) Reunião - Chama-se reunião (ou soma lógica) dos conjuntos A e B ao conjunto formado por todos os elementos de A e por todos os elementos de B; representa-se por:

$$A \cup B.$$

Exemplos: Sendo a, b dois números tais que $a \leq b$, designemos por $[a,b]$ o conjunto dos valores de x tais que $a \leq x \leq b$. Então é fácil ver que :

$$[3,7] \cap [5,9] = [5,7]$$
$$[3,7] \cup [5,9] = [3,9].$$

Consideremos agora a expressão "$5 < x < 3$"; é claro que nenhum valor de x a torna verdadeira. Para exprimir êste facto, convenciona-se dizer que o conjunto dos valores de x que verificam tal expressão é o conjunto vazio (ou conto nulo). Do mesmo modo dir-se-á que são vazios o conjunto dos números primos múltiplos de 6, o conjunto dos quadrados perfeitos situados entre 50 e 60, etc. para significar que não existem tais números.

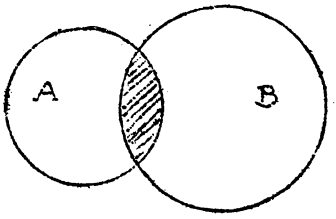
Uma vez introduzida esta convenção podemos dizer que, a toda a função proposicional $\propto(x)$, está associado um conjunto: o conjunto dos valores de x que a verificam. Reciprocamente, a todo o conjunto A está associada uma função proposicional: a função proposicional $x \in A$. E é fácil ver que:

$$(x \in A) \cap (x \in B) \equiv (x \in A \cap B)$$

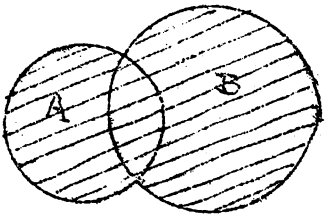
$$(x \in A) \cup (x \in B) \equiv (x \in A \cup B),$$

isto é: à conjunção corresponde a intersecção e à disjunção, a reunião.

O seguinte diagrama visualiza as noções de intersecção e de reunião de conjuntos:



O tracejado indica a intersecção dos circulos A e B.



O tracejado indica a reunião dos círculos A e B.

Dois conjuntos dizem-se <u>disjuntos</u> quando não têm nenhum elemento comum. É claro que a intersecção de dois conjuntos disjuntos é o conjunto vazio; por exemplo o conjunto $[3,7] \cap [9,15]$ é vazio.

Chama-se <u>complementar</u> dum conjunto A, e representa-se por $\sim A$, ao conjunto de todos os indivíduos que não pertencem a A; em símbolos:

$$x \in \sim A \equiv \sim (x \in A).$$

Mas êste conceito exige um prévio esclarecimento sôbre o que se entende por <u>totalidade dos indivíduos</u> - o que é variável de teoria para teoria. Ao conjunto de todos os indivíduos numa dada teoria (o conjunto dos números naturais, na aritmética; o conjunto dos números reais, na análise; o conjunto dos pontos, na geometria; etc.) dá-se o nome de <u>universo lógico</u> ou <u>universo do discurso</u>, relativo a essa teoria.

<u>Transformações</u> - Consideremos dois conjuntos A, B, quaisquer e suponhamos que se faz corresponder a cada elemento x de A um e um só elemento y de B. Designemos essa correspondência por θ. A correspondência θ assim definida diz-se <u>unívoca</u>, porque, a cada elemento x, fica a corresponder um só elemento y. Diz-se ainda neste caso que θ é uma <u>transformação unívoca de A sôbre B</u>; ao elemento y chama-se <u>imagem</u> ou <u>transformado de x</u> por meio de θ, e poderá escrever-se indiferentemente:

$$y = \theta(x) \quad \text{ou} \quad y = \theta x \quad ;$$

a variável y será assim função unívoca da variável x.

Por exemplo seja $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{5,6,7\}$, e definamos uma transformação unívoca θ de A sôbre B do seguinte modo:

$$1 \to 6, \quad 2 \to 5, \quad 3 \to 6, \quad 4 \to 7$$

será pois:

$$6 = \theta(1) = \theta(3), \quad 5 = \theta(2), \quad 7 = \theta(4) .$$

Diz-se que duas transformações θ_1, θ_2 são idênticas (ou que são a mesma transformação), e escreve-se $\theta_1 = \theta_2$, quando se tem :

$$\theta_1(x) \equiv \theta_2(x),$$

isto é, quando θ_1 e θ_2 conduzem ao mesmo resultado, qualquer que seja o elemento x a que sejam aplicadas.

Em particular, os conjuntos A, B podem coincidir e então θ dir-se-á uma transformação unívoca de A sôbre si mesmo .

Às transformações unívocas de A sôbre si mesmo chamaremos também operadores definidos em A .

Seja agora θ uma transformação unívoca de A sôbre B e suponhamos que, para cada elemento y de B, existe um e um só elemento x de A que seja transformado em y por meio de θ, isto é, tal que $y = \theta(x)$. Neste caso diz-se que θ é uma transformação biunívoca de A sôbre B; a transformação de B sôbre A que faz passar de y para x chama-se transformação inversa de θ e representa-se por θ^{-1}; por conseguinte:

$$\left[x = \theta^{-1}(y)\right] \equiv \left[y = \theta(x)\right] .$$

A transformação do exemplo anterior não é biunívoca pois o elemento 6 de B é ao mesmo tempo o transformado dos elementos 1 e 3 de A .

Mas consideremos o operador θ definido no conjunto $A = \{1,2,3\}$ do seguinte modo :

$$\theta(1) = 2 , \quad \theta(2) = 3 , \quad \theta(3) = 1 ;$$

trata-se visìvelmente duma transformação biunívoca de A sôbre A; a transformação inversa de θ é assim definida :

$$\theta^{-1}(1)=3, \quad \theta^{-1}(2)=1, \quad \theta^{-1}(3) = 2 .$$

Às transformações biunívocas dum conjunto A sôbre si

mesmo chamaremos simplesmente operadores reversíveis (definidos em A).

Produtos de transformações - Consideremos três conjuntos A, B, C e sejam θ, σ respectivamente uma transformação unívoca de A sôbre B e uma transformação unívoca de B sôbre C; então, a cada elemento x de A fica a corresponder, por meio de θ, um (e um só) elemento y de B e, por sua vez, ao elemento y fica a corresponder por meio de σ um (e um só) elemento z de C; pois bem, a transformação que faz corresponder ao elemento x de A o elemento z de C é chamada produto de σ por θ e representa-se por $\sigma\theta$. É claro que se tem:

$$y = \theta(x) \qquad z = \sigma(y) = \sigma\left(\theta(x)\right)$$

e será portanto, segundo a definição anterior:

$$(\sigma\theta)(x) \equiv \sigma\left(\theta(x)\right).$$

Convem notar que na expressão do produto $\sigma\theta$ figura em último lugar a primeira transformação a efectuar. É claro que se θ, σ forem transformações biunívocas, também o produto $\sigma\theta$ será uma transformação biunívoca.

Exemplo: Consideremos o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e as duas seguintes transformações do conjunto A sôbre si mesmo:

θ	σ
$1 \to 2$	$1 \to 2$
$2 \to 1$	$2 \to 3$
$3 \to 3$	$3 \to 1$.

É fácil ver que se tem:

$\sigma\theta$	$\theta\sigma$
$1 \to 3$	$1 \to 1$
$2 \to 2$	$2 \to 3$
$3 \to 1$	$3 \to 2$

e imediatamente se reconhece que se tem $\sigma\theta \neq \theta\sigma$; vemos assim que a multiplicação de transformações não é comutativa. Excepcionalmente pode acontecer que:

$$\sigma\theta = \theta\sigma$$

e então as transformações θ e σ dizem-se permutáveis
Exemplo:

σ	θ	$\sigma\theta$	$\theta\sigma$
$1 \to 2$	$1 \to 3$	$1 \to 1$	$1 \to 1$
$2 \to 3$	$2 \to 1$	$2 \to 2$	$2 \to 2$
$3 \to 1$	$3 \to 2$	$3 \to 3$	$3 \to 3$

Porém, se forem σ_1, σ_2, σ_3 operadores definidos num mesmo conjunto, tem-se necessàriamente:

$$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$$

o que se exprime dizendo que a multiplicação de operadores é associativa Com efeito, tem-se, por definição de produto de operadores:

$$[(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3](x) \equiv (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_3(x)) \equiv \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(x)))\,,$$

$$[\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)](x) \equiv \sigma_1[(\sigma_2\sigma_3)(x)] \equiv \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(x)))$$

e portanto :

$$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)\,.$$

Convenciona-se então escrever simplesmente $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, em vez de $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$ ou de $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$. O operador $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ equivale portanto a aplicar sucessivamente σ_3, σ_2, σ_1 e é chamado produto dos operadores σ_1, σ_2, σ_3, na ordem por que estão escritos.

Diz-se que, numa transformação θ um dado elemento a é invariante quando se tem $\theta(a) = a$ Chama-se transformação idêntica ou identidade e representa-se por I ao operador que deixa invariantes todos os elementos sôbre que incide :

$$I(x) = x \qquad \text{qualquer que seja } x\,.$$

Se multiplicarmos um operador θ pela identidade obtem-se ainda θ , isto é:

$$I\,\theta = \theta\,I = \theta\,.$$

Cociente de transformações - É fácil reconhecer que, sendo σ um operador reversível, se tem :

$$\sigma\,\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = I\,.$$

É ainda evidente que $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$ (o inverso do inverso dum operador σ é o próprio σ).

Posto isto podemos demonstrar que: Dados dois operadores reversíveis σ, θ, definidos num mesmo conjunto, é sempre possível determinar um (e um só) operador ξ tal que $\sigma\xi = \theta$ [1]. Com efeito, multiplicando à esquerda ambos os membros da igualdade $\sigma\xi = \theta$ por σ^{-1} vem :

$$\sigma^{-1}(\sigma\xi) = \sigma^{-1}\theta$$

ou seja, utilizando a propriedade associativa :

$$(\sigma^{-1}\sigma)\xi = \sigma^{-1}\theta$$

ou ainda:

$$\boxed{\xi = \sigma^{-1}\theta}\ .$$

Diz-se então que $\sigma^{-1}\theta$ é o cociente à esquerda de θ por σ. Analogamente se reconhece que é $\eta = \theta\sigma^{-1}$; diz-se então que $\theta\sigma^{-1}$ é o cociente à direita de θ por σ.

Suponhamos agora que σ, θ são permutáveis, isto é, que $\sigma\theta = \theta\sigma$. Então virá, multiplicando à esquerda e à direita por σ^{-1}:

$$\theta\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\theta\ .$$

isto é: se θ, σ são permutáveis, os cocientes de θ por σ à esquerda e à direita coincidem. Podemos então representá-los por $\frac{\theta}{\sigma}$; teremos assim, por definição:

$$\frac{\theta}{\sigma} = \theta\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\theta\ .$$

Em particular $\sigma^{-1} = \frac{I}{\sigma}$.

Mais ainda : Se forem $\sigma_1, \sigma_2, \theta_1, \theta_2$ operadores reversíveis e permutáveis entre si, ter-se-á :

$$\boxed{\frac{\theta_1}{\sigma_1}\cdot\frac{\theta_2}{\sigma_2} = \frac{\theta_1\,\theta_2}{\sigma_1\,\sigma_2}}$$

Com efeito, será:

$$\left(\frac{\theta_1}{\sigma_1}\cdot\frac{\theta_2}{\sigma_2}\right)\cdot(\sigma_2\sigma_1) = \left(\frac{\theta_1}{\sigma_1}\cdot\sigma_1\right)\theta_2 = \theta_1\,\theta_2$$

e portanto :

[1] — e um (e um só) operador η tal que $\eta\sigma = \theta$

$$\frac{\theta_1}{\sigma_1} \cdot \frac{\theta_2}{\sigma_2} = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sigma_1 \sigma_2} .$$

Em particular :

Se $\theta_2 = \sigma_2$, tem-se $\frac{\theta_1 \theta_2}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\theta_1}{\sigma_1}$.

Potência dum conjunto - Diz-se que dois conjuntos A,B são equipotentes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e os de B. Por exemplo, os conjuntos $\{1,2,3\}$ $\{4,5,6,7\}$ não são equipotentes.

Diz-se que dois conjuntos têm a mesma potência ou o mesmo número de elementos quando são equipotentes. Por conseguinte a potência ou número de elementos dum conjunto A é aquela propriedade comum a todos os conjuntos que são equipotentes a A.

Em particular, as potências dos conjuntos finitos não vazios são os números naturais $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$; a potência do conjunto vazio é o número zero (0).

Sistemas de elementos e produto cartesiano - Dado um conjunto C chamaremos par ordenado de elementos de C a toda a designação de dois elementos desse conjunto por uma ordem determinada, com ou sem repetição. Se a fôr o primeiro elemento e b o segundo elemento do par, êste será designado pela notação (a,b). Assim $(2,3)$ é o par ordenado cujo primeiro elemento é 2 e cujo segundo elemento é 3; mas convem notar que o par $(2,3)$ é diferente do par $(3,2)$:

$$(2,3) \neq (3,2).$$

Dum modo geral chamaremos sistema de n elementos do conjunto C a toda a designação de n elementos de C por uma ordem determinada, com ou sem repetição. A notação $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ representa o sistema cujo primeiro elemento é a_1, cujo segundo elemento é $a_2, \ldots$, cujo n-ésimo elemento é a_n. Os sistemas de dois elementos são os pares ordenados, os sistemas de 3 elementos chamam-se ternos ordenados, etc

Dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, chama-se produto cartesiano destes conjuntos na ordem em que estão escritos,

e representa-se por:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

ao conjunto de todos os sistemas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que se podem formar tomando um elemento a_1 em A_1, um elemento a_2 em $A_2, \ldots$, um elemento a_n em A_n. É fácil reconhecer que se for k_1 o número de elementos de A_1, k_2 o número de elementos de $A_2, \ldots$, k_n o número de elementos de A_n, o número de elementos do produto cartesiano dos conjuntos A_1, $A_2, \ldots, A_n$, será:

$$k = k_1 \, k_2 \ldots \ldots k_n .$$

Pode suceder que os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coincidam todos entre si; então, representando esse conjunto por A, o produto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ pode ser representado abreviadamente por A^n.

Seja, por exemplo, $A = \{1,2,3\}$; teremos:

$$A^2 = \{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (3,1)\ (3,2)\ (3,3)\};$$

como se vê trata-se aqui de todos os arranjos com repetição de 3 objectos tomados 2 a 2.

Conjuntos ordenados

Relações binárias - Consideremos um conjunto A e uma função proposicional $\rho(x,y)$, sendo A o campo de variação de x e de y; quere isto dizer que, dado um par (a,b) de elementos de A, a expressão (a,b) será uma proposição verdadeira ou falsa. Deste modo para certos pares ordenados de elementos de A a função $\rho(x,y)$ será eventualmente verificada e para outros não o será; diremos então que $\rho(x,y)$ estabelece uma relação entre as variáveis x,y - relação binária por se tratar de duas variáveis.

Dadas duas funções proposicionais $\rho(x,y)$ e $\sigma(x,y)$, diremos que definem a mesma relação binária, quando forem equivalentes, isto é, quando:

$$\rho(x,y) \equiv \sigma(x,y).$$

Para indicar que o par (a,b) verifica a relação ρ pode escrever-se $a \rho b$ em vez de $\rho(a,b)$.

Por exemplo seja N o conjunto dos números naturais; a expressão "x é divisor de y" estabelece uma relação binária entre os elementos do conjunto N : o par (3,6) verifica a relação, o par (3,7) não a verifica.

Uma relação binária diz-se <u>reflexiva</u> quando:

$$x = y \longmapsto x \rho y ;$$

isto é, quando:

$$\bigcap_x x \rho x .$$

Por exemplo, a relação "x é divisor de y" é reflexiva: qualquer número é divisor de si próprio.

Uma relação binária diz-se <u>simétrica</u> quando se tiver:

$$x \rho y \equiv y \rho x$$

quer dizer: se a relação é verificada pelo par ordenado (a,b), também é verificada pelo par inverso (b,a). Por exemplo, as relações "x é irmão ou irmã de y", "a recta r é paralela à recta s" são simétricas.

Uma relação ρ diz-se <u>transitiva</u> quando se tem:

$$x \rho y \wedge y \rho z \longmapsto x \rho z .$$

Por exemplo, se "x é divisor de y" e "y é divisor de z", tem-se necessàriamente "x é divisor de z"; logo, a relação "divisor" é transitiva. A relação de paralelismo é também transitiva, pois que:

$$r \,//\, s \wedge s \,//\, t \longmapsto r \,//\, t .$$

As relações ao mesmo tempo reflexivas, simétricas e transitivas chamam-se <u>relações de equivalência</u>: a relação de paralelismo é uma relação de equivalência, a relação "x é divisor de y" não é relação de equivalência.

<u>Relações de ordem</u> - Um conjunto C diz-se <u>ordenado</u> quando se estabelece entre os seus elementos uma relação binária, que pode ser expressa pelo símbolo $<$ e que satisfaz às seguintes condições:

1ª - Dados dois elementos a,b de C, é sempre verificada uma e <u>uma só</u> das seguintes hipóteses:

$$\text{ou} \quad a < b \qquad \text{ou} \quad b < a \qquad \text{ou} \quad a = b$$

(propriedade da tricotomia)

2ª - Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$ (propriedade transitiva).

A expressão "$x < y$" costuma ler-se "x é menor que y" ou "x é inferior a y" ou "x precede y".

Aos conjuntos ordenados chamaremos também escalas.

1º exemplo - O conjunto de todas as palavras duma língua fica ordenado, desde que se adopte, por exemplo, a ordem alfabética.

2º exemplo - O conjunto dos alunos duma turma fica ordenado segundo a ordem alfabética dos nomes, quando não haja dois alunos com o mesmo nome.

3º exemplo - O conjunto N dos números naturais está naturalmente ordenado pela relação "menor que" tal como esta é usualmente entendida

4º exemplo - Dá-se o nome de dizima infinita a toda a expressão do tipo:

$$a_p \cdots a_2\, a_1 , b_1\, b_2 \cdots b_n \cdots ,$$

em que $a_1, a_2, \cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$, são algarismos (em número infinito), sendo $a_p \neq 0$ se $p > 1$. Chama-se parte inteira da dizima o número inteiro $a_p \cdots a_2\, a_1$; chamam-se algarismos decimais aqueles situados à direita da vírgula Designemos por $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as dizimas infinitas com exclusão daquelas em que os algarismos decimais são todos iguais a 9 a partir de certa ordem (como, por exemplo, a dízima $7,52999\ldots9\ldots$)

Dados dois elementos α, β de $\mathcal{D}$, diz-se que α é menor que β e escreve-se $\alpha < \beta$, quando se verifica uma das seguintes hipóteses: ou a parte inteira de α é menor que a parte inteira de β; ou as partes inteiras de α e β são iguais, mas existe uma algarismo decimal de α inferior ao algarismo correspondente de β, não havendo antes desse nenhum outro algarismo de α diferente do algarismo correspondente de β. É fácil reconhecer que o conjunto $\mathcal{D}$ fica efectivamente ordenado por esta relação.

5º exemplo - Quando, numa dízima infinita, todos os algarismos decimais são nulos a partir duma certa ordem, a dizima considera-se equivalente à expressão que se obtem suprimindo todos os referidos algarismos nulos. Chamam-se

dizimas finitas as expressões assim obtidas; designemos a sua totalidade por $\mathscr{D}_f$. Posto isto, dados dois elementos α, β de $\mathscr{D}_f$, escreve-se $\alpha < \beta$, quando, designando por $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ as dizimas infinitas equivalentes a α, β respectivamente, se tem $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$. É claro que também o conjunto $\mathscr{D}_f$ fica assim ordenado.

Intervalos - Seja C um conjunto qualquer ordenado pela relação $<$. A portir desta relação podemos definir várias outras, tais como a relação $>$, a relação $\leqslant$, etc. Tem-se por definição:

$$(x > y) \equiv (y < x)$$

(a expressão "$x \geqslant y$" costuma ler-se "x é maior que y", ou "x é superior a y" ou "x é posterior a y");

$$(x \leqslant y) \equiv (x < y) \cup (x = y)$$

(a expressão "$x \leqslant y$" lê-se "x é inferior ou igual a y" ou "x é menor ou igual a y" ou "x é quando muito igual a y");

$$(x < y < z) \equiv (x < y) \cap (y < z).$$

Diz-se que "y está compreendido entre x e z" quando se tem $x < y < z$ ou $z < y < x$.

Anàlogamente se define a relação binária $x \geqslant y$ e as relações ternárias $x \leqslant y \leqslant z$, $x \leqslant y < z$, etc.

Dados dois elementos a,b de C tais que $a \leqslant b$ chama-se intervalo fechado de extremos a,b e representa-se por $[a,b]$ o conjunto de todos os elementos x de C tais que $a \leqslant x \leqslant b$; diz-se que a é o extremo inferior e b o extremo superior do intervalo.

Anàlogamente, chama-se intervalo aberto de extremos a,b e representa-se por $]a,b[$ o conjunto de todos os elementos de C tais que $a < x < b$.

Chama-se intervalo de extremos a,b fechado à esquerda e aberto à direita, e representa-se por $[a,b[$ o conjunto de todos os valores de x tais que $a \leqslant x < b$. Chama-se intervalo fechado à direita e aberto à esquerda e representa-se por $]a,b]$ o conjunto de todos os valores de x tais que $a < x \leqslant b$.

Saltos e lacunas; conjuntos densos e escalas contínuas - Seja ainda C um conjunto ordenado mediante a relação $\prec$.

Diz-se que dois elementos de C são consecutivos quando não existe nenhum elemento de C compreendido entre êles. Diz-se que dois elementos de C formam um salto nesse conjunto quando são consecutivos.

O conjunto C diz-se denso, se não existem saltos em C, isto é, se, dados dois quaisquer elementos x,y de C tais que $x \prec y$, é sempre possível determinar um outro elemento z de C tal que $x \prec z \prec y$.

Nos três primeiros exemplos atrás considerados, os conjuntos não são densos; mas já o conjunto $\mathscr{D}_f$ das dizimas finitas ou o conjunto $\mathscr{D}$ de dízimas infinitas são densos. Por exemplo, dados dois elementos α, β de $\mathscr{D}$, tais que $\alpha < \beta$, é sempre possível intercalar outra dízima infinita entre α e β. Com efeito seja a_p o primeiro algarismo de α diferente do algarismo correspondente de β; existirá depois de a_p pelo menos um algarismo a_r de α diferente de 9 (de contrário todos os algarismos de α seriam iguais a 9 a partir de certa ordem o que é impossível em $\mathscr{D}$); ora é fácil ver que, substituindo em α o algarismo a_r por um outro superior a a_r de obtem um elemento γ de $\mathscr{D}$ tal que $\alpha < \gamma < \beta$. Por exemplo, entre as dizimas $0,399955\ldots5\ldots$ e $0,400\cdots0\cdots$, encontra-se a dizima $0,399965\ldots5\ldots$.

Sejam agora H,K dois sub-conjuntos do conjunto ordenado C; escreve-se $H<K$ quando os elementos de H são todos inferiores aos elementos de K. Diz-se que os conjuntos H, K formam uma lacuna, quando se tem $H<K$ e não existe nenhum elemento de C a separá-los, isto é, nenhum elemento de C superior ou igual a todo o elemento de H e inferior ou igual a todo o elemento de K.

No conjunto $\mathscr{D}_f$ das dízimas finitas existem lacunas; por exemplo, seja:

$$H = \{0,5;\ 0,55;\ 0,555;\ldots\}\ ,\quad K = \{0,6;\ 0,56;\ 0,556;\ldots\}$$

para que uma dizima fôsse superior ou igual a qualquer elemento de H e inferior ou igual a qualquer elemento de K, o seu primeiro algarismo decimal teria de ser 5, o segundo teria também de ser 5 e assim sucessivamente; não há portanto nenhuma dízima finita a separar os con-

juntos H,K.

Mas já o conjunto $\mathfrak{D}$ de dízimas infinitas não apresenta lacunas como é fácil reconhecer.

Diremos que um conjunto ordenado é completo quando não existem lacunas nesse conjunto.

Um conjunto ordenado diz-se contínuo quando não tem saltos nem lacunas, isto é, quando é denso e completo ao mesmo tempo. O conjunto $\mathfrak{D}$ é pois um conjunto contínuo (ou uma escala contínua).

Extremo superior e extremo inferior dum conjunto; máximo e mínimo - Seja H um sub-conjunto dum conjunto ordenado C; pode acontecer que entre os elementos de H exista um maior que todos os outros - êsse elemento dir-se-á o máximo (ou o último) de H; anàlogamente, pode acontecer que entre os elementos de H exista um menor que todos os outros - esse elemento dir-se-á o mínimo (ou o primeiro) de H.

Diz-se que o conjunto H é limitado superiormente quando existe um elemento k de C tal que, para todo o elemento x de H, se tem $x \leq k$; isto é, quando não há no conjunto H nenhum elemento superior a um certo elemento k de C. Nesta hipótese, chama-se majorante do conjunto H todo o elemento de C (tal como k) que satisfaz à condição de não ser inferior a nenhum elemento de H.

Se o conjunto H tiver um elemento máximo será evidentemente limitado superiormente e esse máximo será um majorante de H - precisamente o menor dos majorantes de H. Mas a recíproca não é verdadeira; por exemplo, o conjunto de todas as dízimas finitas cuja parte inteira é zero não tem elemento máximo e é limitado superiormente; por conseguinte, um conjunto pode ser limitado superiormente e não ter contudo um elemento máximo.

Teorema - "Numa escala contínua, para todo o conjunto limitado superiormente existe um majorante menor que todos os outros".

Dem.: Seja C um conjunto ordenado contínuo e H um sub-conjunto de C limitado superiormente. Se o conjunto H tiver um elemento máximo, o teorema fica demonstrado porque esse elemento é um majorante menor que todos os outros. Supo-

nhamos agora que o conjunto H não tem elemento máximo e seja M o conjunto dos majorantes de H; então será $H < M$ e, como C é uma escala contínua (por hipótese), deve existir um elemento α separador de H e M; mas, sendo $\alpha \geqslant H$, será α um majorante de H e sendo $\alpha \leq M$, será α o menor dos majorantes de H. E assim fica provado o que pretendíamos.

Posto isto chama-se extremo superior dum conjunto ao menor de todos os seus majorantes (quando êste majorante mínimo exista). Então, o teorema anterior pode agora enunciar-se:

"Numa escala contínua, todo o conjunto limitado superiormente tem um extremo superior".

Quanto ao extremo superior dum conjunto H, dois casos se podem dar: ou o extremo superior pertence ao conjunto H, e é então o elemento máximo de H; ou não pertence ao conjunto, e então êste não tem elemento máximo. Por exemplo, o conjunto das dízimas finitas 0,5; 0,55; 0,555;... tem por extremo superior a dízima infinita 0,555...5... que não pertence ao conjunto; êste portanto não tem elemento máximo.

O conjunto H diz-se limitado inferiormente quando existe um elemento ℓ de C tal que qualquer elemento de H é superior ou igual a ℓ; Nesta hipótese chama-se minorante de H todo o elemento que satisfaz à condição de não ser superior a nenhum elemento de H.

Se o conjunto H tiver um elemento mínimo será, evidentemente, limitado inferiormente e esse mínimo será um minorante de H - precisamente o maior dos minorantes de H; mas a recíproca não é verdadeira.

Por uma via análoga à precedente demonstra-se o seguinte:

Teorema: "Numa escala contínua, para todo o conjunto limitado inferiormente existe um minorante maior que todos os outros".

Designando por extremo inferior dum conjunto o maior de todos os seus minorantes podemos dar a êste teorema o enunciado seguinte:

"Numa escala contínua, todo o conjunto limitado inferiormente admite um extremo inferior".

Se o extremo inferior pertence ao conjunto é o elemento mínimo do conjunto; se não pertence ao conjunto, êste não tem elemento mínimo.

Usaremos as notações sup A e inf B para designar, respectivamente, o extremo superior de A e o extremo inferior de B (quando existirem).

GRUPOS

Operações binárias - A aritmética elementar apresenta-nos vários exemplos de operações binárias: a adição, a multiplicação, etc. Consideremos em geral um conjunto C e suponhamos que se faz corresponder a cada par (x,y) de elementos de C, sob certas condições, um (ou mais de um) elemento z de C; designando esta correspondência por ϕ, podemos dizer que ϕ é uma operação binária, definida entre os elementos de C, e escrever:

$$z = \phi\,(x,y) \qquad \text{ou} \qquad z = x\ \phi\ y\ ;$$

também se poderá dizer neste caso que a variável z é função das variáveis x e y.

O elemento(ou os elementos) z que ϕ faz corresponder ao par (x,y) chama-se o resultado da operação ϕ aplicada a x e a y. Aos elementos x,y dá-se o nome de dados da operação ϕ.

A operação ϕ diz-se sempre possível quando se pode aplicar a qualquer par ordenado de elementos de C.(Por exemplo a subtracção não é sempre possível no conjunto dos números naturais, visto que a diferença a-b só existe quando $a > b$).

A operação ϕ diz-se unívoca ou uniforme, quando não faz corresponder mais de um elemento a cada par (x,y) de dados.

A operação ϕ diz-se associativa quando se tem:

$$(x\ \phi\ y)\ \phi\ z = x\ \phi\ (y\ \phi\ z) \quad \text{quaisquer que sejam } x,y,z \in C.$$

A operação ϕ diz-se comutativa quando se tem:

$$x\ \phi\ y = y\ \phi\ x \quad \text{quaisquer que sejam } x,y \in C.$$

A operação ϕ diz-se reversível, quando dados dois quaisquer elementos a,b de C é sempre possível determinar um (e um só) elemento x de C tal que :

$$x \not\emptyset b = a$$

e um (e um só) elemento y de C tal que:

$$b \not\emptyset y = a .$$

Conceito de grupo - Consideremos um conjunto C no qual seja defenida uma operação binária $\not\emptyset$; diz-se que o conjunto C é um grupo a respeito da operação $\not\emptyset$, quando esta fôr: 1) sempre possível; 2) unívoca; 3) associativa; 4) reversível. Se além disso, a operação for comutativa, o grupo também se dirá comutativo.

Por exemplo, o conjunto N dos números naturais não é um grupo a respeito da adição, porque esta operação não é reversível em N ; mas já o conjunto dos números inteiros (positivos, negativos e nulo) é um grupo a respeito da adição (grupo comutativo).

Consideremos a família de todas as transformações biunívocas dum conjunto sôbre si mesmo; esta família constitui um grupo a respeito da multiplicação atrás definida entre os seus elementos; mas em geral não é um grupo comutativo.

Na maioria dos casos que se apresentam na prática, a operação do grupo tem umas vezes o nome de adição e outras o de multiplicação. No primeiro caso o resultado da operação aplicada ao par (a,b) chama-se soma de a com b e representa-se por a+b; os dados a,b chamam-se parcelas (linguagem aditiva)

No segundo caso o resultado da operação aplicada ao par (a,b), chama-se produto de a por b e representa-se por ab; os dados a,b chamam-se factores (linguagem multiplicativa)

Grupos comutativos - As considerações que vão seguir-se referem-se a um grupo comutativo $\mathcal{G}$. Começaremos por adoptar a linguagem aditiva

Chama-se soma de n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e representa-se por $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ao resultado que se obtem, somando o rpimeiro com o segundo, o resultado com o terceiro, e assim sucessivamente até ao último Mais correctamente, pode representar-se esta soma pelo símbolo :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{(ler "somatório de } a_i \text{ entre 1 e n)}$$

Ter-se-á pois, por definição :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k \quad k = 2, 3, \cdots, n ;$$

convencionando-se que :

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 .$$

As propriedades comutativa e associativa estendem-se à soma generalizada: é indiferente a ordem das parcelas e podem sempre substituir-se duas ou mais parcelas pela respectiva soma.

Em particular, as parcelas $a_1, a_2, \cdots, a_n$ podem todas coincidir entre si. Neste caso, designando por a o valor comum das parcelas, a soma passa a ter o nome de produto de n por a (não esquecendo que n é um número natural e a um elemento do grupo $\mathcal{G}$) Ter-se-á pois, por definição:

$$(n+1)\, a = n\, a + a, \quad n = 1, 2, \cdots$$

convencionando-se que :

$$1\, a = a .$$

Das propriedades associativa e comutativa deduz-se fàcilmente que :

$$(m + n)\, a = m\, a + n\, a ,$$
$$m\,(a + b) = m\, a + m\, b ,$$
$$m\,(n\, a) = (m\, n)\, a ,$$

quaisquer que sejam os números naturais m,n e os elementos a,b do grupo.

Posto isto, recordemos que dados dois elementos a,b de $\mathcal{G}$, é sempre possível determinar um (e um só) elemento x de $\mathcal{G}$ tal que :

$$b + x = x + b = a ;$$

este elemento x é chamado diferença entre a e b e representa-se por a-b; isto é :

$$(x = a - b) \equiv (x + b = a).$$

Será pois, por definição :

$$\boxed{b + (a - b) = a}$$

À operação que faz passar do par (a,b) para o elemento x dá-se o nome de subtracção (operação inversa da adição); os dados a,b chamam-se, respectivamente, aditivo e subtractivo.

Seja agora c um elemento qualquer de $\mathcal{G}$; ter-se-á:

$$c + (c - c) \equiv c \; ; \tag{1}$$

seja a um outro elemento arbitrário de $\mathcal{G}$; somando a-c a ambos os membros de (1), virá:

$$\left[(a - c) + c\right] + (c - c) = (a - c) + c$$

ou seja:

$$a + (c - c) = a .$$

Em conclusão: existe um (e um só) elemento x de $\mathcal{G}$ tal que $a + x = a$, qualquer que seja $a \in \mathcal{G}$ Esse elemento é chamado zero ou elemento nulo de $\mathcal{G}$; representá-lo-emos por $\overline{0}$. Tem-se portanto :

$$\boxed{a + \overline{0} = a} \; , \quad \text{qualquer que seja } a \in \mathcal{G}.$$

Chama-se simétrico de a e representa-se por -a o elemento $\overline{0} - a$; teremos assim por definição :

$$a + (-a) = (-a) + a = \overline{0},$$

donde se deduz ainda:

$$a = \overline{0} - (-a) = - (-a),$$

quer dizer: o simétrico do simétrico de a é o próprio elemento a.

Por outro lado, tem-se:

$$\left[a + (-b)\right] + b = a + \left[(-b) + b\right] = a$$

ou seja:

$$\boxed{a + (-b) = a - b}$$

(a diferença a-b é a soma de a com o simétrico de b).

Observemos ainda que:

$$(-a - b) + (a + b) = (-a + a) + (-b + b) = \overline{0}$$

donde:

$$- (a + b) = - a - b;$$

quer dizer: o simétrico da soma a+b é a soma dos simétricos de a e de b.

Este resultado estende-se imediatamente ao caso dum número qualquer de parcelas:

$$\boxed{-(a_1+a_2+\cdots+a_n) = -a_1 - a_2 - \cdots - a_n} \ .$$

Daqui se deduz ainda que:

$$\boxed{-n\,a = n\,(-a)}$$

quaisquer que sejam o número natural n e o elemento a de $\mathcal{G}$.

Todos estes factos podem ser traduzidos na linguagem multiplicativa. Suponhamos pois que a operação do grupo $\mathcal{G}$ se chama multiplicação .

O produto de n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ pode representar-se por $a_1 a_2 \cdots a_n$ ou por $\prod_{i=1}^{n} a_i$, tendo-se por defenição:

$$\prod_{i=1}^{k} a_i = a_k \prod_{i=1}^{k-1} a_i \quad , \quad k = 2, 3, \cdots, n,$$

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1 .$$

Este produto é associativo e comutativo . Se $a_1=a_2 = \cdots = a_n = a$ o produto $\prod_{i=1}^{n} a_i$ chama-se potencia de expoente n de a e representa-se por a^n. Portanto :

$$a^1 = a, \quad a^{n+1} = a.a^n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Têm lugar as propriedades :

$$a^{m+n} = a^m\, a^n .$$

$$(a\,b)^m = a^m . b^m .$$

$$(a^m)^n = a^{mn} .$$

Existe em $\mathcal{G}$ um (e um só) elemento chamado unidade de $\mathcal{G}$ e representável por $\overline{1}$, com a propriedade: $a.\overline{1} = a$; qualquer que seja a .

Dados dois elementos a,b de $\mathcal{G}$, existe sempre um (e um só) elemento x de $\mathcal{G}$, tal que $b\,x = x\,b = a$ Este elemento é chamado cociente de a por b e representa-se por

$\frac{a}{b}$ ou por a:b. À operação que faz passar do par (a,b) para o elemento a:b dá-se o nome de <u>divisão</u> (operação inversa da multiplicação); os dados a,b chamam-se respectivamente <u>dividendo</u> e <u>divisor</u>.

O elemento $1 : a$ é chamado <u>inverso</u> de a e representa-se por a^{-1}. Tem-se

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

$$\frac{a}{b} = a\, b^{-1}$$

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{-1} = a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_n^{-1}$$

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n .$$

Teoria dos números reais

<u>Grandezas contínuas</u> - As ciências da Natureza (Geometria, Física, Química, Biologia, etc.) oferecem-nos vários exemplos de <u>grandezas contínuas</u>. Os comprimentos, as áreas, os volumes, as massas, as quantidades de calor, etc. são grandezas contínuas de diferentes espécies.

O que distingue em primeiro lugar as grandezas contínuas duma mesma espécie é o facto de constituirem um <u>conjunto ordenado contínuo</u>.(1) Quer isto dizer que, entre as grandezas duma mesma espécie, está definida uma relação binária (expressa pelo símbolo $<$) dotada das seguintes propriedades:

1) Dadas duas grandezas A,B, é sempre verificada uma, e uma só, das seguintes hipóteses:

ou $A<B$ ou $A=B$ ou $B<A$. (<u>tricotomia</u>)

2) Se $A<B$ e $B<C$, então $A<C$. (<u>transitividade</u>)

3) Quaisquer que sejam as grandezas A, B, sendo $A<B$, existe sempre pelo menos uma outra grandeza C tal que $A<C<B$ (<u>ausência de saltos</u>).

(1) - Em tudo o que se segue representaremos as grandezas por letras maiúsculas do alfabeto latino, para evitar a confusão com números.

4) Dados dois conjuntos de grandezas, tais que todas as grandezas dum dos conjuntos sejam inferiores a todas as grandezas do outro, existe sempre pelo menos uma grandeza separadora dos dois conjuntos, isto é, uma grandeza majorante do primeiro e minorante do segundo (ausência de lacunas).

Mas, entre as grandezas duma mesma espécie, está ainda definida uma operação binária, habitualmente chamada adição - que faz corresponder a cada par de grandezas A, B uma (e uma só) grandeza A+B, chamada soma das primeiras. Esta operação é sempre possível, unívoca, associativa e comutativa. Além disso, verifica-se a seguinte propriedade:

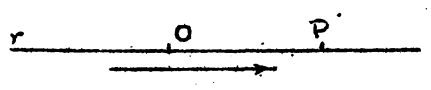
Se $A<B$, então $A + C<B + C$ (isto é: somando uma mesma grandeza a ambos os membros duma desigualdade, esta não muda de sentido).

Costuma exprimir-se este facto dizendo que a adição respeita a relação $<$, ou ainda que é uma operação monótona.

Quanto à reversibilidade da adição, dois casos se podem dar:

1º caso: Em certas espécies de grandezas, chamadas grandezas absolutas, a equação $A + X = B$, admite uma solução em X, se, e só se, $A<B$. Os comprimentos, as áreas, as massas, etc apresentam-se geralmente como grandezas absolutas.

2º caso: Noutras espécies de grandezas, chamadas grandezas relativas, a equação $A + X = B$, admite uma solução em X, quaisquer que sejam as grandezas A,B. Neste caso, há uma grandeza nula, que representaremos por $\overline{0}$. As grandezas classificam-se em positivas (maiores que $\overline{0}$) e negativas (menores que $\overline{0}$). São exemplos de grandezas relativas as quantidades de electricidade, os potenciais, etc. Quando sôbre uma recta r se fixa um ponto O como origem e um sentido como positivo, cada ponto P da recta determina com O um segmento $\overline{OP}$ que se considera positivo ou negativo, conforme P está dum ou doutro lado de O; temos aqui portanto outro exemplo de grandezas relativas que é aquele



que se apresenta mais frequentemente.

É às grandezas relativas que vamos dedicar em especial a nossa atenção. Para o seu estudo sistemático partiremos da seguinte:

Definição - Chama-se grupo de grandezas contínuas a toda a classe $\mathcal{G}$ constituída por entidades A, B, ... de natureza qualquer, entre as quais seja definida uma operação binária, chamada adição, e uma relação de ordem, expressa pelo sinal $<$, de tal modo que:

1) A respeito da adição, $\mathcal{G}$ é um grupo comutativo.
2) A respeito da relação $<$, $\mathcal{G}$ é um conjunto ordenado contínuo.
3) A adição respeita a relação de ordem, isto é, tem-se:

$$A < B \rightarrow A + C < B + C .$$

São portanto verificadas em $\mathcal{G}$: 1) Todas as propriedades operatórias que caracterizam um grupo comutativo; 2) todas as propriedades ordinais que caracterizam uma escala contínua; 3) a propriedade da monotonia que estabelece a conexão entre a adição e a relação de ordem.

Aos elementos de $\mathcal{G}$ chamaremos grandezas (relativas). E fica entendido que ao falarmos de grandezas, salvo indicação em contrário, nos referimos sempre a grandezas dum mesmo grupo.

Grandezas positivas, negativas e nula - Visto que $\mathcal{G}$ é um grupo, existirá em $\mathcal{G}$ um elemento $\overline{0}$, chamado grandeza nula, tal que:

$$A + \overline{0} = A , \quad \text{para todo o } A \in \mathcal{G} .$$

Uma grandeza A diz-se positiva ou negativa, conforme for $A > \overline{0}$ ou $A < \overline{0}$.

"Dadas duas grandezas A, B, será $A-B < \overline{0}$, $A-B = \overline{0}$ ou $A-B > \overline{0}$, conforme fôr $A < B$, $A = B$ ou $A > B$".

Com efeito, suponhamos que se tem:

$$A < B ;$$

então, somando $-B$ a ambos os membros desta desigualdade e atendendo à propriedade da monotonia, virá:

$$A - B < \overline{0}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Analogamente se demonstram as restantes partes da pro-

posição.

Do mesmo modo se conclue que:

"Se $A > \overline{0}$, então $-A < \overline{0}$ e vice-versa"

Da propriedade da monotonia ainda se deduzem fàcilmente as seguintes propriedades:

"Se $A_1 < B_1$, $A_2 < B_2, \cdots, A_n < B_n$, então $A_1 + A_2 + \cdots + A_n < B_1 + B_2 + \cdots + B_n$" (aqui o sinal $<$ pode ser substituido pelo sinal $\leqslant$).

"Se $A < B$, então $m\,A < mB$, qualquer que seja o número natural m".

"Se $m < n$ e $A > \overline{0}$, então $m\,A < n\,A$ "

Teorema da divisibilidade - Correntemente admite-se a possibilidade de dividir uma grandeza contínua num número qualquer de partes iguais. Mas êste facto pode ser deduzido das propriedades fundamentais que caracterizam um grupo contínuo de grandezas. Começaremos por demonstrar o seguinte :

Lema- "Sendo A uma grandeza positiva e n um número natural, é sempre possível determinar uma grandeza X de modo que $n\,X \leqslant A$".

Com efeito, sendo $A > \overline{0}$, será possível (pela ausencia de saltos) determinar n-grandezas $U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}$ tais que:

$\overline{0} \quad U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_{n-1} \quad A$ $\qquad \overline{0} < U_1 < A,\ U_1 < U_2 < A, \cdots, U_{n-2} < U_{n-1} < A.$

Mas, se designarmos por X a ménor das grandezas positivas $U_1, U_2 - U_1, \cdots, A - U_{n-1}$, ter-se-á :

$$X \leqslant U_1\ ,\ X \leqslant U_2 - U_1, \cdots, X \leqslant A - U_{n-1}$$

e, portanto, em virtude da monotonia :

$$n\,X \leqslant U_1 + (U_2 - U_1) + \cdots + (A - U_{n-1}) = A$$

ou seja:

$$n\,X \leqslant A. \qquad \text{q.e.d.}$$

Podemos agora passar ao seguinte:

Teorema - "Sendo A uma grandeza qualquer e n um número natural, é sempre possível determinar uma, e uma só, gran-

deza X, de modo que $n X = A$."

a) Começaremos por supor $A > \overline{0}$. Consideremos o conjunto de todas as grandezas positivas X tais que $n X \leq A$. Visto que essas grandezas não podem ser superiores a A, o seu conjunto é limitado superiormente e, portanto (visto ser $\mathcal{G}$ uma escala contínua) admitirá um extremo superior que designaremos por X_0. Vamos ver que se tem precisamente $n X_0 = A$.

Com efeito, se fôsse $n X_0 \neq A$, ou seria $n X_0 < A$, ou seria $n X_0 > A$. No primeiro caso, ter-se-ia $A - n X_0 > \overline{0}$ e então, pelo lema anterior, poderia determinar-se uma grandeza H de modo que:

$$n H \leq A - n X_0$$

ou seja:

$$n (X_0 + H) \leq A ;$$

mas, como $X_0 + H > X_0$, não seria X_0 o extremo superior das grandezas X tais que $n X \leq A$.

Se fôsse $n X_0 > A$, ter-se-ia $n X_0 - A > \overline{0}$, e seria ainda possível, pelo mesmo lema, determinar $H > \overline{0}$, de modo que:

$$n H \leq n X_0 - A$$

ou seja:

$$n (X_0 - H) \geq A$$

e como $X_0 - H < X_0$, não seria X_0 o extremo superior das grandezas X tais que $n X \leq A$, pois que, para $X \geq X_0 - H$ viria $n X \geq n (X_0 - H) \geq A$.

Terá de ser pois $n X_0 = A$.

b) Se $A < \overline{0}$, será $-A > \overline{0}$; então, existirá uma grandeza X tal que $n X = -A$ e portanto:

$$n (-X) = - n X = A. \qquad \text{q.e.d.}$$

c) Se $A = \overline{0}$; ter-se-á $n \overline{0} = \overline{0} = A$.

d) Resta provar que a equação $n X = A$ não admite mais de uma solução em X.

Suponhamos que existiam duas grandezas X_1, X_2 distintas, tais que $n X_1 = n X_2 = A$, e seja $X_1 < X_2$. Então, viria $n X_1 < n X_2$ ou seja $A < A$, o que é absurdo (propriedade da tricotomia). Não existe portanto mais do que uma grandeza X tal que $n X = A$.

Números racionais - Chama-se cociente duma grandeza A por um número natural n e representa-se por $\frac{A}{n}$, aquela grandeza X tal que $n\,X = A$ - grandeza esta que, segundo o teorema anterior, existe sempre e é única para cada $A \in \mathcal{G}$.

Observemos agora que todo o número natural n define um operador em $\mathcal{G}$: o operador que faz corresponder a cada grandeza X a grandeza $Y = n\,X$; em particular, o número 1 define o operador idêntico: $1\,X \equiv X$. Mais ainda: em virtude do teorema da divisibilidade, o operador definido por n é reversível: o seu inverso é o operador n^{-1} tal que

$$n^{-1}\,X = \frac{X}{n}\ , \text{ para cada } X \in \mathcal{G}.$$

Por outro lado, tem-se, como se viu a respeito de grupos em geral:

$$m\,(n\,X) = (m\,n)\,X = n\,(m\,X),$$

o que significa que o produto dos operadores definidos pelos números naturais m, n é precisamente o operador definido pelo produto mn desses números; estes operadores são pois permutáveis entre si.

Em resumo: os números naturais podem ser interpretados como operadores reversíveis definidos em $\mathcal{G}$, de tal modo que: 1) o produto de m, n como números coincide com o produto de m, n como operadores; 2) o número 1 coincide com o operador idêntico I.

Podemos portanto aplicar a êste caso tudo o que atrás foi dito a respeito de operadores reversíveis em geral (permutáveis entre si). Assim teremos:

I) Dados dois números naturais m,n, existem sempre e são iguais os cocientes de m: por n à direita e à esquerda (concebendo m, n como operadores definidos em $\mathcal{G}$). Podemos pois escrever:

$$\frac{m}{n} = m\,n^{-1} = n^{-1}\,m \quad ; \qquad n^{-1} = \frac{1}{n}\,.$$

O símbolo $\frac{m}{n}$ toma o nome de fracção, da qual m,n se dizem os termos: m, o numerador e n, o denominador.

A fracção $\frac{m}{n}$ designa pois a operação que consiste em "dividir por n e multiplicar o resultado por m" (ou,

o que é equivalente, "multiplicar por m e dividir o resultado por n"); tem-se com efeito, por definição:

$$\frac{m}{n} X = m \frac{X}{n} = \frac{m X}{n} \quad \text{para cada } X \in \mathcal{G}.$$

Aos operadores assim definidos sôbre grandezas dá-se o nome de <u>números racionais (positivos)</u>. Em particular se <u>m</u> é múltiplo de <u>n</u>, o cociente m/n é um número natural - os números naturais ficam pois incluídos na classe dos números racionais (positivos). Se <u>m</u> não é múltiplo de <u>n</u>, o operador m/n já não é um número natural: - toma então o nome de <u>número fraccionário</u>.

Dadas duas grandezas A, B, positivas, diz-se que A é <u>um múltiplo</u> de B (ou que B é <u>um submúltiplo</u> de A), quando existe pelo menos um número natural <u>n</u> tal que $A = n\,B$.

II) Quaisquer que sejam os números naturais m, n, p, q, tem-se:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m\,p}{n\,q} .$$

Vemos assim que o produto de dois números racionais positivos (entendidos como operadores) é ainda um número racional positivo. A multiplicação de números racionais positivos é sempre possível, unívoca, associativa, comutativa e reversível, como imediatamente se reconhece. Visto que :

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{pq} = 1 ,$$

segue-se que q/p é o inverso de p/q e portanto :

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m\,q}{n\,p} .$$

Deste modo, a divisão, que não era sempre possível no campo dos números naturais, passa a sê-lo no campo dos números racionais positivos.

III) Em particular tem-se:

$$\frac{m\,p}{n\,p} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{p} = \frac{m}{n} ;$$

por palavras: <u>multiplicando ambos os termos duma fracção por um mesmo número, obtem-se uma fracção equivalente à primeira, isto é, representativa do mesmo número (operador)</u>

Por conseguinte dadas duas fracções:

$$\frac{m}{n} \ , \ \frac{p}{q}$$

será sempre possível substitui-las por duas outras com o mesmo denominador e respectivamente equivalentes às primeiras, como, por exemplo, as fracções :

$$\frac{m\,q}{n\,q} \ , \ \frac{n\,p}{n\,q} \ .$$

Daqui se deduz o:

Critério geral de equivalência de fracções - As fracções m/n, p/q são equivalentes se e só se mq = np; em símbolos:

$$\boxed{\left(\frac{m}{n} = \frac{p}{q}\right) \equiv (mq = np)} \ .$$

Entre todas as fracções representativas dum mesmo número racional m/n, pode sempre escolher-se uma mais simples do que todas as outras : basta dividir os termos m e n pelo seu máximo divisor comum. A fracção assim obtida terá os termos primos entre si e dir-se-á irredutível

Adição de números racionais positivos - Consideremos dois números racionais positivos α , β. Como vimos, estes números poderão ser representados por duas fracções com o mesmo denominador; seja :

$$\alpha = \frac{p}{n} \qquad \beta = \frac{q}{n} \ .$$

Ora, qualquer que seja $X \in \mathcal{G}$, tem-se :

$$n\left(\frac{p}{n}X + \frac{q}{n}X\right) = n\,\frac{p\,X}{n} + n\,\frac{q\,X}{n} = (p+q)\,X$$

donde:

$$\frac{p}{n}X + \frac{q}{n}X = \frac{p+q}{n}X \ .$$

É portanto natural dizer que o número $\frac{p+q}{n}$ é a soma dos números $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$. Ter-se-á assim, por definição :

$$(\alpha+\beta)\,X = \alpha X + \beta X \ , \quad \text{para cada } X \in \mathcal{G}.$$

Fica deste modo definida entre os números racionais positivos uma operação binária (adição) que fàcilmente se reconhece ser: sempre possível, unívoca, associativa e

comutativa.

Além disso a equação $\alpha + \xi = \beta$ terá uma solução em ξ se fôr $\alpha < \beta$ (mas só nesta hipótese); e então escrever-se-á $\xi = \beta - \alpha$. Também é fácil ver que a adição é distributiva a respeito da multiplicação; isto é, tem-se:

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

quaisquer que sejam os números racionais α, β, γ.

Um outro facto a registar e que fàcilmente se demonstra é o seguinte:

"Sendo α um número racional (positivo) tem-se:

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y,$$

quaisquer que sejam as grandezas X,Y ".

Ordenação dos números racionais positivos - Consideremos dois números racionais $\alpha = \frac{p}{n}$, $\beta = \frac{q}{n}$ e uma grandeza X. Se fôr $X > \overline{0}$ e $p < q$, será ainda:

$$\frac{X}{n} > \overline{0} \text{ e portanto } p\frac{X}{n} < q\frac{X}{n} \text{ ou seja}$$

$$\frac{p}{n}X < \frac{q}{n}x.$$

É então natural dizer que se tem $\frac{p}{n} < \frac{q}{n}$ quando $p < q$. Se tivermos $\alpha = \frac{p}{m}$, $\beta = \frac{q}{n}$ será: $\alpha = \frac{pn}{mn}$, $\beta = \frac{mq}{mn}$ e portanto escreveremos

$$\boxed{\frac{p}{m} < \frac{q}{n}, \text{ se e só se } pn < mq}.$$

Deste modo, dados dois números racionais α, β tais que $\alpha < \beta$, ter-se-á:

$$\alpha X < \beta X \text{ se } X > \overline{0} \quad (\text{e } \alpha X > \beta X \text{ se } X < \overline{0}).$$

Fàcilmente se reconhece que o conjunto dos números racionais positivos fica efectivamente ordenado por meio desta relação $<$. Mais ainda: vamos ver que se trata dum conjunto, ordenado sem saltos. Com efeito, consideremos dois números racionais positivos α, β, quaisquer, que supomos já representados por fracções com o mesmo denominador: $\alpha = \frac{p}{n}$, $\beta = \frac{q}{n}$; entre os números pares 2p e 2q existe pelo menos

um número ímpar; seja k; então virá:

$$\frac{2p}{2n} < \frac{k}{2n} < \frac{2q}{2n} \quad \text{isto é} \quad \alpha < \frac{k}{2n} < \beta \ ,$$

o que prova a afirmação feita.

Haverá lacunas neste conjunto ordenado? Veremos mais adiante que sim.

Entretanto registemos ainda que, no conjunto ordenado dos números racionais positivos a adição e a multiplicação são operações monotonas, isto é, tem-se:

$$\boxed{\alpha < \beta \longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma \ , \ \alpha\gamma < \beta\gamma}$$

quaisquer que sejam os números racionais positivos α, β, γ.

Incomensurabilidade - Consideremos duas grandezas positivas A, B. Diz-se que A, B são comensuráveis, quando existe um número racional r tal que :

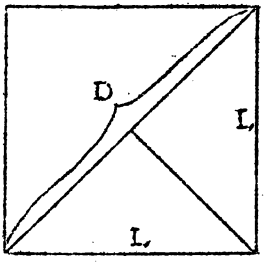
$$A = r\,B \ ;$$

nesta hipótese, o número r é chamado razão de A para B ou medida de A em relação a B, e escreve-se :

$$r = \frac{A}{B} \quad \text{ou} \quad r = A : B .$$

As grandezas A, B dizem-se incomensuráveis, quando não são comensuráveis

Exemplo clássico de grandezas incomensuráveis são o lado L dum quadrado e a respectiva diagonal D.



Suponhamos que existia um número racional p/q tal que :

$$(1) \qquad D = \frac{p}{q} L \ .$$

Podemos desde já supor a fracção p/q irredutível (p,q primos entre si). Pela semelhança de triângulos deduzia-se que:

$$D : L = L : \frac{D}{2}$$

ou, atendendo a (1)

$$\frac{p}{q} = \frac{2q}{p}$$

ou ainda:

$$p^2 = 2\,q^2.$$

Então p^2 seria um número par e o mesmo aconteceria a p (pois que o quadrado dum número ímpar não pode ser um número par). Ponhamos $p = 2\,k$ (k inteiro); virá :

$$4\,k^2 = 2\,q^2 \quad \text{ou} \quad q^2 = 2\,k^2$$

e assim concluímos que também q deveria ser um número par. Mas p e q não podem ser ambos pares, porque, por hipótese, são primos entre si. O absurdo proveio de supor que as grandezas D, L são comensuráveis. Não existe pois nenhum submúltiplo de L que seja ao mesmo tempo submúltiplo de D.

Quando as grandezas A, B são comensuráveis, a medida de A em relação a B é o número racional r tal que $A = r\,B$. Mas o que se entende por medida de A em relação a B, no caso de tais grandezas serem incomensuráveis ? É o que iremos ver mais adiante.

Princípio de Arquimedes - Este princípio pode enunciar-se do seguinte modo:

"Se A é uma grandeza positiva, o conjunto de todos os múltiplos de A não é limitado superiormente".

Com efeito, seja A uma grandeza positiva. Os múltiplos de A são as grandezas:

$$A, \quad 2A, \quad 3A, \ldots, n\,A, \ldots$$

Suponhamos que o conjunto destas grandezas era limitado superiormente; então admitiria um extremo superior, que designaremos por L. Como $A > \vec{0}$, seria $L - A < L$, e sendo L o menor dos majorantes daquele conjunto, deveria existir pelo menos um múltiplo de A (seja νA), maior que L-A:

$$\nu A > L - A$$

isto é,

$$(\nu + 1)\,A > L\ ;$$

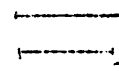
mas assim teríamos um múltiplo de A superior ao extremo superior de todos os múltiplos de A - o que é absurdo. O teorema fica pois demonstrado

Corolário I - "Dadas duas grandezas A, B positivas, existe sempre, pelo menos, um número natural n tal que $n\,B > A$ " (De contrário, o conjunto de todos os múltiplos de B fica-

ria limitado superiormente por A).

Corolário II - "Dadas duas grandezas A,B positivas, existe sempre, pelo menos, um número natural n tal que $B > A/n$ ". Esta corolário é consequência imediata do anterior.

Números irracionais - Consideremos duas grandezas positivas A, B quaisquer. Como medir A tomando B para unidade? Em primeiro lugar, notemos que, pelo corolário II do princípio de Arquimedes, existe pelo menos um número natural p tal que:



$\frac{B}{p} < A$ (se $B < A$ basta tomar $p = 1$).

Em segundo lugar, pelo corolário I do mesmo princípio, existirá pelo menos um múltiplo de B/p superior a A. Seja então $\frac{k_p}{p} B$ o maior múltiplo de $\frac{B}{p}$ que não excede A; ter-se-á pois:

$$\frac{k_p}{p} B \leqslant A < \frac{k_p + 1}{p} B .$$

Dum modo geral, sendo n um número natural $\geqslant p$, designemos por k_n o número natural que satisfaz à condição:

$$(1) \qquad \frac{k_n}{n} B \leqslant A < \frac{k_n + 1}{n} B .$$

. De duas uma: ou existe um valor de n tal que $\frac{k_n}{n} B = A$ ou tal não sucede. No primeiro caso as grandezas A,B são comensuráveis, tendo-se precisamente $A:B = k_n/n$. No segundo caso as grandezas A, B são incomensuráveis, porque, se existisse um número racional r/s tal que $\frac{r}{s} B = A$ (podendo sempre supor-se $s > n$) teria de ser $r = k_s$, e assim recaíamos no primeiro caso.

Por conseguinte, se A, B são incomensuráveis, não existe nenhum número racional compreendido entre os números $\frac{k_n}{n}$ e os números $\frac{k_n + 1}{n}$ $(n \geqslant p)$; por outras palavras : o conjunto dos números $\frac{k_n}{n}$ e o conjunto dos números $\frac{k_n + 1}{n}$ formam neste caso uma lacuna no conjunto ordenado dos

números racionais positivos.

Definição: Diz-se que dois conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ de números racionais positivos formam um par de classes contíguas quando verificam as duas seguintes condições: 1) cada elemento de $\mathcal{H}$ é inferior ou igual a cada elemento de $\mathcal{K}$; 2) qualquer que seja o número racional $\delta > 0$, é possível determinar dois números, um de $\mathcal{K}$ e outro de $\mathcal{H}$, cuja diferença seja inferior a δ.

É claro que no exemplo anterior, o conjunto dos números $\frac{k_n}{n}$, e o conjunto dos números $\frac{k_n+1}{n}$ formam um par de classes contíguas - visto que a diferença $\frac{k_n+1}{n} - \frac{k_n}{m} = \frac{1}{n}$ se pode tornar inferior a qualquer número racional $\varepsilon > 0$ (Basta que seja $n > 1/\varepsilon$).

Consideremos então um par de classes contíguas $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ de números racionais positivos e seja X uma grandeza qualquer. Tomemos um elemento h arbitrário de $\mathcal{H}$ e um elemento k arbitrário de $\mathcal{K}$; ter-se-á $h \leq k$ e portanto:

$$h\,X \leqslant k\,X, \text{ se } X > \overline{0}; \qquad h\,X \geqslant k\,X, \text{ se } X \leqslant \overline{0}.$$

Então, designando por $\mathcal{H}X$ a classe de todas as grandezas $h\,X$, tais que $h \in \mathcal{H}$, e por $\mathcal{K}X$ a classe de todas as grandezas $k\,X$ tais que $k \in \mathcal{K}$, podemos afirmar que as classes $\mathcal{H}X$, $\mathcal{K}X$ admitem pelo menos um elemento separador - - uma vez que no grupo $\mathcal{G}$ não existem lacunas. Mais ainda, vamos provar que:

"Se $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ são classes contíguas, existe uma única grandeza separadora das classes $\mathcal{H}X$, $\mathcal{K}X$, que é o extremo superior duma e o extremo inferior da outra !

Com efeito, suponhamos que existiam duas grandezas Y_1, Y_2 a separar as classes $\mathcal{H}X$, $\mathcal{K}X$, sendo $Y_1 < Y_2$. Então, supondo $X > \overline{0}$, ter-se-ia :

$$h\,X \leq Y_1 < Y_2 \leq k\,X, \quad \text{quaisquer que fossem } h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}$$

donde:

$$Y_2 - Y_1 \leqslant (k - h)\,X \text{ , para } h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}.$$

Mas, pelo corolário II do princípio de Arquimedes, pode determinar-se n de modo que $\frac{1}{n} X < Y_2 - Y_1$ e, por outro

lado, sendo $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ classes contíguas, podem escolher-se h, k de modo que $(k-h)X < 1/n X$; e então viria:

$$(k - h)\, X < \frac{1}{n} X < Y_2 - Y_1 ,$$

o que é incompatível com o resultado anterior. A conclusão seria análoga no caso de se ter $X \leq \overline{0}$. Existe pois uma única grandeza Y separadora das classes $\mathcal{H}X$, $\mathcal{K}X$ - que é manifestamente o menor dos majorantes da primeira e o maior dos minorantes da segunda (se $X > \overline{0}$) ou vice-versa (se $X \leq \overline{0}$).

Por conseguinte, o par de classes contíguas $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ define um operador α que faz corresponder a cada grandeza X a grandeza Y separadora das classes $\mathcal{H}X, \mathcal{K}X$;

$$Y = \sup (\mathcal{H}X) = \inf (\mathcal{K}X) \qquad (\text{se } X > \overline{0}).$$

A um tal operador dá-se o nome de <u>número real positivo</u> ou simplesmente <u>número positivo</u>. Para indicar que o número α é definido pelo par de classes contíguas $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ escreveremos:

$$\alpha = (\mathcal{H} | \mathcal{K}) .$$

Como vimos no exemplo anterior, pode o operador α coincidir com um número racional positivo, mas pode também não existir nenhum número racional que produza efeito equivalente ao de α ; neste caso, o número α diz-se <u>irracional</u>.

Pelas considerações atrás desenvolvidas, podemos desde já concluir que:

"<u>Dadas duas grandezas positivas</u> A, B, <u>existe sempre um número positivo</u> α (<u>racional ou irracional</u>) <u>tal que</u>:

$$A = \alpha B \text{ "} .$$

Veremos adiante que não pode existir mais de um número positivo α tal que $A = \alpha B$. Diremos então que α é a <u>razão de</u> A <u>para</u> B ou <u>a medida de</u> A <u>em relação a</u> B, e escreveremos:

$$\alpha = \frac{A}{B} \qquad \text{ou} \qquad \alpha = A : B .$$

Convem ainda notar que se tem $\alpha \overline{0} = \overline{0}$, qualquer que seja o número positivo α.

Propriedades dos novos operadores - Consideremos um número positivo $\alpha = (\mathscr{H}|\mathscr{K})$ qualquer; têm lugar as duas seguintes propriedades:

I) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathscr{G}$.

II) Se $X < Y$, então $\alpha X < \alpha Y$.

Demonstração I) Faremos a demonstração apenas no caso de X, Y serem positivas. Sejam h, k elementos arbitrários de $\mathscr{H}$ e $\mathscr{K}$ respectivamente; ter-se-á: $h X \leqslant \alpha X \leqslant k X$, $h Y \leqslant \alpha Y \leqslant k Y$, donde, pela propriedade da monotonia e atendendo a que a propriedade I) já está demonstrada para os números racionais :

$$h(X + Y) \leqslant \alpha X + \alpha Y \leqslant k(X + Y)$$

o que significa ser $\alpha X + \alpha Y$ o elemento separador das classes $\mathscr{H}(X+Y), \mathscr{K}(X+Y)$, isto é $\alpha X + \alpha Y = \alpha(X+Y)$. q.e.d.

II) Seja $X < Y$ e punhamos $Z = Y - X$; será então : $Y = X + Z$ com $Z > \overline{0}$. Por outro lado, atendendo a I), virá $\alpha Y = \alpha X + \alpha Z$, e como $\alpha Z > 0$ (o produto dum número positivo por uma grandeza positiva é $> \overline{0}$), tem-se $\alpha Y > \alpha X$, q.e.d.

Igualdade e desigualdade entre números positivos - Consideremos dois números positivos $\alpha = (\mathcal{A}|\mathcal{A}')$, $\beta = (\mathcal{B}|\mathcal{B}')$; teremos então:

Lema I - "Se cada elemento de $\mathcal{A}$ é inferior ou igual a cada elemento de $\mathcal{B}'$, será: $\alpha X \leqslant \beta X$, sempre que $X > \overline{0}$; $\alpha X \geqslant \beta X$, sempre que $X < \overline{0}$!

Suponhamos $X > \overline{0}$ (basta fazer a demonstração neste caso). Se todo o elemento de $\mathcal{A}$ é minorante de $\mathcal{B}'$, ter-se-á:

$$a X \leqslant b' X, \quad \text{quaisquer que sejam } a \in \mathcal{A},\ b' \in \mathcal{B}'$$

e portanto, como αX é o extremo superior do conjunto $\mathcal{A}X$ e βX o extremo inferior do conjunto $\mathcal{B}'X$, segue-se que :

$$\alpha X \leqslant \beta X . \qquad \text{q.e.d.}$$

Lema II -"Se existe um elemento de $\mathcal{A}'$ inferior a um elemento de $\mathcal{B}$, será: $\alpha X < \beta X$, sempre que $X > \overline{0}$; $\alpha X > \beta X$, sempre que $X < \overline{0}$."

Suponhemos ainda $X > \overline{0}$ e seja a' um elemento de $\mathcal{A}'$ inferior ao elemento b de $\mathcal{B}$. Ter-se-á então :

$$\alpha X \leq a' X < \hat{a} X \leq \beta X$$

donde:

$$\alpha X < \beta X. \qquad \text{q.e.d.}$$

Posto isto, podemos estabelecer o :

Critério geral de igualdade - Sendo $\alpha = (\mathcal{A} \mid \mathcal{A}')$, $\beta = (\mathcal{B} \mid \mathcal{B}')$, é condição necessária e suficiente para que se tenha $\alpha = \beta$ (isto é, $\alpha X = \beta X$, qualquer que seja $X \in \mathcal{G}$) que todo o elemento de $\mathcal{A}$ seja minorante de $\mathcal{B}'$ e todo o elemento de $\mathcal{B}$ seja minorante de $\mathcal{A}'$.

Com efeito se a condição é verificada tem-se pelo Lema I:

$\alpha X \leq \beta X$ e $\beta X \geq \alpha X$, qualquer que seja $X \in \mathcal{G}$,

portanto $\alpha X = \beta X$ para todo o $X \in \mathcal{G}$. A condição é pois suficiente.

Reciprocamente, se fôr $\alpha = \beta$ a referida condição deve ser verificada. Com efeito, se assim não sucedesse teríamos, por exemplo, um elemento b de $\mathcal{B}$ não minorante de $\mathcal{A}'$, isto é, existiria um elemento a' de $\mathcal{A}'$ inferior ao elemento b de $\mathcal{B}$, o que, segundo o Lema II, implica $\alpha X < \beta X$, para $X > \overline{0}$, contràriamente à hipótese.

Definição - Dados dois números positivos $\alpha = (\mathcal{A} \mid \mathcal{A}')$, $\beta = (\mathcal{B} \mid \mathcal{B}')$, escreve-se $\alpha < \beta$, quando existe pelo menos um elemento de $\mathcal{A}'$ inferior a um elemento de $\mathcal{B}$.

Do que precede resulta que: "Dados dois números positivos α, β, é sempre verificada uma e uma só das seguintes hipóteses: ou $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$ "(tricotomia).

Por outro lado, da anterior definição e do Lema II resulta que:

"Sendo $\alpha < \beta$, tem-se $\alpha X < \beta X$ se $X > \overline{0}$; $\alpha X > \beta X$ se $X < \overline{0}$."

Mais ainda:

"Basta que exista uma grandeza $X \neq \overline{0}$ tal que $\alpha X = \beta X$, para que se tenha $\alpha = \beta$" (se fosse $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$, já a igualdade não era possível, por fôrça do Lema II).

Portanto: "Dadas duas grandezas positivas A e U, não existe mais de um número positivo α tal que $A = \alpha U$" Com

efeito, sendo α, β números positivos tais que $A = \alpha U = \beta U$, deverá ter-se $\alpha = \beta$ uma vez que supomos $U \neq \overline{0}$.

Este resultado é importante porque nos permite afirmar o seguinte:

"Uma vez fixada uma grandeza positiva U como unidade de medida, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre as grandezas positivas e os números positivos: a cada número positivo α corresponde uma grandeza positiva $A = \alpha U$; a cada grandeza positiva A corresponde um número $\alpha = A:U$ (em particular a U corresponde 1, donde o chamar-se unidade à grandeza U)".

Deste modo, o confronto dos números positivos reduz-se ao confronto das correspondentes grandezas representativas: ter-se-á $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ ou $\alpha > \beta$, conforme fôr $\alpha U < \beta U$, $\alpha U = \beta U$, $\alpha U > \beta U$. Ora as grandezas positivas formam um conjunto ordenado contínuo; portanto também:

"Os números positivos formam um conjunto ordenado contínuo."

Por outro lado, é fácil reconhecer que, sendo α, β racionais, a relação de ordem agora definida entre α e β ($\alpha < \beta$, quando $\alpha U < \beta U$) coincide com a primitiva. Deste modo, se fôr $\alpha = (\mathcal{A} \mid \mathcal{A}')$, podemos afirmar que é α o elemento separador das classes contíguas $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, tendo-se:

$$\alpha = \sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{A}'.$$

Concluímos assim que os números irracionais vieram de facto preencher as lacunas existentes na escala dos números racionais (positivos), sem que se tivessem criado novas lacunas.

Valores aproximados dum número positivo - Como vimos, se fôr α um número positivo qualquer, dado um número $\varepsilon > 0$, é sempre possível determinar números racionais a, a' tais que:

$$a \leq \alpha \leq a' , \qquad a' - a < \varepsilon ;$$

os números a, a' dizem-se valores aproximados de α a menos de ε, o primeiro por defeito e o segundo por excesso. Diz-se que sabemos calcular o número α, quando conhecemos um processo que nos habilite a determinar valores aproximados de α a menos de qualquer número positivo ε (por

menor que este seja).

Adição de números positivos - Suponhamos fixada uma grandeza positiva U como unidade de medida. Dados dois números positivos α, β, chama-se soma de α com β e representa-se por $\alpha+\beta$ o número positivo γ tal que:

$$\gamma U = \alpha U + \beta U,$$

isto é, aquele número γ representado pela soma das grandezas representativas de α e de β.

Daqui resulta imediatamente que a adição entre números positivos gosa das mesmas propriedades que a adição entre grandezas positivas. Em particular, podemos afirmar que, sendo $\alpha > \beta$ (e só neste caso), existe um e um só número positivo ξ tal que $\beta + \xi = \alpha$, escrevendo-se então $\xi = \alpha - \beta$.

Mas o conceito de adição não depende da grandeza U escolhida para unidade, como resulta do seguinte:

Teorema - "Se fôr $\alpha = (\mathcal{A}|\mathcal{A}')$, $\beta = (\mathcal{B}|\mathcal{B}')$, será $\alpha+\beta = (\mathcal{A}+\mathcal{B}|\mathcal{A}'+\mathcal{B}')$, em que $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ representa o conjunto dos números que se obtêm, somando cada elemento de $\mathcal{A}$ com cada elemento de $\mathcal{B}$, de todos os modos possíveis (e analogamente para $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$)".

Demonstração - Tendo-se $\alpha = (\mathcal{A}|\mathcal{A}')$, $\beta = (\mathcal{B}|\mathcal{B}')$, será

$a \leqslant \alpha \leqslant a'$, $b \leqslant \beta \leqslant b'$, quaisquer que sejam $a \in \mathcal{A}$, $a' \in \mathcal{A}'$, $b \in \mathcal{B}$, $b' \in \mathcal{B}'$.

e portanto: $a + b \leqslant \alpha + \beta \leqslant a' + b'$, o que significa ser $\alpha+\beta$ elemento separador das classes $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$. Seja agora ε um número racional arbitrário (> 0). Visto que $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$, por um lado, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, por outro lado, formam dois pares de classes contíguas, será possível escolher a, a'; b, b'; de modo que se tenha:

$$a' - a < \frac{\varepsilon}{2} \qquad b' - b < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mas então virá $(a'+b') - (a+b) < \varepsilon$, o que significa que $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$ são classes contíguas, pois que é possível encontrar um elemento $a'+b'$ de $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$ e um elemento $a+b$ de $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ tais que a diferença entre o primeiro e o segundo seja inferior a um número racional $\varepsilon > 0$, tão pequeno quanto se quizer. Portanto será $\alpha+\beta$ o único elemento separa-

dor das classes $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{A}'+\mathcal{B}'$, isto é : $\alpha+\beta = (\mathcal{A}+\mathcal{B}\,|\,\mathcal{A}'+\mathcal{B}')$.

q.e.d.

Podíamos pois utilizar esta propriedade para dar uma definição de "soma de dois números positivos" com caracter aritmético, intrínseco, isto é, independente de quaisquer considerações sôbre grandezas :

$$(\mathcal{A}\,|\,\mathcal{A}') + (\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}') = (\mathcal{A}+\mathcal{B}\,|\,\mathcal{A}'+\mathcal{B}') .$$

Daqui resulta ainda que se terá:

$$(\alpha+\beta)\,X = \alpha X + \beta X, \quad \text{qualquer que seja } X \in \mathcal{G}.$$

A anterior demonstração ainda nos permite afirmar que:

"A soma de dois valores aproximados de α, β por defeito a menos de $\varepsilon/2$, é um valor aproximado de $\alpha+\beta$ por defeito a menos de ε."

Multiplicação de números positivos - Consideremos dois números positivos α, β. Segundo a definição geral de produto de operadores, chama-se produto de α por β e representa-se por $\alpha\beta$ o operador γ tal que :

$$\gamma\, X = \alpha\,(\beta X), \text{ qualquer que seja } X \in \mathcal{G} .$$

Teorema - "O produto de dois números positivos α, β ainda é um número positivo, e se fôr $\alpha = (\mathcal{A}\,|\,\mathcal{A}')$, $\beta = (\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}')$, ter-se-á precisamente $\alpha\beta = (\mathcal{A}\mathcal{B}\,|\,\mathcal{A}'\mathcal{B}')$ em que $\mathcal{A}\mathcal{B}$ designa o conjunto de todos os números que se obtem multiplicando cada elemento de $\mathcal{A}$ por cada elemento de $\mathcal{B}$ (e anàlogamente para $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$)".

Demonstração - Sejam a, a', b, b' elementos arbitrários, respectivamente de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$; ter-se-á: $a \leq \alpha \leq a'$, $b \leq \beta \leq b'$. Então, se fôr X uma grandeza positiva, virá :

$$b\,X \leq \beta\,X \leq b'X \qquad \text{e portanto :}$$

$$a(b\,X) \leq \alpha\,(b\,X) \leq \alpha\,(\beta\,X) \leq \alpha\,(b'X) \leq a'(b'X) ,$$

donde:

$$(1) \qquad (a\,b)\,X \leq (\alpha\beta)\,X \leq (a'b')\,X .$$

Daqui se deduz que $a\,b \leq a'b'$, isto é: cada elemento de $\mathcal{A}\mathcal{B}$ é inferior ou igual a cada elemento de $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$. Seja agora ε um número racional arbitrário (> 0); é claro que

podemos determinar um número natural n de modo que se tenha :

$$(2) \qquad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2(a+b)}$$

[basta que seja n superior ao maior dos números $2/\varepsilon$, $2(a+b)/\varepsilon$]. Por outro lado, pondo $h = a'-a$, $k=b'-b$, podemos escolher os números a, a', b, b' de modo que seja $h<\frac{1}{n}$, $k<\frac{1}{n}$. Então virá, atendendo a (2) :

$$a'b' - ab = (a+h)(b+k) - ab = ak + bh + hk < \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$< (a+b)\,\frac{\varepsilon}{2(a+b)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Assim a diferença $a'b' - ab$ pode tornar-se inferior a qualquer número positivo dado. Quer isto dizer que $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$ são classes contíguas, que definem portanto um número positivo $\gamma = (\mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{A}'\mathcal{B}')$, tendo-se, em virtude de (1)

$$\gamma X = (\alpha\beta)\, X \qquad (\text{para } X \geq \overline{0}).$$

Para $X \leq \overline{0}$ chega-se à mesma conclusão. Será portanto $\gamma X = (\alpha\beta)\, X$, qualquer que seja $X \in \mathcal{G}$, isto é,

$$\alpha\beta = (\mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{A}'\mathcal{B}'). \qquad \text{q.e.d.}$$

Esta demonstração diz-nos ainda que: "Se soubermos calcular os números α, β, também sabemos calcular o seu produto $\alpha\beta$, isto é, estamos aptos a determinar valores aproximados de $\alpha\beta$ a menos de qualquer número positivo dado."

Notemos ainda que o teorema anterior nos fornece uma definição intrínseca de produto de dois números positivos:

$$(\mathcal{A}\,|\,\mathcal{A}')\;(\mathcal{B}\,|\,\mathcal{B}') = (\mathcal{A}\,\mathcal{A}'\,|\,\mathcal{B}\,\mathcal{B}').$$

Torna-se agora bem fácil ver que a multiplicação entre números positivos é: sempre possível, unívoca, associativa, comutativa, monótona e ainda distributiva a respeito da adição (isto é, tal que $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, quaisquer que sejam os números positivos α, β, γ).

As três primeiras propriedades justificam-se desde lo-

go pelo facto de se tratar de produtos de operadores.
A comutatividade é uma consequência imediata do teorema anterior e da comutatividade já demonstrada para os números racionais, que implica ser $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, $\mathcal{A}'\mathcal{B}' = \mathcal{B}'\mathcal{A}'$. Quanto à monotonia, basta observar que, se for $\alpha < \beta$, virá:

$$\alpha(\gamma X) < \beta(\gamma X), \qquad \text{para } X > \overline{0},$$

e portanto

$$\alpha\gamma < \beta\gamma.$$

q. e. d.

A distributividade demonstra-se de modo análogo.

Mas podemos ir mais longe:

"A multiplicação entre números positivos é reversível".

Com efeito, sejam α, β números positivos quaisquer e designe U uma grandeza positiva; pondo $A = \alpha U$, $B = \beta U$, serão tambem A, B grandezas positivas e existirá portanto um (e um só) número real ξ tal que:

$$\xi B = A, \text{ isto é, tal que } (\xi\alpha)\, U = \beta U ;$$

mas, por ser $U \neq \overline{0}$, virá $\xi\alpha = \beta = \alpha\xi$. Será portanto $\xi = \beta/\alpha$.

Visto que a multiplicação entre números positivos é sempre possível, unívoca, associativa, comutativa e reversível, podemos afirmar que:

"O conjunto dos números positivos é um grupo comutativo a respeito da multiplicação".

Números negativos - Costuma designar-se por -1 o operador que faz corresponder a cada grandeza a sua simétrica; isto é, tem-se, por definição :

$$\boxed{(-1)\, X = -X \text{ , para cada } X \in \mathcal{G}} .$$

Da definição de número positivo deduz-se fàcilmente o seguinte facto:

"O operador -1 é permutável com qualquer número positivo α , isto é, tem-se:

$$\alpha(-X) = -(\alpha X), \text{ qualquer que seja } X \in \mathcal{G} ."$$

Posto isto, sendo α um número positivo, designaremos por $-\alpha$ o produto do operador -1 pelo operador α (ou vice-versa); isto é, tem-se, por definição :

$$(-\alpha)\,X = -(\alpha X), \quad \text{para cada } X \in \mathcal{G}$$

Chamam-se <u>números negativos</u> os operadores do tipo $-\alpha$, sendo α um número positivo. O número negativo $-\alpha$ diz-se <u>racional</u> ou <u>irracional</u>, <u>inteiro</u> ou <u>fraccionário</u>, consoante o número positivo α fôr racional ou irracional, inteiro ou fraccionário.

Para comodidade de linguagem convenciona escrever-se ainda $+\alpha = \alpha$ e dizer que os números positivos têm sinal +, enquanto os negativos têm sinal -. Chama-se <u>módulo</u> ou <u>valor absoluto</u> dos números $+\alpha$, $-\alpha$, o número positivo α e escreve-se :

$$|-\alpha| = |\alpha| = \alpha .$$

Por outro lado, designa-se por 0 o operador que faz corresponder a cada grandeza X a grandeza nula; isto é, tem-se <u>por definição</u>:

$$0\,X = \overline{0}\,, \quad \text{qualquer que seja } X \in \mathcal{G} .$$

Tem-se ainda por definição:

$$|0| = 0 .$$

O conjunto cujos elementos são todos os números positivos, todos os números negativos e o número 0 toma a designação de <u>conjunto dos números reais</u>; representá-lo-emos por $\mathcal{R}$. Tem-se pois a seguinte classificação:

- números reais
  - positivos
    - racionais
      - inteiros
      - fraccionários
    - irracionais
  - nulo
  - negativos
    - racionais
      - inteiros
      - fraccionários
    - irracionais

Por sua vez, o número 0 é incluido na categoria dos números inteiros e portanto na dos números racionais.

<u>Ordenação do conjunto</u> $\mathcal{R}$ - Podemos agora afirmar que: "Fixada uma grandeza positiva U como unidade, existe

para cada grandeza A (positiva, negativa ou nula) um, e um só, número real μ tal que:

$$A = \mu\, U."$$

O teorema já foi demonstrado no caso de ser $A > \overline{0}$. Suponhamos agora $A < \overline{0}$; será então $-A > \overline{0}$ e portanto existirá um número positivo α tal que $-A = \alpha\, U$ ou seja $A = -(\alpha\, U) = (-\alpha)\, U$; por outro lado se forem $-\alpha$, $-\beta$ números (necessàriamente negativos) tais que $A = (-\alpha)U = (-\beta)U$, virá $-(\alpha\, U) = -(\beta\, U)$ ou seja $\alpha\, U = \beta\, U$ e portanto $-\alpha = -\beta$. Finalmente se $A = \overline{0}$ só pode haver um número real μ tal que $A = \mu U$: é $\mu = 0$

Ao número μ tal que $A = \mu U$ dá-se o nome de <u>razão de</u> A <u>para</u> U ou <u>medida de</u> A <u>em relação a</u> U e escreve-se:

$$\mu = \frac{A}{U} \qquad \text{ou} \qquad \mu = A : U.$$

Por conseguinte, uma vez fixada uma grandeza positiva U como unidade, fica estabelecida uma <u>correspondência biunívoca</u> entre os números reais e as grandezas do grupo $\mathcal{G}$: a cada número real μ corresponde a grandeza μU; a cada grandeza A corresponde o número real $A : U$; em particular, a U corresponde 1, a $\overline{0}$ corresponde 0; os números positivos correspondem a grandezas positivas, os números negativos correspondem a grandezas negativas.

O confronto dos números reais reduz-se ao confronto das correspondentes grandezas representativas: dados dois números reais α, β diz-se que $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ ou $\alpha > \beta$, conforme se tem $\alpha U < \beta U$, $\alpha U = \beta U$ ou $\alpha U > \beta U$. Êste critério de ordenação já tinha sido adoptado para os números positivos. Dele se deduz imediatamente que:

"Os números reais formam uma escala contínua".

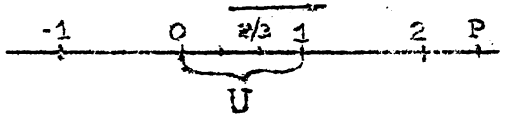
Do mesmo critério se deduz que 0 é superior a todo o número negativo e inferior a todo o número positivo; portanto todo o número positivo é superior a todo o número negativo. Sejam agora α, β números positivos, tais que $\alpha < \beta$; ter-se-á:

$$\alpha U < \beta . U \quad \text{e portanto} \quad -\alpha U > -\beta U \quad \text{ou seja} \quad -\alpha > -\beta;$$

em conclusão: "<u>De dois números negativos diferentes é maior o que tiver menor valor absoluto</u>".

Também se poderia tomar para unidade uma grandeza negativa, mas, neste caso, às grandezas positivas viriam a corresponder os números negativos e às grandezas negativas os números positivos.

Representação geométrica dos números reais - Já atrás recordámos que, uma vez fixada sôbre uma recta r um ponto O como origem, e adoptado um sentido de percurso como positivo, cada ponto P determina com O um segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ (de origem O e extremidade P), o qual se considera positivo ou negativo consoante P está de um ou do outro lado da origem. No caso da figura, a recta considera-se orientada da esquerda para a direita, e assim serão : positivos os segmentos com a extremidade à direita de O, negativos os segmentos com a extremidade à esquerda de O, nulo o segmento com a extremidade em O. Nestas condições, os segmentos orientados de origem O formam, como dissemos, um grupo contínuo de grandezas



Suponhamos agora fixado um segmento positivo U como unidade (indicado na figura com uma chaveta) Então, a cada ponto P de r podemos associar um (e um só) número real x: a medida do segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ em relação a U; reciprocamente, a cada número real x fica associado um (e um só) ponto P de r: a extremidade daquele segmento orientado de origem O cuja medida em relação a U é o número x. Fica portanto estabelecida por êste processo uma correspondência biunívoca entre os pontos da recta e os números reais. Por tal razão, usa-se correntemente em Análise falar de pontos duma recta como sendo números reais e falar de números reais como sendo pontos duma recta; e à totalidade dos números reais dá-se por vezes o nome de recta numérica (real).

Chama-se abscissa do ponto P de r ao número real x que lhe corresponde, segundo a lei indicada: isto é, a medida (positiva, negativa ou nula) do segmento $\overrightarrow{OP}$ em relação a U.

Adição dos números reais - Suponhamos fixada uma grandeza positiva U como unidade. Dados dois números reais α, β, chama-se soma de α com β e representa-se por $\alpha+\beta$ o número real γ tal que: $\gamma U = \alpha U + \beta U$.

Da definição resulta imediatamente que a adição entre números reais gosa das mesmas propriedades que a adição entre as grandezas do grupo $\mathcal{G}$. Portanto :

"O conjunto dos números reais é um grupo comutativo a respeito da adição".

Podem agora justificar-se as definições que foram dadas para "número negativo" e "operador zero". Com efeito, seja α um número real qualquer; tem-se, pela anterior definição:

$$(\alpha + 0)\, U = \alpha\, U + 0\, U = \alpha\, U$$

ou seja $\alpha + 0 = \alpha$. Vemos pois que : o número 0 é de facto o elemento nulo do grupo aditivo $\mathcal{R}$.

Seja agora α um número positivo; tem-se :

$$[\alpha + (-\alpha)]\, U = \alpha U + (-\alpha)\, U = \alpha\, U - (\alpha\, U) = \overline{0}$$

ou seja $\alpha + (-\alpha) = 0$. Portanto: no grupo aditivo $\mathcal{R}$, o simétrico de cada número positivo α é de facto o número negativo $-\alpha$.

A regra que reduz a adição de números reais à adição ou subtracção de números positivos deduz-se agora dos seguintes factos, que são válidos em qualquer grupo aditivo :

$$\left.\begin{aligned} (-\alpha) + (-\beta) &= -(\alpha+\beta) \\ \alpha + (-\beta) &= \alpha - \beta \\ (-\alpha) + \beta &= -(\alpha-\beta) \end{aligned}\right\} \text{ quaisquer que sejam } \alpha, \beta \in \mathcal{R}$$

Portanto: "A soma de dois números reais com o mesmo sinal é o número real que tem esse sinal e cujo módulo é a soma dos módulos dos primeiros; a soma de dois números reais com sinal diferente é o número real cujo sinal é o da parcela com o maior módulo e cujo módulo é a diferença entre o maior e o menor dos módulos das parcelas". Donde, em particular, se deduz o seguinte facto, de importância fundamental em toda a Análise :

"Quaisquer que sejam $a, b \in \mathcal{R}$, tem-se :

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b| \,, \quad |a+b| \geq \big||a| - |b|\big|} \,;$$

em palavras : o módulo duma soma de dois números reais nunca excede a soma dos módulos das parcelas e nunca é inferior

à diferença entre o maior e o menor desses módulos".

Como a adição e o confronto de números reais se reduz à adição e ao confronto das correspondentes grandezas representativas, podemos ainda afirmar que: "No conjunto ordenado dos números reais, a adição é uma operação monótona" E como $\mathcal{R}$ é também uma escala contínua, temos finalmente que:

"O conjunto $\mathcal{R}$ dos números reais é um grupo contínuo de grandezas".

Pode ainda demonstrar-se fàcilmente que :

$$(\alpha+\beta)\,X = \alpha X + \beta X\ ,$$
$$\alpha\,(X+Y) = \alpha X + \alpha Y\ ,$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ e $X, Y \in \mathcal{G}$.

Multiplicação de números reais - Mas o conjunto $\mathcal{R}$ é alguma coisa mais do que um grupo de grandezas. Com efeito, entre as grandezas dum grupo $\mathcal{G}$ não é geralmente definida uma multiplicação: por exemplo, não faz sentido falar de "produto de dois segmentos de recta", mas apenas de "produto de dois segmentos de recta", mas apenas de "produto das medidas de dois segmentos, relativamente a um outro tomado como unidade".

Ora, entre os números reais está naturalmente definida uma multiplicação, uma vez que se trata de operadores. Comecemos por observar que se tem, qualquer que seja $X \in \mathcal{G}$:

$$(-1)\,[(-1)\,X] = -(-X) = X$$

ou seja: $(-1)\,(-1) = 1$ Portanto, sendo α, β números positivos, virá, atendendo à associatividade dos produtos de operadores:

$$(-\alpha)\,(-\beta) = \alpha\,(-1)\,(-1)\,\beta = \alpha\,\beta$$
$$(-\alpha)\,\beta = (-1)\,\alpha\,\beta = -\alpha\,\beta$$
$$\alpha\,(-\beta) = \alpha\,(-1)\,\beta = (-1)\,\alpha\,\beta = -\alpha\beta.$$

Em conclusão : "O produto de dois números reais não nulos é um número real, que tem por módulo o produto dos módulos dos primeiros e o sinal + ou o sinal - consoante os dois números dados têm o mesmo sinal ou sinais diferentes".

Por outro lado, quaisquer que sejam o número $\alpha \in \mathcal{R}$ e a

grandeza $X \in \mathcal{G}$; tem-se: $0\,(\alpha X) = \alpha\,(0\,X) = \overline{0}$ ou seja:

$$0 \cdot \alpha = \alpha\ 0 = 0$$

Os factos precedentes mostram que: "A multiplicação definida em $\mathcal{R}$ é sempre possível, unívoca, associativa e comutativa"

Notemos ainda que, se fôr $\alpha > 0$, vem :

$$(-\alpha)\ (-\frac{1}{\alpha}) = \alpha\ \frac{1}{\alpha} = 1$$

isto é : todo o número real $a \neq 0$ admite um inverso, que tem o mesmo sinal e cujo módulo é o inverso do módulo do primeiro. Portanto, dados dois números reais a, b, sendo $b \neq 0$, é sempre possível determinar um (e um só) número x tal que $a\,x = b$; tem-se $x = b\,\frac{1}{a}$ Podemos então afirmar que:

"O conjunto de todos os números reais não nulos é um grupo a respeito da multiplicação."

Dos resultados anteriores, deduz-se ainda o seguinte facto, de importância capital em Análise: "Sendo a, b números reais, tem-se :

$$\boxed{|a\,b| = |a|\,|b| \quad \text{e, sendo } b \neq 0, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}}\ ;$$

isto é: o módulo do produto de dois números é o produto dos módulos dos factores; o módulo do cociente de dois números é o cociente do módulo do dividendo pelo módulo do divisor.

Facilmente se reconhece ainda a distributividade da multiplicação a respeito da adição:

$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$.

Mas já não podemos dizer que no conjunto $\mathcal{R}$, a multiplicação respeita a relação de ordem Com efeito, de $\alpha < \beta$ deduz-se $\alpha\gamma < \beta\gamma$ se $\gamma > 0$; $\alpha\gamma > \beta\gamma$, se $\gamma < 0$.

Conceito de corpo - Como se viu, no conjunto $\mathcal{R}$ são definidas duas operações binárias (a adição e a multiplicação) e uma relação binária, expressa pelo sinal $<$, de tal modo que:

1) A respeito da adição, o conjunto $\mathcal{R}$ é um grupo comutativo.

2) A respeito da multiplicação, o conjunto dos elemen tos não nulos de $\mathcal{R}$ é um grupo comutativo.

3) A multiplicação é distributiva a respeito da adição e tem-se $0\alpha = 0$, para todo o $\alpha \in \mathcal{R}$.

4) A respeito da relação $<$, o conjunto $\mathcal{R}$ é uma escala contínua.

5) Se $\alpha < \beta$, tem-se $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

6) Se $\alpha < \beta$ e $\gamma > 0$, tem-se $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Estas propriedades caracterizam de maneira completa os números reais; isto é, toda a proposição que se refira exclusivamente a números reais pode ser lògicamente deduzida a partir destas.

Diz-se que um conjunto $\mathcal{C}$ qualquer é um corpo, quando entre os seus elementos se encontram definidas duas operações binárias, chamadas adição e multiplicação, de modo que sejam verificadas as condições 1), 2), 3) e 4) (com $\mathcal{C}$ em lugar de $\mathcal{R}$).

O conjunto $\mathcal{R}$ é portanto um corpo; mas também o conjunto dos números racionais (positivos, negativos e nulo) é um corpo; outro exemplo de corpo viremos a conhecer quando estudarmos os números imaginários.

Representação decimal dos números reais - Basta que nos ocupemos dos números positivos, visto que os negativos se obtêm dos primeiros por uma simples troca de sinal.

Chamam-se fracções decimais todas aquelas cujo denominador é uma potência de 10 (de expoente natural), isto é, as fracções do tipo $\frac{m}{10^n}$, sendo m, n números naturais. Como se sabe, as fracções decimais podem simplificadamente ser representadas por meio de dízimas finitas; por exemplo:

$$\frac{3501}{100000} = 0{,}03501 .$$

Dada uma fracção $\frac{p}{q}$, nem sempre existe uma fracção decimal que lhe seja equivalente. Assim, por exemplo, a fracção 2/3 não é equivalente a nenhuma dízima finita; mas sabemos que:

$$0{,}6 < \frac{2}{3} < 0{,}7; \quad 0{,}66 < \frac{2}{3} < 0{,}67; \quad 0{,}666 < \frac{2}{3} < 0{,}667; \ldots;$$

isto é: o número racional 2/3 separa as duas seguintes classes contíguas de números racionais:

$$\mathcal{K} = \{0,6;\ 0,66;\ \ldots;\ 0,6\ldots66;\ \ldots\}$$
$$\mathcal{K} = \{0,7;\ 0,67;\ \ldots;\ 0,6\ldots67;\ \ldots\}$$

e como, por outro lado, a dízima infinita 0,66...6... é o único elemento separador das duas classes de dízimas finitas representativas dos números racionais que limitam 2/3, apresentou-se naturalmente a ideia de tomar a referida dízima infinita como designação do número 2/3, escrevendo-se:

$$\frac{2}{3} = 0,66\ldots6\ldots$$

Seja agora α <u>um número positivo qualquer</u> e designemos por N o maior número inteiro (positivo ou nulo) que não excede α ; ter-se-á :

(1) $$N \leq \alpha < N + 1 ;$$

seja por sua vez a_1 o maior número inteiro (positivo ou nulo) tal que :

(2) $$N + \frac{a_1}{10} \leq \alpha < N + \frac{a_1 + 1}{10} ;$$

seja ainda a_2 o maior inteiro (positivo ou nulo) tal que

(3) $$N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leq \alpha < N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{100} .$$

Supondo este processo aplicado sucessiva e indefinidamente, fica definida uma sucessão de números inteiros, positivos ou nulos, N, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ cada um dos quais, a partir do segundo, não excede 9, e tais que o número α é elemento separador das duas seguintes classes de números racionais :

$$\mathcal{A} = \left\{ N,\ N + \frac{a_1}{10}, \ldots, N + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}, \ldots \right\}$$
$$\mathcal{B} = \left\{ N,\ N + \frac{a_1+1}{10}, \ldots, N + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n+1}{10^n}, \ldots \right\} .$$

Ora estas duas classes são contíguas, pois que a diferença entre os dois elements de ordem n+1 da segunda e da primeira é $1/10^n$, diferença esta que se pode tornar infe-

rior a qualquer número positivo dado. Tem-se pois $\alpha = (\mathcal{A}|\mathcal{B})$, donde a ideia de representar o número α pela dízima infinita cuja parte inteira é N e cujos algarismos decimais sucessivos são $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ É claro que esta dízima fica unívocamente determinada pelas condições (1), (2), (3), ..., mas note-se o seguinte facto:

"Não é possível que os algarismos decimais assim determinados sejam todos iguais a 9 a partir de alguma ordem".

Por exemplo, não é possível obter por êste processo a dízima $7,599\ldots9\ldots$; com efeito, o extremo superior dos números 7,5; 7,59; 7,599; ... é o número racional 7,6; deveria portanto ser neste caso $\alpha = 7,6$ e não seria 5, mas sim 6, o maior número inteiro $a_1 \geq 0$, tal que $7 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha$.

Reciprocamente, a toda a dízima infinita cujos algarismos não sejam todos iguais a 9 a partir de ordem alguma corresponde, por este processo, um único número positivo α: se forem N a parte inteira da dízima e $a_1, a_2, \cdots; a_n, \cdots$ os seus sucessivos algarismos decimais, será $\alpha = (\mathcal{A}|\mathcal{B})$, sendo $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ as classes de números racionais atrás indicadas.

Fica portanto estabelecida deste modo uma correspondência biunívoca entre os números positivos e as dízimas infinitas cujos algarismos não são todos iguais a 9 a partir de alguma ordem; e o confronto dos números positivos reduz-se ao confronto das dízimas correspondentes, segundo o critério atrás estabelecido.

Pode acontecer, que, a partir de certa ordem, um algarismo ou um grupo de algarismos decimais se repita periòdicamente; então, a dízima dir-se-á periódica e esse algarismo ou grupo de algarismos será o período da dízima; é o que acontece por exemplo com a dízima $0,66\ldots6\ldots$ atrás considerada (período 6), com a dízima $1,23737\cdots37\cdots$ (período 37), etc.

Em particular o período pode ser zero e então a dízima infinita equivale a uma dízima finita. Demonstra-se em Aritmética que a dízima é periódica, se, e só se, lhe corresponde um número racional. Por conseguinte, se a dízima não é periódica corresponde-lhe um número irracional.

Potenciação e logaritmação - A operação binária definida num grupo contínuo de grandezas é habitualmente chamada "adição". Mas trata-se duma questão de linguagem e, portanto, de convenção. Nada nos impede de chamar "multiplicação" àquela operação binária e construir toda a anterior teoria com a linguagem multiplicativa: as ideias são exactemente as mesmas; trata-se apenas de traduzi-las na nova linguagem, tal como fizemos atrás, ao passar de grupos aditivos para grupos multiplicativos; e, para isso, basta utilizar o seguinte dicionário:

Linguagem aditiva	Linguagem multiplicativa
soma, $A + B$	produto, $A\,B$
produto, $m\,A$	potência, A^m
diferença, $A - B$	cociente, $\frac{A}{B}$
elemento nulo $\overline{0}$	elemento unidade $\overline{1}$
simétrico, $-A$	inverso, A^{-1}
cociente de A por n, $\frac{A}{n}$, $\frac{1}{n}A$	raiz de índice n de A, $\sqrt[n]{A}$, $A^{1/n}$

Se tivessemos feito o estudo dos grupos contínuos de grandezas com a linguagem multiplicativa, os operadores deveriam figurar como expoentes (e não como coeficientes), de modo que a soma e o produto de dois operadores α , β seriam definidas pelas fórmulas:

$$U^{\alpha+\beta} = U^{\alpha}.U^{\beta} \quad , \quad U^{\alpha(\beta} = (U^{\beta})^{\alpha}.$$

e não pelas fórmulas $(\alpha+\beta)\,U = \alpha U + \beta U$, $(\alpha\,\beta)U = \alpha\,(\beta\,U)$.

Posto isto designemos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os números positivos. Vimos atrás que:

1) $\mathcal{P}$ é um grupo comutativo a respeito da multiplicação.

2) $\mathcal{P}$ é uma escala contínua a respeito da relação $<$.

3) A multiplicação é monótona em $\mathcal{P}$, isto é, dados tres elementos α, β, γ de $\mathcal{P}$, se $\alpha < \beta$, também $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Ora isto significa precisamente que o conjunto dos números $\mathcal{P}$ é um grupo contínuo de grandezas relativamente à multiplicação e à relação "menor que". Por conseguinte tudo

o que foi demonstrado a respeito dum grupo contínuo de grandezas é aplicável, mutatis mutandis, ao caso presente, adoptando o anterior dicionário.

Assim, por exemplo, o princípio da divisibilidade traduz-se no seguinte teorema:

"Quaisquer que sejam o número positivo a e o número natural n, é sempre possível determinar um (e um só) número positivo x tal que

$$x^n = a .$$

É claro que, em linguagem multiplicativa deverá escrever-se, neste caso

$$x = \sqrt[n]{a} \qquad \text{ou} \qquad x = a^{1/n},$$

e chamar-se a x a raiz de índice n de a. Podemos agora por em paralelo os diferentes resultados, com as duas linguagens, designando por A um elemento genérico de $\mathcal{G}$ e por a um elemento genérico de $\mathcal{P}$.

No grupo aditivo	No grupo multiplicativo
1) Sendo m, n números naturais, tem-se por definição: $\frac{m}{n} A = \frac{m A}{n}$.	1) Sendo m, n números naturais, tem-se por definição: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.
2) Dado um número positivo $\mu = (\mathcal{K}, \mathcal{K})$, a grandeza A é, por definição, o elemento separador das classes $\mathcal{K}A$, $\mathcal{K}A$.	2) Dado um número positivo $\mu = (\mathcal{K}, \mathcal{K})$, o número a^n é, por definição, o elemento separador das classes $a^{\mathcal{K}}$, $a^{\mathcal{K}}$.
3) Sendo μ um número positivo, tem-se, por definição $(-\mu) A = -(\mu A)$.	3) Sendo μ um número positivo, tem-se por definição $a^{-\mu} = \frac{1}{a^{\mu}}$.
4) Por definição $0 A = \overline{0}$	4) Por definição $a^0 = 1$
5) Quaisquer que sejam os números reais μ, υ e as grandezas A, B, tem-se $\mu(A+B) = \mu A + \mu B$.	5) Quaisquer que sejam os números reais μ, υ e os números positivos a, b, tem-se $(ab)^{\mu} = a^{\mu} . b^{\mu}$.

$(\mu+\nu)\,A = \mu A + \nu A$

$(\mu\nu)\,A = \mu(\nu A)$

$\mu<\nu\ ,\ A>\overline{0} \rightarrowtail \mu.A < \nu A$

6) Quaisquer que sejam as grandezas A, B, sendo $B \neq \overline{0}$ existe sempre um (e um só) número real μ tal que

$$A = \mu B$$

$a^{\mu+\nu} = a^{\mu}.\ a^{\nu}$

$a^{\mu\nu} = (a^{\mu})^{\nu}$

$\mu<\nu\ ,\ a>1 \rightarrowtail a^{\mu}<a^{\nu}.$

6) Quaisquer que sejam os números $a,b \in \mathcal{P}$; se fôr $b \neq 1$, existe sempre um (e um só) número real μ tal que

$$a = b^{\mu}.$$

Já dissemos que o número real μ tal que $A = \mu B$ tem o nome de <u>razão de</u> A <u>para</u> B, escrevendo-se $\mu = A/B$. Pois bem:

Ao número real μ tal que

$$a = b^{\mu} \qquad (a,b \in \mathcal{P}\ ,\ b \neq 1),$$

dá-se o nome de <u>logaritmo de</u> a <u>na base</u> b e escreve-se :

$$\mu = \log_b a\ .$$

Tem-se pois, por definição:

$$b^{\log_b a} = a\ .$$

A função $y = \log_b x$, representa assim uma transformação biúnivoca do conjunto $\mathcal{P}$ sôbre o conjunto $\mathcal{R}$ - inversa da transformação $x = b^y$. Portanto, só para os números positivos é definido o logaritmo; mas qualquer número real (positivo, negativo ou nulo) pode ser logaritmo dum número positivo). É claro que, assim como no grupo aditivo $\mathcal{G}$ se tem:

$$\frac{A_1 + A_2}{B} = \frac{A_1}{B} + \frac{A_2}{B}\ ,$$

assim também no grupo multiplicativo $\mathcal{P}$ será:

$$\log_b (a_1 + a_2) = \log_b a_1 + \log_b a_2\ .$$

Deste modo, <u>a transformação</u> $x \rightarrow \log_b x$ <u>traduz a linguagem multiplicativa de</u> $\mathcal{P}$ <u>na linguagem aditiva de</u> $\mathcal{R}$. Tem-se ainda:

$$\log_b \frac{a_1}{a_2} = \log_b a_1 - \log_b a_2 \quad (a_1, a_2, b \in \mathcal{P})$$

$$\log_b a^{\lambda} = \lambda \log_b a \quad (a, b \in \mathcal{P} ; \lambda \in \mathcal{R})$$

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad (a, b \in \mathcal{P})$$

Se $a_1 < a_2$ e $b > 1$, então $\log_b a_1 < \log_b a_2$ $(a_1, a_2, b \in \mathcal{P})$

$$\log_b b = 1 \ , \quad \log_b 1 = 0.$$

Para fins práticos, os logaritmos mais usados são, como se sabe, os logaritmos na base 10 (ou logaritmos decimais). Para calcular o logaritmo decimal dum dado número $a > 1$ com a aproximação que se queira, pode proceder-se do seguinte modo: eleve-se o número a a uma potencia de expoente natural n qualquer e seja k o número de algarismos da parte inteira de a; então será

$$10^k \leq a^n < 10^{k+1}$$

e portanto, passando aos logaritmos:

$$k \leq n \log_{10} a < k + 1$$

ou seja:

$$\frac{k}{n} \leq \log_{10} a < \frac{k+1}{n} ;$$

quere isto dizer que é k/n um valor aproximado de $\log_{10} a$, por defeito a menos de $1/n$; ora o número $1/n$ pode ser tão pequeno quanto se quizer. Todavia êste processo não é aconselhável para construir uma tábua de logaritmos, por exigir cálculos laboriosos (embora tenha sido por um processo análogo que Briggs construiu as primeiras tábuas de logaritmos decimais). A Análise matemática dispõe hoje de meios muito mais expeditos para o cálculo de logaritmos.

Vimos há pouco que, dado um número $a > 0$ e sendo n um número natural qualquer, existe sempre (e é único) um número $x > 0$ tal que $x^n = a$, escrevendo-se $x = \sqrt[n]{a}$. Mas isto não é verdadeiro no campo dos números racionais; por exemplo, a diagonal D dum quadrado é o respectivo lado L estão relacionados pela fórmula $D = L\sqrt{2}$, e vimos atrás

que as grandezas L, D são incomensuráveis, o que equivale a dizer que $\sqrt{2}$ é um número irracional (representável portanto por uma dizima infinita não periódica). Dum modo geral, podemos afirmar que é irracional a raiz quadrada de qualquer número inteiro que não seja quadrado perfeito; e analogamente para as raizes de outros índices.

Assim, a radiciação aplicada a números racionais, conduz geralmente a resultados irracionais: é uma operação irracional; o que já não sucede com a adição, a subtracção, a multiplicação e a divisão, que são operações racionais.

Mas importa notar que nem todos os números irracionais podem ser obtidos por operações racionais e extracções de raiz (efectuadas um número finito de vezes a partir de números racionais). Por exemplo, demonstra-se que os números $3^{\sqrt{2}}$, $\log_{10} 2$, etc, não podem resultar de operações racionais e extracções de raiz efectuadas a partir do campo racional.

Recordemos por último que a radiciação de índice inteiro não se define exclusivamente no conjunto $\mathcal{J}$; pode estender-se a todo o conjunto $\mathcal{R}$. Mas então há a considerar os seguintes casos:

a) Se o índice é ímpar e o radicando negativo, existe uma só raiz que é negativa. Por ex.: $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[5]{-2} = -\sqrt[5]{2}$.

b) Se o índice é par e o radicando positivo há duas raizes, simétricas entre si (raizes algébricas). Por ex.: $\sqrt{9} = \pm 3$

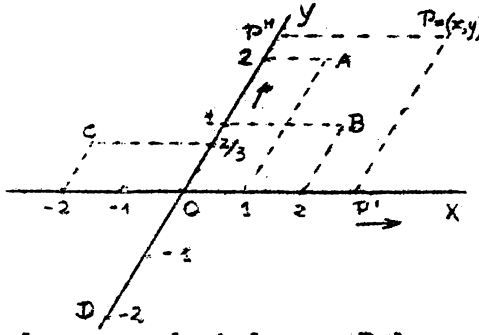
c) Se o índice é par e o radicando negativo, não existe nenhuma raiz no campo real.

Representação geométrica dos sistemas de números reais

Designando $\mathcal{R}$ o conjunto dos números reais, designará $\mathcal{R}^2$ o produto cartesiano $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ (isto é, o conjunto de todos os pares ordenados de números reais), $\mathcal{R}^3$ o produto cartesiano $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ (isto é, o conjunto de todos os ternos ordenados de números reais); dum modo geral, $\mathcal{R}^n$ designará o conjunto de todos os sistemas de n números reais.

a) Representação de $\mathcal{R}^2$ - Suponhamos fixadas no plano duas rectas OX, OY, concorrentes no ponto O. Tomando o pon-

to O como origem em qualquer destas rectas, e fixando em cada uma delas um sentido como positivo e dois segmentos positivos como unidades (não necessàriamente iguais), pode estabelecer-se, segundo a lei atrás indicada, uma correspondência biunívoca entre os pontos de cada uma das rectas e os números reais. Posto isto, seja P um ponto qualquer do plano; conduzindo por P duas rectas, uma paralela a OX e a outra paralela a OY, estas irão cortar, respectivamente, o eixo OY num ponto P" e o eixo OX num ponto P'; como se vê os pontos P', P" ficam unìvocamente determinados; mas por sua vez, cada um destes pontos está associado, na referida correspondência, a um número real. Seja então x o número que corresponde a P' (medida de $\overline{OP'}$ a respeito da unidade em OX) e seja y o número que corresponde a P" (medida de $\overline{OP''}$ a respeito da unidade em OY); a x damos o nome de abscissa do ponto P e a y o de ordenada do ponto P. Assim, a cada ponto P do plano, fizémos corresponder um, e um só, par ordenado (x,y) de números reais, chamados as coordenadas cartesianas desse ponto a respeito do sistema de eixos OX, OY. Reciprocamente, para cada par ordenado (x,y) de números reais existe um (e um só) ponto do plano que tem x por abscissa e y por ordenada. Por conseguinte, ficou definida, pelo processo indicado, uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os elementos de $\mathcal{R}^2$. Quando não há perigo de confusão costuma até identificar-se cada ponto P com o par (x,y) que o define, dizendo "o ponto (x,y)" em vez de "o ponto P" e escrevendo



$$P = (x,y).$$

Pela mesma razão, costuma chamar-se ao conjunto $\mathcal{R}^2$ o plano numérico (real).

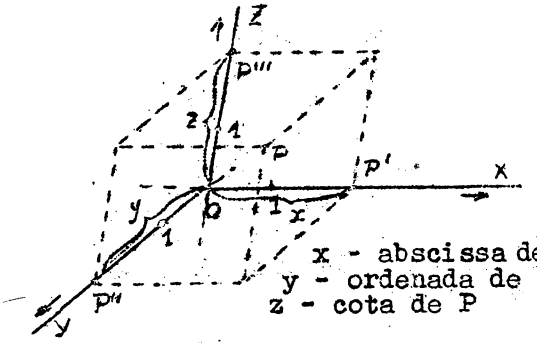
Nos exemplos da figura tem-se:

$A = (1,2)$, $B = (2,1)$, $C = (-2, 2/3)$, $D = (0,-2)$, $O=(0,0)$.

As coordenadas cartesianas dizem-se ortogonais quando

os eixos coordenados são perpendiculares entre si e as unidades iguais em ambos os eixos.

b) Representação de $\mathcal{R}^3$ - Consideremos fixadas no espaço tres rectas OX, OY, OZ, não complanas e concorrentes em O, ponto êste que será tomado como origem nas tres rectas. Posto isto seja P um ponto qualquer do espaço; conduzindo por P tres planos, um paralelo a YOZ, outro paralelo a XOZ e outro paralelo a XOY, êstes planos irão cortar, respectivamente, a recta OX num ponto P', a recta OY num ponto P'' e a recta OZ num ponto P'''. Mas, tal como foi dito para o caso do plano, os pontos P', P'', P''' são definidos, respectivamente em OX, OY e OZ, por números reais x, y, z; a êstes números dá-se o nome, respectivamente, de abscissa, de ordenada e de cota do ponto P. E é fácil de ver que, por tal processo, fica estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço e os ternos ordenados (x,y,z) de números reais. Daí o chamar-se a $\mathcal{R}^3$ espaço numérico a três dimensões (reais). Para indicar que o ponto P é definido pelo terno (x,y,z) de coordenadas, escreve-se



x - abscissa de P
y - ordenada de P
z - cota de P

$$P = (x,y,z).$$

c) Espaço $\mathcal{R}^n$ - A nossa intuição não nos permite atribuir mais de tres dimensões ao espaço físico. Todavia as anteriores considerações induziram a uma extensão natural de linguagem, que se tem revelado muito eficaz em matemática: mesmo no caso de ser $n>3$, convenciona-se chamar ao conjunto $\mathcal{R}^n$ espaço cartesiano (ou euclidiano) a n dimensões (reais). Nesta ordem de ideias, os pontos do espaço $\mathcal{R}^n$ serão os sistemas de n números reais; as coordenadas do ponto $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ serão os números reais $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (respectivamente a primeira, a segunda, ..., a última coordenada)

Existem grupos contínuos de grandezas ? É claro que tal

pregunta equivale a esta outra - "Existem números reais?" - pois que os números reais foram definidos a partir dum grupo contínuo de grandezas e, reciprocamente, o conjunto $\mathcal{R}$ é, êle mesmo, um grupo contínuo de grandezas. Mas a verdade é que as grandezas de que nos oferece exemplo o mundo físico (comprimentos, massas, quantidades de electricidade, etc) não obedecem rigorosamente às leis que caracterizam um grupo contínuo de grandezas - especialmente no que se refere à ausência de saltos e de lacunas. O conceito matemático de grandeza é apenas uma idealização do conceito físico de grandeza. Donde, legìtimamente a pregunta: "Existem grupos contínuos de grandezas ?

Demonstra-se que a resposta é afirmativa, desde que se admita a existência dos números naturais e a existência de classes. A índole deste curso não nos permite aprofundar o assunto, mas convem salientar o seguinte ponto: As grandezas cuja existência se demonstra têm carácter puramente abstracto (formal, aritmético); as grandezas físicas são apenas modelos grosseiros, imperfeitos das grandezas matemáticas; razão pela qual os números reais constituem um instrumento lógico que, embora impecável na sua estruturação interna, só aproximadamente se pode aplicar à realidade física. "Assim, nos problemas práticos intervêm geralmente grandezas concrectas, cuja medição experimental é inevitàvelmente afecta de êrros, que dependem dos dois seguintes factos: 1) o poder dos nossos sentidos é limitado; 2) os instrumentos de medida, por muito bem construidos que estejam, dão sempre lugar a alguma imprecisão; e normalmente acontece que as próprias grandezas que se pretende medir não são exactamente definidas. Por isso, em geral, nas correspondentes medidas expressas em forma decimal, são seguros apenas alguns algarismos (em regra, dois ou tres, no máximo quatro), pelo que seria ilusório (e além disso prejudicial à rapidez dos cálculos) conservar os algarismos que viessem depois. Em resumo: nos problemas práticos há apenas que considerar, como resultados das medições, valores aproximados que são sempre racionais, de modo que podemos dizer que, nas aplicações, se procede como se todas as grandezas fossem comensuraveis.

Não quer isto dizer, todavia, que a introdução dos nú-

meros irracionais corresponda ùnicamente a um objectivo de especulação matemática, sem qualquer interesse do ponto de vista prático. É preciso salientar que, só tomando como base dos raciocínios os valores exactos (racionais ou irracionais) das medidas das grandezas é possível chegar a resultados gerais e seguros, que depois encontram largas e importantes aplicações mesmo nas questões concretas e práticas" (Frederigo Enriques e Ugo Amaldi, Elementi di Geometria)

Elementos de Álgebra Linear

A) Transformações lineares e matrizes

Soma de dois sistemas de números - Já no início deste curso foi dito que, aos sistemas de n números reais, se convenciona chamar pontos do espaço $\mathcal{R}^n$ (espaço euclideano com n dimensões). Também é costume chamar-lhes vectores n-dimensionais.

Um sistema de n elementos pode abreviadamente ser representado por uma única letra. Se os elementos do sistema são designados por uma mesma letra minúscula com índices 1, 2, ..., n, convém que a letra única representativa do sistema seja a maiúscula correspondente. Assim, por exemplo, o sistema $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ será designado pela letra X.

Posto isto consideremos dois sistemas de n números:

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \ , \ B = (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

Chama-se soma de A com B e representa-se por A + B, o sistema:

$$A + B = (a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$$

que se obtem somando as coordenadas de A com as coordenadas homólogas de B.

Sem dificuldade se reconhece que a adição assim definida entre os elementos de $\mathcal{R}^n$ é sempre possível, unívoca, associativa, comutativa e reversível. Por outras palavras: o espaço $\mathcal{R}^n$ é um grupo comutativo a respeito da adição acima definida. O elemento nulo deste grupo é evidentemente o sistema $(0,0,\cdots,0)$, que tem todas as coordenadas nulas A soma de n elementos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de $\mathcal{R}^n$ será o elemento de $\mathcal{R}^n$ que tem por coordenadas a soma das coordenadas homólogas de $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

Produto de um número por um sistema de números - Consideremos um número real k e um sistema de n números reais : $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$; chama-se produto de k por A, e re-

presenta-se por kA, o sistema

$$k\,A = (ka_1,\ ka_2,\cdots,\ ka_n)\ ,$$

que se obtem multiplicando por k cada uma das coordenadas de A.

É fácil reconhecer que, sendo μ, ν dois números reais e A, B dois pontos quaisquer de $\mathcal{R}^n$, se tem :

$$(\mu+\nu)\,A = \mu A + \nu A$$
$$\mu(A + B) = \mu A + \mu B$$
$$\mu\,(\nu.A) = (\mu\nu).A$$
$$1\ .\ A = A\ .$$

Combinações lineares - Dados m sistemas $A_1, A_2, \cdots, A_m$ de n números reais, diz-se que um sistema U é uma combinação linear de $A_1, A_2, \cdots, A_m$, quando existem m números reais $k_1, k_2, \cdots, k_m$ (coeficientes da combinação) tais que

$$U = k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_mA_m\ .$$

Designemos por $u_i, a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im}$, respectivamente as coordenadas de ordem i dos pontos U, $A_1, A_2, \cdots, A_m$. Ter-se-á então, segundo as definições precedentes de soma e de produto por um número real:

$$u_i = k_1a_{i1} + k_2a_{i2} + \cdots + k_ma_{im} \quad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

isto é: se U é combinação linear de $A_1, A_2, \cdots, A_m$, cada coordenada de U é combinação linear das coordenadas homólogas de $A_1, A_2, \cdots, A_m$, com iguais coeficientes.

Elementos fundamentais de $\mathcal{R}^n$ - Dum modo geral designaremos por E_i o ponto de $\mathcal{R}^n$ cuja coordenada de ordem i é igual a 1, sendo as restantes coordenadas todas nulas. Por exemplo, no espaço $\mathcal{R}^4$ será :

$$E_1 = (1, 0, 0, 0)$$
$$E_2 = (0, 1, 0, 0)$$
$$E_3 = (0, 0, 1, 0)$$
$$E_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Aos pontos $E_1, E_2, \cdots, E_n$ de $\mathcal{R}^n$ daremos o nome de elementos fundamentais de $\mathcal{R}^n$.

Consideremos agora um sistema qualquer

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Segundo as definições anteriores ter-se-á:

$$A = (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, 0, a_n)$$
$$= a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + a_n(0,0,\ldots,0,1)$$

ou seja:

$$A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \cdots + a_n E_n .$$

Em conclusão: "Todo o sistema de n números reais é uma combinação linear dos elementos fundamentais $E_1, E_2, \cdots, E_n$ de $\mathcal{R}^n$ sendo os coeficientes da combinação as coordenadas do sistema dado".

Matrizes - Chama-se matriz $m \times n$ a todo o quadro formado por $m \times n$ símbolos (elementos da matriz) representativos de $m \times n$ números ou funções, dispostos em m filas horizontais (ou linhas) e n filas verticais (ou colunas). Para designar um tal quadro escrevê-lo-emos entre colchetes Por exemplo o símbolo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -\operatorname{sen} x & 7 \\ 0 & e^x & \sqrt{5} & -1 \end{bmatrix}$$

designa uma matriz 2×4 (com duas linhas e quatro colunas).

Genèricamente cada elemento duma matriz poderá ser designado por uma letra minúscula afectada de dois índices i,k, o primeiro dos quais indicará a linha e o segundo a coluna em que está colocado o elemento; a matriz poderá então ser designada pela letra maiúscula correspondente. Assim, tratando-se duma matriz $m \times n$, cujo elemento genérico seja $a_{i,k}$ podemos escrever:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, condensadamente:

$$A = [a_{i,k}] .$$

Se fôr $m \neq n$, a matriz diz-se rectangular; se fôr $m=n$, a matriz diz-se quadrada. Duas matrizes dizem-se do mesmo tipo, quando têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas. Duas matrizes do mesmo tipo dizem-se iguais (ou idênticas), quando têm iguais todos os elementos homólogos (isto é, os elementos com a mesma situação em ambas as matrizes).

Chamam-se filas da matriz as suas linhas e as suas colunas; filas paralelas serão duas (ou mais) linhas ou duas (ou mais) colunas da matriz.

Chamam-se elementos principais duma matriz quadrada A os elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... de A com iguais índices de linha e de coluna. Tais elementos formam a diagonal principal ou 1ª diagonal de A.

Transformações lineares - Consideremos dois espaços cartesianos $\mathcal{R}^n$, $\mathcal{R}^m$ (com $m \neq n$ ou $m = n$) e seja Φ uma transformação unívoca de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$. Será pois Φ uma operação que a cada ponto X de $\mathcal{R}^n$ faz corresponder um, e um só, ponto Y de $\mathcal{R}^m$:

$$Y = \Phi (X) . \tag{1}$$

Claro é que, sendo Y função unívoca de X, cada uma das coordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de Y será função unívoca das coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = \varphi_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ y_m = \varphi_m (x_1, x_2, \ldots, x_n) . \end{cases} \tag{2}$$

Assim, toda a transformação Φ de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ é representada por um sistema de m funções reais de n variáveis reais. Recìprocamente, todo o sistema do tipo (2) constituído por m funções reais de n variáveis reais, represen-

ta uma transformação de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ pois que faz corresponder a cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{R}^n$ um ponto $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ de $\mathcal{R}^m$.

Pode pois considerar-se a igualdade (1) como abreviatura do sistema (2). Dêste modo, as convenções relativas a sistemas de números permitem conceber como função única duma única variável um sistema de m funções(reais) de n variáveis (reais).

Posto isto, costuma dizer-se que a transformação Φ é linear, quando verifica as seguintes condições:

$$\Phi(U + V) = \Phi(U) + \Phi(V)$$
$$\Phi(k\,U) = k\,\Phi(U),$$

quaisquer que sejam os elementos U, V de $\mathcal{R}^n$ e o número real k.

Resulta logo da definição que, se Φ é uma transformação linear (de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$), será:

$$\Phi(k_1U_1 + k_2U_2 + \cdots + k_mU_m) = k_1\Phi(U_1) + k_2\Phi(U_2) + \cdots + k_m\Phi(U_m)$$

quaisquer que sejam os elementos $U_1, U_2, \ldots, U_m$ de $\mathcal{R}^n$ e os números reais $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Isto é: toda a combinação linear de $U_1, U_2, \ldots, U_m$ é transformada por Φ numa combinação linear de $\Phi(U_1), \Phi(U_2), \ldots, \Phi(U_m)$, com os mesmos coeficientes.

Uma questão fundamental que se põe desde logo a respeito de transformações lineares é a seguinte:

Que espécie de funções devem ser as do sistema (2) para que representem uma transformação linear ?

Para resolver esta questão suponhamos em primeiro lugar que Φ é uma transformação linear (de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$) e consideremos um elemento X qualquer de $\mathcal{R}^n$. Sendo $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ter-se-á:

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \cdots + x_n E_n \,; \tag{3}$$

em que $E_1, E_2, \ldots, E_n$ designam os elementos fundamentais

de $\mathcal{R}^n$. Então atendendo ao que foi dito há pouco a respeito de transformações lineares, virá, aplicando Φ a ambos os membros de (3):

$$\Phi(X) = x_1\Phi(E_1) + x_2\Phi(E_2) + \cdots + x_n\Phi(E_n) .$$

Se pusermos agora

$$A_1 = \Phi(E_1), \quad A_2 = \Phi(E_2), \quad \cdots, \quad A_n = \Phi(E_n)$$

podemos ainda escrever:

$$\Phi(X) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

o que nos mostra que, se a transformação Φ é linear, deve necessàriamente ser definida por uma fórmula do tipo da anterior

Reciprocamente vamos demonstrar que: Dados arbitràriamente n pontos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de $\mathcal{R}^m$, existe sempre uma (e uma só) transformação linear Φ de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ que transforma E_1 em A_1, E_2 em A_2, $\cdots$, E_n em A_n; essa transformação é definida pela fórmula:

$$(4) \qquad \Phi(X) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

(isto é Φ transforma cada elemento X de $\mathcal{R}^n$ naquele elemento Y de $\mathcal{R}^m$ que se exprime em função de $A_1, A_2, \cdots, A_n$ do mesmo modo que X se exprime em função de $E_1, E_2, \cdots, E_n$).

Demonstração - Que a transformação Φ definida por (4) transforma E_1 em A_1, E_2 em A_2, $\cdots$, E_n em A_n, é imediato. Por exemplo, para E_1 tem-se $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0, \cdots$, $x_n = 0$, e portanto :

$$\Phi(E_1) = 1.A_1 + 0.A_2 + \cdots + 0.A_n = A_1$$

e anàlogamente para $E_2, E_2, \cdots, E_n$.

Para demonstrar que Φ é linear, consideremos dois elementos quaisquer de $\mathcal{R}^n$:

$$U = (u_1, u_2, \cdots, u_n) , \quad V = (v_1, v_2, \cdots, v_n);$$

substituindo em (4) X por U+V e as coordenadas de X pelas coordenadas de U+V, virá :

$$\Phi(U+V) = (u_1+v_1)A_1 + (u_2+v_2)A_2 + \cdots + (u_n+v_n)A_n$$

$$= (u_1A_1 + u_2A_2 + \cdots + u_nA_n) + (v_1A_1 + v_2A_2 + \cdots + v_nA_n)$$

mas $u_1A_1 + u_2A_2 + \cdots + u_nA_n = \Phi(U)$, $v_1A_1 + v_2A_2 + \cdots + v_nA_n = \Phi(V)$; ter-se-á portanto

$$\Phi(U+V) = \Phi(U) + \Phi(V).$$

Por outro lado, sendo k um número real qualquer, vem

$$kU = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

e portanto

$$\Phi(kU) = (ku_1)A_1 + (ku_2)A_2 + \cdots + (ku_n)A_n$$

$$= k(u_1A_1 + u_2A_2 + \cdots + u_nA_n)$$

ou seja $\Phi(kU) = k\Phi(U)$. Fica assim provado que a transformação definida por (4) é efectivamente linear.

Recordemos agora que $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são sistemas de de m números reais (elementos de $\mathcal{R}^m$); ponhamos então:

$$\begin{cases} A_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}) \\ A_2 = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn}) \end{cases}$$

A fórmula (4) diz-nos que cada uma das coordenadas $y_1, y_2, \cdots, y_m$ do ponto $Y = \Phi(X)$ é combinação linear das coordenadas dos pontos $A_1, A_2, \cdots, A_n$, sendo $x_1, x_2, \cdots, x_n$ os coeficientes da combinação, isto é :

$$(5) \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Em conclusão: Toda a transformação linear Φ de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ é definida por um sistema de funções do tipo (5); reciprocamente todo o sistema de funções do tipo (5) (sendo os coeficientes a_{ik} números reais tomados arbitràriamente) define uma transformação linear de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$.

Fica assim determinada a natureza das funções do sistema (2) para que representem uma transformação linear: devem ser funções inteiras do 1º grau em $x_1, x_2, \cdots, x_n$, sem termo independente

Por exemplo, o sistema de funções :

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = -x_1 \end{cases}$$

define uma transformação linear de $\mathcal{R}^2$ sôbre $\mathcal{R}^3$. O transformado do ponto (1,2) será o ponto (1,2,-1), pois que fazendo $x_1=1$, $x_2=2$, vem $y_1=1$, $y_2=2$, $y_3=-1$. Anàlogamente os transformados dos elementos fundamentais de $\mathcal{R}^2$, (1,0) e (0,1), são os pontos $A_1=(3,0,-1)$ e $A_2=(-1,1,0)$ de $\mathcal{R}^3$.

Notemos ainda que o sistema (5) pode abreviadamente ser escrito tal como segue:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

Representação matricial das transformações lineares - Consideremos a transformação linear Φ de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ definida pelas funções:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \end{cases}$$

Chama-se matriz da transformação Φ à matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Convém desde já salientar que uma transformação linear não tem mais de uma matriz; por outras palavras: a matrizes diferentes correspondem necessàriamente transformações lineares diferentes.

Com efeito, basta lembrar que na matriz A os elementos da coluna k (ordenadas de cima para baixo) são as coordenadas do ponto A_k transformado de E_k por meio de Φ (k=1, 2,..., n). Então, dadas duas matrizes A, B e representando por Φ, Ψ, respectivamente, as transformações lineares correspondentes, se fôr $A \neq B$ existe pelo menos uma coluna de A diferente da coluna homóloga de B: seja r a ordem dessa coluna; ter-se-á nesta hipótese:

$$\Phi(E_r) \neq \Psi(E_r)$$

e portanto $$\Phi \neq \Psi .$$

Em conclusão: A cada transformação linear de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ corresponde uma, e uma só, matriz m×n (chamada matriz da transformação); e, reciprocamente, a cada matriz m×n corresponde assim uma, e uma só, transformação linear de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$.

Êste facto leva algumas vezes a identificar as matrizes com as transformações lineares que lhes correspondem - do mesmo modo que, por exemplo, se identificam os pontos do espaço ordinário com os sistemas de três números reais.

Em particular, se m=n, tratar-se-á de transformações lineares do espaço $\mathcal{R}^n$ sôbre si mesmo, às quais correspondem matrizes n×n (matrizes quadradas).

Por exemplo, as funções

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3\,x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

definem uma transformação linear do espaço $\mathcal{R}^2$ sôbre si mesmo, à qual corresponde a matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Chama-se <u>matriz linha</u> toda a matriz formada duma só linha, isto é, toda a matriz do tipo

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

que representa manifestamente uma transformação linear de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}$ - a transformação definida pela <u>função única</u> de <u>n</u> variáveis:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n .$$

Chama-se <u>matriz coluna</u> toda a matriz formada por uma só coluna, isto é, toda a matriz do tipo :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

que representa manifestamente uma transformação linear de $\mathcal{R}$ sôbre $\mathcal{R}^m$ - a transformação definida pelas <u>m</u> funções duma <u>única variável</u> :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x \\ y_2 &= a_2 x \\ &\cdots\cdots \\ y_m &= a_m x \end{aligned}$$

<u>Soma de transformações lineares</u> - Dadas duas transformações lineares Φ , Ψ de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ chama-se soma de Φ com Ψ à transformação Θ assim definida

$$\Theta(X) = \Phi(X) + \Psi(X) \text{ , para cada } X \in \mathcal{R}^n,$$

escrevendo-se então

$$\Theta = \Phi + \Psi$$

(É claro que Θ ainda é uma transformação de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$)

Vamos provar agora que a soma das duas transformações lineares Φ, Ψ é ainda uma transformação linear. Tem-se, com efeito, quaisquer que sejam os pontos U, V de $\mathcal{R}^n$

$$\Theta(U+V) = \Phi(U+V) + \Psi(U+V) =$$
$$= \Phi(U) + \Phi(V) + \Psi(U) + \Psi(V)$$
$$= [\Phi(U) + \Psi(U)] + [\Phi(V) + \Psi(V)]$$
$$= \Theta(U) + \Theta(V).$$

e qualquer que seja o número real k:

$$\Theta(kU) = \Phi(kU) + \Psi(kU) = k\Phi(U) + k\Psi(U)$$
$$= k[\Phi(U) + \Psi(U)] = k\Theta(U).$$

Fica assim provado que Θ também é uma transformação linear.

É fácil reconhecer, por outro lado, que a adição assim definida entre transformações lineares é sempre possível, unívoca, associativa, comutativa e reversível; por outras palavras: a família das transformações lineares de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ é um grupo comutativo a respeito da adição.

Demonstremos, a título de exemplo, que a adição é comutativa, isto é, que se tem :

$$\Phi + \Psi = \Psi + \Phi$$

designando por Φ e Ψ duas quaisquer transformações lineares de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$. Com efeito, é por definição

$$(\Phi + \Psi)(X) = \Phi(X) + \Psi(X)$$
$$(\Psi + \Phi)(X) = \Psi(X) + \Phi(X)$$

qualquer que seja o elemento X de $\mathcal{R}^n$. Mas $\Phi(X)$ e $\Psi(X)$ são elementos de $\mathcal{R}^m$ e a adição definida entre esses elementos (sistemas de m números reais) é, como vimos, comutativa; tem-se, portanto

$$\Phi(X) + \Psi(X) = \Psi(X) + \Phi(X)$$

e por conseguinte

$$(\Phi + \Psi)(X) = (\Psi + \Phi)(X), \text{ para cada } X \in \mathcal{R}^n$$

ou seja

$$\Phi + \Psi = \Psi + \Phi \qquad \text{q.e.d.}$$

As restantes propriedades demonstram-se de modo análogo.

Soma de matrizes - Sejam A, B duas matrizes $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots b_{mn} \end{bmatrix}$$

A estas matrizes correspondem, como vimos, duas transformações lineares de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$, que designaremos respectivamente por Φ e Ψ. Mas a soma de Φ com Ψ é ainda uma transformação linear : corresponder-lhe-á portanto uma nova matriz $m \times n$, à qual chamaremos soma das matrizes A,B e que representaremos por A+B. Para deduzir A+B a partir de A e B observemos que, a cada ponto $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathcal{R}^n$, a transformação Φ faz corresponder um ponto $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ de $\mathcal{R}^m$ cujas coordenadas são dadas pelas m fórmulas

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \quad (i=1, 2, \cdots, m),$$

enquanto a transformação Ψ faz corresponder ao mesmo ponto X de $\mathcal{R}^n$ um ponto $Y' = (y'_1, y'_2, \cdots, y'_m)$ de $\mathcal{R}^m$ cujas coordenadas são dadas pelas fórmulas:

$$y'_i = b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \cdots + b_{in} x_n \quad (i=1, 2, \cdots, m).$$

Mas a transformação $\Phi + \Psi$ faz corresponder a X o ponto $\Phi(X) + \Psi(X)$ ou seja o ponto :

$$Y + Y' = (y_1 + y'_1, y_2 + y'_2, \cdots, y_m + y'_m)$$

e como se tem

$$(6) \quad y_i + y'_i = (a_{i1} + b_{i1}) x_1 + (a_{i2} + b_{i2}) x_2 + \cdots + (a_{in} + b_{in}) x_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

segue-se que a transformação $\Phi + \Psi$ é definida pelo sistema de funções (6), ao qual corresponde a matriz

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Em conclusão : A soma de duas matrizes A, B é a matriz que tem por elementos a soma dos elementos homólogos de A e de B

Em notação abreviada:

$$[a_{ik}] + [b_{ik}] = [a_{ik} + b_{ik}]$$

$$(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n)\ .$$

Por exemplo, a soma das matrizes

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ .$$

É obvio que a adição assim definida entre matrizes do mesmo tipo gosa das mesmas propriedades que a adição há pouco definida entre transformações lineares. Podemos portanto afirmar que:

A família de todas as matrizes $m \times n$ é um grupo comutativo a respeito da adição.

Em particular, é fácil ver que o elemento nulo dêste grupo é a matriz $m \times n$ que tem todos os seus elementos nulos (matriz nula); e que a matriz simétrica duma dada matriz A é a matriz cujos elementos são os simétricos dos elementos homólogos de A.

Produto de duas transformações lineares - Sejam Ψ, Φ duas transformações lineares, respectivamente de $\mathcal{R}^p$ sôbre $\mathcal{R}^n$ e de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ (m, n, p são números naturais

quaisquer) Cada elemento X de $\mathcal{R}^p$ é transformado por Ψ num elemento Y de $\mathcal{R}^n$; por sua vez Y é transformado por Φ num elemento Z de $\mathcal{R}^m$; tem-se portanto

$$Z = \Phi(Y) \ , \quad Y = \Psi(X)$$

donde

$$Z = \Phi\left(\Psi(X)\right) .$$

Designemos por Θ esta transformação de $\mathcal{R}^p$ sôbre $\mathcal{R}^m$ que faz passar de X para Z, isto é, ponhamos:

$$\Theta(X) = \Phi\left(\Psi(X)\right), \quad \text{para cada } X \in \mathcal{R}^p .$$

De acordo com o que se disse no começo deste curso, a transformação Θ é chamada <u>produto da transformação Φ pela transformação Ψ</u>, escrevendo-se

$$\Theta = \Phi \ \Psi .$$

Vamos agora provar que <u>o produto das transformações lineares Φ, Ψ é ainda uma transformação linear</u>. Tem-se com efeito, quaisquer que sejam os elementos U, V de $\mathcal{R}^p$, atendendo à linearidade de Φ e Ψ :

$$\begin{aligned} \Theta(U+V) &= \Phi\left(\Psi(U+V)\right) = \Phi\left[\Psi(U) + \Psi(V)\right] \\ &= \Phi\left(\Psi(U)\right) + \Phi\left(\Psi(V)\right) = \\ &= \Theta(U) + \Theta(V) \ ; \end{aligned}$$

e, qualquer que seja o número real k :

$$\begin{aligned} \Theta(kU) &= \Phi\left(\Psi(kU)\right) = \Phi\left(k\,\Psi(U)\right) \\ &= k\,\Phi\left(\Psi(U)\right) = k\,\Theta(U) . \end{aligned}$$

Está pois provado o que pretendíamos.

A multiplicação assim definida entre transformações lineares goza, evidentemente, de todas as propriedades que caracterizam a multiplicação entre transformações em geral: é portanto <u>sempre possível, unívoca e associativa</u>. Vamos além disso provar que é <u>distributiva a respeito da adição</u>, isto é, vamos demonstrar que se tem necessàriamente

$$\Phi\left(\Psi_1 + \Psi_2\right) = \Phi\,\Psi_1 + \Phi\,\Psi_2 ,$$

$$\left(\Phi_1 + \Phi_2\right)\Psi = \Phi_1\,\Psi + \Phi_2\,\Psi$$

(quando Ψ , Ψ_1, Ψ_2 são transformações lineares de $\mathcal{R}^p$ sôbre $\mathcal{R}^n$ e Φ , Φ_1, Φ_2 transformações lineares de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$).

Com efeito, seja X um elemento qualquer de $\mathcal{R}^p$; aplicar o produto $\Phi(\Psi_1 + \Psi_2)$ a X equivale a aplicar primeiro $\Psi_1 + \Psi_2$ a X o que dá (por definição de soma de transformações):

$$(\Psi_1 + \Psi_2)(X) = \Psi_1(X) + \Psi_2(X)$$

e aplicar depois Φ ao resultado, o que dá (em virtude da linearidade de Φ) :

$$\Phi[\Psi_1(X) + \Psi_2(X)] = \Phi[\Psi_1(X)] + \Phi[\Psi_2(X)]$$
$$= (\Phi\Psi_1 + \Phi\Psi_2)(X)$$

Em conclusão : aplicar $\Phi(\Psi_1 + \Psi_2)$ equivale a aplicar $\Phi\Psi_1 + \Phi\Psi_2$, isto é :

$$\Phi(\Psi_1 + \Psi_2) = \Phi\Psi_1 + \Phi\Psi_2$$

Anàlogamente se prova a 2ª igualdade .

<u>Produto interno de dois sistemas de números</u> - Antes de passar ao produto de matrizes convem definir "produto interno de dois sistemas de números". Consideremos dois sistemas de números reais:

$$U = (u_1, u_2, \cdots, u_n) ,$$
$$V = (v_1, v_2, \cdots, v_n) .$$

Chama-se <u>produto interno de</u> U <u>por</u> V, e representa-se por $U|V$ (ler "U interno V"), a soma dos produtos das coordenadas homólogas de U e de V Em símbolos:

$$U|V = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Consideremos a transformação linear Φ de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$ definida pelas funções:

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

cuja matriz é $A = [a_{ik}]$. Imediatamente se reconhece que y_i (a coordenada de ordem i de $\Phi(X)$ é o produto interno

dos sistemas de números $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ e $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, isto é, o produto interno da linha i de A pelo sistema X.

Produto de matrizes - Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

(Para melhor compreensão do que se segue destacámos a linha i de A e a coluna k de B).

À matriz B corresponde uma transformação linear de $\mathcal{R}^p$ sôbre $\mathcal{R}^n$ e à matriz A corresponde uma transformação linear de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$; designemos estas transformações respectivamente por Ψ e Φ. Como vimos, o produto de Φ por Ψ é uma transformação, ainda linear, de $\mathcal{R}^p$ sôbre $\mathcal{R}^m$: corresponder-lhe-á portanto uma matriz $p \times m$, à qual chamaremos produto de A por B e que representaremos por AB.

Ponhamos $\Theta = \Phi \Psi$ e $C = AB$. Para deduzir C a partir de A e de B, recordemos que os elementos da coluna k de C são (de cima para baixo) as coordenadas do transformado de E_k por meio de Θ, ou seja, do ponto

$$C_k = \Theta(E_k) = \Phi(\Psi(E_k)),$$

donde, pondo $B_k = \Psi(E_k)$:

$$(8) \qquad C_k = \Phi(B_k) \qquad k = 1, 2, \cdots, p,$$

em que $B_k = (b_{1k}, b_{2k}, \cdots, b_{nk})$, $C_k = (c_{1k}, c_{2k}, \cdots, c_{mk})$.

Ora o elemento c_{ik} de C, existente na linha i e na coluna k, é a coordenada de ordem i de C_k; e como a matriz de Φ é A, deduz-se de (8), pelo que vimos há pouco, que c_{ik} é o produto interno da linha i de A por B_k, ou seja:

$$c_{ik} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) | (b_{1k}, b_{2k}, \cdots, b_{nk}),$$

$$= a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \cdots + a_{in}\, b_{nk} ,$$

ou ainda, abreviadamente,

$$c_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rk} \quad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,p).$$

Podemos assim enunciar a regra da multiplicação de matrizes nos seguintes termos:

O elemento de A B existente na linha i e na coluna k é igual ao produto interno da linha i de A pela coluna k de B, consideradas como sistemas de números ($i=1,2,\ldots,m$; $k=1,2,\ldots,p$).

Costuma ainda exprimir-se êste facto dizendo que o produto de matrizes se efectua "multiplicando linhas por colunas".

Em notação abreviada:

$$[a_{ij}] \cdot [b_{jk}] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} \right].$$

Em particular, pode ter-se $m = n = p$: o produto de duas matrizes $n \times n$ (quadradas portanto) é ainda uma matriz $n \times n$. Paralelamente podemos afirmar que: o produto de duas transformações lineares do espaço $\mathcal{R}^n$ sôbre si mesmo é ainda uma transformação linear de $\mathcal{R}^n$ sôbre si mesmo.

Como exemplo, consdieremos as matrizes quadradas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

o elemento c_{11} de A B será o produto interno da 1ª linha de A pela 1ª coluna de B, ou seja $(1, 2)\,|\,(0, -1) = 1.0 + 2\,(-1) = -2$; anàlogamente $c_{12} = (1, 2)\,|\,(0, 1) = 2$, $c_{21} = (0, -1)\,|\,(0, -1) = 1$, $c_{22} = (0, -1)\,|\,(0, 1) = -1$; portanto

$$A\,B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Anàlogamente se calculava o produto B A, chegando-se ao resultado :

$$B\,A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Tem-se pois $A\,B \neq B\,A$, o que nos diz que o produto de matrizes não é comutativo (o mesmo se podendo afirmar do produto de transformações lineares).

Consideremos o caso particular do produto duma matriz linha por uma matriz coluna Tem-se, como é fácil de ver

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

isto é: o produto duma matriz linha por uma matriz coluna (ou vice-versa) é igual ao produto interno dessa linha por essa coluna.

Notemos ainda que, mercê da definição de produto de matrizes, podemos representar de nova maneira as transformações lineares Seja a transformação:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \end{cases}.$$

Podemos escrever então, como é fácil reconhecer:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o que equivale ao sistema precedente.

Matrizes escalares; produto dum escalar por uma matriz - Na teoria das matrizes, os números são também chamados escalares. Seja r um número real; se fôr X um ele-

mento do espaço $\mathcal{R}^n$ e se pusermos

$$Y = r\,X\ ,$$

será ainda Y um elemento de $\mathcal{R}^n$, cujas coordenadas $y_1, y_2, \cdots, y_n$, estão relacionadas com as coordenadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de X pelas fórmulas $y_1 = r\,x_1$, $y_2 = r\,x_2, \cdots, y_n = r\,x_n$. O escalar r define portanto uma transformação do espaço $\mathcal{R}^n$ sôbre si mesmo, à qual corresponde manifestamente a matriz $n \times n$

$$\begin{bmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{bmatrix}.$$

Como se vê, nesta matriz todos os elementos da 1ª diagonal são iguais a r e os restantes elementos são nulos. Às matrizes desta natureza dá-se o nome de matrizes escalares.

Um caso particular importante é aquele em que se tem r=1 e portanto $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \cdots, y_n = x_n$ ou seja $Y = X$; à matriz escalar corresponde neste caso à transformação idêntica I; é então chamada matriz unidade e representa-se por E.

A matriz unidade é pois a matriz quadrada que tem iguais a 1 todos os elementos da 1ª diagonal e iguais a zero os restantes elementos. O elemento genérico da matriz unidade costuma ser designado pelo símbolo δ_{ik}, chamado símbolo de Kronecker. Tem-se pois

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}.$$

É claro que.

$$A.E = E.A = A\ ,$$

desde que A seja uma matriz do mesmo tipo que a matriz E.

Seja agora r um escalar e A uma matriz $m \times n$: $A = [a_{ik}]$. A matriz A representa uma transformação linear de $\mathcal{R}^n$ sobre

$\mathcal{R}^m$ definida pelas funções

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i=1,2,\ldots,m);$$

por sua vez, o número r representa uma transformação linear de $\mathcal{R}^m$ sôbre $\mathcal{R}^m$, definida pelas funções

$$z_i = r\, y_i \qquad (i=1,2,\ldots,m);$$

o produto desta transformação pela primeira será então definido pelas funções:

$$z_i = r\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (r\, a_{ik})\, x_k \quad (i=1,2,\ldots,m);$$

e corresponder-lhe-á portanto a matriz

$$[r\, a_{ik}] = \begin{bmatrix} r\,a_{11} & r\,a_{12} & \cdots & r\,a_{1n} \\ r\,a_{21} & r\,a_{22} & \cdots & r\,a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r\,a_{m1} & r\,a_{m2} & \cdots & r\,a_{mn} \end{bmatrix}$$

que recebe naturalmente o nome de <u>produto do escalar r pela matriz A</u> e se representa por r A. Por conseguinte, <u>o produto de r por A é a matriz que tem por elementos os produtos de r pelos elementos homólogos de A</u>.

Analogamente se define o produto de A por r, tendo-se:

$$r\, A = A\, r,$$

isto é: <u>qualquer matriz é permutável com qualquer escalar</u>.

Em particular, o produto rE do escalar r pela matriz unidade é a matriz escalar correspondente a r. E como se tem:

$$(r\, E)\, A = r\,(E\, A) = r\, A\,,$$

segue-se que o produto duma matriz escalar por uma matriz A (ou vice-versa) é igual ao produto por A do escalar correspondente

<u>Matriz transposta</u> - Chama-se <u>matriz transposta</u> duma dada matriz $A = [a_{ik}]$, e representa-se por A^*, a matriz

que se obtem trocando em A ordenadamente as linhas com as colunas, isto é, em símbolos:

$$A^* = [a^*_{ik}], \quad \text{sendo} \quad a^*_{ik} = a_{ki} .$$

Por exemplo, a transposta da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

É fácil reconhecer que se tem

$$(A\,B)^* = B^*\,A^*,$$

isto é: <u>a transposta do produto é igual ao produto das transpostas em ordem inversa</u>.

<u>Matriz inversa</u> - Já no princípio do curso foi dito o que se entende por <u>transformação inversa</u> duma dada <u>transformação reversível</u>. Diremos que uma dada matriz quadrada A é <u>reversível</u> quando o fôr a transformação linear ϕ correspondente e, nesta hipótese, chamaremos matriz inversa de A, representando-a por A^{-1}, a matriz da transformação ϕ^{-1}. Como se tem:

$$\phi^{-1}\,\phi = \phi\,\phi^{-1} = I$$

será

$$A^{-1}\,A = A\,A^{-1} = E$$

e vice-vêrsa.

Seja, por exemplo, a transformação:

$$(9) \qquad \begin{cases} y_1 = 3x_1 - x_2 \\ y_2 = 5x_1 - 2x_2 . \end{cases}$$

A transformação será reversível se, para cada sistema de valores de y_1, y_2, existir um, e um só, sistema de valores de x_1, x_2 que verifique com os primeiros o sistema de equações (9). Mas êste sistema é resolúvel em ordem a x_1, x_2, tendo-se:

$$(10) \qquad \begin{cases} x_1 = 2\,y_1 - y_2 \\ x_2 = 5\,y_1 - 3\,y_2 \end{cases}$$

A transformação (9) é pois reversível e a sua inversa é a transformação (10). Como estas transformações têm por matrizes, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix},$$

segue-se que $B = A^{-1}$ ou $A = B^{-1}$, o que de resto se pode verificar directamente:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Seja agora a transformação

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3\,x_2 \\ y_2 = 2\,x_1 + 6\,x_2 \end{cases}.$$

Quaisquer que sejam os valores de x_1 e x_2 tem-se:

$$2\,(x_1 + 3\,x_2) = 2\,x_1 + 6\,x_2$$

ou seja

$$2\,y_1 = y_2\ ;$$

daqui se conclue que, atribuindo a y_1 e y_2 valores tais que y_2 não seja duplo de y_1, não existem valores de x_1 e x_2 que satisfaçam àquelas equações. Por exemplo, não haverá nenhum ponto de $\mathcal{R}^2$ que seja transformado no ponto (2, 3); por outro lado os pontos (3, 1) e (0, 2) são ambos transformados no ponto (6, 12). A transformação considerada não é portanto reversível e o mesmo se poderá dizer da respectiva matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tendo em vista o que foi dito sôbre transformações em geral, é fácil reconhecer que sendo A, B matrizes reversíveis, se tem necessàriamente:

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1},$$

isto é: a inversa do produto é igual ao produto das inversas em ordem inversa.

Como se viu, o problema da inversão de matrizes está

intimamente relacionado com o da resolução de sistemas de equações lineares. Mas para um estudo sistemático deste problema torna-se conveniente introduzir um conceito de grande comodidade - o conceito de determinante de que vamos tratar seguidamente

B) Determinantes

Classe duma permutação - Como se sabe do curso liceal, dá-se o nome de permutação de n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a todos os sistemas que se podem formar com êstes elementos, tomados todos de cada vez, numa ordem qualquer, mas sem repetição. Assim, por exemplo, o sistema (2,3,1,4) é uma permutação dos elementos 1,2,3,4. Recordemos, por outro lado, que o número de permutações distintas que se podem formar com n elementos é igual a $n! = 1.2.3 \ldots n$. É costume escolher uma destas como permutação de referência, dando-se-lhe o nome de permutação principal. Quando os elementos considerados são os números naturais 1, 2, 3 ,..., n, adopta-se geralmente como permutação principal aquela em que os elementos estão dispostos por ordem crescente, isto é, a permutação (1,2,...,n).

Diz-se que numa permutação dois dados elementos fazem uma permanência, quando estão dispostos na mesma ordem em que figuram na permutação principal; caso contrário, diz-se que os dois elementos considerados fazem uma inversão ou variação. Por exemplo, a permutação

$$(3,2,5,4,1)$$

apresenta 6 inversões constituidas pelos pares

$$(3,2),\ (3,1),\ (2,1),\ (5,4),\ (5,1),\ (4,1).$$

Uma permutação diz-se par (ou de primeira classe) quando é par o número de inversões que apresenta; caso contrário a permutação diz-se ímpar (ou de segunda classe).

Chama-se transposição de dois elementos a_i, a_k numa dada permutação, à troca desses dois elementos na permutação de modo que a_i passe para o lugar de a_k e a_k para o lugar de a_i.

Teorema de Bézout - "A transposição de dois elementos duma permutação faz mudar a classe da permutação".

Para a demonstração podemos limitar-nos a permutações dos números naturais 1, 2,..., n. Seja

$$(i_1, i_2, \cdots, i_k, i_{k+1}, \cdots, i_n)$$

uma tal permutação, e suponhamos em primeiro lugar que se faz a transposição de dois elementos consecutivos, i_k, i_{k+1}; obtem-se então uma nova permutação

$$(i_1, i_2, \cdots, i_{k+1}, i_k, \cdots, i_n) ;$$

mas é claro que a posição de i_k e de i_{k+1} em relação aos restantes elementos (anteriores ou posteriores) não se altera com esta transposição, e portanto de duas uma: ou i_k e i_{k+1} formam inicialmente uma inversão e passam depois a permanência; ou formam inicialmente uma permanência que cede o lugar a uma inversão - e em qualquer dos casos a classe da permutação muda, visto que o número das suas inversões aumenta ou diminue duma unidade, passando portanto de par a ímpar ou de ímpar a par.

Suponhamos agora que os elementos transpostos não são consecutivos; sejam i_k, i_{k+p} êsses elementos. Da permutação dada

$$(i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots, i_{k+p}, \cdots, i_n)$$

pode passar-se para a nova permutação, mediante duas séries sucessivas de operações:

I) - Transpor primeiro i_k com i_{k+1}, depois i_k com i_{k+2} e assim sucessivamente até transpor i_k com i_{k+p}. Obtem-se deste modo uma nova permutação:

$$(i_1, i_2, \cdots, i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_{k+p}, i_k, \cdots, i_n) .$$

II) - Transpor seguidamente i_{k+p} com i_{k+p-1}, depois i_{k+p} com i_{k+p-2}, e assim sucessivamente até transpor i_{k+p} com i_{k+1}; obtem-se deste modo a permutação:

$$(i_1, \cdots, i_{k+p}, \cdots, i_k, \cdots, i_n)$$

à qual se pretendia chegar.

Ora na primeira série de operações fazem-se p transposições de elementos consecutivos, enquanto na segunda se fazem p-1 transposições de elementos consecutivos; portanto, aplicando a primeira parte da demonstração, concluímos que se produzem ao todo

$$p + (p-1) = 2p - 1$$

mudanças de classe - e como o número $2p - 1$ é ímpar segue-se que a classe da nova permutação é diferente da classe da primeira. q.e.d.

Definição de determinante - A cada matriz quadrada de números

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

costuma associar-se um número, chamado determinante da matriz A e que se define do seguinte modo:

Tomemos um elemento $a_{1\alpha}$ na primeira linha, um elemento $a_{2\beta}$ na segunda linha,..., um elemento $a_{n\nu}$ na última linha, de maneira que todos êstes elementos pertençam a colunas diferentes. Deste modo, os segundos índices na ordem por que estão escritos, $(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ formam uma permutação dos números 1, 2,..., n. Consideremos agora o produto

$$(-1)^p a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\nu}$$

em que p designa o número de inversões da permutação $(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$; nestas condições, será $(-1)^p$ igual a 1 ou a -1 conforme a permutação $(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ fôr par ou ímpar. Posto isto, façamos variar os índices $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ de todos os modos possíveis, de 1 a n, sob a única condição de se manterem diferentes entre si; como existem ao todo n! permutações distintas de $(1,2,\ldots,n)$ segue-se que são em número de n! os produtos que se podem obter como foi indicado. Pois bem, à soma de todos esses produtos, soma que podemos abreviadamente designar por:

(1) $$\sum (-1)^p a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\nu},$$

dá-se o nome de <u>determinante da matriz A</u>. É costume representar o determinante de A pela notação

$$\det A$$

ou por qualquer dos símbolos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad , \quad |a_{ik}|$$

em que os colchetes da matriz foram substituidos por dois traços verticais.

Muitas vezes, para brevidade de linguagem, chama-se também determinante a qualquer destes símbolos, e então as <u>filas</u> (<u>linhas ou colunas</u>) do determinante são as filas (linhas ou colunas) da matriz; o mesmo se diz a respeito dos <u>elementos principais</u>, da <u>1ª diagonal</u> e da <u>2ª diagonal</u> do determinante.

<u>Ordem</u> do determinante é o nome que se dá ao número n das linhas (ou das colunas) do determinante.

Outras vezes, chama-se determinante de A ao polinómio (1) que o define e então os <u>termos</u> do determinante serão os termos deste polinómio; em particular, chama-se <u>termo principal</u> ao que tem por factores os elementos principais, ou seja:

$$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Observemos desde já que, no termo geral do determinante,

$$(-1)^p a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\nu}$$

a ordem dos factores é arbitrária, em virtude da comutatividade da multiplicação. Será então possível, mediante sucessivas transposições dos factores $a_{1\alpha}, a_{2\beta}, \cdots, a_{n\nu}$ colocá-los por ordem crescente dos segundos índices (índices das colunas); deste modo, os primeiros índices ficarão por uma ordem possìvelmente diferente da inicial,

formando uma nova permutação $(\alpha', \beta', \ldots, \nu')$ dos números 1, 2, ..., n, tendo-se:

$$a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \cdots a_{n\nu} = a_{\alpha' 1}\, a_{\beta' 2} \cdots a_{\nu' n}\,.$$

Mas é óbvio que, ao passar de $(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ para $(1,2,\ldots,n)$ se executa o mesmo número de transposições que ao passar de $(1,2,\ldots,n)$ para $(\alpha', \beta', \ldots, \nu')$ e, como a permutação $(1,2,\ldots,n)$ é par segue-se que as permutações $(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$, $(\alpha', \beta', \ldots, \nu')$ são da mesma classe (em virtude do teorema de Bezout). Então, designando por p' o número de inversões de $(\alpha', \beta', \ldots, \nu')$, tem-se $(-1)^p = (-1)^{p'}$ e portanto:

$$(-1)^p\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \cdots a_{n\nu} = (-1)^{p'}\, a_{\alpha' 1}\, a_{\beta' 2} \cdots a_{\nu' n}\,.$$

É portanto indiferente, na definição de determinante de A, utilizar o polinómio (1), em que os primeiros índices figuram por ordem crescente, ou o polinómio:

$$\sum (-1)^p\, a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2} \cdots a_{\nu n}$$

em que são os segundos índices a figurarem por ordem crescente. E daqui resulta desde já uma consequência importante. Se pusermos $a^*_{ik} = a_{ki}$ $(i,k = 1,2,\ldots,n)$, a matriz que tem por elemento genérico a^*_{ik}, ou seja a matriz

$$A = \begin{vmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \cdots & a^*_{1n} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^*_{n1} & a^*_{n2} & \cdots & a^*_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

que se obtem trocando em A ordenadamente as linhas com as colunas, chama-se, como dissémos atrás, a matriz transposta de A e o seu determinante será:

$$\det A^* = \sum (-1)^p\, a^*_{1\alpha}\, a^*_{2\beta} \cdots a^*_{n\nu} = \sum (-1)^p\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \cdots a_{n\nu}$$

ou seja, em virtude do que precede:

$$\det A^* = \det A$$

Em conclusão:

"Não se altera o valor dum determinante, quando se nêle se trocam ordenadamente as linhas com as colunas."

Exemplos: a) Consideremos o determinante de 2ª ordem:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

Os produtos que se podem formar tomando dois elementos com linhas e colunas diferentes são

$$a_{11}\, a_{22} \quad , \quad a_{12}\, a_{21};$$

ambos estes termos estão escritos com os primeiros índices em ordem crescente; mas enquanto no primeiro a permutação dos segundos índices é (1,2), portanto par, no segundo a permutação dos segundos índices é (2,1), portanto ímpar; devem então multiplicar-se por +1 o primeiro e por -1 o segundo, tendo-se por conseguinte:

$$D = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} .$$

b) Seja agora o determinante de 3ª ordem

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Teremos neste caso 6 termos que são, àparte o sinal:

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \; , \quad a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \; , \quad a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$$

$$a_{12}\, a_{21}\, a_{33} \; , \quad a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \; , \quad a_{13}\, a_{22}\, a_{31} .$$

Ora as permutações (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) são pares, enquanto as permutações (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1) são ímpares; logo :

$$D = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

Teoremas elementares sobre determinantes - Uma das propriedades fundamentais dos determinantes é aquela há pouco demonstrada: "Não se altera o valor dum determinante, quando nêle se trocam ordenadamente as linhas com as colunas".

Daqui resulta um princípio que se deve ter presente nas demonstrações sobre determinantes:

"Toda a propriedade dos determinantes que tiver sido demonstrada em relação às linhas fica automàticamente demonstrada para as colunas, e vice-versa".

Por outro lado, recordando a anterior definição de determinante desde logo se observa que:

"Em cada termo do desenvolvimento dum determinante figura um e um só elemento de cada linha (um e um só elemento de cada coluna) do determinante".

Daqui resulta desde logo a seguinte propriedade:

I - Se num determinante todos os elementos duma fila são multiplicados (ou divididos) por um mesmo número c, o determinante resulta multiplicado (ou dividido) por esse número c.

Com efeito, como em cada termo do determinante figura um, e um só, elemento dessa fila, multiplicar (ou dividir) por c todos os elementos da fila equivale a multiplicar (ou dividir) por c todos os termos do determinante e portanto a sua soma, que é o valor do determinante.

Anàlogamente se reconhece que:

Se num determinante há uma fila nula (isto é, formada de elementos nulos) o determinante é nulo.

Por outro lado tem-se o seguinte teorema:

II - Se cada elemento duma fila dum determinante está expresso numa soma de duas parcelas, o determinante será igual à soma dos determinantes que dêle se obtêm, substituindo os elementos daquela fila, sucessivamente, pelas primeiras parcelas e pelas segundas parcelas em que estão decompostos.

Com efeito, seja o determinante da matriz

$$A = [a_{ik}] \quad (i,k = 1, 2, \ldots, n)$$

e suponhamos que cada elemento da linha r está decomposto

num binómio:

$$a_{r1} = a'_{r1} + a''_{r1} \ , \quad a_{r2} = a'_{r2} + a''_{r2} \ , \cdots , \ a_{rn} = a'_{rn} + a''_{rn} .$$

Então, cada termo do determinante se decompõe em dois:

$$(-1)^p \, a_{1\alpha} \, a_{2\beta} \cdots \, a_{r\rho} \cdots \, a_{n\nu} =$$

$$= (-1)^p \, a_{1\alpha} \cdots a'_{r\rho} \cdots \, a_{n\nu} + (-1)^p a_{1\alpha} \cdots a''_{r\rho} \cdots \, a_{n\nu}$$

e o determinante será a soma de todos estes termos

$$|a_{ik}| = \sum (-1)^p a_{1\alpha} \cdots a'_{r\rho} \cdots a_{n\nu} + \sum (-1)^p a_{1\alpha} \cdots a''_{r\rho} \cdots a_{n\nu} .$$

Mas o primeiro destes somatórios é o determinante que se obtem do dado substituindo cada elemento a_{rk} da linha r por a'_{rk}, e o segundo somatório é o determinante que se obtem do dado substituindo cada elemento a_{rk} da linha r por a''_{rk} , o que prova a afirmação feita.

Assim, por exemplo, ter-se-á:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 + v'_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 + v'_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 + v'_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v'_1 & w_1 \\ u_2 & v'_2 & w_2 \\ u_3 & v'_3 & w_3 \end{vmatrix} .$$

As propriedades I e II costumam exprimir-se dizendo: Todo o determinante é uma função linear de qualquer das suas filas.

Demonstremos agora este outro teorema:

III - Trocando entre si duas filas paralelas dum determinante, este muda de sinal.

Seja ainda o determinante da matriz

$$A = [a_{ik}] \quad ; \quad i,k = 1, 2, \ldots , n \ .$$

Trocando em A as linhas de ordem r e s (supondo $r < s$), obtem-se uma nova matriz; designemo-la por $B = [b_{ik}]$. Então as linhas r e s de B serão iguais, respectivamente,

às linhas s e r de A, e as restantes linhas de B serão iguais às linhas homólogas de A; isto é:

$$b_{rk} = a_{sk} \ , \ b_{sk} = a_{rk} \ , \ b_{ik} = a_{ik} \quad \text{para } i \neq r,s \ (k=1,2,\dots,n)$$

Um termo qualquer do det B será portanto da forma:

$$T = (-1)^p \, b_{1\alpha} \cdots b_{r\rho} \cdots b_{s\sigma} \cdots b_{n\nu}$$

$$= (-1)^p \, a_{1\alpha} \cdots a_{s\rho} \cdots a_{r\sigma} \cdots a_{n\nu}$$

em que p é o número de inversões de $(\alpha,\dots,\rho,\dots,\sigma,\dots,\nu)$.

A T corresponderá o seguinte termo do det A :

$$T' = (-1)^{p'} \, a_{1\alpha} \cdots a_{r\sigma} \cdots a_{s\rho} \cdots a_{n\nu}$$

em que p' designa o número de inversões da permutação $(\alpha,\dots,\sigma,\dots,\rho,\dots,\nu)$ que se obtem da anterior transpondo ρ com σ. Mas, pelo teorema de Bezout, p e p' têm paridades diferentes; logo

$$T = - T' .$$

Assim, a cada termo do det B corresponde um termo do det A, simétrico do primeiro, donde se conclue

$$\det B = - \det A, \qquad \text{q.e.d.}$$

Como consequência imediata deste teorema, tem-se a seguinte propriedade:

Se num determinante duas filas paralelas são iguais ou proporcionais, o determinante é nulo.

Com efeito, se no determinante da matriz A duas filas paralelas são iguais, o determinante não se altera trocando entre si essas duas filas; mas, por outro lado, em virtude da propriedade anterior, o determinante deve mudar de sinal; portanto:

$$\det A = - \det A$$

ou seja $2 \det A = 0$, donde $\det A = 0$.

Se as duas filas são proporcionais, isto é, se uma delas é igual ao produto da outra por um número $c \neq 0$, podemos

torná-las iguais multiplicando a segunda por c, com o que o determinante resultará multiplicado também por c. Tem-se pois:

$$c \det A = 0 \quad \text{e portanto} \quad \det A = 0.$$

Combinando êste resultado com o teorema II, chega-se ainda à seguinte conclusão:

IV - O valor dum determinante não se altera, quando, aos elementos duma fila, se somam os elementos homólogos doutra fila paralela à primeira multiplicados por um mesmo número.

Com efeito, se a uma fila do determinante se soma outra fila paralela à primeira multiplicada por um número c, o determinante obtido pode, segundo o teorema II, decompor-se em dois, um dos quais é o determinante dado e o outro é um determinante com duas filas proporcionais, portanto nulo.

Pode ainda demonstrar-se, de maneira análoga, que:

Se num determinante há uma fila que é combinação linear de outras filas paralelas, o determinante é nulo.

Desenvolvimento dum determinante segundo os elementos duma fila - Chama-se menor complementar dum dado elemento a_{ik} dum determinante, ao determinante que se obtem do primeiro, suprimindo a linha e a coluna que se cruzam nesse elemento.

Chama-se complemento algébrico do elemento a_{ik} ao menor complementar de a_{ik} multiplicado por -1 elevado à soma $i+k$ dos índices de linha e coluna desse elemento. Costuma representar-se por A_{ik} o complemento algébrico de a_{ik}; se for M_{ik} o menor complementar de a_{ik}, ter-se-á então, segundo a definição anterior:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Por exemplo, no determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

o complemento algébrico do elemento 5 (da 2^a linha e 3^a coluna) é:

$$(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Teorema de Laplace - "Todo o determinante é igual à soma dos produtos dos elementos de uma sua fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos complementos algébricos".

Mais pormenorizadamente : Dado um determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

este pode ser desenvolvido segundo os elementos duma linha i qualquer, de acôrdo com a fórmula:

$$|a_{ik}| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} ,$$

ou, abreviadamente

$$|a_{ik}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} ;$$

anàlogamente, pode ser desenvolvido segundo os elementos duma coluna k,qualquer, de acordo com a fórmula:

$$|a_{ik}| = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \cdots + a_{nk} A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} .$$

Demonstração - Comecemos por considerar a soma de todos os termos do determinante em que figura o elemento a_{11}; se designarmos por S_{11} esta soma, será evidentemente:

$$S_{11} = \sum (-1)^p a_{11} a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\nu} ,$$

designando por p o número de inversões da permutação $(1, \beta, \ldots, \nu)$ e supondo que o somatório se estende a todas as possíveis permutações $(\beta, \gamma, \ldots, \nu)$ dos números $2, 3, \ldots, n$. Pondo a_{11} em evidência, virá:

$$S_{11} = a_{11} \sum (-1)^p a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu} ;$$

mas, atendendo a que as permutações $(1, \beta, \gamma, \ldots, \nu)$ e $(\beta, \gamma, \ldots, \nu)$ são da mesma classe (visto que o elemento 1, colocado em 1º lugar, não forma inversões), fàcilmente se reconhece que o último somatório é igual ao complemento algébrico de a_{11}, tendo-se portanto :

$$S_{11} = a_{11} A_{11} .$$

Consideremos agora um elemento genérico, a_{ik}, do determinante. Podemos levar este elemento a ocupar a 1ª linha e a 1ª coluna, trocando em primeiro lugar a linha i com a linha i-1, depois com a linha i-2, e assim sucessivamente até chegar à linha 1; e trocando em seguida a coluna k com a coluna k-1, depois com a coluna k-2, e assim sucessivamente até chegar à coluna 1; dêste modo, o determinante muda de sinal i+k vezes, visto que se efectuam ao todo i transposições de linhas e k transposições de colunas. Por outro lado, o menor complementar de a_{ik} (designemo-lo por M_{ik}) continua a ser o mesmo depois das transposições. Por conseguinte, se designarmos por S_{ik} e por S'_{ik} a soma dos termos do determinante em que entra a_{ik}, antes e depois das transposições, virá, atendendo à primeira parte da demonstração:

$$S'_{ik} = a_{ik} M_{ik}$$

$$S_{ik} = (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} ,$$

e como $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$, ter-se-á finalmente :

$$S_{ik} = a_{ik} A_{ik} .$$

Posto isto, consideremos todos os termos do determinante em que entra a_{il}, depois todos aqueles em que figu-

ra a_{i2}, e assim sucessivamente até ao elemento a_{in}. Como em cada termo do determinante entra um, e um só, elemento da linha i, o determinante será igual à soma $S_{i1} + S_{i2} + \cdots + S_{in}$, ou seja:

$$|a_{ik}| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} ,$$

o que nos dá o desenvolvimento do determinante segundo os elementos da linha i, de acordo com o teorema de Laplabe.

E assim o teorema fica demonstrado.

Exemplo - Seja o determinante :

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da 3ª coluna, vem:

$$D = 3\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\,(-2-3) - 2\,(1-0) + (-1-0) =$$

$$= -18 .$$

Corolário do teorema de Laplace - "Num determinante, a soma dos produtos dos elementos duma fila pelos complementos algébricos dos elementos homólogos de outra fila paralela à primeira, é sempre igual a zero". Em símbolos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 , \text{ se } i \neq j ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 , \text{ se } j \neq k .$$

Com efeito, se no determinante $|a_{ik}|$ substituirmos cada

elemento da linha j pelo elemento homólogo da linha i, isto é, se substituirmos respectivamente

$$a_{j1} \text{ por } a_{i1}\ ,\ a_{j2} \text{ por } a_{i2}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{jn} \text{ por } a_{in}\ ,$$

o determinante obtido terá duas linhas iguais e será por isso nulo; por outra lado, desenvolvendo êste determinante segundo os elementos da linha j, de acordo com o teorema de Laplace, obtem-se o primeiro somatório, que deverá portanto também ser nulo. Quanto ao segundo somatório, basta lembrar que o determinante não muda quando se trocam as linhas com as colunas.

Como corolário do teorema de Laplace podemos ainda estabelecer a seguinte proposição:

Se num determinante forem nulos todos os elementos situados dum dos lados da diagonal principal o determinante reduz-se a seu termo principal

Seja o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da 1ª coluna e procedendo sucessivamente para os determinantes obtidos de maneira análoga, obtem-se:

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \cdots = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}, \qquad \text{q.e.d.}$$

Cálculo dos determinantes - O teorema de Laplace reduz o cálculo dum determinante de ordem n ao cálculo de

n determinantes de ordem n-1; mas pode também, com operações simples, reduzir-se o cálculo dum determinante de ordem n ao de um só determinante de ordem n-1.

Seja por exemplo a_{rs} um elemento <u>não nulo</u> do determinante $|a_{ik}|$ e consideremos o elemento a_{rk} da mesma linha, existente numa dada coluna $k \neq s$; então, somando à coluna k a coluna s multiplicada por $-\frac{a_{rk}}{a_{rs}}$, o determinante não se altera (em virtude da propriedade IV) e o elemento a_{rk} será substituido por $a_{rk} - \frac{a_{rk}}{a_{rs}} a_{rs} = 0$. Procedendo deste modo para todas as colunas em que não existe a_{rs}, acabamos por anular todos os elementos da linha r, excepto a_{rs}, e então, segundo o teorema de Laplace aplicado à linha r, o determinante será igual ao produto de a_{rs} pelo complemento algébrico deste elemento no determinante transformado.

<u>Exemplo</u> - Seja o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Convem escolher como elemento redutor o elemento 1 da 2ª linha; então, somando à 3ª coluna a segunda multiplicada por -5, somando à 4ª coluna a 2ª multiplicada por -2 e desenvolvendo depois pela 2ª linha, vem :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 60 - 18 = 42 .$$

C) Equações lineares

Inversão de matrizes - Com os anteriores elementos sôbre determinantes já podemos abordar, em melhores condições, o problema da inversão de matrizes. Seja a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

O teorema de Laplace e o seu primeiro corolário dizem-nos que :

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

Mas se pusermos

$$c_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn}$$

imediatamente se reconhece que c_{ik} é o produto interno de $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ por $(A_{j1}, A_{j2}, \cdots, A_{jn})$; portanto c_{ik} é o elemento genérico da matriz que se obtem multiplicando a matriz A pela matriz:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} .$$

Esta é chamada a matriz adjunta de A e representa-se por adj A .

A matriz adjunta de A é pois a matriz que se obtem substituinda cada elemento de A pelo seu complemento algébrico e transpondo a matriz obtida (isto é, trocando ordenadamente as linhas com as colunas) Em símbolos :

$$\text{adj } [a_{ik}] = [A_{ik}]^* .$$

Por conseguinte a fórmula (1) diz-nos que, na matriz A.adj A, os termos da 1ª diagonal são todos iguais a det A enquanto os restantes são todos nulos; isto é :

$$A.\text{adj } A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix}$$

ou seja

$$(2) \qquad A \,.\, \text{adj } A = \det A \,.\, E \,,$$

em que E representa a matriz unidade (Não esqueçamos que det A é um escalar, isto é, um número).

Anàlogamente se reconhece que :

$$(3) \qquad \text{adj } A \,.\, A = \det A \,.\, E \,.$$

Suponhamos em particular que $\det A \neq 0$; então, se pusermos $B = (\det A)^{-1} \text{ adj } A$, virá de (2) e de (3) :

$$A \,.\, B = B \,.\, A = E$$

o que significa que

$$B = A^{-1}$$

Em conclusão: <u>Se det A ≠ 0, a matriz A é reversível, tendo-se precisamente</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, [A_{ik}]^* .$$

<u>Inversão duma transformação linear</u> - Consideremos a transformação linear definida pelas funções:

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \end{cases}$$

que tem por matriz:

$$A = [a_{ik}]$$

e suponhamos que $\det A \neq 0$. Então, como vimos há pouco, a matriz A é reversível e o mesmo sucede portanto com a transformação linear considerada; a matriz da transformação inversa será portanto :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [A_{ik}]^*$$

o que nos permite escrever:

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\det A}(A_{11}\, y_1 + A_{21}\, y_2 + \cdots + A_{n1}\, y_n) \\ x_2 = \frac{1}{\det A}(A_{12}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + \cdots + A_{n2}\, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \frac{1}{\det A}(A_{1n}\, y_1 + A_{2n}\, y_2 + \cdots + A_{nn}\, y_n) \end{cases}$$

ou, abreviadamente:

$$(6) \qquad x_k = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, y_i \quad , \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

Em conclusão: <u>Se o determinante da transformação linear (4) é diferente de zero, a transformação é reversível e a sua inversa é dada pelas fórmulas</u> (5).

<u>Sistemas de</u> n <u>equações lineares a</u> n <u>incógnitas</u> - Consideremos o seguinte sistema de <u>n</u> equações lineares nas <u>n</u> incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$(7) \quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = c_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n = c_n \end{cases}$$

em que os coeficientes a_{ik} das incógnitas e os termos conhecidos c_i são números quaisquer. Como se sabe enten-

de-se por solução deste sistema de equações todo o sistema de n números $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tal que, fazendo $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$, as equações resultam todas verificadas. Chama-se matriz do sistema à matriz $A = [a_{ik}]$ e determinante do sistema ao determinante de A.

O sistema diz-se de Cramer se o seu determinante fôr diferente de 0.

É claro que o sistema (7) se obtem de (4), fazendo

$$y_1 = c_1, \; y_2 = c_2, \ldots, \; y_n = c_n.$$

Portanto, se fôr $\det A \neq 0$, não temos mais do que aplicar as fórmulas (6) para resolver o sistema.

Em conclusão: Se o sistema é de Cramer, admite uma e uma só solução, que é dada por:

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i A_{ik}}{\det A} \; ; \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Mas observemos que, segundo o teorema de Laplace, a soma

$$\sum_{i=1}^{n} c_i A_{ik} = c_1 A_{1k} + c_2 A_{2k} + \cdots + c_n A_{nk}$$

nos dá o desenvolvimento do determinante que se obtem do det A substituindo os elementos da coluna k pelos correspondentes termos conhecidos. Somos assim conduzidos à seguinte proposição:

Regra de Cramer - "A solução dum sistema de Cramer é dada por um sistema de fracções, cujos denominadores são todos iguais ao determinante do sistema e cujos numeradores são os determinantes que se obtêm daquele substituindo a coluna dos coeficientes da incógnita considerada pela coluna dos termos conhecidos (quando escritos no segundo membro)."

Assim, por exemplo, tratando-se dum sistema de 3 equações a 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \end{cases}$$

se o determinante do sistema fôr diferente de zero, ter-se-á:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Sistemas de m equações lineares a n incógnitas -

Consideremos agora mais geralmente um sistema de m equações lineares em n incógnitas :

$$\Sigma \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = c_1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = c_m \end{cases}.$$

Um tal sistema de equações diz-se possível, quando admite pelo menos uma solução; diz-se impossível no caso contrário. Um sistema possível diz-se determinado ou indeterminado, conforme admite uma só ou mais de uma solução.

Pelo que vimos há pouco, todo o sistema de Cramer (sistema de n equações lineares em n incógnitas, com determinante não nulo) é possível e determinado.

Dois sistemas de equações em $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dizem-se equivalentes, quando admitem as mesmas soluções, isto é, quando são verificados pelos mesmos sistemas de valores de $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Vamos basear o nosso estudo no seguinte:

Princípio da equivalência - "Quando, num sistema de equações lineares, se somam ordenadamente aos dois membros duma das equações os membros duma outra multiplicados por um mesmo número, o sistema obtido é equivalente ao primeiro".

Com efeito, suponhamos que, no sistema anterior, que designámos por Σ, se somam aos dois membros da 1ª equação os da segunda multiplicados por um número k. Obtém-se deste modo um novo sistema, cuja primeira equação é:

$$(a_{11}+ k\, a_{21})x_1 + (a_{12}+ k\, a_{22})x_2 + \cdots + (a_{1n}+ ka_{2n})x_n = c_1+kc_2$$

sendo as restantes equações idênticas às correspondentes de Σ. Designemos este 2º sistema por Σ'. É agora evidente que todo o sistema de valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que verifica as equações de Σ também verifica as de Σ'. Reciprocamente, notando que se passa de Σ' para Σ somando aos dois membros da 1ª equação de Σ' os da 2ª equação multiplicados por $-k$, torna-se manifesto que toda a solução de Σ' também é solução de Σ.

As considerações serão análogas, se, em vez da 1ª e da 2ª equação, se tratar de duas equações quaisquer do sistema.

Posto isto, vamos ver que:

Por aplicação repetida do princípio da equivalência, e mudando eventualmente a ordem das equações e das incógnitas, é sempre possível substituir o sistema Σ por um outro equivalente a Σ, em que: a partir da 2ª equação todos os coeficientes da 1ª incógnita são nulos; a partir da 3ª equação todos os coeficientes da 2ª incógnita são nulos; e assim sucessivamente, até à última equação.

Se todos os coeficientes das incógnitas forem nulos, é claro que o sistema já se encontra sob a forma pretendida. Suponhamos então que pelo menos um deles é diferente de zero e seja a_{11} esse coeficiente (se a_{11} fosse nulo, podíamos sempre levar aquele lugar um coeficiente não nulo, mudando a ordem das equações ou a das incógnitas). Nestas condições, será sempre possível determinar números λ_i tais que

$$a_{i1} + \lambda_i\, a_{11} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, m),$$

e portanto, somando a ambos os membros da 2ª equação os da primeira multiplicados por $\lambda_2 (= -a_{21}/a_{11})$; somando a ambos os membros da 3ª equação os da 1ª multiplicados por $\lambda_3 (= - a_{31}/a_{11})$, e assim sucessivamente, obtemos um sis-

tema Σ' equivalente a Σ , em que são nulos os coeficientes de x_1 em todas as equações a partir da segunda, isto é, um sistema da forma:

$$\Sigma' \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = c'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \cdots + a'_{mn}x_n = c'_m \end{cases}$$

Pode em particular acontecer que se tenham anulado os coeficientes de todas as incógnitas a partir da segunda equação, e neste caso o sistema já se encontra sob a forma pretendida. Caso contrário procedendo a partir da 2ª equação como procedemos a partir da 1ª, podemos eliminar a 2ª incognita em todas as equações que estão a seguir à segunda. E assim sucessivamente.

Como se vê, é possível efectivamente substituir o sistema por um outro nas condições requeridas, isto é, por um sistema da forma:

$$\Sigma^* \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1p}x_p + \cdots + b_{1n}x_n = k_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2p}x_p + \cdots + b_{2n}x_n = k_2 \\ b_{33}x_3 + \cdots + b_{3p}x_p + \cdots + b_{3n}x_n = k_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{pp}x_p + \cdots + b_{pn}x_n = k_p \\ 0 = k_{p+1} \\ 0 = k_{p+2} \\ \cdots\cdots \\ 0 = k_m \end{cases}$$

sendo $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{pp} \neq 0$ e sendo eventualmente nulos os coeficientes de todas as incógnitas nas m-p últimas equações (em particular pode ser p=0 ou p=m).

Posto isto, dois casos se podem dar:

1º caso - Um pelo menos dos números $k_{p+1}, k_{p+2}, \ldots, k_m$, é diferente de zero. Quer isto dizer que, no sistema obtido,

figura pelo menos uma equação com os coeficientes das incógnitas todos nulos e com o termo conhecido diferente de zero. É claro que uma tal equação não admite nenhuma solução, visto que o 1º membro toma sempre o valor zero, enquanto o 2º é diferente de zero. Por conseguinte, o sistema será impossível neste caso.

2º caso - Os números $k_{p+1}, k_{p+2}, \cdots, k_m$ são todos nulos. Quere isto dizer que as m-p últimas equações têm nulos não só os coeficientes de todas as incógnitas, como também os termos independentes. É claro que tais equações são verificadas por qualquer sistema de valores das incógnitas e podem portanto ser eliminadas do sistema. Às restantes equações chamaremos equações significativas.

Neste caso ainda há que distinguir duas hipóteses:

I) - $p = n$ (o número das incógnitas é igual ao número das equações significativas). Então o sistema tomará a forma:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n = k_1 \\ \qquad\quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n = k_2 \\ \qquad\qquad\quad b_{33}x_3 + \cdots + b_{3n}x_n = k_3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad b_{nn}x_n = k_n \end{cases}$$

sendo os coeficientes $b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn}$ todos diferentes de zero. O determinante do sistema será neste caso igual a $b_{11}\,b_{22}\cdots b_{nn} \neq 0$; trata-se, portanto, dum sistema de Cramer, que, segundo o que vimos, é possível e determinado. Em vez de aplicar a regra de Cramer, podemos começar por resolver a última equação, que nos dá logo o valor de x_n, enquanto as precedentes nos dão sucessivamente os valores de $x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$.

II) $p<n$ (o número das equações significativas é inferior ao número das incógnitas). Então o sistema tomará a forma:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1p}x_p + \cdots + b_{1n}x_n = k_1 \\ \qquad\quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2p}x_p + \cdots + b_{2n}x_n = k_2 \\ \qquad\qquad\quad b_{33}x_3 + \cdots + b_{3p}x_p + \cdots + b_{3n}x_n = k_3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad b_{pp}x_p + \cdots + b_{pn}x_n = k_p \end{cases}$$

com $b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{pp} \neq 0$. Passando para os segundos membros das equações todos os termos em $x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_n$, podemos, segundo o processo indicado em I), resolver o sistema em ordem às incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_p$, que ficam assim expressas em função de $x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_n$. Portanto, o sistema é neste caso <u>possível</u>, mas <u>indeterminado</u>, visto que os valores das n-p incógnitas $x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_n$ ficam arbitrários. Para exprimir êste último facto, costuma dizer-se que o <u>grau de indeterminação do sistema</u> é n-p

<u>Utilização das matrizes do sistema</u> - Continuemos a referir-nos ao sistema Σ de equações lineares. Chama-se <u>matriz de</u> Σ à primeira e <u>matriz completa de</u> Σ à segunda das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right],$$

que designaremos respectivamente por A e por M. Na matriz completa destacamos a última coluna, constituída pelos termos conhecidos de Σ; é claro que a supressão desta coluna conduz à matriz A. A matriz de Σ é também chamada a <u>matriz dos coeficientes</u> de Σ.

Notemos agora que o processo anteriormente indicado para reduzir o sistema Σ à forma Σ^* pode comodamente ser executado sôbre a matriz completa de Σ.

Suponhamos $a_{11} \neq 0$ (se fôsse $a_{11}=0$, e não sendo nulos todos os elementos da matriz do sistema, podíamos levar àquela posição um elemento não nulo, efectuando transpo-

sições de linhas e de colunas). Começaremos então por determinar números λ_i tais que

$$a_{i1} + \lambda_i a_{11} = 0 \quad (i=2, 3, \cdots, m).$$

Somando à 2^a linha de M a 1^a linha multiplicada por λ_2, somando à 3^a linha de M a 1^a linha multiplicada por λ_3, e assim sucessivamente, até chegar à última linha, obtemos uma nova matriz, em que são nulos todos os elementos da 1^a coluna excepto a_{11}.

Se não se tiverem anulado todas as linhas da matriz do sistema a partir da 2^a linha, procederemos para a nova matriz de maneira análoga à precedente, partindo do 2º elemento da 2^a linha (suposto $\neq 0$), o que nos conduzirá a uma outra matriz em que são nulos, não só os elementos da 1^a coluna a partir da 2^a linha, mas ainda os da 2^a coluna a partir da 3^a linha.

Aplicando repetidamente êste processo chegar-se-á necessàriamente à matriz completa do sistema Σ^*. Mas é preciso não perder de vista que, se forem efectuadas transposições de colunas, haverá trocas de incógnitas, que devem ser registadas para que no final os resultados possam ser correctamente interpretados.

Exemplos

I) Seja o sistema:
$$\begin{cases} 2y - 3z = -1 \\ x - y = 3 \\ 2x - 3z = 2 \end{cases}$$

A matriz completa do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

Transpondo a 1^a linha com a 2^a e efectuando depois as operações indicadas vem, sucessivamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

A última linha da matriz final corresponde à equação

$$0x + 0y + 0z = -3$$

que é manifestamente impossível, o mesmo acontecendo portanto com o sistema dado.

II) Seja o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - 3y + z = -2 \\ 2x - 3y + 8z = 5 \end{cases}$$

Tem-se sucessivamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto o sistema dado é possível e equivalente a este outro:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -y - 2z = -3 \end{cases}.$$

Da 2ª equação tira-se y em função de z:

$$y = 3 - 2z$$

e entrando com este valor de y na 1ª equação, obtem-se x em função de z:

$$x = 1 + 2(3 - 2z) - 3z = 7 - 7z$$

O grau de indeterminação do sistema é portanto 1.

Característica duma matriz - Procuremos agora interpretar os resultados anteriores à luz da teoria dos determinantes.

Chama-se característica duma matriz à maior das ordens dos determinantes não nulos, que se podem extrair dessa matriz, suprimindo ou não um número qualquer de linhas e um número qualquer de colunas da matriz. Atendendo aos teoremas demonstrados sobre determinantes, fàcilmente se reconhece que a característica duma matriz não se altera, quando sôbre a matriz se executam operações dos seguintes tipos:

1) Somar a uma fila outra fila paralela à primeira, multiplicada por um número qualquer.

2) Transpor duas filas paralelas.

Por conseguinte, o processo atrás indicado para passar da matriz completa do sistema Σ à matriz completa do sistema Σ^* deixa inalteradas as características, tanto da

matriz do sistema como da matriz completa, visto que se reduz à aplicação repetida de operações dos tipos 1) e 2).

Consideremos então a matriz completa do sistema Σ^*:

$$M^* = \left[\begin{array}{ccccccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} & \cdots & b_{1n} & k_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} & \cdots & b_{2n} & k_2 \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3p} & \cdots & b_{3n} & k_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{pp} & \cdots & b_{pn} & k_p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & k_{p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & k_m \end{array}\right]$$

em que são diferentes de zero os elementos b_{11}, b_{22}, ..., , b_{pp}. O determinante:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{pp} \end{vmatrix} = b_{11}\, b_{22} \cdots b_{pp}$$

será então diferente de zero, e é claro que será nulo qualquer determinante de ordem superior a p, extraído da matriz M^*, com exclusão da última coluna, visto que um tal determinante há-de ter necessàriamente uma linha nula - É portanto p a característica da matriz dos coeficientes de Σ^*.

Quanto à matriz completa de Σ^*, a sua característica será ainda p, desde que sejam nulas todas as últimas m-p linhas dessa matriz; mas será superior a p, se algum dos elementos k_{p+1}, k_{p+2}, ..., k_m fôr diferente de zero. No primeiro caso, como vimos, o sistema Σ é possível (determinado se p=n, indeterminado se p<n); no segundo caso o sistema é impossível. E visto que não houve alteração das características das matrizes na passagem de Σ para Σ^* (ou seja de M para M^*), fica demonstrada a seguinte proposição:

Teorema de Rouché- Capelli - "Condição necessária e

suficiente para que um sistema de m equações lineares a n incógnitas seja possível, é que a característica da matriz dos seus coeficientes seja igual à característica da sua matriz completa".

E podemos acrescentar: "Verificada esta condição, e sendo p a característica comum das duas matrizes, o sistema será determinado ou indeterminado, conforme se tiver $p=n$ ou $p<n$ ($n-p$ é o grau de indeterminação do sistema)".

Convem ainda registar as seguintes definições:

Chama-se <u>determinante principal</u> do sistema Σ um determinante não nulo que se possa extrair da matriz dos coeficientes e cuja ordem seja igual à característica da matriz (pode haver mais do que um determinante nestas condições).

Chama-se <u>determinante característico</u> de Σ todo o determinante que se possa obter do determinante principal orlando-o com uma linha formada por coeficientes duma qualquer das equações do sistema e com uma coluna formada por termos conhecidos.

O teorema de Rouché-Capelli pode então enunciar-se do seguinte modo:

"Condição necessária e suficiente para que o sistema Σ seja possível é que sejam nulos todos os seus determinantes característicos (formados a partir dum determinante principal)".

<u>Aplicação às transformações lineares</u> - Consideremos de novo uma transformação linear Φ do espaço $\mathcal{R}^n$ sôbre si mesmo, definida pelas funções:

$$(8) \qquad y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n .$$

Vimos atrás que, se o determinante da transformação, ou seja o determinante da matriz

$$A = [a_{ik}] \quad (i,k = 1, 2, \cdots, n)$$

é diferente de zero, a matriz A (e portanto a transformação Φ) é reversível, tendo-se precisamente:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

Vamos agora ver que esta condição é não só suficiente, mas também necessária, isto é, vamos ver que, se fôr $\det A = 0$, a transformação Φ (e portanto a matriz A) não é reversível.

Com efeito, se é $\det A = 0$, os determinantes não nulos que se podem extrair da matriz são necessàriamente de ordem inferior a n - e portanto a característica da matriz A é inferior a n. Nestas condições, se atribuirmos a $y_1, y_2, \cdots, y_n$, valores determinados $c_1, c_2, \cdots, c_n$ as igualdades (8) convertem-se num sistema de n equações em n incógnitas:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = c_i \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

e de duas uma: ou a característica da matriz completa deste sistema é superior à característica de A, e então o sistema é impossível; ou tal não sucede, e então o sistema é possível, mas indeterminado, porque a característica de A é inferior ao número das incógnitas. Assim, a um dado sistema de valores de $y_1, y_2, \cdots, y_n$, ou não corresponde nenhum sistema de valores de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (que seja transformado no primeiro por Φ) ou correspondem infinitos sistemas de valores de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ - o que significa que a transformação Φ não é reversível.

Em resumo: Condição necessária e suficiente para que a matriz quadrada A seja reversível é que se tenha $\det A \neq 0$.

Seja por exemplo a transformação:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 - 8x_2 + 5x_3 \end{cases}.$$

Considerando y_1, y_2, y_3 como termos conhecidos, teremos aqui um sistema de equações lineares em x_1, x_2, x_3, cuja matriz completa é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & y_1 \\ 3 & -2 & 1 & y_2 \\ 1 & -8 & 5 & y_3 \end{array}\right]$$

Aplicando a esta matriz o processo de redução anteriormente indicado, vem sucessivamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & y_1 \\ 0 & -11 & 7 & y_2 - 3y_1 \\ 0 & -11 & 7 & y_3 - y_1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & y_1 \\ 0 & -11 & 7 & y_2 - 3\,y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + 2y_1 \end{array}\right]$$

Por conseguinte, o sistema só será possível para os sistemas de valores de y_1, y_2, y_3 tais que;

$$y_3 - y_2 + 2\,y_1 = 0\ ,$$

e para tais sistemas de valores de y_1, y_2, y_3, admitirá infinitas soluções em x_1, x_2, x_3. A transformação não é pois reversível.

Consideremos agora uma transformação linear Φ de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$, com $m \neq n$:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k\ , \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\ .$$

Sendo $m<n$, e atribuindo às variáveis y_i valores constantes, obtem-se um sistema cuja matriz completa tem característica igual ou inferior a m, portanto inferior a n: o sistema é impossível ou indeterminado, o que significa que a transformação Φ (e portanto a respectiva matriz) não é reversível. Sendo $n<m$, o sistema só será possível para valores particulares de y_1, y_2, $\ldots$, y_n: a transformação continua a não ser reversível.

Em conclusão : As matrizes rectangulares (e portanto as transformações lineares de $\mathcal{R}^n$ sôbre $\mathcal{R}^m$, com $m \neq n$) nunca são reversíveis.

Instituto Superior de Agronomia

MATEMÁTICAS GERAIS

Segundo as lições do Ex.mo Professor

Doutor Sebastião e Silva

Coligidas por:

E. Cortesão

2º Volume

Reservados todos os direitos

Limites de sucessões

Conceito de sucessão:

Chama-se variável natural a uma variável cujos valores possíveis sejam os números naturais, isto é os números inteiros positivos: 1,2,3,....

Para as variáveis naturais usaremos, em geral, as letras n,m,p,q,...

Consideremos uma variável real u_n, função da variável natural n, isto é, consideremos uma variável u_n que, para cada valor de n, tome como valor um determinado número real. Podemos escrever:

$$u_n = f(n) .$$

Por exemplo, se $u_n = \frac{n^2}{3n-1}$, tem-se

$$u_1 = \frac{1}{2} , \; u_2 = \frac{4}{5} , \; u_3 = \frac{9}{8} , \; \ldots .$$

Os valores de u_n, dispostos segundo a ordem dos índices, formam uma sucessão infinita ou simplesmente uma sucessão; a variável u_n é chamada termo geral da sucessão assim formada. Para brevidade de linguagem, diremos muitas vezes "a sucessão u_n" em vez de "a sucessão cujo termo geral é u_n". De resto, no estudo que vamos fazer, as maneiras de dizer: "variável u_n" e "sucessão u_n" podem tomar-se como equivalentes.

Muitas vezes a sucessão é definida por um processo de recorrência, isto é, dando o primeiro termo (ou alguns termos iniciais) e uma lei que permite determinar cada um dos outros termos, uma vez conhecidos os termos precedentes. Por exemplo a sucessão u_n tal que:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

está definida por recorrência.

Infinitamente pequeno ou infinitésimo:

Diz-se que uma sucessão:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

é um <u>infinitésimo</u> quando, dando um número $\delta > 0$, por mais pequeno que ele seja, existe sempre uma ordem n_1 tal que:

$$n > n_1 \longrightarrow |u_n| < \delta,$$

isto é, tal que depois da ordem n_1, <u>todos</u> os termos da sucessão sejam, em valor absoluto inferiores a δ.

Geralmente quanto mais pequeno fôr o número δ, maior será a ordem n_1.

A sucessão:

$$1 , -\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{3} , -\frac{1}{\sqrt{4}} , \ldots , \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} , \ldots$$

é um infinitésimo pois que:

$$(1) \qquad \left| \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right| < \delta$$

se verifica a partir duma ordem $n > \frac{1}{\delta 2}$; por exemplo, se $\delta = 0{,}01$ a desigualdade anterior é verificada para $n > 10000$; mas já a sucessão:

$$1 , \frac{1}{2} , 1 , \frac{1}{3} , 1 , \frac{1}{4} , \ldots , 1 , \frac{1}{n} , 1 , \ldots$$

não é um infinitamente pequeno visto que o número 1 se repete infinitas vezes na sucessão: a partir de qualquer ordem há sempre termos iguais a 1.

<u>Nota</u>: Uma sucessão de termos todos nulos:

$$0 , 0 , 0 , \ldots , 0 , \ldots$$

é evidentemente um infinitésimo pois que, dado $\delta > 0$, arbitrário, logo a partir da ordem um, todos os termos são menores do que δ.

<u>Limite duma sucessão</u>:

Diz-se que uma sucessão u_n tem por <u>limite</u> um dado número <u>a</u>, ou <u>converge</u> para <u>a</u> (ou ainda, tende para <u>a</u>) quando a diferença $u_n - a$ é um infinitésimo; escreve-se então:

$$\lim u_n = a \qquad \text{ou} \qquad u_n \uparrow a .$$

Portanto, dizer que $\lim u_n = a$ equivale a dizer que, para todo o número $\delta > 0$ existe uma ordem n_1 depois da qual se tem definitivamente $|u_n - a| < \delta$; isto é, uma ordem n_1 tal que:

$$n > n_1 \longrightarrow a - \delta < u_n < a + \delta .$$

Resulta da definição que:

I - "O limite duma constante é a própria constante"

Com efeito, se $u_n = c$, tem-se $u_n - c = 0$ qualquer que seja n e portanto a diferença $u_n - c$ é infinitésima, o que significa ser $\lim u_n = c$.

II - "Uma sucessão não pode ter dois limites diferentes".

Com efeito, suponhamos que se tinha $u_n \uparrow a$, $u_n \uparrow b$, com $a \neq b$. Então as variáveis $u_n - a$, $u_n - b$ seriam infinitésimos e o mesmo aconteceria com a diferença $(u_n - a) - (u_n - b) = b - a$, o que é impossível por ser $b - a \neq 0$.

Teoremas relativos a infinitésimos

Teorema: "A soma de dois infinitamente pequenos é ainda um infinitamente pequeno".

Sejam, por hipótese, u_n e v_n infinitamente pequenos. Pretendemos provar que a sucessão do termo geral $u_n + v_n$ também é infinitésimo.

Tomemos $\delta > 0$, arbitrário. Como u_n é infinitamente pequeno existe uma ordem n_1 tal que:

$$n > n_1 \longrightarrow |u_n| < \frac{\delta}{2}$$

e como v_n também é infinitamente pequeno existe uma ordem n_2 tal que:

$$n > n_2 \longrightarrow |v_n| < \frac{\delta}{2}$$

Visto que o módulo duma soma é menor ou quando muito igual à soma dos módulos das parcelas, tem-se:

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| .$$

Logo, representando por n' o maior dos números n_1 e n_2, virá: $|u_n + v_n| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, para $n > n'$,

visto que depois da ordem n' as duas desigualdades anteriores se verificam simultaneamente; então

$$n > n' \longrightarrow |u_n + v_n| < \delta$$

o que prova que $u_n + v_n$ é ainda um infinitésimo.

Definição: Diz-se que a sucessão de termo geral u_n é limitada se todos os seus termos são em valor absoluto inferiores a um mesmo número, isto é, se existe um número L tal que:

$$|u_n| < L ,$$

qualquer que seja o valor de n.

Teorema: "Todo o infinitésimo é uma sucessão limitada".

Com efeito, se u_n é infinitésimo, dado $\delta > 0$ arbitrário, existe uma ordem n' tal que:

$$n > n' \longrightarrow |u_n| < \delta ;$$

portanto, depois da ordem n' todos os termos são inferiores a uma quantidade fixa; mas até essa ordem ainda há os termos:

$$u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_{n'} .$$

Pondo: $L = \text{máx}\,(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{n'}|, \delta)$

temos: $|u_n| \leq L$, para $n = 1, 2, \ldots$

o que significa que a variável u_n é limitada.

Teorema: "O produto dum infinitésimo por uma variável limitada é ainda um infinitésimo".

Consideremos o produto $c_n \cdot u_n$ em que c_n é uma variável limitada e u_n é um infinitésimo.

Por hipótese existe um número L tal que

$$|c_n| < L$$

qualquer que seja n. Por outro lado, dado $\delta > 0$, arbitrário, existe uma ordem n' tal que:

$$n > n' \longrightarrow |u_n| < \frac{\delta}{L} ;$$

então, depois da ordem n' é:

$$|c_n u_n| = |c_n| \cdot |u_n| < L \cdot \frac{\delta}{L} = \delta$$

ou:

$$|c_n \cdot u_n| < \delta$$

o que significa que $c_n u_n$ é ainda um infinitésimo.

Corolários I - "O produto duma constante por um infinitésimo é ainda um infinitésimo".

Com efeito, a constante corresponde a uma sucessão de termos todos iguais e portanto limitada.

II - "O produto de dois infinitésimos é ainda um infinitésimo. Visto que todo o infinitésimo é uma sucessão limitada.

Álgebra dos limites

Teorema: "O limite duma soma é a soma dos limites das parcelas".

Pretendemos demonstrar que se $u_n \uparrow a$ e $v_n \uparrow b$ também $(u_n + v_n) \uparrow (a+b)$.

Dizer que $u_n \uparrow a$ e $v_n \uparrow b$ é dizer que $u_n - a$ e $v_n - b$ são infinitésimos, mas

$$(u_n - a) + (v_n - b) = (u_n + v_n) - (a+b)$$

e como o segundo membro é um infinitésimo, por ser a soma de dois infinitésimos, o limite de $(u_n + v_n)$ é $(a+b)$, como tínhamos afirmado, isto é:

$$\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n .$$

Este resultado estende-se a uma soma de mais de duas parcelas, utilizando a propriedade associativa.

Teorema: "O limite do produto é igual ao produto dos limites dos factores".

Queremos provar que:

$$u_n \uparrow a \ , \ v_n \uparrow b \longrightarrow u_n v_n \uparrow a.b$$

Representando os infinitésimos $u_n - a$ e $v_n - b$ respectivamente por x_n e y_n , isto é, pondo

$$\begin{cases} u_n - a = x_n \\ v_n - b = y_n \end{cases} \quad \text{temos} \quad \begin{cases} u_n = a + x_n \\ v_n = b + y_n \end{cases}$$

donde:

$$u_n v_n = ab + a y_n + b x_n + x_n y_n ,$$

e como o limite da soma é a soma dos limites das parcelas, segue-se:

$$\lim u_n v_n = \lim ab + \lim a y_n + \lim b x_n + \lim x_n y_n$$
$$= ab$$

(visto que o limite duma constante é a própria constante e o limite do produto duma constante por um infinitésimo é zero). Então:

$$\lim u_n v_n = \lim u_n \times \lim v_n .$$

Este resultado estende-se ao produto de mais de dois factores aplicando a propriedade associativa.

Teorema: "O limite duma diferença é a diferença dos limites".

Como: $u_n - v_n = u_n + (-1)\, v_n$,

temos, pelos teoremas anteriores:

$$\lim (u_n - v_n) = \lim u_n + \lim (-1).\lim v_n$$
$$= \lim u_n - \lim v_n .$$

Lema: "Se u_n tem limite diferente de zero $\frac{1}{u_n}$ é uma variável limitada".

Suponhamos que $u_n \uparrow a \neq 0$ (e suponhamos ainda que nenhum dos valores de u_n é nulo); pretendemos mostrar que a variável $\frac{1}{u_n}$ é limitada.

Representando por x_n o infinitésimo $u_n - a$ temos:

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{a + x_n} .$$

Considerando o número positivo $\frac{|a|}{2}$, haverá uma ordem n' tal que:

$$n > n' \longrightarrow |x_n| < \frac{|a|}{2} ;$$

mas, por outro lado:

$$|a + x_n| \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

(o módulo da soma é superior ou igual à diferença dos

módulos das parcelas); então

$$n > n' \rightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{|a+x_n|} \leqslant \frac{2}{|a|}$$

pois que se dois números positivos são desiguais num sentido, os seus inversos são desiguais em sentido oposto.

Pondo:

$$L = \text{máx}\left[\frac{2}{|a|}, \frac{1}{|u_1|}, \frac{1}{|u_2|}, \ldots, \frac{1}{|u_{n'}|}\right]$$

virá então:

$$\left|\frac{1}{u_n}\right| < L, \quad \text{para} \quad n = 1,2,\ldots,$$

o que prova a afirmação feita.

Teorema: Se $u_n \uparrow a \neq 0$ então $\frac{1}{u_n} \uparrow \frac{1}{a}$.

Temos:

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - u_n}{a\,u_n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u_n} \cdot (a-u_n)$$

e como $\frac{1}{a}$ é constante, $\frac{1}{u_n}$ uma variável limitada e $(a-u_n)$ um infinitésimo, o primeiro membro é também um infinitésimo. Logo

$$\frac{1}{u_n} \uparrow \frac{1}{a}$$

como pretendíamos mostrar.

Teorema: "O limite do quociente é o quociente dos limites do dividendo e do divisor, quando o limite do divisor fôr diferente de zero".

Supondo que $u_n \uparrow a$ e $v_n \uparrow b \neq 0$, pretendemos provar que

$$\frac{u_n}{v_n} \uparrow \frac{a}{b}.$$

Como

$$\frac{u_n}{v_n} = u_n \cdot \frac{1}{v_n}$$

temos

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim u_n \cdot \lim \frac{1}{v_n} =$$

$$= \lim u_n \cdot \frac{1}{\lim v_n} = \frac{a}{b}$$

Infinitamente grande: Uma sucessão u_n diz-se um infinitamente grande quando dado um número L, por maior que ele seja, existe sempre uma ordem n_1 depois da qual o módulo de u_n se torna definitivamente superior a L; isto é, uma ordem n_1 tal que:

$$n > n_1 \longrightarrow |u_n| > L \ .$$

É claro que um infinitamente grande não é uma sucessão limitada. Mas a recíproca não é verdadeira; por exemplo, a sucessão

$$1,2,1,3,1,\ldots,1,n,1,\ldots$$

não é limitada, mas não é um infinitamente grande pois dado um número $L>1$ não há nenhuma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão sejam em valor absoluto maiores do que L.

Uma sucessão u_n diz-se crescente, quando se tem:

$$u_n < u_{n+1} \quad , \quad \text{qualquer que seja n.}$$

Uma sucessão u_n diz-se crescente em sentido lato quando se tem

$$u_n \leqslant u_{n+1} \quad , \quad \text{qualquer que seja n.}$$

É claro que toda a sucessão crescente é crescente em sentido lato, mas a recíproca não é verdadeira, como se verifica por exemplo com a sucessão $1,1,1,\ldots$ que é crescente em sentido lato sem ser crescente no sentido próprio.

Anàlogamente se define "sucessão decrescente" e "sucessão decrescente em sentido lato".

Uma sucessão pode ser infinitamente grande sem ser crescente e pode ser crescente sem ser infinitamente grande. Sejam por exemplo as sucessões:

$$u_n = 1,2,3,4,\ldots,n,\ldots$$

$$v_n = 2,1,4,3,6,5,\ldots \qquad \begin{cases} = n+1 \ , & \text{se n é impar} \\ = n-1 \ , & \text{se n é par} \end{cases}$$

a primeira é um infinitamente grande e é crescente, mas a segunda é ainda um infinitamente grande sem ser crescente.

A sucessão:

$$0 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{2}{3} \ , \ \frac{3}{4} \ , \ \frac{4}{5} \ , \ldots , \ \frac{n-1}{n} \ , \ldots$$

é uma sucessão limitada pois que $\frac{n-1}{n} < 1$ qualquer que seja n; no entanto é crescente.

(O limite desta sucessão é a unidade; com efeito:

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

e portanto:

$$\lim \frac{n-1}{n} = \lim 1 - \lim \frac{1}{n} = 1 \ ) \ .$$

Todavia é fácil ver que:

"Se uma sucessão ilimitada é crescente em sentido lato, essa sucessão é com certeza um infinitamente grande".

Quando u_n é um infinitamente grande convenciona-se escrever:

$$\lim u_n = \infty$$

Numa sucessão infinitamente grande pode acontecer que a partir de certa ordem os termos da sucessão sejam todos positivos e então diremos que:

$$u_n \uparrow + \infty \qquad \text{ou} \qquad \lim u_n = + \infty$$

ou que a partir de certa ordem os termos sejam todos negativos e então diremos que

$$u_n \uparrow - \infty \qquad \text{ou} \qquad \lim u_n = - \infty$$

Por exemplo a sucessão:

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$$

é um infinitamente grande, o seu limite é ∞, mas não é nem $+\infty$, nem $-\infty$ porque não há uma ordem a partir da qual todos os termos sejam positivos ou todos os termos sejam negativos.

Teorema: "O inverso dum infinitamente pequeno é um infinitamente grande e o inverso dum infinitamente grande é um infinitamente pequeno".

Seja u_n um infinitamente pequeno e L um número positivo arbitrário; existe uma ordem n' tal que

$$n > n' \rightarrow |u_n| < \frac{1}{L}$$

e portanto a partir dessa mesma ordem $\left|\frac{1}{u_n}\right| > L$ o que

prova que $\frac{1}{u_n}$ é um infinitamente grande.

De maneira absolutamente análoga se prova que o inverso dum infinitamente grande é um infinitamente pequeno.

Simbòlicamente:

$$\lim u_n = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim \frac{1}{u_n} = \infty$$

Teorema: "O produto de dois infinitamente grandes é um infinitamente grande".

Sejam u_n e v_n dois infinitamente grandes; então:

$$\frac{1}{u_n v_n} = \frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{v_n}$$

é um infinitamente pequeno por ser o produto de dois infinitamente pequenos e portanto, pelo teorema anterior, $u_n \cdot v_n$ é um infinitamente grande.

Simbòlicamente:

$$\infty \times \infty = \infty$$

Teorema: "O produto duma variável de limite diferente de zero por um infinitamente grande é um infinitamente grande".

Suponhamos que $u_n \uparrow a \neq 0$, $v_n \uparrow \infty$; queremos provar que $u_n \cdot v_n \uparrow \infty$.

Com efeito:

$$\frac{1}{u_n \cdot v_n} = \left(\frac{1}{u_n} \cdot \frac{1}{v_n} \right) ,$$

sendo o produto da variável limitada $\frac{1}{u_n}$ pelo infinitésimo $\frac{1}{v_n}$, é um infinitamente pequeno e portanto o seu inverso $a \cdot u_n$ é um infinitamente grande.

Simbòlicamente:

$$a \times \infty = \infty \qquad (a \neq 0)$$

Vejamos agora o que se passa com o produto dum infinitamente pequeno por um infinitamente grande. Podem dar-se vários casos, por exemplo:

$$\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{inf.p.}} \times \underbrace{n^3}_{\text{inf.g.}} = n \uparrow \infty \qquad \text{é um infin. grande}$$

$\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\text{inf.p.}} \times \underbrace{n^2}_{\text{inf.g.}} = \frac{1}{n} \uparrow 0$ é um infin. peq.

$\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{inf.p.}} \times \underbrace{n^2}_{\text{inf.g.}} = 1 \uparrow 1$ tém limite finito e diferente de zero.

Pode ainda acontecer que não exista o limite.

Vemos pois que nada podemos afirmar directamente e temos que recorrer a outros processos para calcular o limite (se existe). Exprime-se este facto dizendo que $0 \times \infty$ é um símbolo de indeterminação.

Vejamos ainda o que se passa com a soma de dois infinitamente grandes:

Se: $u_n \uparrow +\infty$ e $v_n \uparrow +\infty$ então $(u_n + v_n) \uparrow +\infty$

Se: $u_n \uparrow -\infty$ e $v_n \uparrow -\infty$ então $(u_n + v_n) \uparrow -\infty$

Mas se: $u_n \uparrow +\infty$ e $v_n \uparrow -\infty$ então nada se pode dizer;

facto este que se exprime dizendo que:

$$\infty - \infty$$

é um símbolo de indeterminação.

Finalmente vejamos os vários casos que se podem dar com o limite do quociente de duas sucessões u_n e v_n.

I - Já vimos que se $u_n \uparrow a$ e $v_n \uparrow b \neq 0$ então:

$$\frac{u_n}{v_n} \uparrow \frac{a}{b}$$

II - Se $u_n \uparrow a \neq 0$ e $v_n \uparrow 0$ a fracção $\frac{u_n}{v_n} =$

$= u_n \cdot \frac{1}{v_n} \uparrow \infty$ o que se exprime simbòlicamente por

$$\frac{a}{0} = \infty \qquad (a \neq 0)$$

III - Se $u_n \uparrow 0$ e $v_n \uparrow 0$ nada se pode dizer

à priori a respeito do limite do quociente, o que se exprime dizendo que:

$\frac{0}{0}$ é um símbolo de indeterminação.

IV - Se $u_n \uparrow a \neq \infty$ e $v_n \uparrow \infty$ então

$\frac{u_n}{v_n} \uparrow 0$, o que se exprime simbolicamente por:

$$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad (a \neq \infty) .$$

V - Se $u_n \uparrow \infty$ e $v_n \uparrow \infty$ também nada se pode concluir e portanto diremos que:

$\frac{\infty}{\infty}$ é um símbolo de indeterminação.

Teorema: "A soma duma variável limitada com um infinitamente grande é ainda um infinitamente grande".

Seja $u_n + v_n$ com $|u_n| < k$ e $v_n \uparrow \infty$ e seja L um número qualquer; como v_n é um infinitamente grande existe uma ordem n_1 tal que

$$n > n_1 \rightarrow |v_n| > L + k$$

mas por outro lado:

$$|u_n + v_n| \geqslant \big||u_n| - |v_n|\big| > L + k - k = L$$

portanto:

$$n > n_1 \rightarrow |u_n + v_n| > L$$

o que prova que $u_n + v_n$ é ainda um infinitamente grande.

Classificação das sucessões. Critérios de convergência

De harmonia com o que atrás ficou dito podemos classificar as sucessões do modo seguinte:

Sucessões { Convergentes se $u_n \uparrow a \neq \infty$; Divergentes { Propriamente divergentes } se { $u_n \uparrow +\infty$ ou $u_n \uparrow -\infty$; Oscilantes se $u_n \uparrow \infty$ (sem

tender para $+\infty$ ou $-\infty$) ou se a sucessão não tem limite (<u>indeterminada</u>).

Por exemplo a sucessão:

$$1 , -2 , +3 , -4 , \ldots$$

não é propriamente divergente pois tende para ∞, mas não para $+\infty$ ou $-\infty$.

Observemos desde já o seguinte:

"Não se altera o caracter duma sucessão juntando-lhe ou tirando-lhe um número finito de termos, e o limite, se existe, ficará também inalterado".

Para reconhecer este facto, basta recordar a definição de limite.

Como corolário:

"Se $u_n \uparrow a$ também $u_{n+1} \uparrow a$."

Com efeito, a sucessão u_{n+1} resulta da sucessão u_n suprimindo o primeiro termo.

Desta propriedade se conclue que se $u_n \uparrow a \neq \infty$, então

$$\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$$

<u>Aplicação</u>: Pretendemos provar que a sucessão:

$$1 , 2 , 1 , 2 , \ldots$$

não tende para limite algum. Suponhamos que tendia; então a variável:

$$w_n = u_{n+1} - u_n$$

teria que ser um infinitésimo, mas:

$$w_n = 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , \ldots$$

não é um infinitésimo porque o seu valor absoluto não se pode tornar inferior a 1; portanto a sucessão dada não tem limite.

Um critério geral para reconhecer se uma dada sucessão é ou não convergente é o seguinte:

<u>Critério de convergência de Cauchy-Bolzano</u>

"Condição necessária e suficiente para que uma dada sucessão u_n seja convergente, é que, qualquer que seja o número $\delta > 0$, exista sempre uma ordem ν, tal que se tenha: $|u_m - u_n| < \delta$,

para todos os valores de m , n superiores a ν; isto é, uma ordem depois da qual a diferença entre dois quaisquer termos da sucessão seja inferior a δ."

Não demonstraremos este teorema por não nos ser necessário. Tal critério, de grande interesse teórico, não é fàcilmente aplicável na prática.

Em muitos casos é útil o seguinte

Teorema: "Toda a sucessão limitada, crescente em sentido lato é convergente".

Com efeito seja u_n uma sucessão crescente em sentido lato, isto é, tal que $u_n \leqslant u_{n+1}$ qualquer que seja n, e supunhamos que todos os seus termos são inferiores a um mesmo número L. Seja Λ o extremo superior do conjunto $\{u_n\}$ formado pelos termos de sucessão ($\Lambda \leqslant L$) e designe δ um número positivo arbitrário Então, existirá pelo menos um termo u_ν da sucessão superior a $\Lambda - \delta$, de contrário não seria Λ o extremo superior de $\{u_n\}$. E como a sucessão é crescente em sentido lato, ter-se-á:

$$\Lambda - \delta < u_\nu \leqslant u_n \leqslant \Lambda \quad \text{para} \quad n > \nu,$$

donde se conclue que:

$$n > \nu \longrightarrow |\Lambda - u_n| < \delta$$

ou seja:

$$\lim u_n = \Lambda \qquad \text{q. e. d.}$$

Anàlogamente se prova que toda a sucessão limitada decrescente em sentido lato, é convergente.

Em resumo:

Sucessões crescentes em sentido lato { limitadas → convergentes ; ilimitadas → divergentes para $+\infty$

Sucessões decrescentes em sentido lato { limitadas → convergentes ; ilimitadas → divergentes para $-\infty$

Aplicação: Consideremos a sucessão u_n assim definida:

$$u_1 = \sqrt{2} \quad , \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

(será $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...)

Observemos que, se fôr $u_n < 2$, também será

$u_{n+1} < \sqrt{2+2} = 2$; mas $u_1 < 2$. Logo será $u_n < 2$ qualquer que seja n: a sucessão é limitada.

Por outro lado a desigualdade $x^2 < 2 + x$ é verificada para $-1 < x < 2$ e portanto, como $0 < u_n < 2$, ter-se-á $u_n < \sqrt{2 + u_n}$, ou seja $u_n < u_{n+1}$ qualquer que seja n: a sucessão é crescente.

Existe pois o limite de u_n. Como $u_{n+1}^2 - u_n - 2 = 0$, e $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, virá:

$$(\lim u_n)^2 - \lim u_n - 2 = 0$$

donde:

$$\lim u_n = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Definição: A sucessão w_n diz-se enquadrada pelas sucessões u_n , v_n , quando se tem, qualquer que seja n:

$$u_n \leqslant w_n \leqslant v_n \quad \text{ou} \quad u_n \geqslant w_n \geqslant v_n$$

Teorema: "Se a sucessão w_n é enquadrada pelas sucessões u_n , v_n e estas convergem para um mesmo número, também w_n converge para esse número.

Suponhamos que se tem $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ e $\lim u_n = \lim v_n$. Então $\lim (u_n - v_n) = 0$ e como

$0 \leqslant w_n - u_n \leqslant v_n - u_n$, também $\lim (w_n - u_n) = 0$ donde:

$$\lim w_n = \lim u_n + \lim (w_n - u_n) = \lim u_n$$

q.e.d.

Sucessão de termo geral a^n:

Suponhamos em primeiro lugar $a > 1$. Vamos ver que neste caso $a^n \uparrow +\infty$. Se $a > 1$ então

$$\lambda = a - 1 > 0 \quad \text{donde} \quad a = 1 + \lambda \quad \text{e}$$

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \ldots > 1 + n\lambda .$$

Como n é um infinitamente grande e λ é uma constante, $n\lambda$ é um infinitamente grande e o mesmo acontece a $1 + n\lambda$. Ora $a^n > 1 + n\lambda$, logo $a^n \uparrow +\infty$,

q.e.d.

Se fôr $|a| > 1$ teremos:

$|a^n| = |a|^n$ e portanto $a^n \uparrow \infty$;

se a fôr positivo $a^n \uparrow +\infty$, mas se a fôr negativo a^n tende para ∞.

Se fôr $|a| < 1$ é $\frac{1}{|a|} > 1$ e

$$\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \uparrow \infty \quad \text{e} \quad a_n \uparrow 0 .$$

Se $|a| = 1$, ou $a = 1$ e temos uma sucessão constante de limite 1, ou $a = -1$ e temos uma sucessão indeterminada.

Em resumo:

$$|a| \begin{cases} > 1 \begin{cases} a > 0 \ldots\ldots\ldots a^n \uparrow +\infty \\ a < 0 \ldots\ldots\ldots a^n \uparrow \infty \end{cases} \\ < 1 \ldots\ldots\ldots\ldots a^n \uparrow 0 \\ = 1 \begin{cases} a = 1 \ldots\ldots\ldots a^n \uparrow 1 \\ a = -1 \ldots\ldots\ldots a^n \text{ indeterminada.} \end{cases} \end{cases}$$

Notações:

Muitas vezes, para evitar confusões, é preciso usar a notação "$\lim_{n \to \infty} u_n$" em vez de "$\lim u_n$", para indicar o limite da sucessão de termo geral u_n. Sucede isto quando a variável u_n depende doutras variáveis além de n. Por exemplo, tem-se:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{m+n} = 0 \quad , \quad \lim_{m \to \infty} \frac{m}{m+n} = 1.$$

A expressão "$\lim_{n \to \infty} u_n$" deve ler-se: "limite de u_n quando n tende para ∞".

Extremos infinitos:

Os símbolos $+\infty$, $-\infty$ permitem introduzir convenções cómodas relativas aos extremos dum conjunto.

Diremos que o extremo superior dum conjunto de números é $+\infty$ quando esse conjunto não fôr limitado superiormente. Diremos que o extremo inferior é $-\infty$, quando o conjunto não fôr limitado inferiormente.

Posto isto podemos considerar intervalos com extremos infinitos. Por exemplo, $[a, +\infty[$ representará o

conjunto de todos os números não inferiores a a;
$]-\infty , a[$ o conjunto dos números inferiores a a;
$]-\infty , +\infty [$ o conjunto de todos os números reais, etc.

Séries

Série é a expressão que se obtem ligando por sinais de + todos os termos duma sucessão infinita. Assim, da sucessão:

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n , \cdots$$

obtemos a série:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

(uma tal expressão pode imaginar-se mas não pode escrever-se efectivamente, a não ser de maneira abreviada).

Se os termos fossem em número finito podíamos escrever abreviadamente:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_p = \sum_{i=1}^{p} u_i$$

que se lê: somatório ou soma dos números u_i desde $i=1$ até $i=p$.

Esta notação sugere uma notação anàloga para as séries e então teremos:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Quando não houver lugar para confusão, representaremos a série apenas por:

$$\Sigma u_n .$$

Para atribuirmos um significado a tal expressão, temos de recorrer à teoria dos limites; ponhamos:

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Por este processo, da sucessão:

$$u_1 , u_2 , u_3 , \cdots , u_n , \cdots$$

deduzimos a sucessão:

$$S_1 , S_2 , S_3 , \cdots , S_n , \cdots$$

A série Σu_n classifica-se conforme a sucessão S_n. Assim:

Série Σu_n {
- Convergente - se $\lim S_n$ existe e é finito
- Divergente {
  - Propriamente divergente { se $S_n \uparrow +\infty$ ou $S_n \uparrow -\infty$
  - Oscilante - se $\lim S_n$ não existe ou se fôr ∞ sem ser $+\infty$ nem $-\infty$.
}
}

No caso da série ser convergente o

$$\lim S_n = S \neq \infty$$

diz-se soma da série e escreveremos:

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Chamaremos soma parcial de ordem n a S_n (soma dos n primeiros termos).

Chamaremos resto de ordem n duma série convergente, e representaremos por R_n, a diferença entre a sua soma e a soma parcial de ordem n.

Então, se a série Σu_n é convergente, temos:

$$S = S_n + R_n$$

donde, aplicando a álgebra dos limites,

$$\lim R_n = \lim (S - S_n) = 0$$

o que prova que R_n é um infinitésimo.

Série geométrica:

Dá-se este nome à série cujos termos estão em pro-

gressão geométrica; é pois toda a série do tipo:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots$$

A soma dos n primeiros termos é:

$$S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1} ;$$

multiplicando ambos os membros por r obtemos:

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

donde, por subtracção ordenada:

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

ou seja

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Vamos estudar a natureza da série consoante os valores de r:

$|r|<1 \rightarrow r^n$ será um infinitésimo, portanto $\lim S_n = \frac{a}{1-r}$; a série é pois <u>convergente</u> e de soma igual a $\frac{a}{1-r}$.

$|r|>1 \rightarrow r^n$ é um infinitamente grande e $S_n \uparrow \infty$, logo a série é <u>divergente</u>.

$|r|=1$ {

$r=1 \rightarrow$ a série é $a+a+a+\ldots+a+\ldots$ e portanto $S_n \uparrow +\infty$ (se $a>0$) ou $S_n \uparrow -\infty$ (se $a<0$); é pois <u>pròpriamente divergente</u>.

$r=-1 \rightarrow$ a série é $a - a + a - a + \ldots$; então S_n é alternadamente a e 0; logo a série é <u>divergente oscilante</u>.

<u>Definição</u>: Dadas duas séries

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

e

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

se tivermos $a_n \geq b_n$ qualquer que seja o valor de <u>n</u>, a primeira diz-se <u>maiorante</u> da segunda, e a segunda, <u>minorante</u> da primeira; também se diz que a 2ª é <u>maiorada</u> pela 1ª e que a 1ª é <u>minorada</u> pela segunda.

Teorema: "Não se altera o caracter duma série juntando-lhe, ou tirando-lhe um número finito de termos".

Suponhamos que na série:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

suprimimos k termos; seja u_p o último termo suprimido e sejam respectivamente S_n e S'_n as somas de ordem n da série dada e da série obtida.

Desde que seja $n > p$, em S_n figuram todos os termos suprimidos e portanto, representando por A a soma destes termos, virá:

$$S_n = A + S'_{n-k}, \quad \text{para} \quad n > p.$$

Se $S_n \uparrow S$, então $S'_{n-k} = (S_n - A)$ tenderá para $S - A$ (pelo teorema do limite da diferença) e portanto se a 1ª série é convergente também a 2ª o é; se $S'_{n-k} \uparrow S'$ então $S_n \uparrow (A + S')$ e portanto se a 2ª série é convergente, o mesmo se dando com a 1ª. Portanto, se uma delas fôr divergente, divergente é também a outra. São pois, de facto, da mesma natureza.

Condição necessária de convergência.

Suponhamos que a série de termo geral u_n é convergente, isto é, que $S_n \uparrow S \neq \infty$; então ter-se-á também $S_{n+1} \uparrow S$, donde:

$$\lim (S_{n+1} - S_n) = \lim u_{n+1} = 0 .$$

Portanto:

Condição necessária para que uma série seja convergente e que o seu termo geral tenda para zero.

Esta condição é apenas necessária, pode não ser suficiente. Assim, por exemplo, demonstra-se que a série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

(série harmónica) é divergente, embora o seu termo geral tenda para zero.

Critério geral de convergência

Uma condição necessária e suficiente de convergência da serie de termo geral u_n e que, dado um numero δ

positivo, arbitrário, exista uma ordem ν tal que:

$$|S_m - S_n| < \delta \quad \text{desde que} \quad m \text{ e } n > \nu.$$

(critério de convergência de Cauchy-Bolzano).

Porém, êste critério é de difícil aplicação na prática.

Séries de termos não negativos

Numa série de termos não negativos:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

a soma parcial S_n será crescente em sentido lato, isto é:

$$S_{n+1} \geq S_n$$

visto que quando adicionamos um novo termo, u_{n+1}, ou ele é nulo e $S_{n+1} = S_n$, ou é positivo e $S_{n+1} > S_n$.

Por outro lado, já vimos que uma sucessão crescente em sentido lato, quando limitada, é convergente e, quando ilimitada, tende para $+\infty$; então:

$$\text{ou} \quad S_n \uparrow a \neq \infty \qquad \text{ou} \quad S_n \uparrow +\infty;$$

logo: "Uma série de termos não negativos ou é convergente, ou divergente para $+\infty$ (pròpriamente divergente).

Anàlogamente:

"Uma série de termos não positivos ou é convergente, ou divergente para $-\infty$ (pròpriamente divergente).

Critério de confronto:

Consideremos duas séries de termos não negativos Σu_n e Σv_n e suponhamos que a primeira é maiorante da segunda (isto é, que $u_n \geq v_n$, qualquer que seja n); podemos então afirmar que:

"Se a primeira é convergente, a segunda também o é, e se a segunda é divergente a primeira é também divergente".

Com efeito, sendo S_n e σ_n as somas parciais de ordem n, respectivamente, da primeira e da segunda, é evidentemente:

$$\sigma_n \leq S_n$$

Por outro lado, se a primeira é convergente, tem-se $S_n \leq S$ e portanto

$$\sigma_n \leq S_n \leq S$$

o que garante a convergência da segunda.

Por outro lado se a segunda é divergente σ_n cresce além de todo o limite e o mesmo sucede a S_n, por ser $S_n \geq \sigma_n$, o que prova a divergência da primeira.

Critério de D'Alembert: (Aplicável unicamente a séries de termos positivos).

Seja a série de termos positivos:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

e consideremos a razão:

$$\rho_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Se ρ_n fôsse uma constante teríamos uma série geométrica. Suponhamos que ρ_n não é constante, mas que, a partir de certa ordem p, se mantem menor ou igual a um número k inferior à unidade, isto é, que:

$$\rho_n \leq k < 1 \quad \text{para} \quad n > p \ ;$$

então como $u_{n+1} = \rho_n u_n$ e como se tem $\rho_n \leq k$ para $n > p$, virá:

$$u_{p+2} = \rho_{p+1} u_{p+1} \leq k u_{p+1}$$

$$u_{p+3} = \rho_{p+2} u_{p+1} \leq k^2 u_{p+1}$$

. . . . . .

donde se conclue que a série

$$(1) \qquad u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \cdots$$

é maiorada pela série geométrica

$$(2) \qquad u_{p+1} + k u_{p+1} + k^2 u_{p+1} + \cdots ,$$

e como esta é convergente, por ser $k<1$, a série (1) (obtida da série dada por supressão dos p primeiros termos) é também convergente.

Como a supressão dum número finito de termos não

altera a natureza da série, a série dada é também convergente e o seu resto de ordem p é:

$$R_p \leqslant \frac{u_{p+1}}{1-k} \ ;$$

visto ser $R_p = u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \cdots$ e $\frac{u_{p+1}}{1-k} = u_{p+1} + u_{p+1}k + u_{p+1}k^2 + \cdots$

(É preciso notar que se trata de uma condição suficiente, mas não necessária de convergência)

Suponhamos agora que ρ_n, a partir de certa ordem se mantem superior ou igual à unidade, isto é, que:

$$\rho_n \geqslant 1 \qquad \text{para} \qquad n > p \ ;$$

raciocinando de modo análogo chegamos à conclusão de que a série dada é divergente.

Em resumo:

$$\rho_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} \leqslant k < 1 \ (n > p) & \text{- - - - - - Série C.} \\ \geqslant 1 \ (n > p) & \text{- - - - - - Série D.} \end{cases}$$

Notemos que para a série ser convergente não basta que seja $\rho_n < 1$ a partir de certa ordem, pois, por exemplo para a série harmónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

que sabemos ser divergente, temos:

$$\rho_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \ ;$$

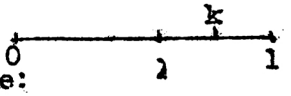
portanto, neste caso, ρ_n é menor que a unidade qualquer que seja n, mas não é possível determinar um número k inferior à unidade tal que a partir de certa ordem seja

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k < 1 \ .$$

Corolário: "Suponhamos que a razão $\rho_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

tende para um limite λ; então, a série será convergente se $\lambda<1$ e divergente se $\lambda>1$." (Nada se pode concluir se fôr $=1$).

Consideremos em primeiro lugar $\lambda<1$; designando por k um número compreendido entre λ e 1 e fazendo $\delta = k - \lambda$, existirá uma ordem n_1 tal que:



$$n > n_1 \rightarrow \lambda - \delta < \rho_n < \lambda + \delta$$

e como $\lambda + \delta = k$ temos:

$$n > n_1 \rightarrow \rho_n < k < 1 ,$$

logo a série é convergente.

De modo análogo se demonstrava a segunda parte do corolário.

Nota - Pode acontecer que ρ_n não tenha limite e que no entanto a série seja convergente; é o que acontece, por exemplo, com a série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \cdots$$

na qual é: $\rho_n = \begin{cases} 1/2 & \text{para n par} \\ 1/3 & \text{para n impar} . \end{cases}$

É claro que não tem limite, mas, no entanto logo a partir da primeira ordem tem-se $\rho_n \leqslant \frac{1}{2} < 1$ e portanto a série é convergente.

Critério de Cauchy:

Consideremos $\sqrt[n]{u_n}$ sendo u_n o termo geral duma série de termos positivos; se

$n > p \rightarrow \sqrt[n]{u_n} \leqslant k < 1$ a série é C.

se $n \geqslant p \rightarrow \sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ a série é D.

Corolário: Sendo $\lim r_n = \lim \sqrt[n]{u_n} = \lambda$,

Se $\lambda < 1$ - - - - - a série é C.

$\lambda > 1$ - - - - - a série é D.

e se $\lambda = 1$ nada se pode concluir.

Estas duas proposições podem ser demonstradas por um método análogo ao que seguimos para demonstrar o critério de D'Alembert e respectivo corolário.

Teorema: "Se as séries:

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

(2) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$

são convergentes e têm por somas respectivamente A e B, também a série:

(3) $(\lambda a_1 + \mu b_1) + (\lambda a_2 + \mu b_2) + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n) + \cdots$,

em que λ e μ designam números quaisquer, é convergente e tem por soma:

$$\lambda A + \mu B. \text{ "}$$

Com efeito, sendo A_n , B_n e C_n respectivamente as somas parciais de ordem n das séries (1) , (2) e (3), teremos:

$$C_n = \lambda A_n + \mu B_n$$

e como

$$\lim C_n = \lim \lambda A_n + \lim \mu B_n$$
$$= \lambda A + \mu B$$

a série (3) é convergente e tem por soma $\lambda A + \mu B$

q. e. d.

A série (3) diz-se <u>combinação linear</u> das séries (1) e (2).

Se $\lambda = \mu = 1$ a série (3) chama-se a <u>série soma</u> das séries (1) e (2); se $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ a série (3) diz-se a <u>série diferença</u> das séries (1) e (2).

Teorema: "A série $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ será convergente se o mesmo acontecer com a série

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

formada com os módulos dos termos da primeira; e se representarmos por S e σ as somas da primeira e da segunda teremos: $|S| \leqslant \sigma$. "

Para demonstrar o teorema vamos considerar as sucessões de termos gerais:

$$a_n \begin{cases} = u_n & \text{se} \quad u_n > 0 \\ = 0 & \text{se} \quad u_n \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad b_n \begin{cases} = 0 & \text{se} \quad u_n \geqslant 0 \\ = -u_n & \text{se} \quad u_n < 0 \end{cases}$$

(Por exemplo com $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$ seria
$a_n = 1 , 0 , 3 , 0 , \ldots$ e $b_n = 0 , 2 , 0 , 4 , \ldots$)

Nestas condições virá:

$$u_n = a_n - b_n$$

e

$$|u_n| = a_n + b_n$$

donde

$$a_n \leqslant |u_n| ,$$

$$b_n \leqslant |u_n|$$

o que mostra ser a série $\Sigma |u_n|$ maiorante das séries Σa_n e Σb_n; como, por hipotese, aquela é convergente, também estas o são. Por outro lado, tem-se:

$$\Sigma u_n = \Sigma a_n - \Sigma b_n ;$$

logo, por força do teorema anterior, é Σu_n convergente e a sua soma será $A - B$, representando por A e B respectivamente as somas de Σa_n e de Σb_n.

Finalmente, visto que $\Sigma |u_n| = \Sigma a_n + \Sigma b_n$, tem-se

$$\sigma = A + B ,$$

e, como $|A - B| \leqslant A + B$ será

$$|S| \leqslant \sigma \qquad \text{q. e. d.}$$

A parte final deste teorema é uma extensão da propriedade já conhecida das somas com um número finito de parcelas. "O módulo da soma é menor, quando muito igual, à soma dos módulos das parcelas".

Definição: "A série Σu_n diz-se absolutamente convergente se fôr convergente a série $\Sigma |u_n|$."

Pode acontecer que uma série seja convergente sem que o seja a série dos módulos dos seus termos, e então a série dir-se-á simplesmente convergente.

Produto de séries: Dadas duas séries:

$$\Sigma a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$\Sigma b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

chama-se série produto das primeiras (segundo Cauchy) à série cujos termos são formados com a seguinte lei:

$$c_1 = a_1 b_1$$

$$c_2 = a_2 b_1 + a_1 b_2$$

$$c_3 = a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_2 b_{n-1} + a_1 b_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Tem lugar a seguinte proposição, que não demonstraremos:

Teorema: "Se as séries Σa_n e Σb_n são convergentes, e têm por somas respectivamente A e B, e se além disso uma destas séries é absolutamente convergente, também a série produto Σc_n é convergente, tendo por soma precisamente A.B ." (Mertens).

Note-se que não é preciso que ambas as séries factores sejam absolutamente convergentes, basta que uma delas o seja.

Séries de termos com sinais alternados

Teorema: "Se na série de termos alternadamente positivos e negativos:

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

os termos decrescem em valor absoluto e o termo geral tende para zero, a série é convergente e a sua soma parcial de ordem n difere da soma da série menos que $|u_{n+1}|$."

Podemos, sem quebra de generalidade, supor $u_1 > 0$. Suponhamos então verificadas as duas seguintes condições:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > 0 \quad \text{e} \quad u_n \downarrow 0$$

Formadas as somas de ordem impar:

$$S_1 = u_1$$
$$S_3 = u_1 - u_2 + u_3 = u_1 - (u_2 - u_3)$$
$$S_5 = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e as somas de ordem par:

$$S_2 = u_1 - u_2$$
$$S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4)$$
$$S_6 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

verificamos, atendendo à primeira condição, que as somas de ordem impar vão diminuindo (formam uma sucessão decrescente) e as de ordem par vão aumentando (formam uma sucessão crescente):

$$S_1 > S_3 > S_5 > \ldots$$
$$S_2 < S_4 < S_6 < \ldots$$

Mas por outro lado teremos sempre:

$$S_{2p} < S_{2p+1}$$

isto é, as somas de ordem par são sempre menores que as de ordem impar.

Como a sucessão S_{2p} é crescente e superiormente limitada e a sucessão S_{2p+1} é decrescente e inferiormente limitada, ambas as sucessões têm limite; como além disso

$$S_{2p+1} = S_{2p} + u_{2p+1}$$

virá, tomando limites:

$$\lim S_{2p+1} = \lim S_{2p} + \lim u_{2p+1}$$

donde, atendendo a que o termo geral tende para zero, vem:

$$\lim S_{2p+1} = \lim S_{2p} = S.$$

É claro que será também $\lim S_n = S$ e portanto a série é convergente, como afirmámos.

Por outro lado, das limitações

$$S_{2p} < S < S_{2p+1} ,$$

$$S_{2p} < S < S_{2p-1} ,$$

deduz-se fàcilmente:

$$|S - S_n| < u_{n+1} ,$$

e fica assim provada a 2ª parte do teorema.

Exemplo: Consideremos a série:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

Como se vê, trata-se duma série alternada cujo termo geral tende para zero; a série é pois convergente. Porém, como a série dos módulos é a série harmónica (que sabemos ser divergente), podemos afirmar que a série considerada é simplesmente convergente.

Cálculo da soma duma série

Como se sabe, calcular um número real é determinar um valor aproximado desse número com êrro inferior a um número positivo arbitràriamente dado.

Assim, por exemplo, nós dispomos de meios que nos permitem calcular o valor de π com a aproximação que desejamos (está calculado com mais de 700 casas decimais).

Deste modo, calcular a soma duma série consistirá em determinar o valor duma soma parcial S_n que difira da soma S da série menos que um número positivo ε prèviamente dado; isto é, tal que:

$$|S - S_n| < \varepsilon .$$

Casos há em que se pode determinar a soma exacta da série por meio duma fórmula, como acontece com a série geométrica de razão inferior à unidade; mas estes casos são inteiramente excepcionais.

a) Consideremos em primeiro lugar uma série de termos alternadamente positivos e negativos. Vimos que, tomando para valor aproximado da soma da série a soma dos seus n primeiros termos, se comete um erro inferior ao módulo do primeiro termo desprezado, u_{n+1}. Portanto, para ter um valor aproximado com um erro inferior a ε basta procurar o primeiro termo u_{n+1}, tal que:

$$\left| u_{n+1} \right| < \varepsilon$$

e somar os termos precedentes.

Exemplo: Calcular a soma da série harmónica-alternada com erro inferior a 0,001.

Deve ser:

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < \frac{1}{1000} \quad \rightleftharpoons \quad n \geqslant 1000$$

Deveríamos portanto tomar 1000 termos. (Esta série converge muito lentamente).

Diz-se que uma série converge mais ràpidamente que outra quando, para calcular a soma de ambas com erro inferior a um número dado, se tem de tomar menos termos na primeira do que na segunda.

Exemplo: Demonstra-se que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Para calcular o valor de $\pi/4$ com erro inferior a 10^{-3} teríamos:

$$\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{1000} \quad \rightarrow \quad n > 500$$

Esta série converge mais ràpidamente do que a do exemplo anterior, mas tem ainda convergência muito lenta. Para calcular còmodamente o valor de π com a aproximação desejada, é necessário recorrer a séries de mais rápida convergência.

b) Suponhamos que a convergência da série Σu_n foi constatada pelo critério de D'Alembert; isto é,

que para além da ordem p se tem: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k < 1$. Já vimos que:

$$R_n < \frac{u_{n+1}}{1-k} \qquad \text{para} \quad n > p.$$

Como R_n é exactamente o êrro que se comete quando se toma s_n para soma da série, não temos mais do que determinar o primeiro valor de n para o qual R_n é menor que o número ε dado, isto é, o primeiro termo u_{n+1} tal que

$$u_{n+1} < (1-k).\varepsilon ,$$

condição esta que se verificará necessàriamente a partir de certa ordem, visto que $u_n \to 0$.

Observe-se que quanto mais próximo k estiver de 1, maior será o número de termos a tomar.

Pode ainda acontecer que a convergência da série se torne mais rápida ou mais lenta, à medida que n aumenta.

c) Se a convergência da série foi constatada pelo critério de Cauchy então:

$$R_n < \frac{k^{n+1}}{1-k} \quad , \quad \text{para} \quad n > p \ ,$$

e basta escolher n de modo que seja $R_n < \varepsilon$.

d) Se se tratar duma série absolutamente convergente, representando por R_n o resto de ordem n da série e por $\bar{R}_n$ o resto de ordem n da série dos módulos temos:

$$|R_n| \leqslant \bar{R}_n \ .$$

Por conseguinte, o cálculo da soma duma série absolutamente convergente pode sempre efectuar-se recorrendo à série dos módulos.

Séries de potências

A noção de série de potências é uma generalização da noção de polinómio inteiro.

Recordemos que se chama polinómio em x a toda a expressão da forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

na qual $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números quaisquer e n é um

número inteiro não negativo. Se $a_n \neq 0$, diz-se que n é o grau do polinómio.

Pois bem, chama-se série de potências de x a toda a expressão do tipo:

$$(1) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Atribuindo a x um valor qualquer, esta expressão converte-se numa série de termos constantes que pode ser convergente ou divergente. O problema que nos interessa precisamente é o de averiguar quais os valores de x para os quais a série é convergente e portanto, quais os valores de x para os quais é divergente.

Para isso, é fundamental o seguinte:

Lema de Abel: a) Se a série (1) converge para um dado valor x_0 de x, converge absolutamente para todos os valores de x tais que: $|x| < |x_0|$; b) Se a série (1) diverge para $x = x_0$, diverge para todos os valores de x tais que: $|x| > |x_0|$."

Com efeito, suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$ é convergente; então, o seu termo geral $a_nx_0^n$ tende para zero e portanto (como todo o infinitésimo) é uma variável limitada, isto é, existirá um número k tal que:

$$|a_nx_0^n| < k, \quad \text{qualquer que seja n.}$$

Por outro lado:

$$|a_nx^n| = |a_nx_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

e portanto

$$|a_nx^n| < k \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad \text{qualquer que seja n,}$$

o que mostra ser a série $\Sigma |a_nx^n|$ minorante da série $\Sigma k \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. Ora esta última é convergente para todo o valor de x tal que $|x| < |x_0|$ (por ser uma série geométrica de razão menor que a unidade); logo também $\Sigma |a_nx^n|$ é convergente, e portanto Σa_nx^n absolutamente convergente, para todo o valor de x tal que $|x| < |x_0|$.

Fica pois provada a 1ª parte do lema; para demonstrar b) basta aplicar a): suponhamos que a série é divergente para x_0 e que convergia para x com $|x|>|x_0|$; ora sendo convergente para x, a série deveria, segundo a), ser também convergente para x_0 (visto ser $|x_0|<|x|$), o que é contra a hipótese.

Posto isto, chamaremos raio de convergência da série $\Sigma a_n x^n$ ao extremo superior, finito ou infinito, dos módulos dos valores de x para os quais a série é convergente (existe pelo menos um valor de x que torna a série convergente: o valor 0).

Teorema: "Se fôr R o raio de convergência da série $\Sigma a_n x^n$, esta será absolutamente convergente para todo o valor de x tal que $|x|<R$, e divergente para todo o x tal que $|x|>R$."

Com efeito seja x_1 um valor de x tal que $|x_1|<R$; atendendo à definição de raio de convergência, há pelo menos um valor de x (seja x_0) onde a série é convergente e tal que:

$$|x_1|<|x_0|\leq R$$

(de contrário não seria R o extremo superior dos módulos dos valores de x que tornam a série convergente), então, pelo lema de Abel, como a série converge para $x=x_0$, será absolutamente convergente para $x=x_1$.

Anàlogamente se provava que a série é divergente para $|x|>R$.

No caso de $|x|=R$ nada se pode concluir, a priori, teremos de fazer o estudo directo da série numérica que se obtem da série de potências fazendo $x=R$ ou $x=-R$.

Como $|x|<R \quad \rightleftarrows \quad -R<x<R$

a série é absolutamente convergente no intervalo $]-R,R[$, o qual se diz intervalo de convergência da série dada.

Em particular pode ser $R=0$ (a série converge só para $x=0$) ou ainda $R=\infty$ (a série converge para todos os valores reais de x); então, neste caso o intervalo de convergência é $]-\infty,+\infty[$.

Soma de séries de potências

Dadas as séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

chamaremos soma das duas séries à série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n .$$

Como vimos, se duas séries numéricas são convergentes, também a série soma o é; portanto a soma das duas séries de potências será convergente, pelo menos, para todos os valores de x para os quais convirjam as séries parcelas; isto é, o raio de convergência da série soma é, pelo menos, igual ao menor dos raios de convergência das séries parcelas, tendo-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

para todo o valor de x pertencente ao menor dos intervalos de convergência destas séries.

Produto de séries de potências

Anàlogamente a série produto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) x^n$$

será (pelo teorema de Mertens) convergente para todos os valores de x que tornem convergentes as séries factores (sendo pelo menos uma delas absolutamente convergente) e portanto o seu raio de convergência será, pelo menos igual ao menor dos raios de convergência das séries factores, tendo-se

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)$$

para todo o valor de x pertencente ao menor dos intervalos de convergência.

Determinação do raio de convergência duma série de potências:

Teorema: "Se uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é tal que $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ tende para um limite finito ou infinito, êsse limite é o raio de convergência da série".

Suponhamos que é $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = K$ e consideremos a série:

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \cdots + |a_n| \cdot |x|^n + \cdots$$

a qual para cada valor de x é uma série de termos positivos:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots ;$$

Apliquemos a esta série o critério de D'Alembert. Temos:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim \frac{|a_{n+1}|}{a_n}$$

$$= \frac{|x|}{K}$$

mesmo que K seja nulo ou seja infinito. Pelo critério de D'Alembert, podemos afirmar que a série Σu_n é convergente se $|x|/K < 1$ e que a série Σu_n é divergente se $|x|/K > 1$; isto é:

a) Se $|x| < K$, a série $\Sigma a_n x^n$ é absolutamente convergente;

b) se $|x| > K$, a série $\Sigma a_n x^n$ é divergente.

Ora isto significa precisamente que é K o raio de convergência, q. e. d.

Exemplos: Seja a série

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots ;$$

temos:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

e $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim (n+1) = +\infty$

O raio de convergência é $+\infty$ e portanto o intervalo de convergência é $]-\infty, +\infty[$.

Na série

$$1 + x + 2!x^2 + \cdots + n!x^n + \cdots$$

é:

$$R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

e portanto o raio de convergência é nulo, isto é, a série só converge para $x=0$.

Seja ainda a série

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n+1} + \cdots$$

Tem-se

$$R = \lim \frac{n+2}{n+1} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Para $x=1$, a série diverge (série harmónica); para $x=-1$, a série é simplesmente convergente (série harmonica-alternada).

Dum modo geral, podemos dizer que a convergência da série $\sum a_n x^n$ é tanto mais lenta, quanto mais próximo x estiver dum extremo do intervalo de convergência.

O teorema anterior pode ainda ser útil para séries de potências do tipo

$$a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{2n} + \cdots$$

(em que são nulos os coeficientes dos termos de grau impar), ou do tipo

$$a_0x + a_1x^3 + a_2x^5 + \cdots + a_nx^{2n+1} + \cdots$$

(em que são nulos os coeficientes dos termos de grau par).

Se na primeira fizermos $x^2 = y$ vem:

$$a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_ny^n + \cdots$$

e se fôr: $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$

esta série converge com $|y|<R$ e diverge com $|y|>R$; portanto a série dada será convergente para $|x|^2<R$ e diverge para $|x|^2>R$; será pois $\sqrt{R}$ o seu raio de convergência.

As séries do segundo tipo indicado podem tratar-se de maneira análoga, pondo prèviamente x em evidência.

Baseados no critério de Cauchy e de maneira análoga à que seguimos para o teorema anterior podíamos demonstrar:

Teorema: "Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é tal que $\left|\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\right|$ tem limite finito ou infinito, êsse limite é o raio de convergência da série".

Destes dois teoremas resulta imediatamente o seguinte:

Corolário: "Dada uma sucessão u_n qualquer, se existem os limites de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ e de $\sqrt[n]{u_n}$, êsses limites são iguais".

Funções reais de variável real

Consideremos duas variáveis reais x, y isto é duas variáveis cujos valores possíveis são números reais; diz-se que y é função de x quando estas variáveis estão relacionadas de tal modo que a cada valor de x pertencente a um dado conjunto C, corresponde um ou mais valores de y; diremos que a função é definida no conjunto C o qual toma o nome de domínio ou campo de existência da função (supondo que não existem fora de C valores de x a que corresponda qualquer valor de y.

À variável x chama-se neste caso variável independente e à variável y dá-se o nome de variável dependente (função de x).

Se a cada $x \in C$, corresponde um só valor de y, a função diz-se uniforme ou unívoca; caso contrário a função diz-se pluriforme ou plurívoca.

Exemplos: a variável $y = 3x^2 - 1$ é uma função unívoca de x que tem por domínio $]-\infty, +\infty[$, isto é,

o conjunto de todos os números reais; mas já a variável $y = \sqrt{1 - x^2}$ é uma função plurívoca de x, definida só no intervalo $[-1, +1]$ (em cada ponto interior deste intervalo toma dois valores simétricos).

Quando nada se diga em contrário, referir-nos-emos apenas a funções unívocas.

Uma função de x representa-se abreviadamente por símbolos tais como:

$$f(x) \ , \ g(x) \ , \ \varphi(x) \ , \ \psi(x) \ , \ \ldots$$

Se fôr a um ponto do domínio de existência de f(x), representa-se por f(a) o valor que a função toma neste ponto.

Diz-se que as funções f(x) e g(x) são idênticas ou, que são a mesma função, quando:

1º - têm o mesmo domínio de existência

2º - tomam o mesmo valor para cada valor de x;

verificadas estas duas condições escreve-se:

$f(x) \equiv g(x)$ ou simplesmente $f = g$.

Em certos casos o valor de y correspondente a cada valor de x dado, pode ser obtido mediante operações elementares (1), sempre as mesmas a partir desse valor de x e de eventuais constantes numéricas sendo estas operações efectuadas um número finito de vezes ou então um número infinito de vezes com passagem ao limite. Quando isto é possível, a função diz-se representável analìticamente, e chama-se expressão analítica da função à fórmula em que tais operações são indicadas.

Quando as operações elementares exigidas são em número finito, a expressão analítica diz-se algébrica; quando são em número infinito com passagem ao limite, a expressão analítica diz-se transcendente. Por exemplo, uma série de potências, tal como

(1) - Chamaremos operações elementares à adição, subtracção, multiplicação, divisão e extracção de raiz.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}$$

é uma expressão transcendente.

Uma expressão algébrica diz-se <u>racional</u> quando não comporta extracção de raizes a partir da variável independente; caso contrário diz-se <u>irracional</u>.

Por sua vez uma expressão racional diz-se <u>inteira</u> quando não exige divisões, e <u>fraccionária</u> no caso contrário.

Temos então:

Expressões analíticas { Algébricas { Racionais { Inteiras, Fraccionárias; Irracionais; Transcendentes

<u>Exemplos</u>: 1) A expressão $(x^2-1)^3 - \frac{3}{2}x$ é racional inteira; 2) a expressão $(2x-1)^{-3} + 5x^2$ é racional fraccionária; 3) a expressão $1 - \sqrt[3]{1-x^2}$ é algébrica irracional; 4) a expressão $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ é transcendente.

Duas expressões analíticas em x dizem-se equivalentes quando tomam o mesmo valor para todo o valor de x.

Duas expressões analíticas podem ser diferentes e contudo equivalentes, representando assim a <u>mesma função</u>. Por exemplo: $(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$

Uma <u>função</u> diz-se <u>racional</u> quando fôr representável por uma expressão racional.

Uma <u>função racional</u> diz-se <u>inteira</u> quando fôr representável por uma expressão analítica inteira e diz-se <u>fraccionária</u> no caso oposto.

No entanto pode acontecer que uma função inteira apareça representada por uma expressão fraccionária, ou que uma função racional apareça representada por uma expressão analítica transcendente (pelo menos numa parte do seu domínio de existência), como por exemplo a função

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \text{, para } -1<x<1.$$

Pode ainda suceder que a função não seja definida mediante uma expressão analítica, como acontece com a função de Dirichlet:

$$D(x) \begin{cases} = 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \\ = 0 & \text{se } x \text{ é racional ;} \end{cases}$$

por exemplo $D(1/2) = 0$ e $D(\sqrt{2}) = 1$ (seja dito, a título de curiosidade, que esta função é representável por uma expressão analítica transcendente, embora complicada).

Pode também suceder que uma função seja representada por várias expressões analíticas conforme os valores da variável independente. Por exemplo:

$$y \begin{cases} = 3x^2 - 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ = x & \text{se } x > 3 ; \end{cases}$$

o domínio desta função é $]-\infty, +\infty[$; não está representada analìticamente porque não é definida por uma só expressão analítica (é contudo possível representá-la por uma única expressão analítica).

Consideremos agora a função representada pela expressão analítica

$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} ;$$

vemos que:

$|x| < 1 \rightarrow y = 1$ pois com $|x| < 1$ $\lim_{n \to \infty} x^{2n} = 0$

$|x| > 1 \rightarrow y = -1$ pois a função pode escrever-se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{x^{2n}} - 1}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = -1$$

$|x| = 1 \rightarrow y = 0$ porque, quer seja $x = 1$, quer $x = -1$ o numerador da fracção vem nulo e o denominador $\neq 0$.

Então a função pode ser definida mais simplesmente do modo seguinte:

$$y \begin{cases} = 1 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ = 0 & \text{se} \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1 \\ = -1 & \text{se} \quad x > 1 \quad \text{ou} \quad x < -1 ; \end{cases}$$

mas agora já não está representada analìticamente.

Consideremos ainda outro exemplo; a função representada por:

$$y = x -]x[$$

em que designamos por $]x[$ a parte inteira de x (isto é, o maior inteiro contido em x), não está representada por uma expressão analítica, mas pode representar-se por várias expressões analíticas consoante os intervalos; assim:

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant x < 1 & y = x \\ 1 \leqslant x < 2 & y = x - 1 \\ 2 \leqslant x < 3 & y = x - 2 \\ \cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

(também esta função pode ser representada por uma só expressão analítica).

Note-se que há funções muito complicadas para as quais se demonstra não haver expressão analítica que as represente, mas é preciso salientar que estas funções nada têm que ver com as chamadas <u>funções empíricas</u>. Diz-se que y é uma função empírica de x, quando os valores destas variáveis são obtidos experimentalmente, por meio de <u>medições</u> (por exemplo a pressão atmosférica como função do tempo); não se trata neste caso duma função matemática no sentido rigoroso, visto que os valores das variáveis só podem ser determinados <u>aproximadamente</u>; mas então será <u>sempre</u> possível obter para uma tal função uma expressão analítica que a represente <u>aproximadamente</u> (a partir duma tabela).

<u>Funções racionais inteiras</u>

Como se sabe, chama-se polinómio em x a toda a expressão da forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad \text{ou} \quad \sum_{p=0}^{n} a_p x^p,$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ designam <u>números quaisquer</u> e <u>n</u> um <u>número inteiro não negativo</u>. É claro que uma tal expressão pode considerar-se como uma série de potências cujos termos são nulos a partir de certa ordem.

Se $a_n \neq 0$, diz-se que n é o grau do polinómio.

Dados os polinómios:

$$A(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{p=o}^{n} a_p x^p$$

$$B(x) = b_o + b_1 x + \cdots + b_m x^m = \sum_{p=o}^{m} b_p x^p$$

podemos definir polinómio soma e polinómio produto dos primeiros, tal como se fez para as séries de potências (de que são um caso particular). Supondo $n \geq m$, e convencionando escrever $a_p=0$, quando $p>n$ e $b_p=0$, quando $p>m$, o polinómio soma será:

$$(a_o+b_o) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n) x^n = \sum_{p=o}^{n} (a_p+b_p) x^p$$

e o polinómio produto :

$$\sum_{p=o}^{m+n} c_p x^p \quad , \quad \text{com} \quad c_p = a_o b_p + a_1 b_{p-1} + \cdots + a_p b_o$$

É claro que, em virtude das conhecidas propriedades da adição e da multiplicação, será :

$$\sum_{p=o}^{n} (a_p+b_p) x^p \equiv \sum_{p=o}^{n} a_p x^p + \sum_{p=o}^{m} b_p x^p$$

$$\sum_{p=o}^{m+n} c_p x^p \equiv \left(\sum_{p=o}^{n} a_p x^p \right) \cdot \left(\sum_{p=o}^{m} b_p x^p \right) \quad ,$$

isto é, os primeiros membros tomam o mesmo valor que os segundos membros qualquer que seja o valor atribuido a x.

Atendendo a êstes factos e ainda a que: 1) as constantes são polinómios de grau zero; 2) a variável x é um polinómio do 1º grau em x, podemos concluir que:

"Toda a expressão racional inteira em x é equivalente a um polinómio em x".

Podemos pois definir "função racional inteira" deste outro módo: é toda a função representável por meio dum polinómio.

Divisão por x-a - Recordemos que, dados dois polinó-

mios A, B é sempre possível determinar dois outros polinómios Q, R tais que:

$$A = B\,Q + R\ ,$$

sendo o grau de R <u>inferior</u> ao grau de Q; diz-se então que Q é o <u>cociente</u> e R o <u>resto</u> da divisão inteira de A por B.

No caso particular da divisão dum polinómio p(x) de grau n por x-a (sendo a uma constante), ter-se-á :

$$(1) \qquad p(x) = (x-a)\,p_1(x) + r(x),$$

sendo $p_1(x)$ um polinómio de grau n-1 e r(x) um polinómio de grau zero, isto é, uma constante c, cujo valor se determina fazendo em (1) x=a:

$$p(a) = r(a) = c\ ;$$

quere dizer: o resto da divisão de p(x) por x-a é exactamente o valor que p(x) toma para x=a. Daqui resulta imediatamente que:

"Condição necessária e suficiente para que um polinómio p(x) seja divisível por x-a é que se tenha p(a)=0".

Posto isto podemos passar ao seguinte:

<u>Teorema</u>: "Um polinómio em x de grau <u>n</u> não se pode anular para mais de <u>n</u> valores de x."

Com efeito, seja p(x) um polinómio de grau n e suponhamos que p(x) se anula para :

$$x=a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n\ ,\ a_{n+1}\ ,$$

sendo êstes valores todos distintos. Então p(x) é divisível por $x-a_1$:

$$p(x) = (x-a_1)\,p_1(x) \quad (\text{sendo } p_1(x) \text{ de grau } n-1)\ ;$$

mas tem-se $p(a_2) = 0$ e como $a_2-a_1 \neq 0$, será necessàriamente $p_1(a_2)=0$, o que significa que também $p_1(x)$ é divisível por $x-a_2$:

$$p_1(x) = (x-a_2)\,p_2(x) \quad (\text{sendo } p_2(x) \text{ de grau } n-2);$$

e assim sucessivamente :

$$p_2(x) = (x-a_3)\,p_3(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{n-1}(x) = (x-a_n)\,p_n(x)$$

sendo $p_n(x)$ de grau zero, portanto uma constantec; virá então, por substituições sucessivas:

$$p(x) = c\,(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_n)$$

e como o produto dos polinómios do 2º membro deve dar precisamente p(x), segundo a regra anteriormente recordada, deverá ser c o coeficiente de x^n em p(x), portanto diferente de zero, visto que, por hipótese, n é o grau de p(x). Mas nós suposemos que p(x) ainda se anula para $x = a_{n+1}$; ora isto é manifestamente impossível, porque $c \neq 0$ e nenhum dos factores $x-a_1$, $x-a_2$, ... , $x-a_n$ se anula para $x=a_{n+1}$. Assim o teorema fica demonstrado.

··· Corolário - "Quando, a respeito dum polinómio $a_o+a_1x+ \ldots + a_nx^n$, de grau não superior a n, se sabe que toma o valor zero para mais de n valores de x, tem de concluir-se que todos os seus coeficientes são nulos, isto é : $a_o = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$."

Esta proposição é uma consequencia imediata da anterior.

Princípio das identidades: "Se dois polinómios de grau não superior a n:

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n ,$$

$$b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n ,$$

tomam o mesmo valor para mais de n valores distintos de x, os dois polinómios são idênticos, isto é, têm iguais os coeficientes dos termos semelhantes."

(Não é necessário supôr $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$)

Nas condições do enunciado ter-se-á:

$$a + a_1x + \ldots + a_nx^n = b_o + b_1x + \ldots + b_nx^n$$

isto é,

$$(a_o - b_o) + (a_1 - b_1)\,x + \ldots + (a_n - b_n)\,x^n = 0 ,$$

para mais de n valores distintos da variável o que, pelo teorema anterior, obriga a ser :

$$a_o - b_o = 0,\ \ a_1 - b_1 = 0\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ a_n - b_n = 0$$

ou:

$$a_o = b_o\ ,\ \ a_1 = b_1\ ,\ \ \ldots\ \ ,\ a_n = b_n .$$ q.e.d.

Já observámos que duas expressões podem ser equivalentes sendo distintas, por exemplo:

$$x + \frac{1}{x} \equiv \frac{x^2 + 1}{x}$$

mas quando se trata de polinómios inteiros as coisas passam-se diversamente. O princípio das identidades habilita-nos a afirmar que :

"Dois polinómios só podem ser equivalentes quando são idênticos." Portanto :

"Para cada função racional inteira há sempre um e um só polinómio que a representa." Ao grau dêsse polinómio chamar-se-á grau da função inteira.

Funções racionais

Chama-se fracção algébrica toda a expressão da forma $\frac{A(x)}{B(x)}$, sendo A(x), B(x) polinómios em x não identicamente nulos (isto é de coeficientes não todos nulos).

Fàcilmente se reconhece que :

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} \equiv \frac{A(x)\ D(x) \pm B(x)\ C(x)}{B(x)\ D(x)},$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} \equiv \frac{A(x)\ .\ C(x)}{B(x)\ .\ D(x)}$$

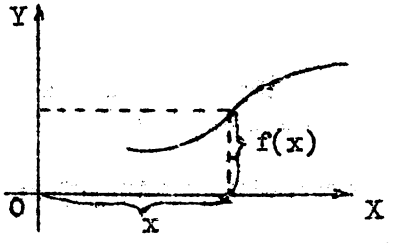
$$\frac{A(x)}{B(x)} : \frac{C(x)}{D(x)} \equiv \frac{A(x)\ .\ D(x)}{B(x)\ .\ C(x)},$$

donde resulta que toda a função racional se pode representar mediante uma fracção algébrica .

O domínio de existência duma função inteira é $]-\infty\ ;\ +\infty[$. O domínio de existência duma função fraccionária é ainda $]-\infty\ ;\ +\infty[$ com exclusão dos pontos onde se anula o denominador. Assim, por exemplo,

$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$	é definida para todos os valores reais de x com exclusão de x=1 e x=-1,
$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	é definida para todos os valores reais de x .

Representação gráfica: Considere-se uma função y=f(x) e seja C o seu domínio de existência; tomemos um referencial cartesiano OXY e consideremos o ponto do plano cuja abscissa é x e cuja ordenada é f(x).

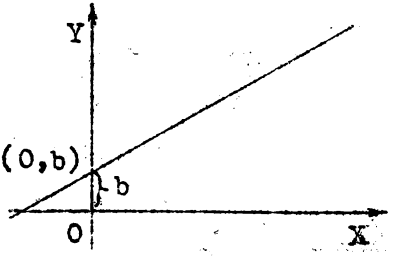


O conjunto dos pontos assim obtidos quando x toma todos os valores possíveis em C é chamado o gráfico, diagrama, ou imagem geométrica da função.

Vejamos alguns exemplos.

1º - Função racional inteira do 1º grau : $y = ax + b$

Já sabemos do estudo da Geometria Analítica que a função $y = ax + b$ tem por imagem uma recta (b é a ordenada na origem, a o coeficiente angular da recta).

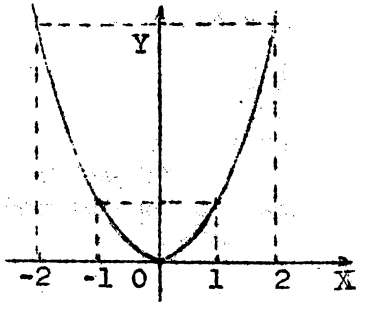


Como uma recta fica sempre definida por dois quaisquer dos seus pontos, basta determinar dois pontos da recta considerada e uni-los.

Em particular se b = 0, a recta passa pela origem dos eixos; se a = 0, a função é constante e o seu gráfico é uma recta paralela a OX.

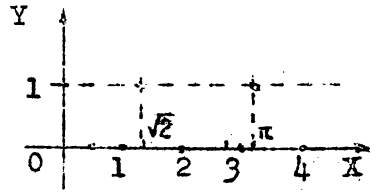
2º - Função racional inteira do 2º grau : $y = ax^2 + bx + c$

Já foi estudada no curso liceal e viu-se que a sua imagem geométrica é uma parábola de eixo paralelo ao eixo OY. O caso indicado na figura é o caso mais simples correspondente à função $y = x^2$.



Mas nem sempre o gráfico duma função é aquilo a que se costuma chamar uma "linha". Por exemplo consideremos a função D(x) (função de Dirichlet) que para x racional é nula e para x irracional é igual a um. Então, sôbre o eixo OX há infinitos pontos do gráfico tão próximos quanto se quizer (correspon-

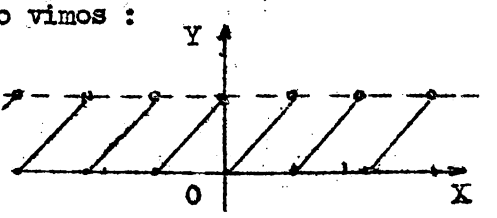
dentes a x .racional) e como entre dois números racionais há sempre uma infinidade de números irracionais, também existem infinitos pontos, do gráfico, tão próximos quanto se quizer, sôbre uma recta paralèla a OX e à distância um de OX.



Em conclusão: o gráfico da função não corresponde de modo nenhum à ideia intuitiva que temos de linha; podemos concebê-lo, não podemos desenhá-lo.

Outro exemplo: Seja a função representada por $y = x - I(x)$; tem-se, como vimos :

$$y = \begin{cases} \cdots\cdots\cdots \\ x \qquad 0 \leqslant x < 1 \\ x-1 \qquad 1 \leqslant x < 2 \\ x-2 \qquad 2 \leqslant x < 3 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$



Em qualquer intervalo $[n, n+1[$ a função tem no extremo esquerdo o valor zero e à direita valores tão próximos de 1 quanto quizermos, sem, contudo, atingir êsse valor.

Ainda um outro exemplo: consideremos a função definida por :

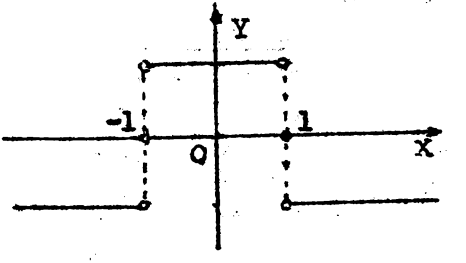
$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} .$$

É:

$y=1$ para $-1 < x < 1$

$y=0$ para $x=1$ ou $x=-1$

$y=-1$ para $x>1$ ou $x<-1$



então a função terá a imagem geométrica apresentada na figura, indicando-se que a função nos pontos x=1 e x=-1 toma o valor 0, por meio de dois pequenos círculos negros colocados sôbre o eixo dos xx.

Funções de mais de uma variável ...

Consideremos n+1 variáveis reais $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ e um conjunto C de pontos do espaço euclidiano a n di-

mensões (espaço que representaremos por R^n); C é pois um conjunto de sistemas de n números reais. Diremos que a variável y é função das variáveis $x_1, \ldots, x_n$, no conjunto C, quando estas variáveis estiverem relacionadas entre si de tal modo que a cada sistema de valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$ corresponda um ou mais valores de y.

Se a cada um desses sistemas corresponder um e um só valor de y, a função diz-se unívoca; caso contrário a função diz-se plurívoca. O conjunto C diz-se domínio de existência da função y .

Exemplo : Seja $z = \sqrt{x - y}$; vemos fàcilmente que, sendo z uma variável real, esta função só está definida para os sistemas (x,y) tais que $x-y \geqslant 0$; então o domínio de existência C é constituido por todos os pares (x,y) tais que $x \geqslant y$.

O que dissémos a respeito de expressões analíticas das funções de uma variável aplica-se mutatis mutandis ao caso das funções de mais de uma variável.

Chama-se monómio nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a toda a expressão do tipo:

$$A\, x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$$

sendo A um número real qualqquer e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números inteiros não negativos; à soma $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ dá-se o nome de grau do monómio .

Polinómio em $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é toda a expressão formada por um ou vários monómios em $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ligados por sinais de + ou de - . Cada um dêsses monómios é chamado termo do polinómio. Grau dum polinómio é o maior dos graus dos seus termos.

Demonstra-se que toda a função racional inteira em $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se pode representar por um polinómio inteiro em $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Chama-se equação algébrica de grau n em $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a toda a equação equivalente a uma equação da forma:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

sendo $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinómio de grau n em $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Assim, por exemplo:

$$3xy - x + 2 = 0 \quad ,$$

é uma equação algébrica do 2º grau em x, y .

Analogamente ao que se viu para as funções de uma variável também se demonstra que toda a função racional fraccionária é representável por uma fracção algébrica, (cociente de dois polinómios).

Uma função racional inteira é, manifestamente, definida para todos os sistemas de valores possíveis das suas variáveis: o seu domínio de existência é pois R^n.

Uma função racional fraccionária é definida só para aqueles valores das variáveis que não anulam o denominador; assim, por exemplo, a função $\frac{3x}{x-y}$ é definida para todos os valores de x e de y tais que $x \neq y$, e só para êsses.

Função implícita : Consideremos a equação $f(x,y) = 0$ sendo $f(x,y)$ uma função de x, y, e suponhamos que para todo o valor de x pertencente a um certo conjunto C, a equação em y assim obtida admite uma ou mais soluções; assim, a cada $x \in C$, corresponderá um ou mais valores de y; se isto acontecer diremos que a equação $f(x,y) = 0$ define y como função implícita de x em C.

Pode suceder que para a função $y = \varphi(x)$ assim definida, se encontre uma expressão analítica; diremos então que explicitámos a função. Por exemplo, de :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

vem $y = \sqrt{1 - x^2}$ em $[-1,+1]$ e a cada valor de x dêste intervalo correspondem dois valores simétricos de y, com excepção dos extremos do intervalo onde y se anula.

Diz-se que y é uma função algébrica de x quando se pode definir implicitamente por meio duma equação algébrica:

$$p(x,y) = 0 \ ;$$

se no polinómio $p(x,y)$ considerarmos x como constante e ordenarmos segundo as potências crescentes de y obtemos:

$$p(x,y) \equiv p_0(x) + p_1(x).y + p_2(x)\, y^2 + \ldots + p_n(x)\, y^n$$

isto é: obtemos um polinómio em y cujos coeficientes são polinómios em x .

No caso mais simples, n=1, vem :

$$p_o(x) + p_1(x) \cdot y = 0$$

donde: $y = - \dfrac{p_o(x)}{p_1(x)}$ (função racional) .

Para n=2 temos:

$$p_o(x) + p_1(x)\, y + p_2(x)\, y^2 = 0$$

donde:

$$y = \frac{- p_1(x) \pm \sqrt{[p_1(x)]^2 - 4\, p_o(x)\, p_2(x)}}{2\, p_2(x)}$$

que é uma expressão algébrica irracional.

Para n=3 ou n=4, ainda existem fórmulas algébricas que permitem resolver a equação e portanto explicitar a função; por conseguinte ainda nestes casos se obtêm expressões algébricas representativas da função. Mas, em geral, para n>4, demonstra-se que não existem tais fórmulas; por outras palavras: Nem todas as funções algébricas se podem explicitar mediante expressões algébricas.

Notemos que a recíproca não é verdadeira, pois toda a função representada por uma expressão algébrica é uma função algébrica. Assim, por exemplo, a igualdade :

$$y = \sqrt[3]{x - \sqrt{\frac{1}{x + \sqrt{x}}}}$$

pode escrever-se sob a forma de equação algébrica inteira; elevando ambos os membros ao cubo e isolando a raiz que fica temos:

$$y^3 - x = - \sqrt{\frac{1}{x + \sqrt{x}}}$$

elevando agora ao quadrado vem:

$$y^6 + x^2 - 2\, y^3\, x = \frac{1}{x + \sqrt{x}} = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$$

desembaraçando de denominadores, isolando o termo em $\sqrt{x}$ e simplificando obtinhamos finalmente uma equação algébrica

em x, y que define implicitamente y como função de x.

Como acabamos de ver a classificação das funções não corresponde exactamente à classificação das expressões analíticas.

Para as funções temos ainda:

$$\text{Funções} \begin{cases} \text{Algébricas} \begin{cases} \text{Racionais} \begin{cases} \text{Inteiras} \\ \text{Fraccionárias} \end{cases} \\ \text{Irracionais} \end{cases} \\ \text{Transcendentes} \end{cases}$$

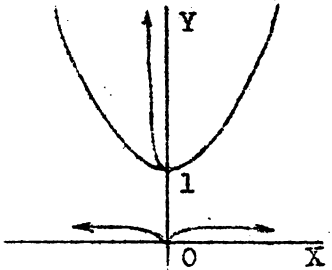
mas é preciso não perder de vista que êste quadro não corresponde exactamente ao quadro análogo que demos para as expressões analíticas, porque grande parte das funções algébricas (irracionais) não é explicitável mediante expressões algébricas, mas apenas mediante expressões transcendentes (desenvolvimentos em série, etc.).

Contradomínio: Consideremos uma funções $y=f(x)$, designemos por C o seu domínio de existência e consideremos um conjunto A qualquer contido em C; chama-se transformado de A por meio de f, e representa-se por f(A), ao conjunto de todos os valores que a função toma no conjunto A isto é, ao conjunto dos valores de y tais que :

$$y = f(x) \quad , \quad x \in A \quad .$$

Diremos que a função f define uma transformação do conjunto A sôbre o conjunto f(A). Chama-se contradomínio da função f ao transformado do conjunto C por meio de f, isto é, ao conjunto de todos os valores que f(x) pode tomar.

Exemplos: O domínio da função $y = x^2 + 1$ é $]-\infty,+\infty[$ e o seu contradomínio é $[1,+\infty[$, visto que a função pode tomar qualquer valor $\geqslant 1$, mas nenhum < 1.



A imagem geométrica da função é uma parabóla de êixo OY e vértice no ponto (0,1) .

Consideremos agora o intervalo $[-2,1]$; o transformado dêste conjunto por meio da função x^2+1 é o intervalo $[1,5]$.

No caso da função $y = x - I(x)$ o domínio é $]-\infty, +\infty[$

e o contradomínio é $[0,1[$, visto que a função toma todos os valores y tais que $0 \leqslant y < 1$, mas nenhum valor tal que $y \geqslant 1$ ou $y < 0$.

Extremos - Chama-se extremo superior da função f(x) no conjunto A ao extremo superior do conjunto f(A), isto é, ao extremo superior de todos os valôres que f(x) toma em A. Representá-lo-emos por $\sup_{x \in A} f(x)$. Será pois, por definição :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

Anàlogamente para o extremo inferior :

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$$

Quer um extremo, quer o outro podem pertencer ou não ao conjunto f(A).

Se o extremo superior pertence ao conjunto f(A), isto é, se há, pelo menos um valor da função igual ao seu extremo superior em A, diz-se que êste é um máximo da função em A e representa-se por :

$$\max_{x \in A} f(x) \quad .$$

Anàlogamente se define mínimo de f(x) em A:

$$\min_{x \in A} f(x) \quad .$$

Por exemplo, para a função $y = x^2+1$, tem-se :

$$\inf_{-\infty<x<+\infty} (x^2+1) = 1 \qquad \sup_{-\infty<x<+\infty} (x^2+1) = +\infty$$

o extremo 1 é um mínimo porque é atingido em x=0, mas $+\infty$ não é um máximo porque não há nenhum ponto em que a função tome êste valor.

Para a mesma função, no intervalo $[-2,1]$ tem-se:

$$\sup_{-2 \leqslant x \leqslant 1} (x^2+1) = \max_{-2 \leqslant x \leqslant 1} (x^2+1) = 5$$

e

$$\inf_{-2 \leqslant x \leqslant 1} (x^2+1) = \min_{-2 \leqslant x \leqslant 1} (x^2+1) = 1$$

Para a função x - I(x) :

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} [x - I(x)] = 1 \qquad \inf_{-\infty<x<+\infty} [x - I(x)] = 0$$

o extremo inferior é um mínimo porque é atingido em todos os pontos de abscissa inteira mas o extremo superior não é um máximo pois nunca é atingido .

Chama-se oscilação de f(x) em A à diferença entre o extremo superior e o extremo inferior de f(x) em A.

A função f(x) diz-se limitada superiormente [inferiormente] no conjunto A, quando o conjunto f(A) é limitado superiormente [inferiormente].

Então, dizer que o extremo superior de f(x) em A é $+\infty$ equivale a dizer que f(x) não é limitada superiormente em A; dizer que o extremo inferior de f(x) em A é $-\infty$ equivale a dizer que f(x) não é limitada inferiormente em A.

A função f(x) diz-se limitada em A, quando é limitada superiormente e inferiormente em A ou (o que vem a dar no mesmo) quando a função $|f(x)|$ é limitada superiormente em A .

Crescimento - Diz-se que f(x) é crescente em A quando, sendo x_1, x_2 pontos de A, se tem :

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{sempre que} \quad x_1 < x_2 .$$

Diz-se que f(x) é decrescente em A quando, sendo x_1, x_2 pontos de A se tem :

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{sempre que} \quad x_1 < x_2 .$$

A função diz-se monótona em A quando fôr ou crescente ou decrescente em A .

Diz-se que f(x) é crescente em sentido lato em A quando se tem nêste conjunto:

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \qquad \text{se} \quad x_1 < x_2$$

e que é decrescente em sentido lato em A quando se tem no mesmo conjunto:

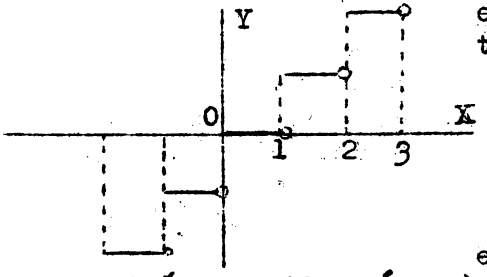
$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \qquad \text{se} \quad x_1 < x_2 .$$

Se a função fôr constante em A é simultâneamente crescente e decrescente em sentido lato em A.

A função diz-se monótona em sentido lato em A quando

fôr ou crescente ou decrescente em sentido lato em A .

Por exemplo a função I(x) é crescente em sentido lato em todo o seu domínio de existência. Temos:



$$I(x)\begin{cases} \cdots\cdots\cdots \\ =0 & 0 \le x < 1 \\ =1 & 1 \le x < 2 \\ =2 & 2 \le x < 3 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

e portanto a função não é crescente (em sentido próprio), mas apenas crescente em sentido lato.

Outro exemplo: a função $y = x^2+1$ não é monotona em todo o domínio de existência, pois é decrescente em $]-\infty,0]$ e crescente em $[0,+\infty[$. A função $x - I(x)$ é crescente em cada intervalo $[n, n+1[$ com n inteiro, positivo ou negativo, mas não é monótona no seu inteiro domínio, de existência.

Uma função f(x) diz-se <u>univalente</u> num conjunto A quando se tem nêste conjunto:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{sempre que} \quad x_1 \neq x_2 .$$

Por exemplo $y = x^2+1$, não é univalente em todo o seu domínio de existência porque, para valores de x simétricos, a função toma o mesmo valor. Mas é evidente que:

"Toda a função monótona é univalente".

<u>Função inversa</u> : Suponhamos que a função f(x) é não só unívoca, mas também univalente em A e representemos por A^* o transformado de A, isto é :

$$A^* = f(A) ;$$

neste caso, a cada $y \in A^*$ <u>corresponde um e um só valor de</u> $x \in A$, tal que $y = f(x)$; fica assim definida no conjunto A^* uma função unívoca $x = \theta(y)$ que se chama <u>função inversa</u> da primeira. Diz-se ainda nêste caso que a função f define uma <u>transformação biunívoca</u> de A sobre A^* .

Por exemplo, a função $y = x^2 + 1$ é crescente e univalente no intervalo $[0,+\infty[$; então podemos invertê-la, obtendo a função inversa:

$$x = + \sqrt{1-y^2} .$$

cujo domínio de existência é $[1, +\infty[$.

Também a podíamos inverter no intervalo $]-\infty, 0]$ e teríamos:

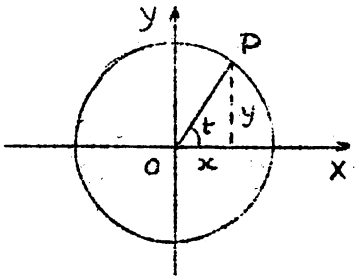
$$x = -\sqrt{1-y^2} \quad .$$

cujo domínio de existência é ainda $[1, +\infty[$.

Funções trigonométricas -

Recordemos a definição geométrica das chamadas "funções trigonométricas" ou "circulares".

Consideremos um sistema de eixos coordenados rectangulares, uma circunferência de centro na origem e raio unidade e um ponto P sôbre a circunferência. Então se designarmos por t o ângulo que OP faz com o semi-eixo positivo OX, tem-se por definição :



$$y = \operatorname{sen} t \ .$$

$$x = \cos t \ .$$

Além destas duas definições há ainda as seguintes:

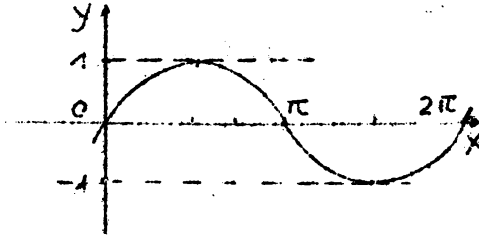
$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \operatorname{cotg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$$

Ocorre perguntar se as funções assim definidas (geomètricamente) são ou não susceptíveis de definição analítica. Veremos mais tarde que podem ser representadas mediante séries de potências.

Em tudo o que se segue, supomos sistemàticamente que as medidas dos ângulos são expressas em radianos.

Estudemos em primeiro lugar a função sen x.

Como já se sabe a imagem geométrica desta função é a chamada "sinusoide".



Trata-se duma função periódica de periodo 2π pois que:

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) \equiv \operatorname{sen} x \ .$$

O domínio de existência é $]-\infty, +\infty[$ e o contradomínio é $[-1,1]$; a função tem pois 1 como máximo e -1 como mínimo (ambos os extremos são atingidos, ambos fazem parte

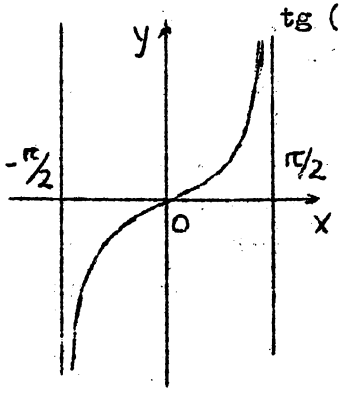
do contradomínio da função). Não se trata duma função monótona pois é crescente nos intervalos $\left]-\frac{\pi}{2}+2n\pi\,,\,\frac{\pi}{2}+2n\pi\right[$ com n inteiro e é decrescente nos intervalos $\left]\frac{\pi}{2}+2n\pi,\right.$ $\left.,\,\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right[$, com n inteiro .

Invertendo a função em $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ obtemos a função $x = \text{arc sen } y$.

Podíamos chegar a conclusões análogas para a função $y = \cos x$.

Para a função $y = \text{tg } x$ vemos que também é periódica mas de período π :

$$\text{tg}\,(x+\pi) \equiv \text{tg } x \quad .$$

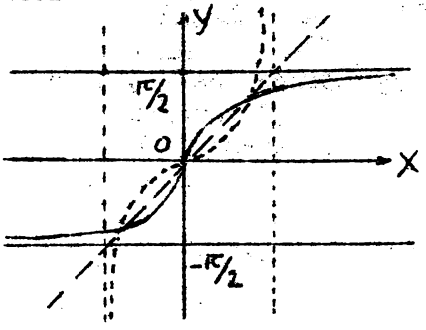


O domínio de existência é $]-\infty,+\infty[$ com excepção dos pontos $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; o contradomínio é $]-\infty,+\infty[$.

A função é crescente em qualquer intervalo $](2n-1)\pi/2\,,\,(2n+1)\pi/2[$ com n inteiro, podemos pois invertê-la em qualquer dêstes intervalos.

Portanto a função tg x define uma transformação biunívoca de $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ sôbre $]-\infty,+\infty[$.

Nota: A imagem geométrica da função inversa é simétrica em relação à bissectriz dos quadrantes impares, da imagem geométrica da função directa . Na figura está a ponteado a imagem de $y=\text{tg}x$ e a cheio a imagem de $y = \text{arc tg } x$.



Limites de funções

Já tratamos de limites de funções de variável natural; como vimos o termo geral u_n duma sucessão é uma função da variável n :

$$u_n = f(n) \quad .$$

Vamos agora introduzir o conceito de limite para funções de variável real. Por exemplo, consideremos a função:

$$y = \frac{x^2 + 1}{1 - x} \; ;$$

supondo que se atribui a x uma qualquer sucessão de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que tenha por limite zero:

$$\lim x_n = 0 \ldots \qquad \ldots$$

(por exemplo $x = 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ ou $x = 1, 1/\sqrt{2}, \ldots, 1/\sqrt{n}, \ldots$) a esta sucessão corresponderá necessàriamente uma sucessão : ...

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

de valores de y que tem por limite 1, pois que, segundo a álgebra dos limites, se tem :

$$\lim y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^2 + 1}{1 - x_n} = \frac{(\lim x_n)^2 + 1}{1 - \lim x_n} = \frac{1}{1} = 1 \; ;$$

<u>isto qualquer que seja a sucessão</u> $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ <u>que se considere, tendendo para zero.</u> Exprime-se êste facto abreviadamente dizendo que "a função y tende para 1 quando x tende para 0 , qualquer que seja o modo como x tende para zero" ou mais simplesmente ainda dizendo que "a função y tende para 1 quando x tende para zero". Escreve-se então, para indicar êste facto:

$$\lim_{x \to 0} y = 1$$

Em geral, teremos a seguinte :

<u>Definição</u>: Consideremos uma função $y = f(x)$ definida num dado conjunto C e sejam <u>a</u>, <u>b</u> duas constantes; diz-se que <u>y tende para b</u> (ou tem por <u>limite</u> b) <u>quando x tende para</u> a e escreve-se :

$$\lim_{x \to a} y = b,$$

quando a toda a sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de valores de x, distintos de a, que tenha por limite a, corresponde uma sucessão $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ de valores de y tendente para b.

Em simbolos:

$$\boxed{x_n \neq a,\ x_n \uparrow a \longrightarrow f(x_n) \uparrow b} \ ;$$

supõe-se é claro, que os valores $x_1, x_2, \ldots$ de x são todos tomados em C .

Não se exige nesta definição que a função f(x) seja definida no ponto a, isto é que $a \in C$, mas, para que a definição seja útil, deve supor-se, naturalmente, que existe pelo menos uma sucessão de pontos de C distintos de a, tendente para a (diz-se então que a é ponto limite ou ponto de acumulação de C).*

Na definição precedente sublinhámos a palavra "toda". Com efeito, basta que existe uma sucessão de valores de x, tendente para a (com $x \neq a$), à qual corresponda uma sucessão de valores de y não tendente para b, para que não seja lícito escrever:

$$\lim_{x \to a} y = b$$

Outra observação fundamental: na defenição anterior, as constantes a, b podem ser indiferentemente números reais ou qualquer dos símbolos $+\infty$, $-\infty$, ∞ .

Exemplos: Seja a função defenida por $y = \frac{x^2}{1-x}$.

Quando se faz tender x para 1, isto é, quando se atribue a x uma sucessão de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tendente para 1, a variável y tende para ∞, isto é, passa por uma sucessão de valores $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ tendente para infinito. Com efeito, se x_n tende para 1, o numerador da fracção $\frac{x_n^2}{1-x_n}$ tende para 1 enquanto o denominador tende para zero, e, portanto, segundo o estudo que fizémos sôbre limites de sucessões, a fracção tenderá para ∞.

* Alguns autores fazem distinção entre ponto de acumulação e ponto limite

Podemos então escrever:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{1-x} = \infty \ .$$

Mas não podemos dizer que o limite é $+\infty$ ou $-\infty$, porque, conforme se atribuem a x valores maiores que 1 ou menores que 1, assim a fracção resulta negativa ou positiva.

Mas já se pode escrever :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(1-x)^2} = +\infty$$

Anàlogamente se reconhece que :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 1} = -1$$

Quando existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, costuma representar-se êste limite por $f(\infty)$. Anàlogamente: $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $f(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, se êstes limites existirem.

Vejamos agora se existirá o limite da função sen x quando x tende para ∞; seja : $0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi, \ldots$ a sucessão dos valores de x tendente para ∞; corresponde-lhe a sucessão dos valores de sen x:

$$0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \downarrow 0 \ ;$$

mas à sucessão de valores de x:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \ldots, \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \ldots \uparrow \infty$$

já corresponde a sucessão de valores de sen x :

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \uparrow 1 \ ;$$

concluímos dêste modo que a função sen x não tem limite algum quando x tende para ∞ e portanto, é desprovida de sentido a expressão :

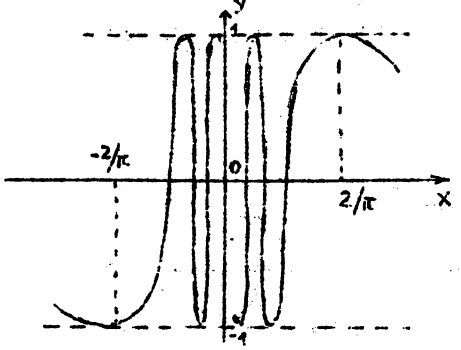
$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x \ .$$

É claro que também sen 1/x não tende para limite al-

gum quando $x \uparrow 0$, pois que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$; não existe portanto

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} .$$

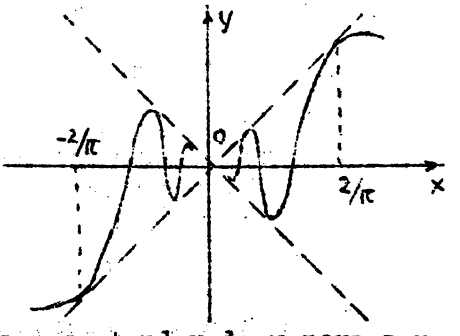
O gráfico da função $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é a curva esboçada na figura; quando $x \uparrow 0$, esta função vai oscilando infinitas vezes entre -1 e +1.



Consideremos agora a função:

$$y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{para } x \neq 0$$

e procuremos o seu limite quando x tende para zero (se existir); qualquer que seja a sucessão de valores de x tendente para zero, obtem-se uma sucessão de valores de y tendente para zero, pois que se trata do produto dum infinitésimo por uma variável limitada : $|\operatorname{sen} 1/x| \leq 1$.



Estudando o gráfico da função observa-se que em todo o intervalo contendo a origem, o gráfico é constituido por uma infinidade de arcadas as quais porém estão compreendidas entre as bissetrizes dos quadrantes de modo que ao tender de x para zero, o ponto que descreve a curva vai-se aproximando indefenidamente da origem: a oscilação de y vai tendendo para zero.

Consideremos finalmente a função de Dirichlet :

$$y = D(x) \begin{cases} = 0 & \text{para x racional} \\ = 1 & \text{para x irracional} \end{cases} .$$

e procuremos se existe limite quando x tende para zero.

Ao longo da sucessão : ...

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

(constituidas por números todos racionais), a função D(x)

mantem-se igual a zero e, portanto, tende para zero; mas ao longo da sucessão: ... ...

$$\sqrt{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \ldots\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{n}\ ,\ \ldots$$

(constituida por números todos irracionais), à função D(x) mantem-se igual a 1 e, portanto, tende para 1. Concluimos deste modo que não existe o limite de D(x) quando x tende para zero.

Anàlogamente se conclui que não existe o limite de D(x) em qualquer outro ponto.

Limites laterais : Pode acontecer que uma função f(x) não tenda para limite algum quando x tende para a (de qualquer modo), mas que, no entanto, a cada sucessão de valores de x, tendente para a, constituida por valores de x menores que a corresponda uma sucessão de valores da função tendente para b; diz-se então que b é o limite da função f(x) à esquerda do ponto a e escreve-se :

$$b = \lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad b = f(a^-)$$

Esta igualdade é pois equivalente à seguinte expressão simbólica :

$$\left.\begin{array}{l} x_n < a \\ x_n \uparrow a \end{array}\right\} \rightarrow f(x_n) \uparrow b \quad .$$

Também se pode dizer nêste caso que b é o "limite para que tende f(x) quando x tende para a, passando por valores menores que a."

Anàlogamente se é verificada a condição :

$$\left.\begin{array}{l} x_n > a \\ x_n \uparrow a \end{array}\right\} \rightarrow f(x_n) \uparrow b \ ,$$

diz-se que b é o limite da função f(x) à direita do ponto a e escreve-se :

$$b = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad b = f(a^+)$$

Subentende-se ainda que os valores x_1; x_2, ... de x são tomados no domínio de existência de f(x) .

Exemplo: Consideremos a função:

$$y \begin{cases} = 3x^2 - 1 & \text{para } x < 2 \\ = x + 3 & \text{para } x \geqslant 2; \end{cases}$$

cujo domínio de existência é $]-\infty, +\infty[$; é fácil de ver que se tem :

$$\lim_{x \to 2^-} y = 11 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2^+} y = 5$$

mas é claro que não existe o limite de y quando x tende para 2 .

Do estudo anteriormente feito, conclue-se que a função $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ não tem limite, nem à esquerda, nem à direita quando x tende para zero.

Para a função $y = x - I(x)$, que pode ser definida dêste outro modo:

$y = x - n$, para $n \leqslant x < n+1$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

tem-se :

$$\lim_{x \to 1^-} y = 1 \qquad \lim_{x \to 1^+} y = 0$$

e o mesmo quando x tende para qualquer valor inteiro, à esquerda, ou à direita. De resto, pela representação gráfica, êste facto torna-se intuitivo.

Outro exemplo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

portanto podemos escrever ainda:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$$

Também é fácil ver que $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty$, $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1-x} = +\infty$

Nota : - Pode acontecer que a função f(x) não seja definida nalgum intervalo $]a-\varepsilon, a[$, à esquerda de a. Neste caso, se existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$, será $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$, visto que

só à direita de a se pode tomar uma sucessão de pontos convergente para a, nos quais a função seja definida; não faz então sentido falar de limite à esquerda.

Anàlogamente, se a função não é definida nalgum intervalo $]a, a+\varepsilon[$, com $\varepsilon>0$, e se existe $\lim_{x\to a^-} f(x)$, será $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$, e não faz sentido falar de limite à direita. Por exemplo, a função $y = +\sqrt{x^2-4}$ não é definida no intervalo $]-2,+2[$, tendo-se $\lim_{x\to 2^-} y = \lim_{x\to 2^+} y = 0$ e $\lim_{x\to -2^+} y = \lim_{x\to -2^-} y = 0$.

<u>Teoremas sôbre limites de funções</u> - Cada um dos teoremas demonstrados para limites de sucessões fornece imediatamente um teorèma correspondente para limites de funções de variável real. Assim :

1) "O limite duma constante é a própria constante".

2) "Uma função f(x) não pode tender simultâneamente para dois limites diferentes quando x tende para um dado ponto a".

3) "Se, ao tender de x para a, as duas funções f(x), g(x) tendem para limites b, c finitos, também as funções f(x) + g(x), f(x).g(x) tendem para limites finitos respectivamente iguais a b+c e b.c; se além disso $c\neq 0$, a função f(x)/g(x) tende para b/c."

Demonstraremos apenas uma parte da proposição, a título de exemplo. Seja $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ e consideremos uma qualquer sucessão x_n tendente para a, com $x_n \neq a$. Então $f(x_n) \uparrow b$, $g(x_n) \uparrow c$ e portanto, visto que se trata de limites de sucessões, $f(x_n) + g(x_n) \uparrow b+c$. Vê-se pois que, a toda a sucessão $x_n \uparrow a$, com $x_n \neq a$, corresponde uma sucessão de valores de f(x) + g(x) tendente para b+c, o que significa precisamente que : . . .

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = b + c \qquad \text{q.e.d.}$$

4) "Se f(x), g(x) tendem para limites finitos ao tender de x para a, e se é $f(x) < g(x)$, nalgum intervalo com centro em a, então :

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \ . \ "$$

5) "Se nalgum intervalo com centro em a se tem :

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

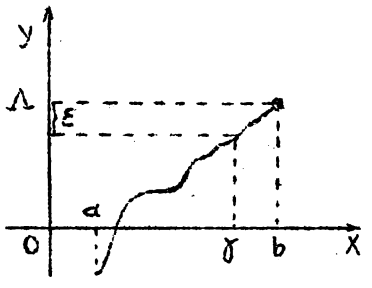
e se f(x), g(x) tendem para um mesmo limite finito ao tender de x para a, então :

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x). \ "$$

6) "Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$, então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|$."

7) "Se a função f(x) é monótona em sentido lato no intervalo $]a,b[$, admite um limite à esquerda de b (finito ou infinito) e um limite à direita de a (finito ou infinito)."

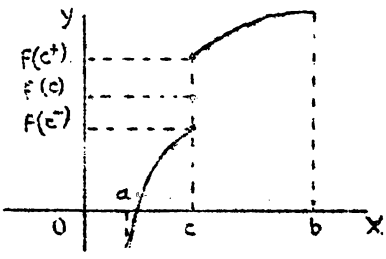
Vamos demonstrar a propriedade apenas num caso, visto que, nos restantes casos, a demonstração é análoga. Suponhamos a função f(x) crescente em sentido lato e limitada superiormente em $]a,b[$, e seja Λ o extremo superior de f(x) em $]a,b[$. Consideremos, por outro lado, uma sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tendente para b, com $x_n < b$. Dado um número $\varepsilon > 0$, existe certamente um ponto γ de $]a,b[$ tal que $f(\gamma) \geq \Lambda - \varepsilon$, de contrário não seria Λ o extremo superior de f(x) em $]a,b[$. Como além disso $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, existirá uma ordem n_1 depois da qual se tem $x_n > \gamma$. Então, por ser f(x) crescente em sentido lato em $]a,b[$, ter-se-á: $f(\gamma) \leq f(x_n)$ desde que $n > n_1$, donde se conclue: $\Lambda - \varepsilon \leq f(x_n) \leq \Lambda$ para $n > n_1$, e portanto $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \Lambda$. Isto prova que $\Lambda = \lim_{x\to b^-} f(x)$



De 7) deduz-se o seguinte corolário:

8) "Toda a função monótona em sentido lato num intervalo $]a,b[$ admite, em cada ponto de $]a,b[$, um limite à esquerda e um limite à direita, ambos finitos (podendo ser iguais ou não)."

Suponhamos por exemplo que f(x) é crescente em sentido lato em $]a,b[$ e seja c um ponto dêste intervalo. É claro que se tem $f(x) \leqslant f(c)$, quando $x \in]a,c[$ e portanto, segundo o teorema anterior existe e é finito o $\lim_{x \to c^-} f(x)$. Anàlogamente se prova a existência de $\lim_{x \to c^+} f(x)$.



É de notar ainda que se tem :

$$f(c^-) \leqslant f(c) \leqslant f(c^+) \ .$$

Limite duma função inteira de x quando $x \uparrow \infty$:

Começaremos pela função x^m com m inteiro e positivo. Atendendo ao que foi dito sôbre limites de sucessões, é fácil de ver que se tem:

$$\lim_{x \to +\infty} x^m = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^m \begin{cases} = +\infty & \text{se m par} \\ = -\infty & \text{se m impar;} \end{cases}$$

podemos escrever ainda, sem especificar :

$$\lim_{x \to \infty} x^m = \infty \ .$$

Seja agora a função :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \qquad a_m \neq 0 \quad m > 0$$

Pondo x^m em evidência vem :

$$y = \left(\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{x} + a_m \right) x^m$$

e como se tem :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0}{x^p} = 0 \ , \qquad \text{para } p = 1, 2, \ldots$$

a expressão entre parentesis tende para a_m quando $x \uparrow \infty$; portanto, atendendo aos resultados precedentes :

$$\lim_{x \to \infty} y = \infty$$

Mas podemos distinguir várias hipóteses:

1) $a_m > 0$; então :

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty \ ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \begin{cases} +\infty & \text{se m é par} \\ -\infty & \text{se m é impar} \end{cases}$$

2) $a_m < 0$; as conclusões são opostas às do caso anterior.

Infinitésimos - Diz-se que uma função f(x) é um infinitésimo com x quando tende para zero se x tende para zero; isto é, quando:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Nestes termos, f(x) dir-se-á um infinitésimo com x-a quando se tiver:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \ .$$

Por exemplo a função $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ não é um infinitésimo com x porque $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1$, mas é infinitésima com x-1 pois:

$$\lim_{x-1 \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$$

Dum modo geral é claro que, sendo a, b números quaisquer, dizer que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ equivale a dizer que a função $f(x) - b$ é infinitésima com $x-a$.

Sejam f(x), g(x) dois infinitésimos com x; diz-se que êstes infinitésimos são da mesma ordem quando a razão:

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

tende para um limite diferente de zero e de infinito ao tender de x para zero; diz-se que f(x) é um infinitésimo de ordem superior à de g(x) quando se tem :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

nesta última hipótese também se diz que g(x) é um infini-

tésimo de ordem inferior à de f(x) e tem-se:

$$\lim_{x\to o} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty \quad .$$

Dir-se-á então que f(x) tende mais ràpidamente para 0 do que g(x) .

Por exemplo, as funções $\sqrt{x}$, x(1+x) são infinitésimos com x tendo-se:

$$\lim_{x\to o} \frac{x(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to o} \sqrt{x}\,(1+x) = 0$$

e portanto o infinitésimo x(1+x) é de ordem superior à de $\sqrt{x}$.

Dois infinitésimos com x, f(x), g(x), dizem-se equivalentes, quando se tem :

$$\lim_{x\to o} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ ;$$

claro que dois infinitésimos equivalentes são da mesma ordem, mas dois infinitésimos da mesma ordem podem não ser equivalentes.

Pode ainda acontecer que o cociente de dois infinitésimos com x, f(x), g(x) não tenda para limite algum ao tender de x para zero; neste caso diz-se que os infinitésimos são incomparáveis.

Infinitamente grande - Diz-se que f(x) é um infinitamente grande com x quando tende para ∞ se x tende para ∞; em símbolos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ .$$

Como vimos toda a função inteira de x, de grau igual ou superior a 1, é um infinitamente grande com x.

Dois infinitamente grandes com x, f(x), g(x) dizem-se da mesma ordem se ao tender de x para ∞ , a razão :

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

tende para um limite diferente de zero e de ∞; f(x) diz-se um infinitamente grande de ordem superior à de g(x) se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \ ;$$

nesta última hipótese também se diz que g(x) é de ordem inferior à de f(x) .

Nota - Dizer que uma variável y é um infinitamente pequeno ou é um infinitamente grande, sem referência a outra variável, não faz sentido; é necessário indicar a variável com a qual y é um infinitamente pequeno ou um infinitamente grande. Por exemplo não faz sentido dizer que a variável x^3 é um infinitamente grande ou um infinitamente pequeno; podemos contudo afirmar que x^3 é um infinitamente grande com x e também um infinitamente pequeno com x.

Como exemplo façamos a comparação dos dois infinitamente grandes com x :

$$A(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \qquad a_m \neq 0 ,$$

$$B(x) = b + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \qquad b_n \neq 0 ,$$

(m, n inteiros positivos) .

Pondo respectivamente x^m e x^n em evidência vem:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\frac{a_o}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{x} + a_m}{\frac{b_o}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{x} + b_n} \; x^{m-n} ;$$

a fracção que está no segundo membro tende manifestamente para $\frac{a_m}{b_n}$ quando x tende para infinito; consoante os valores de m , n, assim teremos os resultados seguintes:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = \begin{cases} \infty & \text{se } m > n \\ \frac{a_m}{b_n} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$$

Concluímos ássim que os dois infinitamente grandes com x, A(x), B(x), são sempre comparáveis, isto é, a ordem de A(x) será superior, igual ou inferior à de B(x), conforme se tiver $m > n$, $m = n$ ou $m < n$.

Conceito de limite duma função segundo Cauchy

Teorema: "Suponhamos que se tem:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

sendo a, b números reais e designemos por ε um número positivo qualquer. Nestas condições, é sempre possível determinar um número $\delta > 0$ tal que a dupla desigualdade :

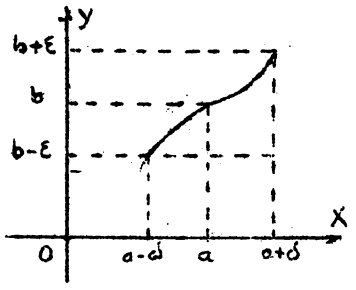
$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$$

seja verificada por <u>todos</u> os valores de x situados no intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ e distintos de <u>a</u> (tomados no domínio de existência da função)."

A tese do teorema consiste pois em afirmar a existência dum número $\delta > 0$, tal que se tem:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x-a| < \delta \quad \text{e} \quad x \neq a .$$

(geralmente δ depende de ε, pois quanto menor fôr o intervalo $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$, menor terá de ser em geral o intervalo $]a-\delta, a+\delta[$).



Vamos demonstrar o teorema pelo método de redução ao absurdo.

Suponhamos que se não verifica a tese do teorema; quere isto dizer que, por mais pequeno que seja o número positivo δ, existe sempre <u>pelo menos um</u> valor de x que verifica a condição : $|f(x)-b| \geqslant \varepsilon$, sendo $|x-a| < \delta$ e $x \neq a$ (considèram-se apenas valores de x em que f(x) seja definida).

Atribuamos a δ os sucessivos valores :

$$1, \ 1/2, \ \ldots \ , \ 1/n, \ \ldots \ \ldots$$

e sejam respectivamente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ valores de x que satisfaçam à condição precedente para cada um dos valores de δ indicados.

Construimos dêste modo uma sucessão de valores de x:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

tal que:

(1) $\quad x_n \neq a , \quad |x_n - a| < \frac{1}{n} ,$

(2) $\quad |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon ,$

qualquer que seja n .

Da condição (1) conclue-se que $x_n \uparrow a$ sendo $x_n \neq a$, e como, por hipótese, $\lim_{x \to a} f(x) = b$, deverá ter-se $f(x_n) \uparrow b$; então a partir de certa ordem deverá ser $|f(x_n) - b| < \varepsilon$; mas isto é contrário à condição (2) que supomos verificada para todos os valores de n. Chegamos assim a uma contradição e portanto o teorema fica demonstrado.

Teorema recíproco - "Sejam a e b dois números quaisquer e suponhamos que a todo o número positivo ε, arbitrário se pode associar um outro número positivo δ tal que se tenha:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |x-a| < \delta \ , \ x \neq a \ ;$$

então podemos afirmar que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \ . \ "$$

Suponhamos verificada a hipótese do teorema e seja $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ uma qualquer sucessão convergente para a, com $x_n \neq a$, sendo êstes pontos tomados no domínio de existência de f(x). Trata-se de provar que $f(x_n) \uparrow b$. Seja então ε um número positivo arbitrário; por hipótese, podemos associar-lhe um número $\delta > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta \ , \ x \neq a \qquad |f(x) - b| < \varepsilon,$$

mas como por hipótese $x_n \uparrow a$, haverá uma ordem n_1 depois da qual se tem:

$$|x_n - a| < \delta$$

e portanto, como é sempre $x_n \neq a$, ter-se-á :

$$|f(x_n) - b| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n_1 \ .$$

Em resumo: dado ε positivo arbitrário é sempre possível determinar uma ordem n_1 depois da qual $|f(x_n) - b| < \varepsilon$; isto quere dizer precisamente que $f(x_n)$ converge para b. q.e.d.

Êstes dois teoremas mostram-nos que é possível definir "limite duma função" sem recorrer ao conceito de limite de sucessão. Teremos:

Definição de limite (segundo Cauchy) : Sendo a, b números reais, diz-se que a função f(x) tem por limite b ao tender de x para a, quando a todo o número positivo ε se pode associar um número positivo δ de modo que se tenha:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta \ , \ x \neq a \ .$$

A defenição de limite de função que tinhamos dado inicialmente é devida a Heine.

Pelos dois teoremas que acabamos de demonstrar verifica-se que as duas defenições são equivalentes.

A primeira definição (devida a Heine) é talvez mais intuitiva, mais fácil de apreender que a de Cauchy, e permite, em certos casos, fazer demonstrações mais fáceis. Mas noutros casos é a definição de Cauchy que apresenta vantagens.

(Entretanto convém observar na demonstração do primeiro teorema intervém um princípio lógico - chamado o "axioma de Zermelo"- que não é admitido por todos os matemáticos; como se viu, os termos da sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ supõem-se escolhidos de modo a verificarem as condições indicadas; ora, o que certos matemáticos contestam, é a possibilidade de efectuar infinitas escolhas).

A definição de Cauchy foi dada na hipótese de a, b serem finitos. No caso de se ter a ou b igual a ∞, $+\infty$ ou $-\infty$, a definição terá de ser modificada.

Na mesma ordem de ideias podemos dar novas definições de limites laterais:

Sendo a, b finitos, diz-se que b é o limite de f(x) à esquerda de a, e escreve-se :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \quad \text{ou simplesmente} \quad b = f(a^-)$$

quando a todo o número positivo ε se pode associar outro número positivo δ de modo que se tenha:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad x < a .$$

Anàlogamente se define limite de f(x) à direita de a; diz-se que :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \quad \text{ou simplesmente} \quad b = f(a^+)$$

quando a todo o $\varepsilon > 0$, se pode associar um $\delta > 0$ tal que :

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta \ , x > a .$$

Estas definições permitem fàcilmente demonstrar que: "Existindo os limites de f(x) à esquerda e à direita de a, e sendo êsses limites iguais, também existe

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

tendo-se precisamente :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a^-) = f(a^+) \text{ .''}$$

Com efeito, suponhamos que existem os limites laterais de f(x) em a e se tem :

$$f(a^-) = f(a^+) = b \neq \infty \text{ .}$$

Então, dado um número $\varepsilon > 0$, será possível associar-lhe um número $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta_1 \text{ , } x < a$$

[por ser $b = f(a^-)$] e ao mesmo número ε será possível associar um número $\delta_2 > 0$ tal que :

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta_2 \text{ , } x > a$$

[por ser $b = f(a^+)$].

Então, se puzermos $\delta = \text{mín.}\ (\delta_1, \delta_2)$, virá :

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - a| < \delta \text{ , } x \neq a$$

o que significa precisamente que :

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{q.e.d.}$$

(Nesta demonstração supõem-se a, b finitos, mas o teorema é verdadeiro mesmo sem esta restrição).

Continuidade - A noção de continuidade é usada mesmo na linguagem corrente. Por exemplo, sabemos que a densidade de um gás é função da temperatura a que êste se encontra e costumamos dizer que a densidade varia "de maneira continua" com a temperatura para significar que, a variações bastante pequenas da temperatura, correspondem variações tão pequenas quanto se quizer da densidade.

Mas já a população dum país não é função contínua do tempo, visto que o acréscimo de população nunca pode ser inferior a 1 em valor absoluto.

Outro exemplo: sabe-se que a densidade da água no estado líquido varia de maneira contínua com a temperatura, atingindo um máximo a 4º C; mas à temperatura de 0º, enquanto se dá a passagem ao estado sólido, observa-se uma brusca diminuição de densidade: o gelo fluctua na água. Diz-se que há uma descontinuidade a 0º C.

Procuremos agora traduzir matemáticamente esta noção intuitiva. Consideremos uma função f(x) e um ponto a em que f(x) seja definida (e finita); à diferença x-a, positiva ou negativa, chama-se acréscimo ou incremento de x em a; à diferença f(x) - f(a), acréscimo ou incremento da função.

A função f(x) dir-se-á contínua em a, se a acréscimos infinitamente pequenos de x em a corresponderem acréscimos infinitamente pequenos de f(x). Em resumo:

Definição - Diz-se que a função f(x) é contínua no ponto a, quando:

1) assume em a um valor f(a) finito ;
2) o acréscimo f(x)-f(a) é infinitésimo com o acréscimo x-a.

Como se sabe, a condição 2) é equivalente à seguinte:

2') $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Portanto, se a função f(x) é contínua no ponto a, e só nêsse caso, a condição 2') é verificada (com f(a) finito).

Atendendo ao que atrás foi dito, a definição de continuidade pode ser dada directamente tal como segue:

Diz-se que f(x) é continua em a quando, a todo o número $\epsilon > 0$, se possa associar um número $\delta > 0$, de modo que se tenha:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \text{desde que} \quad |x - a| < \delta \ .$$

[supondo x pertencente ao domínio de existência de f(x)].

Quando a função f(x) não é contínua num ponto diz-se descontínua nesse ponto .

Descontinuidades: I) Quando existem os limites laterais de f(x) em a e são diferentes, isto é, quando :

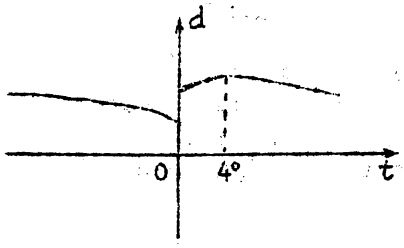
$$f(a^-) \neq f(a^+) \ ,$$

a função é descontinua em a, visto que não existe $\lim_{x \to a} f(x)$; diz-se então que a descontinuidade é de 1ª espécie e à diferença $f(a^+) - f(a^-)$ chama-se salto da função no ponto a .

II) Pode acontecer que não existam mesmo os limites laterais e então a descontinuidade diz-se de 2ª espécie.

III) Pode ainda acontecer que exista e seja finito o

$\lim_{x\to a} f(x)$ .portanto $f(a^+) = f(a^-)$, mas que seja diferente de $f(a)$. Diz-se então que a descontinuidade em a é removível, querendo com isto significar que basta modificar a função no ponto a, para remover a descontinuidade nesse ponto.



Exemplos: 1º) No exemplo que apresentámos da densidade da água como função da temperatura, descontinua no ponto 0, vê-se fàcilmente que a descontinuidade é de 1ª espécie pois existem :

$f(0^-)$ = densidade da água sólida a 0º .

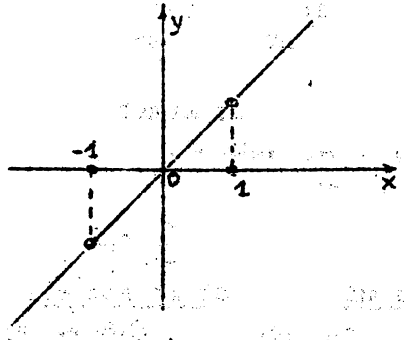
$f(0^+)$ = densidade da água líquida a 0º ,

mas não existe $f(0)$, visto que durante a fusão do gelo ou durante a solidificação da água (à temperatura de 0º) a densidade não tem valor determinado, uma vez que há sempre água sólida e água líquida em presença.

2º) A função $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ tem na origem uma descontinuidade de 2ª espécie pois que, como vimos atrás, não existe $f(0^-)$ nem $f(0^+)$ (a função não é sequer definida no ponto 0).

3º) A função definida por :

$$f(x) = x \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}\right)^2$$



que também pode ser definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

tem nos pontos 1 e -1 descontinuidades removíveis pois :

$f(-1^-) = f(-1^+) = \lim_{x\to -1} f(x) = -1$

e $f(-1) = 0$;

$f(1^-) = f(1^+) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$ mas $f(1) = 0$.

Como vemos, bastava modificar os valores da função nos pontos -1 e 1 para ela deixar de ser descontínua nesses pontos.

Teoremas sôbre funções continuas

Aplicando a álgebra dos limites e a definição de continuidade concluimos imediatamente que :

"A soma, a diferença ou o produto de funções contínuas num ponto é ainda função contínua nesse ponto".

"O cociente de duas funções contínuas num ponto a será ainda uma função contínua em a, desde que o divisor seja diferente de zero nesse ponto".

Em particular uma função racional inteira de x será continua para todos os valores de x. Uma função racional fraccionária será continua em todos os pontos menos naqueles em que se anula o denominador. Por exemplo $\frac{x+1}{x-1}$ é descontinua no ponto x=1 onde nem sequer é definida.

É fácil ver ainda que:

"Se a função f(x) é continua no ponto a, também a função $|f(x)|$ é contínua nesse ponto".

Definição : Dado um conjunto A de números reais, diz-se que a função f(x) é continua no conjunto A quando é continua em todos os pontos de A, considerando êste conjunto como domínio de existência de f(x).

Por exemplo, a função f(x) dir-se-á contínua no intervalo [a,b] quando fôr contínua em cada ponto interior de [a,b] e se tiver $f(a) = f(a^+)$, $f(b) = f(b^-)$, sendo f(a), f(b) finitos.

Convém desde já observar que :

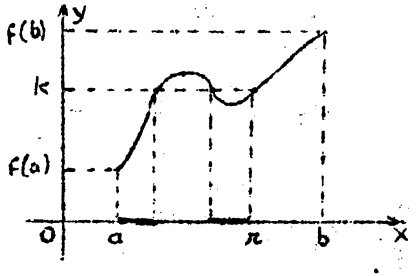
"Se a função f(x) é contínua nos intervalos [a,b] e [b,c], também é contínua no intervalo [a,c] (supondo $a<b<c$)".

Com efeito, verificada a hipótese do teorema, a função f(x) será contínua em qualquer ponto interior a [a,b] ou a [b,c] . Por outro lado tem-se $f(b^-) = f(b) = f(b^+)$, logo a função é contínua em b. Finalmente $f(a^+) = f(a)$, $f(c^-) = f(c)$. A função é pois contínua em [a,c] .

Teorema de Cauchy . "Se a função f(x) é contínua no intervalo [a,b] e toma nos extremos dêste intervalo dois valores diferentes, tomará no interior de [a,b] todos os valores compreendidos entre f(a) e f(b)".

Suponhamos, para fixar ideias, $f(a)<f(b)$ (se fôsse

$f(a) > f(b)$, a demonstração seria análoga) e seja k um número compreendido entre f(a) e f(b) :



$$f(a) < k < f(b) .$$

Trata-se de provar que existe pelo menos um ponto c interior a [a,b] tal que $f(c) = k$. Para isso, designemos por A o conjunto dos pontos de [a,b] onde $f(x) < k$ (é claro que $a \in A$, $b \notin A$) e seja r o extremo superior de A. Vamos provar que se tem precisamente $f(r) = k$.

Com efeito, suponhamos, por exemplo, que se tinha $f(r) < k$ (portanto $r \in A$). Então, pondo $\varepsilon = k - f(r)$ e atendendo a que f(x) é contínua em r, seria possível determinar $\delta > 0$, tal que, em todos os pontos x do intervalo [a,b] compreendidos entre $r-\delta$ e $r+\delta$ se tivesse :

$$f(r) - \varepsilon < f(x) < f(r) + \varepsilon$$

e haveria então valores de x maiores do que r tais que $f(x) < f(r) + \varepsilon = k$, sendo portanto $x > r$, $x \in A$; mas isto é impossível por ser $r = \sup A$.

Anàlogamente se fôsse $f(r) > k$, poderia determinar-se $\delta > 0$, de modo que, em todos os pontos de [a,b] entre $r-\delta$ e $r+\delta$, fôsse ainda $f(x) > k$, e então não seria $r = \sup A$.

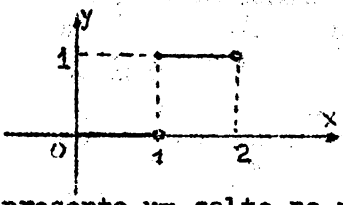
Só pode ser portanto $f(r) = k$.

É claro que r terá de ser interior a [a,b], pois que $f(r) \neq f(a)$, $f(r) \neq f(b)$. E assim o teorema fica demonstrado.

Ao mesmo teorema pode ser dado o seguinte enunciado intuitivo:

"Uma função contínua num intervalo não pode passar dum valor a outro sem passar por todos os valores intermédios".

É claro que, se a função não fôr contínua no intervalo considerado as coisas passam-se diversamente. Por exemplo, a função I(x), (parte inteira de x) no intervalo [0,1] passa do valor 0 ao valor 1 sem passar por nenhum valor intermédio; mas a razão é visível : a função apresenta um salto no ponto 1 .



Do teorema de Cauchy deduz-se imediatamente que:

"Se a função f(x) é contínua em [a,b] e toma sinais contrários nos extremos dêste intervalo, existe pelo menos um ponto c, interior a [a,b], tal que f(c) = 0."

Com efeito, se f(a) e f(b) têm sinais contrários, o valor 0 está compreendido entre f(a) e f(b), o que, segundo o teorema de Cauchy, implica a existência de um ponto c interior a [a,b] tal que f(c) = 0 .

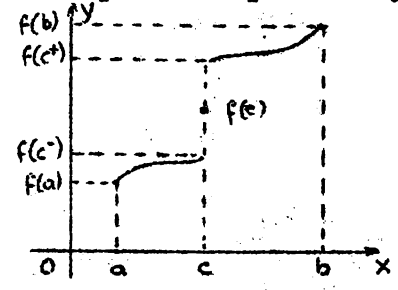
A proposição recíproca do teorema de Cauchy não é verdadeira (no caso geral); mas podemos estabelecer a seguinte:

Teorema: "Se a função f(x) é monótoma no intervalo [a,b] e toma qualquer valor compreendido entre f(a) e f(b), é contínua no intervalo [a,b] ".

Suponhamos que a função é crescente e seja c um ponto qualquer interior do intervalo. Por a função ser crescente em [a,b] existem $f(c^-)$ e $f(c^+)$, tendo-se:

$$f(c^-) \leqslant f(c) \leqslant f(c^+) \ ;$$

a demonstração do teorema consiste em provar que êstes três valores são iguais.



Suponhamos que era $f(c^-) < f(c)$; então ter-se-ia :

$$f(x) < f(c^-) \ , \quad \text{para} \quad a < x < c$$

$$f(x) > f(c) \ , \quad \text{para} \quad c \leqslant x < b \ ,$$

e não haveria nenhum ponto do intervalo [a,b] onde a função tomasse valores compreendidos entre $f(c^-)$ e f(c) o que é contra a hipótese; logo $f(c^-) = f(c)$.

Anàlogamente se prova que $f(c) = f(c^+)$ e portanto provado fica que a função é contínua em todos os pontos interiores ao intervalo. Também de modo análogo se prova que $f(a) = f(a^+)$ e que $f(b) = f(b^-)$. Portanto a função é contínua em todo o intervalo [a,b] .

Supondo a função f(x) decrescente em [a,b], a demonstração é perfeitamente análoga.

Exemplo: A função cos x é monótona em cada um dos intervalos $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$, ... e $[-\pi,0]$, $[-2\pi, -\pi]$, ... , e toma, em cada um deles, todos os valores possíveis entre o máximo e o mínimo; logo será contínua em cada um dêsses

intervalos e portanto em todo o seu domínio de existência $]-\infty,+\infty[$.

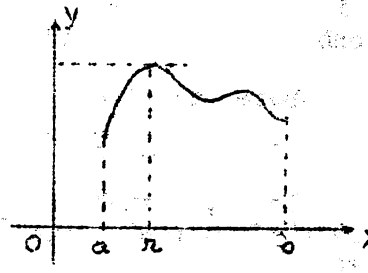
Teorema: "Se a função f(x) é monótona e contínua no intervalo [a,b], a sua inversa será contínua no intervalo $[\alpha,\beta]$, em que α representa o menor e β o maior dos números f(a), f(b)."

Com efeito se a função y = f(x) é contínua em [a,b], toma nêste intervalo todos os valores compreendidos entre f(a) e f(b) (teorema de Cauchy) e portanto, se é monótona em [a,b], o transformado do intervalo [a,b] por intermédio da função f é o intervalo $[\alpha,\beta]$. Ora a função inversa x = g(y) também será monótona em $[\alpha,\beta]$ (crescente se f(x) fôr crescente, decrescente se f(x) fôr decrescente) e como toma todos os valores compreendidos entre a e b também será contínua no intervalo $[\alpha,\beta]$ (por fôrça do teorema anterior).

Trata-se pois duma transformação biunívoca do intervalo [a,b] no intervalo $[\alpha,\beta]$.

Teorema de Weierstrass : "Toda a função contínua num intervalo [a,b] limitado e fechado atinge nesse intervalo um máximo e um mínimo".

Basta provar que tem um máximo, pois a demonstração para o caso do mínimo é absolutamente análoga.



Seja λ o extremo superior, finito ou infinito, da função f(x) no intervalo [a,b]. Então, ou $f(a) = \lambda$ ou $f(a) < \lambda$.

Se $f(a) = \lambda$, o teorema está verificado.

Suponhamos então $f(a) < \lambda$ e consideremos o conjunto dos valores da variável u tais que o extremo superior da função f(x) no intervalo [a,u] é ainda inferior a λ. Designemos por U êsse conjunto e seja r o seu extremo superior; então $a \in U$ e $r \leq b$; vamos provar que se tem necessàriamente $f(r) = \lambda$. Suponhamos que assim não acontecia; isto é, suponhamos que $f(r) < \lambda$ (visto que não pode ser $f(r) > \lambda$); então podíamos escolher um número positivo ε tal que se tivesse ainda $f(r) + \varepsilon < \lambda$. Por outro lado, como a função é contínua em r podíamos determinar um número δ positivo tal que, em todo o ponto x de [a,b] situado entre $r-\delta$ e $r+\delta$, se tivesse:

$$f(r) - \varepsilon < f(x) < f(r) + \varepsilon;$$

ter-se-ia então no intervalo [a,b] :

$$\sup f(x) < \lambda \quad , \qquad \text{para} \quad a \leq x \leq r - \delta ;$$

$$\sup f(x) \leq f(r) + \varepsilon < \lambda \quad , \text{ para} \quad r - \delta < x < r + \delta$$

e portanto

$$\sup f(x) < \lambda \quad \text{para} \quad a \leq x < r + \delta ;$$

daqui se conclue que o extremo superior de f(x), por exemplo, no intervalo $[a, r + \delta/2]$ seria inferior a λ e portanto $r + \delta/2 \in U$; mas isto é impossível sendo $r + \delta/2 > r$ e $r = \sup U$. O absurdo provem de supor $f(r) < \delta$; tem-se pois $f(r) = \lambda$. q.e.d.

Fica ao mesmo tempo provado que a função é limitada em [a,b].

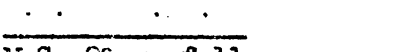
Nota: A hipótese de continuidade é aqui essencial. Por exemplo, a função $x - I(x)$, que várias vezes temos considerado, tem como extremo superior 1 no intervalo [0,1]; porém êste valor não é atingido porque, no ponto 1, a função dêsce bruscamente a zero, embora tenda para 1 quando $x \uparrow 1$.

Derivadas

O conceito de derivada surgiu naturalmente de considerações de ordem mecânica (problema das velocidades) e de considerações de ordem geométrica (problema das tangentes).

Quando um móvel faz um determinado percurso costuma designar-se por velocidade média do móvel o coeiente do percurso feito pelo tempo gasto em percorrê-lo. Se determinarmos a velocidade média em vários percursos parciais, obteremos, em geral, resultados diferentes : o móvel desloca-se com maior ou menor rapidez conforme os percursos considerados; se fizermos a determinação em intervalos de tempo muito pequenos ficaremos a ter uma ideia aproximada da velocidade em cada instante .

Mais precisamente : Seja P um ponto que se move sôbre uma recta num determinado sentido; o espaço percorrido s ao fim dum tempo t será naturalmente função de t: $s = f(t)$. Sendo P_o a posição no instante t_o e P a posição no instante t, a velocidade média no intervalo $[t_o, t]$ será :



$$\frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o} \quad ;$$

ora, quanto mais pequena fôr a diferença $t-t_o$, mais êste cociente nos dará a ideia da velocidade verdadeira no instante t_o. Então será natural chamar velocidade no instante t_o a :

$$v = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

Suponhamos, por exemplo, que se trata da queda dum grave; a equação do movimento é, como se sabe:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

e a velocidade num dado instante t_o será então :

$$v = \lim_{t \to t_o} \frac{\frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g t_o^2}{t - t_o} = \lim_{t \to t_o} \frac{g (t+t_o) \cdot (t-t_o)}{t - t_o} = g t_o$$

Consideremos agora uma função $y = f(x)$ definida num intervalo $]a,b[$ e seja x_o um ponto qualquer dêste intervalo; à diferença:

$$h = x - x_o$$

chama-se, como já dissémos, <u>acréscimo ou incremento da variável independente no ponto x_o</u> ; corresponder-lhe-á o <u>acréscimo</u> :

$$k = y - y_o = f(x) - f(x_o)$$

ou incremento da função $f(x)$.

A razão dos dois acréscimos :

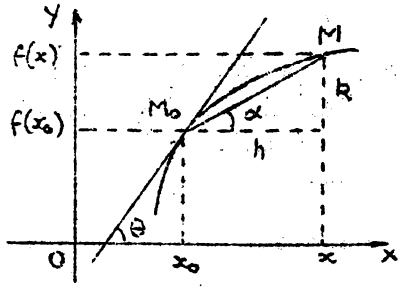
$$\frac{k}{h} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

é chamada a <u>razão incremental</u> da função em x_o . Se, quando h tende para zero, isto é, quando x tende para x_o, esta razão tender para um limite finito ou infinito, chamaremos a êsse limite, derivada da função no ponto x_o e representá-lo-emos por $f'(x_o)$; então será, por definição :

$$f'(x_o) = \lim_{h \to o} \frac{k}{h} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Tornando ao caso dos movimentos podemos agora dizer que a velocidade do móvel no instante t_0 é a derivada da função $s = f(t)$ para $t=t_0$.

Dissemos que o conceito de derivada também surgiu de considerações de ordem geométrica; vamos ver como. Consideremos o gráfico da função (que suponos agora contínua) $f(x)$ e sejam M_0, M os pontos de abscissas x_0, x; como se vê na figura, a razão k/h é a tangente de α, sendo α o ângulo que a recta M_0M faz com o semi-eixo positivo OX; fazendo tender h para zero, o ponto M tenderá para a posição M_0 e a recta M_0M rodará possívelmente em tôrno de M_0; mas se existe o limite de k/h, existirá um ângulo θ limite de α e a recta M_0M tenderá para uma posição limite - a tangente ao gráfico no ponto M_0 - que é a recta que passa por M_0 e forma o ângulo θ com o semi-eixo positivo OX; ter-se-á então:



$$\lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta = f'(x_0) .$$

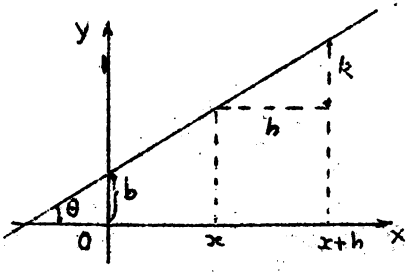
Em conclusão : a derivada $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da tangente à linha representativa de $f(x)$ no ponto de abscissa x_0 .

Pode acontecer que a função $y = f(x)$ admita derivada em todos os pontos de $]a,b[$; então, a cada ponto de $]a,b[$ corresponderá um valor da derivada; esta fica a ser portanto uma nova função de x definida no mesmo intervalo - a função derivada de $f(x)$ em ordem a x em $]a,b[$ ou simplesmente a derivada de $f(x)$, quando não houver lugar para confusões. A função derivada de $f(x)$ pode ser representada por qualquer das notações:

$$f'(x), \quad Df(x), \quad D_x f(x) , \quad \frac{d}{dx} f(x) , \quad \frac{dy}{dx} .$$

Consideremos, por exemplo, a função linear $y = ax + b$ cujo gráfico, como se sabe, é uma recta que faz com o semi-eixo positivo OX um ângulo θ tal que $\operatorname{tg}\theta = a$. Sendo x

um ponto qualquer é : $y + k = a(x + h) + b$ donde



$k = (y+k) - y = ax+ah+b-ax-b = ah$

e portanto:

$$\frac{k}{h} = a \ , \quad \lim \frac{k}{h} = a \ ,$$

por ser a constante. Logo :

"A derivada da função $y = ax+b$ em ordem a x é a função $y' = a$."

Por considerações geométricas chegávamos à mesma conclusão: k/h é sempre igual a tg θ; uma recta tem por tangente em qualquer ponto a própria recta.

Em particular, na expressão $y = ax + b$, pode ter-se $a = 0$; nêste caso a função reduz-se a uma constante ($y=b$) e tem-se $y' = a = 0$. Portanto :

I - "A derivada duma constante é zero".

Um outro caso particular é aquele em que $a = 1$ e $b=0$. Então será $y = x$ e $y' = a = 1$. Portanto :

II - "A derivada de x em ordem a x é igual a 1."

Geomètricamente estas duas proposições são imediatas: o gráfico da função $y = b$ é uma paralela a OX; o gráfico da função $y = x$ é a bissectriz dos quadrantes impares. No primeiro caso o acréscimo k é sempre nulo e portanto o mesmo acontece à razão k/h e ao seu limite; no segundo caso k/h é sempre igual a 1.

Em mecânica, a função $s = at + b$ é a equação do movimento uniforme; a velocidade (derivada de s em ordem a t) é a constante a e portanto coincide com a velocidade média em qualquer intervalo; b é o espaço inicial. Se $a=0$, tem-se $s = b$: o movimento reduz-se ao repouso (velocidade nula em qualquer instante).

Teorema : "Se $f(x)$ admite derivada finita no ponto x_0, é contínua nesse ponto."

Por definição de derivada é:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ora

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

Então, tomando os limites para $x \nearrow x_o$ e lembrando que $f'(x_o)$ é finita (por hipótese), vem:

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o)] = f'(x_o) \lim_{x \to x_o} (x - x_o) = 0$$

ou seja:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

A função $f(x)$ é pois contínua em x_o q.e.d.

Teorema : "A derivada do produto duma constante por uma função, é igual ao produto da constante pela derivada da função."

Consideremos as funções :

$$g(x) \qquad \text{e} \qquad f(x) = a \cdot g(x)$$

com a constante (diferente de zero) e suponhamos que existe $g'(x_o)$; a razão incremental de $f(x)$ em x_o é :

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{a\,g(x) - a\,g(x_o)}{x - x_o} = a\,\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

e tomando os limites quando x tende para x_o :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = a \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

ou:

$$f'(x_o) = a\,g'(x_o) \cdot$$

Derivada da soma - Teorema: "Se as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ admitem derivada finita no ponto x_o, também a função $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ tem derivada em x_o e é :

$$f'(x_o) = \varphi'(x_o) + \psi'(x_o). \text{ "}$$

Com efeito a razão incremental de f no ponto x_o é :

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{[\varphi(x) + \psi(x)] - [\varphi(x_o) + \psi(x_o)]}{x - x_o} =$$

$$= \frac{\varphi(x) - \varphi(x_o)}{x - x_o} + \frac{\psi(x) - \psi(x_o)}{x - x_o}$$

e passando ao limite quando $x \nearrow x_o$, como o segundo membro desta igualdade tem limite, por hipótese, o mesmo sucede ao primeiro e é : $f'(x_o) = \varphi'(x_o) + \psi'(x_o)$ q.e.d.

Observação: Fizemos a restrição de as derivadas serem finitas porque o teorema do limite da soma só é verdadeiro quando os limites das parcelas são finitos (ou infinitos do mesmo sinal).

Podemos então afirmar que :

"A derivada duma soma é a soma das derivadas das parcelas, quando estas derivadas são finitas."

Derivada do produto: Teorema - "Se as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ admitem derivada no ponto x_o, também a função $f(x)=\varphi(x).\psi(x)$ admite derivada no mesmo ponto e é:

$$f'(x_o) = \varphi(x_o)\,\psi'(x_o) + \psi(x_o)\,\varphi'(x_o) \text{ . "}$$

Sejam k_1 e k_2 os acréscimos das funções φ e ψ correspondentes ao acréscimo h de x em x_o; vem :

$$f(x_o+h) = \varphi(x_o+h) \,.\, \psi(x_o+h) = [\varphi(x_o)+k_1]\,[\psi(x_o)+k_2]$$
$$= \varphi(x_o)\,\psi(x_o) + \varphi(x_o)\,k_2 + k_1\,\psi(x_o) + k_1\,k_2$$

e portanto, atendendo a que $f(x_o) = \varphi(x_o)\,\psi(x_o)$:

$$\frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} = \varphi(x_o)\,\frac{k_2}{h} + \psi(x_o)\,\frac{k_1}{h} + \frac{k_1}{h}\,k_2 \,.$$

Mas tem-se :

$$\lim_{h\to o}\frac{k_1}{h} = \varphi'(x_o)\,, \quad \lim_{h\to o}\frac{k_2}{h} = \psi'(x_o) \quad \text{e ainda} \quad \lim_{h\to o} k_2 = 0$$

porque, sendo $\psi'(x_o)$ finita (por hipótese), a função ψ é contínua em x_o. Então virá:

$$f'(x_o) = \lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h}$$
$$= \varphi(x_o)\,\psi'(x_o) + \varphi(x_o)\,\psi'(x_o) \qquad \text{q.e.d.}$$

Se as duas funções $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ admitem derivada finita num intervalo $]a,b[$, ter-se-á neste intervalo:

$$\boxed{(u.v)' = u'\,v + v'\,u} \,.$$

Tratando-se de três funções $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, $w=\chi(x)$,

com derivada finita em]a,b[, virá, com a aplicação repetida da regra anterior :

$$(uvw)' = [(uv)\,w]' = (uv)'w + (uv)w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

e anàlogamente para mais de três factores.

Podemos então dizer que :

"A derivada dum produto é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando a derivada de cada um dos factores pelo produto dos outros (se estas derivadas existem e são finitas).

Derivada da potência - Teorema: "Se a função $u = \varphi(x)$ admite derivada finita num intervalo, e se fôr m um número inteiro positivo, também a função $f(x) = [\varphi(x)]^m$ admite derivada no mesmo intervalo e é:

$$f'(x) = m\,[\varphi(x)]^{m-1}\,\varphi'(x)\ ."$$

Como:

$$u^m = u \cdot u \cdot \ldots \cdot u \quad (m \text{ vezes})$$

temos pelo teorema anterior que a sua derivada é a soma de m parcelas todas iguais a $u'\,u^{m-1}$ e portanto :

$$\boxed{(u^m)' = m\,u^{m-1}\,u'} \qquad \text{q.e.d.}$$

Em particular se fôr $f(x) = x^m$, virá :

$$f'(x) = m\,x^{m-1}\,x' = m\,x^{m-1}.$$

Os teoremas anteriores permitem-nos calcular a derivada de qualquer função inteira. Tem-se, por exemplo :

$$D\left(3x^4 - \frac{x}{2} + 5\right) = 3\,D\,x^4 - \frac{1}{2}\,D\,x + D\,5 =$$

$$= 3 \cdot 4\,x^3 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 = 12\,x^3 - \frac{1}{2}$$

Derivada do cociente - Teorema : "Se a função $\varphi(x)$ admite derivada finita em x_0 e se $\varphi(x_0) \neq 0$, também a função $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ tem derivada no mesmo ponto e é :

$$\frac{-\varphi'(x_0)}{[\varphi(x_0)]^2}\ ."$$

Com efeito temos:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{\varphi(x_0)\,\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

Quando x tende para x_0, a função $\varphi(x)$ tende para $\varphi(x_0)$, porque, admitindo derivada finita em x_0, é contínua nesse ponto. Então, atendendo a que é, por hipótese, $\varphi(x_0) \neq 0$, virá:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{[\varphi(x_0)]^2} \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$$

$$= -\frac{\varphi'(x_0)}{[\varphi(x_0)]^2}$$

Suponhamos agora que se trata de duas funções $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, que admitem derivada finita num intervalo $]a,b[$ no qual $\psi(x)$ não se anula. Virá, aplicando a regra de derivação do produto e o teorema anterior:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \frac{1}{v} + u \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$$

Temos assim a regra de derivação do cociente:

$$\boxed{\frac{u}{v} = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}} \,.$$

Estamos agora aptos a calcular a derivada duma função racional qualquer. Por exemplo:

$$\left(\frac{3x^2}{1 - x^3}\right)' = \frac{(3x^2)'(1-x^3) - 3x^2(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \frac{6x(1-x^3) + 9x^4}{(1-x^3)^2}$$

Derivada da função inversa - Teorema: "Se a função $y=f(x)$ é monótona e contínua num intervalo $[a,b]$ e admite derivada num ponto x_0 deste intervalo, a sua função inversa $x=\varphi(y)$ também admite derivada (em ordem a y) no ponto $y_0 = f(x_0)$, tendo-se:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad ."$$

Como vimos atrás, se a função $y = f(x)$ é monótona e contínua em $[a,b]$ também a sua inversa $x = \varphi(y)$ é contínua no intervalo $[\alpha,\beta]$, transformado de $[a,b]$ por meio de $f(x)$.

A cada acréscimo h de x em x_o, tal que $x_o+h \in [a,b]$, corresponde um acréscimo k de y em y_o; reciprocamente ao acréscimo k de y em y_o corresponde o acréscimo h de x em x_o, tendo-se:

$$\begin{cases} y_o + k = f(x_o + h) \\ \lim\limits_{h \to o} k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_o + h = \varphi(y_o + k) \\ \lim\limits_{k \to o} h = 0 \end{cases}$$

ora

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{\frac{k}{h}},$$

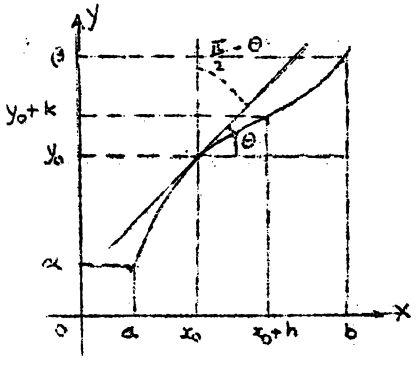
donde, passando ao limite quando $k \to 0$:

$$\lim_{k \to o} \frac{h}{k} = \frac{1}{\lim\limits_{k \to o} \frac{k}{h}} = \frac{1}{\lim\limits_{h \to o} \frac{k}{h}}$$

ou seja:

$$\varphi'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)}, \qquad \text{q.e.d.}$$

Este teorema poderia estabelecer-se intuitivamente por considerações de ordem geométrica. Basta observar que sendo θ o ângulo que a tangente ao gráfico faz com o semi-eixo positivo OX, será $\frac{\pi}{2} - \theta$ o ângulo que a mesma tangente faz com o semi-eixo positivo OY e portanto:



$$\varphi'(y_o) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\,\theta} = \frac{1}{f'(x_o)}.$$

Supondo que a função $y = f(x)$ admite derivada em todos os pontos de $[a,b]$, poderemos escrever:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

Em palavras: "A derivada da função inversa é o inverso aritmético da derivada da função dada".

Exemplo: Consideremos a função $y = \sqrt[m]{x}$, com m inteiro, positivo. Sendo m par a função só é definida para $x \geq 0$ e toma dois valores simétricos; suponhamos que se considera só o valor positivo . Então a função será monótona em qualquer caso e a sua inversa é $x = y^m$. Como a derivada de x em ordem a y é : $\frac{dx}{dy} = m\, y^{m-1}$, a derivada de y em ordem a x será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{m\, y^{m-1}} = \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

Derivada da função composta:

Seja y uma função composta de x por intermédio de u, isto é, seja y função duma variável u que por sua vez é função de x :

$$y = f(u) \quad e \quad u = \varphi(x) \longrightarrow y = f\left[\varphi(x)\right] = g(x) \quad .$$

"Se $\varphi(x)$ admite derivada finita em x_o e se f(u) admite derivada também finita no ponto $u_o = \varphi(x_o)$, então y admitirá derivada em ordem a x no ponto x_o e essa derivada será igual ao produto das duas primeiras."

Dando a x um acréscimo h em x_o virá para u um acréscimo ℓ:

$$u_o + \ell = \varphi(x_o + h)$$

e por sua vez a êste acréscimo ℓ de u em u_o corresponderá um acréscimo k de y:

$$y_o + k = f(x_o + \ell) \quad ;$$

como:

$$\frac{k}{h} = \frac{k}{\ell} \cdot \frac{\ell}{h} \quad ,$$

teremos no limite, ao tender h para zero :

$$(1) \qquad \lim_{h \to o} \frac{k}{h} = \lim_{h \to o} \frac{k}{\ell} \times \lim_{h \to o} \frac{\ell}{h} \quad .$$

Mas ℓ é um infinitésimo com h, pois que, sendo $\varphi'(x_o) \neq \infty$ a função φ é contínua em x_o; portanto :

$$\lim_{h \to o} \frac{k}{\ell} = \lim_{\ell \to o} \frac{k}{\ell} = f'(x_o) \neq \infty \; ;$$

por outro lado:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ell}{h} = \varphi'(x_0) \neq \infty \ ;$$

então o limite do 2º membro de (1) existe e é igual a $f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$; logo :

$$g'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'[\varphi(x_0)] \varphi'(x_0) \quad \text{q.e.d.}$$

Se $\varphi(x)$ admite derivada finita num certo intervalo e $f(u)$ admite derivada finita no intervalo correspondente, podemos escrever :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Podemos desde já aplicar êste resultado ao cálculo da <u>derivada duma raiz</u> . Vimos que se tem :

$$(\sqrt[m]{x})' = \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

mas se em vez de x, o radicando fôr mais geralmente uma função $u = \varphi(x)$, com derivada finita num dado intervalo, virá nesse intervalo:

$$\frac{d}{dx} \sqrt[m]{u} = \frac{d}{du} \sqrt[m]{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}} \frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{m \sqrt[m]{[\varphi(x)]^{m-1}}}$$

ou, mais condensadamente:

$$\boxed{(\sqrt[m]{u})' = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}}$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{3x^2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 1) =$$

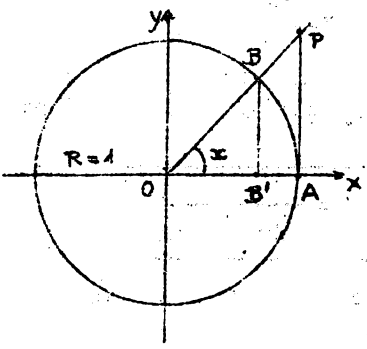
$$= \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 1}}$$

<u>Derivadas das funções circulares directas</u> - Antes de deduzir as regras de derivação para as funções circulares va-

mos provar que as variáveis sen x e x são infinitésimos equivalentes, isto é, que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Consideremos uma circunferência de raio unidade, um ângulo x expresso em radianos tal que $0 < x < \pi/2$, e os segmentos $\overline{BB'}$, $\overline{AP}$ representativos do seno e da tangente de x; temos:



área do $\Delta[OAB]$ < área do sector $[OAB]$ < < área do $\Delta[OAP]$

ou, recordando que a área do sector é igual ao semi-produto do raio (=1) pelo comprimento do arco (=x) :

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

donde, dividindo os três membros por sen x :

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

ou seja:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1, \quad \text{para} \quad 0 < x < \pi/2 .$$

Mudando x em -x, vê-se que a mesma relação é verificada para $-\pi/2 < x < 0$; portanto, a função $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está enquadrada pelas funções $y = \cos x$, $y = 1$ no intervalo $-\pi/2, \pi/2$ excluido o ponto 0. Por outro lado, tem-se $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, visto a função cos x ser contínua em qualquer ponto. As duas funções exteriores tendem pois para 1 ao tender de x para 0; portanto também :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

Daqui se deduz ainda que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Com efeito:

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x\,(1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x},$$

donde:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

Posto isto, podemos deduzir a derivada de sen x. Ao acréscimo h em x corresponderá o acréscimo :

$$k = \text{sen}(x+h) - \text{sen } x = \text{sen } x \cos h + \text{sen } h \cos x - \text{sen } x$$

$$= \text{sen } x (\cos h - 1) + \text{sen } h \cos x$$

donde

$$\frac{k}{h} = - \text{sen } x \frac{1 - \cos h}{h} + \frac{\text{sen } h}{h} \cos x$$

e

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = - \text{sen } x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$

$$= \cos x$$

Portanto :

$$\boxed{(\text{sen } x)' = \cos x}$$

Por outro lado, como $\cos x = \text{sen } (\frac{\pi}{2} - x)$, fazendo $u = \frac{\pi}{2} - x$, temos :

$$\cos x = \text{sen } u \qquad \frac{du}{dx} = 0 - 1 = -1,$$

donde, pela regra de derivação das funções compostas :

$$\frac{d}{dx} (\cos x) = \frac{d}{du} (\text{sen } u) \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot (-1) =$$

$$= - \cos (\frac{\pi}{2} - x) = - \text{sen } x .$$

Então:

$$\boxed{(\cos x)' = -\text{sen } x}$$

Passemos agora à derivada de tg x ; como $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, temos, pela regra de derivação do cociente :

$$(\text{tg } x)' = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x}$$

Anàlogamente se deduziam as regras de derivação das restantes funções circulares directas, obtendo-se :

$$\boxed{(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x}$$

$$\boxed{(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x}$$

$$\boxed{(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

Derivadas das funções circulares inversas - A função $x = \operatorname{sen} y$ é contínua e alternadamente crescente e decrescente, mas podemos determinar intervalos em que ela seja monótona; num intervalo nestas condições - por exemplo $(-\pi/2 , \pi/2)$ - podemos inverter a função obtendo-se como função inversa

$$y = \operatorname{arc\,sen} x .$$

Pela regra de derivação das funções inversas virá então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} ;$$

tomando a raiz quadrada com o sinal + porque se considera $y \in [-\pi/2 , \pi/2]$. Então:

$$\boxed{(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

De modo análogo se deduzia que :

$$\boxed{(\operatorname{arc\,cos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}} \quad \text{(no 1º e 2º quadrantes)}$$

$$\boxed{(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Todos êstes resultados se podem combinar com a regra de derivação das funções compostas. Seja $u = \varphi(x)$ uma fun-

ção derivável de x; ter-se-á então :

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\,\varphi(x) = \frac{d}{du}\,\text{sen}\,u \;.\; \frac{du}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

$$= \varphi'(x) \;.\; \cos\varphi(x)$$

ou, mais condensadamente :

$$(\text{sen}\,u)' = u'\cos u \;.$$

Do mesmo modo :

$$(\text{tg}\,u)' = u'\,\sec^2 u$$

$$(\text{arc sen}\,u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\text{arc tg}\,u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

. . . . . .

Em certos casos é necessário aplicar várias vezes a regra das funções compostas. Exemplo:

$$(\sqrt{1-\text{sen}\,2x})' = \frac{(1-\text{sen}\,2x)'}{2\sqrt{1-\text{sen}\,2x}} = \frac{-\cos 2x\,(2x)'}{2\sqrt{1-\text{sen}\,2x}} =$$

$$= -\frac{\cancel{2}\cos 2x}{\cancel{2}\sqrt{1-\text{sen}\,2x}}$$

$$\left[\text{sen}^2(1-\sqrt[3]{x})\right]' = 2\,\text{sen}(1-\sqrt[3]{x}) \;.\left[\text{sen}\,(1-\sqrt[3]{x})\right]' =$$

$$= 2\,\text{sen}\,(1-\sqrt[3]{x}) \;.\; \cos\,(1-\sqrt[3]{x}) \;.\; (1-\sqrt[3]{x})' =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\,\text{sen}\,(1-\sqrt[3]{x})\,\cos\,(1-\sqrt[3]{x})$$

A regra de derivação das funções compostas é também chamada <u>regra de cadeia</u>.

<u>Noção de diferencial</u> -

Considere-se uma função $y = f(x)$ que admita derivada finita no intervalo $]a,b[$; já sabemos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

portanto se fizermos :

$$\frac{k}{h} - f'(x) = \omega(h),$$

imediatamente se reconhece que $\lim_{h \to o} \omega(h) = 0$; mas tem-se

$\omega(h) = \dfrac{k - f'(x)\,h}{h}$ o que mostra ser a diferença $k-f'(x)h$ um infinitésimo com h de ordem superior à de h; então :

"A diferença entre o acréscimo da função e o produto da derivada pelo acréscimo da variável independente, h, é um infinitésimo de ordem superior à de h."

Na prática, quere isto dizer que, tomando $f'(x)h$ como valor aproximado de k se comete um êrro que, para valores pequenos de h, se pode desprezar. O produto $f'(x)h$ é chamado diferencial da função no ponto x e costuma ser representado pelo símbolo dy ;

$$dy = f'(x) \cdot h \cdot$$

Tratando-se da função x, será: $dx = 1.h$ e por isso podemos substituir h por dx, ficando:

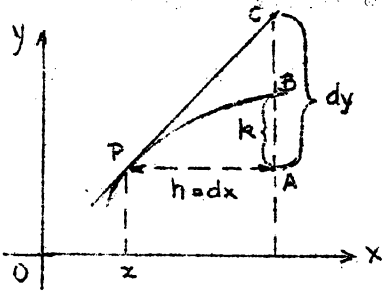
$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

Daqui se deduz a notação diferencial da derivada, que temos empregado:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Exemplo : Se fôr $y = \operatorname{sen} x$, será $dy = \cos x\,dx$. Note-se que a variável dy depende ao mesmo tempo de x e de dx.

Vejamos qual o significado geométrico do conceito de diferencial:



Como $f'(x)$ é o coeficiente angular da tangente à curva no ponto P de abscissa x, o diferencial $dy = f'(x)\,dx$ é representado, àparte o sinal, pelo segmento $\overline{AC}$ da figura; por outro lado, k, é representado pelo segmento $\overline{AB}$; portanto $\overline{BC}$

representa, em valor absoluto, a diferença $k-f'(x).h = h.\omega(h)$. Então, ao tender h para zero, o segmento $\overline{BC}$ tende para zero mais ràpidamente que $\overline{AB}$ ou $\overline{AC}$ e portanto, para valores de h suficientemente pequenos, podemos substituir $\overline{AB}$ por $\overline{AC}$, isto é, o arco de curva $\overset{\frown}{PB}$ confunfunde-se pràticamente com a tangente $\overline{PC}$.

Os conceitos de derivada e de diferencial nas ciências da natureza

Muitas vezes, nas ciências aplicadas, usam-se <u>métodos abreviados de cálculo</u> ou <u>de raciocínio</u> que consistem fundamentalmente em substituir, nos cálculos ou nas demonstrações, o acréscimo duma função f(x) pelo diferencial df; importa salientar que êstes métodos carecem geralmente de rigor lógico embora conduzam a resultados exactos ou aproximados. Por exemplo, para determinar a velocidade dum movimento quando a lei do movimento é s=f(t) (s=espaço, t=tempo), raciocina-se dêste modo: No intervalo de tempo infinitésimo [t, t+dt] pode considerar-se como constante a velocidade v e então o espaço percorrido f(t+dt) - f(t) = ds é igual ao produto da velocidade v pelo tempo dt, isto é :

$$ds = v\,dt$$

donde:

$$v = \frac{ds}{dt} ;$$

portanto a velocidade é a derivada do espaço em ordem ao tempo.

Ora nêste raciocínio há dois êrros: em primeiro lugar supõe-se constante a velocidade no intervalo de tempo [t, t+dt]; em segundo lugar substitui-se o acréscimo f(t+dt) - f(t) pelo diferencial ds = f'(t) dt. Mas os dois êrros compensam-se conduzindo a um resultado exacto.

Não só no estudo dos movimentos, mas em inúmeras questões de física, química, biologia, etc, intervêm os conceitos de derivada e de diferencial. Exemplos:

a) A quantidade de electricidade que passa numa dada secção dum fio condutor no fim dum tempo t, é, naturalmente, função de t :

. . . . $Q = f(t)$

a quantidade de electricidade escoada entre os instantes t e t+h é :

$$f(t+h) - f(t) \ ;$$

a razão:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

será a <u>intensidade média</u> da corrente no intervalo [t,t+h] ; no limite, quando h tende para 0, ter-se-á a <u>intensidade</u> no instante t :

$$I = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t) = \frac{dQ}{dt} \ ;$$

em linguagem abreviada diremos que num intervalo de tempo infinitésimo [t, t+dt], passa uma quantidade de electricidade dQ e que, considerando a intensidade I da corrente constante nesse intervalo, I será igual ao cociente de dQ por dt:

$$I = \frac{dQ}{dt} \ .$$

b) A quantidade q de calor necessária para elevar de 0° a t° a temperatura de um grama de uma substância é função de t:

$$q = \varphi(t) \ ;$$

para elevar a temperatura do mesmo corpo de t a t+h, a quantidade de calor será :

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) \ ;$$

dividindo por h temos o <u>calor específico médio</u> da substância entre t e t+h; no limite quando h tende para zero, obtem-se :

$$\frac{dq}{dt} = \varphi'(t) = \text{calor específico à temp. } t \ .$$

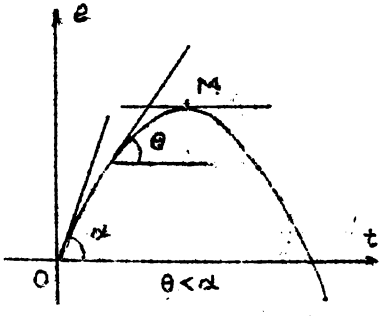
Dum modo geral sempre que num fenómeno se tem uma variável y dependente doutra variável x, a função y=f(x) dá-nos a <u>lei do fenómeno</u> e f'(x) representa a <u>velocidade</u> de variação de y a respeito de x, isto é, indica-nos a rapidez com que y varia com x. Mesmo no caso dos movimentos, não é a velocidade o único exemplo de derivada: a aceleração é a derivada da velocidade em ordem ao tempo, indicando-nos, por assim dizer "a velocidade com que a velocidade varia". No movimento uniformemente variado a

aceleração é constante: o acréscimo da velocidade dividido pelo acréscimo do tempo tem sempre o mesmo valor - positivo (movimento acelerado), negativo (movimento retardado).

Estudemos agora em detalhe o movimento uniformemente retardado. Suponhamos por exemplo que se trata de um corpo lançado verticalmente de baixo para cima (no vácuo); a lei dos espaços é :

$$e = v_o\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 ,$$

sendo v_o a <u>velocidade inicial</u>, isto é, a velocidade no instante t=0. Façamos a representação gráfica desta função: já sabemos que se obtem uma parábola com o eixo paralelo ao eixo das ordenadas. (Não confundir esta curva com a trajectória do movimento que supomos rectilínea). A velocidade em cada instante é :



$$v = v_o - g\, t$$

e como v_o é a velocidade para t=0, será $v_o = tg\,\alpha$, isto é, igual à tangente do ângulo que a tangente à curva na origem dos eixos faz com o eixo das abscissas; como se vê pelo gráfico, a velocidade vai diminuindo com o tempo, pois o ângulo da tangente à curva com o eixo das abscissas é cada vez menor, até que no ponto M se anula [nesse instante é $v = v_o - gt = 0$ donde $t = \frac{v_o}{g}$; então o móvel atinge a altura máxima que será $e = v_o \cdot \frac{v_o}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_o^2}{g^2} = \frac{g\, v_o^2}{2}$]. A partir dêste instante a velocidade passa a ser negativa.

<u>Derivadas laterais</u> - Pode acontecer que a razão incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

não tenda para limite algum ao tender de x para <u>a</u> , mas que, no entanto, existam o limite à esquerda e o limite à direita :

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

os quais tomarão o nome de derivadas laterais (à esquerda e à direita) de f(x) em a. É claro que neste caso não exista a derivada f'(a) de f(x) no ponto a.

Por exemplo, a função assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3(x^2 - 1) & \text{para } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

não tem derivada no ponto x = 1 apesar de ser contínua nesse ponto; com efeito:

$$f(1) = 0 ,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3(x^2 - 1) = 0 ,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0 ,$$

portanto f(x) é contínua para x = 1, mas :

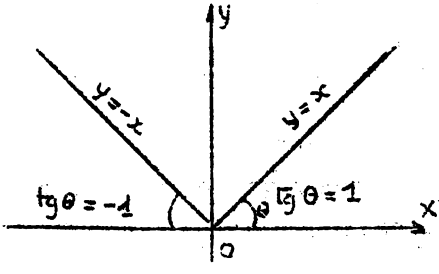
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = 6$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 .$$

Não existe pois derivada de f(x) no ponto x = 1, mas existem as derivadas laterais que são à esquerda igual a 6 e à direita igual a 1 .

Outro exemplo: Seja a função $f(x) = |x|$; é claro que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

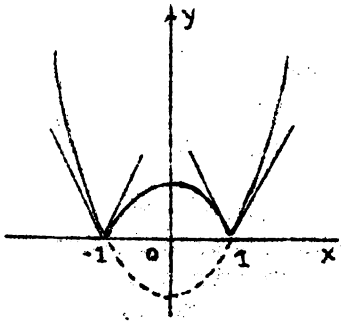


Imediatamente se reconhece que, no ponto x = 0, há uma derivada à direita igual a 1 e uma derivada à esquerda igual a -1.

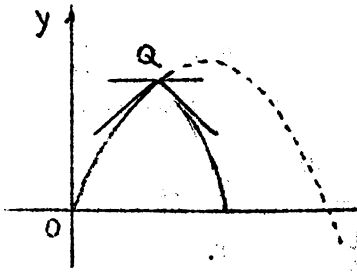
Um exemplo análogo é o da função:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > 1 \text{ ou } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

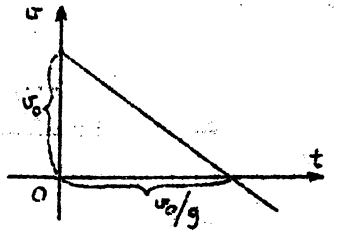
tendo-se nos pontos 1 e -1 uma derivada à direita igual a 2 e uma derivada à esquerda igual a -2 . Nestes pontos não existe tangente à curva representativa da função; existem apenas <u>semi-tangentes</u>, dizendo-se que os pontos da curva são <u>pontos angulosos</u>.



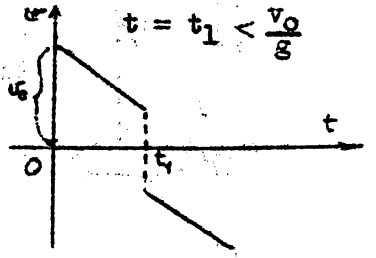
O conceito de derivada lateral é-nos também sugerido por fenómenos do mundo empírico. Assim, tornemos ao exemplo do movimento uniformemente retardado e suponhamos que o corpo antes de atingir a altura máxima encontra um obstáculo (por exemplo o teto); se o choque fôr elástico, a velocidade passa instantâneamente a ter um valor simétrico do que tinha; a ascensão é bruscamente interrompida e o corpo passa nesse instante a descer com a mesma velocidade em valor absoluto. Portanto o ponto Q do gráfico da função correspondente ao instante em que se dá a inversão do movimento é um ponto anguloso (tem duas semi-tangentes); há derivadas laterais diferentes, $v_2 = - v_1$. Examinemos agora o gráfico dás velocidades, isto é, o gráfico da função $v = v_o - gt$.



não havendo choque



havendo choque para $t = t_1 < \frac{v_o}{g}$



Não havendo choque a linha representativa da velocidade é a recta indicada na 1ª figura; havendo choque para $t = t_1 < \frac{v_o}{g}$, a velocidade passa instantaneamente a

ter um valor simétrico do que tinha (passa bruscamente do valor v_1 ao valor $-v_1$) e a linha representativa da velocidade apresenta uma descontinuidade de primeira espécie para $t=t_1$. (Na realidade os fenómenos passam-se de maneira mais complexa; mas é êste o esquema que, em primeira aproximação, nos permite interpretar mais comodamente a realidade).

Nos exemplos que acabámos de estudar existem as derivadas à esquerda e à direita do ponto considerado, mas, noutros casos, podem nem sequer existir essas derivadas como acontece, por exemplo, com a função definida por :

$$f(x)\begin{cases} = x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ = 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}.$$

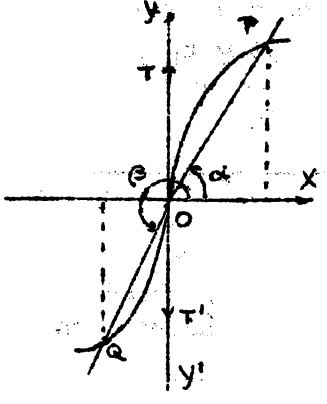
É contínua no ponto zero pois $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ (como se viu atrás). Vejamos se há derivada; a razão incremental é:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - 0} = \frac{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = \operatorname{sen}\frac{1}{x} ;$$

ora, como já vimos atrás, $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não tem limite nem à esquerda nem à direita do ponto zero, portanto não há derivadas laterais da função nêste ponto.

Há exemplos de funções que são contínuas em todos os pontos do seu domínio e que, no entanto, não admitem derivada em nenhum ponto (função de Weierstrass).

Resta-nos considerar alguns exemplos de derivadas infinitas. Seja a função :



$$y = \sqrt[3]{x} ;$$

procuremos a sua derivada no ponto zero:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Quando x tende para zero por valores positivos a secante OP vai tender para a tangente OT≡ OY

e quando x tende para zero por valores negativos a secante OQ vai tender para a tangente $OT' \equiv OY'$. O ângulo α de OP com OX é do 1º quadrante e tende para 90° quando $x \uparrow 0$: logo $\lim_{x \to o} \operatorname{tg} \alpha = +\infty$. Anàlogamente se reconhece que $\lim_{x \to o} \operatorname{tg} \beta = +\infty$, sendo β o ângulo de OQ com OX.

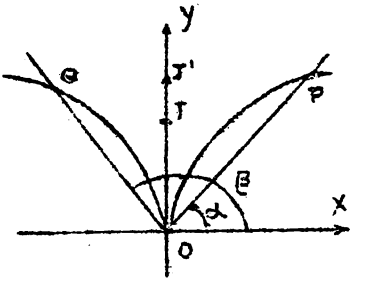
Outro exemplo: seja a função $y = \sqrt[3]{x^2}$. A razão incremental para $x = 0$ é :

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

e

$$\lim_{x \to o^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to o^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to o^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to o^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$



Quando x tende para zero por valores positivos a secante OP tende para a tangente OT e o ângulo α tende para 90° mantendo-se no 1º quadrante; quando x tende para zero por valores negativos a secante OQ tende para a tangente OT' e o ângulo β tende para 90° mantendo-se no segundo quadrante; portanto a derivada à direita é $+\infty$ e a derivada à esquerda é $-\infty$. (As duas semi-tangentes coincidem; o ponto diz-se de reversão).

Podemos escrever simplesmente:

$$\lim_{x \to o} \frac{y}{x} = \infty$$

e dizer que a derivada é infinita com sinal indeterminado.

Máximos e mínimos

A par das noções de máximo e de mínimo tais como foram anteriormente definidas, paresèntam-se ainda as noções de máximo ou de mínimo local.

Diz-se que uma função f(x) tem um máximo local ou relativo no ponto a do seu domínio de existência quando é possível determinar um inteívalo com centro em a no qual o valor f(a) seja máximo. Por outras palavras :

f(x) tem um máximo local em a, quando existe pelo menos um número positivo ε tal que seja :

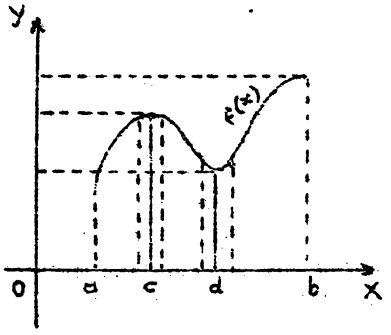
$$f(a) \geq f(x) \qquad \text{para} \qquad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \ ,$$

supõe-se, é claro, que os valores de f(x) são tomados no domínio da função.

Anàlogamente diz-se que f(x) tem um <u>mínimo local</u> ou <u>relativo</u> no ponto a quando é possível determinar um número positivo ε tal que :

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \longrightarrow f(a) \leq f(x) \ .$$

No exemplo gráfico observa-se em c um máximo local e em d um mínimo local, nenhum dos quais é extremo da função no intervalo [a,b]: será apenas possível determinar um intervalo centrado em c onde o valor f(c) seja máximo e um intervalo centrado em d onde o valor f(d) seja mínimo.



Para evitar confusões costumam designar-se por <u>máximo absoluto</u> e <u>mínimo absoluto</u> o máximo e o mínimo duma função no domínio em que se considera definida. É claro que um máximo ou mínimo absoluto também são máximo ou mínimo locais, mas a recíproca não é verdadeira.

Em particular se f(x) é crescente em $[a-\varepsilon, a]$ e decrescente em $[a, a+\varepsilon]$, diz-se que <u>passa de crescente a decrescente</u> no ponto a; nêste caso f(x) tem um máximo local em a. Anàlogamente se a função é decrescente em $[a-\varepsilon, a]$ e crescente em $[a, a+\varepsilon]$, diz-se que <u>passa de decrescente a crescente</u> no ponto a; é claro que então f(x) tem um mínimo local em a.

<u>Definição</u>: Uma função diz-se regular num dado intervalo [a,b] , quando é contínua nesse intervalo, e admite, em cada ponto interior de [a,b] , derivada finita ou infinita com sinal determinado ($+\infty$ ou $-\infty$). (Não se exige portanto que tenha derivada nos extremos do intervalo).

<u>Teorema</u> : "Se uma função regular num intervalo admite um

máximo ou mínimo local num dado ponto interior do intervalo, a sua derivada é nula nesse ponto."

Pretendemos pois provar que se $f(x)$ é regular no intervalo $[a,b]$ e admite um máximo ou um mínimo local num ponto c $(a<c<b)$, será $f'(c) = 0$.

Tendo $f(x)$ um máximo local em c podemos determinar um intervalo $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset [a,b]$ no qual se tenha sempre:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad \text{ou seja} \quad f(x) - f(c) \leqslant 0;$$

então, no intervalo $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, a razão incremental

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{será} \quad \begin{cases} \geqslant 0 & \text{se } x<c \\ \leqslant 0 & \text{se } x>c \end{cases}$$

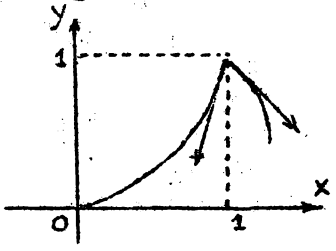
e, portanto,

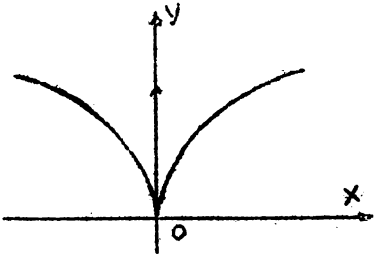
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{k}{h} \geqslant 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{k}{h} \leqslant 0 ;$$

como êstes dois limites têm de ser iguais (pois, por hipótese a função admite em c derivada finita ou infinita de sinal determinado), será necessàriamente:

$$f'(c) = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

Se a função não fôr regular no intervalo $[a,b]$ já pode ser máxima ou mínima num ponto c interior ao intervalo sem que nesse ponto a derivada se anule; é o que acontece com as funções cujos gráficos são os das figuras seguintes:





No primeiro exemplo (caso da função $1 - |x^2-1|$) há um máximo no ponto 1 e não é $f'(1)=0$, nem sequer existe $f'(1)$ pois as derivadas à esquerda e à direita de 1 são diferentes (ponto anguloso). No segundo exemplo (caso da função $y = \sqrt[3]{x^2}$) há um mínimo na origem e não é $f'(0)=0$ pois as derivadas laterais são infinitas de sinais dife-

rentes (ponto de reversão).

Teorema de Rolle: "Se uma função regular no intervalo [a,b] toma o mesmo valor nos extremos dêste intervalo, existirá necessàriamente um ponto interior do mesmo em que a derivada da função é nula."

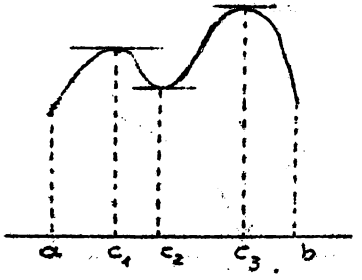
Supondo então f(x) regular em [a,b] com f(a) = f(b) queremos provar que existe pelo menos um ponto c (a < c < b) tal que f'(c) = 0 .

Suponhamos em primeiro lugar que a função é constante em [a,b] : então a sua derivada é nula em todos os pontos do intervalo e o teorema está verificado.

Se a função não é constante em [a,b] um dos seus extremos nêste intervalo (seja, por exemplo, o extremo superior) é diferente de f(a); então existe pelo menos um ponto do intervalo [a,b], onde a função atinge o extremo superior (T.de Weierstrass); seja c êsse ponto. Como $f(c) \neq f(a)$, $f(c) \neq f(b)$, tem de ser c distinto de a e de b, logo $a < c < b$; mas c é de máximo absoluto e portanto de máximo local e como é interior a [a,b] será (pelo teorema anterior):

$$f'(c) = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

A análoga conclusão chagaríamos supondo que o extremo inferior era diferente de f(a). É claro que se os dois extremos fôssem iguais a f(a) = f(b), a função seria constante em [a,b] e estaríamos no primeiro caso.



No caso da figura há três pontos c_1, c_2, c_3 nas condições do teorema de Rolle.(Tangente paralela ao eixo das abscissas) .

Derivadas de ordem superior - Sendo y = f(x) derivável no intervalo]a,b[pode suceder que a sua derivada f'(x) seja por sua vez derivável em]a,b[; à derivada de f'(x) chamaremos 2ª derivada de f(x) e representá-la-emos por y" ou f"(x).

Se f"(x) for, por sua vez, derivável em]a,b[, a sua derivada será a 3ª derivada de f(x):

$$y''' = f'''(x) \ ;$$

e assim sucessivamente. Chamaremos derivada de ordem n de f(x), e representaremos por $f^{(n)}(x)$, a função que se obtem derivando n vezes sucessivas a função f(x) .

Exemplos: a) Se fôr s = f(t) a lei dum movimento, será f'(t) a velocidade e f"(t) a aceleração do movimento, em função do tempo t .

b) Consideremos a função $y = \frac{1}{x}$; teremos sucessivamente:

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = +\frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{2.3}{x^4}$$

$$y^{IV} = +\frac{2.3.4}{x^5}$$

. . . . . .

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

c) Consideremos a função y = sen x; será

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

portanto derivar sen x equivale a somar $\frac{\pi}{2}$ ao seu argumento; então :

$$y'' = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

. . . . . .

$$y^n = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Fórmula de Taylor :

Consideremos a função inteira de n ...

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \ ;$$

temos :

$$p'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \cdots + n\,a_n\,x^{n-1}$$

$$p''(x) = \cdots 2\cdot a_2 + 2\cdot 3\,a_3\,x + \cdots + n(n-1)\,a_n\,x^{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p^{(n)}(x) = n!\,a_n\ ;$$

no ponto x=0, será :

$$p(0) = a_0 \quad p'(0) = a_1 \quad p''(0) = 2!\,a_2 \quad p'''(0) = 3!\,a_3$$

$$\cdots \quad p^{(n)}(0) = n!\,a_n$$

valores êstes que substituidos no polinómio dado conduzem a :

$$p(x) = p(0) + x\,p'(0) + \frac{x^2}{2!}\,p''(0) + \frac{x^3}{3!}\,p'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,p^{(n)}(0)$$

que é a <u>fórmula de Mac-Laurin para os polinómios</u>.

Mais geralmente, pondo $x = a + h$ na expressão de $p(x)$ e desenvolvendo segundo as potências de h, obtem-se um polinómio em h:

$$q(h) = p(a+h)\ .$$

Pelo teorema das funções compostas, será :

$$q'(h) = p'(x)\,\frac{dx}{dh} = p'(a+h),$$

pois que $x = a+h$, $\frac{dx}{dh} = 1$. Analogamente :

$$q''(h) = p''(a+h)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$q^{(n)}(h) = p^{(n)}(a+h)$$

No ponto zero, teremos:

$$q(0) = p(a)$$

$$q'(0) = p'(a)$$

$$q''(0) = p''(a)$$

$$\cdots\cdots$$

$$q^{(n)}(0) = p^{(n)}(a)$$

e, finalmente, aplicando a fórmula de Mac-Laurin:

$$p(a+h) = q(h) = p(a) + h\,p'(a) + \frac{h^2}{2!}p''(a) + \cdots + \frac{h^3}{3!}p'''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}p^{(n)}(a) .$$

que é a fórmula de Taylor para os polinómios.

Esta fórmula dá-nos o desenvolvimento do polinómio segundo as potências de h, isto é, segundo as potências de x-a. Procuremos generalizá-la.

Consideremos para isso uma função f(x) que admita num intervalo $]\alpha,\beta[$ derivadas finitas até à ordem n inclusivé, e sejam a, b dois pontos deste intervalo ($a<b$). Posto isto, procuremos determinar um polinómio p(x) que represente aproximadamente f(x) no intervalo $]\alpha,\beta[$. Mais precisamente o problema pode ser posto dêste modo: Determinar um polinómio p(x) que verifique as seguintes condições :

1) $p(a)=f(a)$, $p'(a)=f'(a)$, $p''(a)=f''(a)$,..., $p^{(n-1)}(a)=f^{(n-1)}(a)$

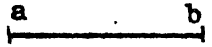
2) $p(b)=f(b)$.

Para o resolver, consideremos a função :

$$\varphi(x) = p(x) - f(x) ;$$

temos, em virtude de 2) e da 1ª das condições 1):

$$\begin{cases} \varphi(a) = p(a) - f(a) = 0 \\ \varphi(b) = p(b) - f(b) = 0 \end{cases}$$

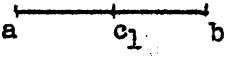


e como é:

$$\varphi'(x) = p'(x) - f'(x)$$

a função $\varphi(x)$ é regular no intervalo [a,b]. Então $\varphi(x)$ está nas condições do teorema de Rolle: é regular em [a,b] e toma o mesmo valor nos extremos a, b ; logo, existe pelo menos um ponto c_1, entre a e b, tal que $\varphi'(c_1)=0$. Temos pois, atendendo às 2ª das condições 1):

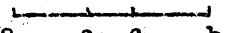
$$\begin{cases} \varphi'(c_1) = 0 \\ \varphi'(a) = p'(a) - f'(a) = 0 . \end{cases}$$



Por outro lado $\varphi''(x) = p''(x) - f''(x)$. A função $\varphi'(x)$ é pois regular em $[a,c_1]$ e toma valores iguais nos extremos; existe portanto, segundo o teorema de Rolle, um ponto c_2, entre a e c_1 tal que $\varphi''(c_2) = 0$.

Temos pois, atendendo à 3ª das condições 1) :

$$\begin{cases} \varphi''(c_2) = 0 \\ \varphi''(a) = p''(a) - f''(a) = 0 \end{cases}$$



Além disso, $\varphi'''(x) = p'''(x) - f'''(x)$. Então $\varphi''(x)$ é regular em $[a,c_2]$ e toma valores iguais nos extremos; logo, existe pelo menos um ponto c_3 $(a < c_3 < c_2)$, tal que $\varphi'''(c_3)=0$.

Raciocinando sempre deste modo chega-se à conclusão de que existe pelo menos um ponto c $(a < c < b)$ onde se anula $\varphi^{(n)}(x)$, isto é, tal que :

$$\varphi^{(n)}(c) = p^{(n)}(c) - f^{(n)}(c) = 0$$

Mas como, por hipótese, p(x) é um polinómio de grau n, a função $p^{(n)}(x)$ é constante, logo

$$p^{(n)}(c) = p^{(n)}(a) = f^{(n)}(c) \ .$$

Utilizando a fórmula de Taylor para o polinómio p(x) e fazendo b-a=h obtemos :

$$f(b) = p(b) = p(a) + h\,p'(a) + \frac{h^2}{2!}\,p''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,p^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}\,p^{(n)}(a)$$

e portanto:

$$f(b) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}\,f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}\,f^{(n)}(c)$$

sendo c um ponto do intervalo [a, a+h], isto é um ponto tal que

$$c = a + \theta\,h,$$

sendo θ um número compreendido entre 0 e 1 $(0 < \theta < 1)$.

É esta a fórmula de Taylor para a função f(x), fórmula que nos propunhamos estabelecer.

É fácil ver que o resultado ainda é válida na hipótese de ser $b<a$.

Suponhamos agora que b é, não um ponto fixo, mas um ponto variável do intervalo $]\alpha,\beta[$, e para salientar êste facto passemos a designá-lo por x. Será então $h = x-a$, o que dá, por substituição na fórmula precedente:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(x_1),$$

sendo x_1 um ponto compreendido entre a e x, isto é :

$$x_1 = a + \theta\,(x-a), \quad \text{com} \quad 0<\theta<1 .$$

É claro que θ depende geralmente de x.

Em particular, se fôr a=0, a fórmula de Taylor toma o seguinte aspecto:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}\,f^{(n)}(\theta x) \quad , \quad 0<\theta<1$$

e recebe então o nome de fórmula de Mac-Laurin .

Um outro caso particular é o de n=1. Tem-se nêste caso:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h\,f'(a+\theta h)} \qquad 0<\theta<1$$

ou ainda :

$$\boxed{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x_1)} \qquad x_1 = a + \theta(x-a)$$

que é a fórmula de Lagrange ou dos acréscimos finitos. Fàcilmente se reconhece que esta fórmula é válida sempre que f(x) é regular num intervalo que contenha os pontos a e x . Podemos então afirmar que :

"A razão incremental de f(x) em a é igual ao valor de f'(x) num ponto compreendido entre a e x, desde que

f(x) seja regular num intervalo que contenha a e x." (teorema de Lagrange).

Uma interpretação mecânica interessante da fórmula de Lagrange é o seguinte: Sendo s=f(t) a lei dum movimento, a razão incremental em t_o :

$$\frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

é, como vimos, a velocidade média entre os instantes t_o, t; a velocidade verdadeira neste intervalo pode variar, aumentando ou diminuindo, mas diz-nos a intuição que deve sempre haver, pelo menos, um instante t_1 entre t_o e t em que a velocidade verdadeira $f'(t_1)$ iguala a velocidade média naquele intervalo, isto é, um instante t_1 tal que

$$\frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o} = f'(t_1)$$

(Por exemplo, se um automóvel, num dado percurso, fez uma média de 60 km/h, houve certamente um instante, pelo menos, em que a velocidade verdadeira foi aquela).

Ora êste facto intuitivo é confirmado pelo teorema de Lagrange, desde que f(t) seja derivável nos intervalos considerados (o que não sucede no caso dum choque)

Consequências do teorema de Lagrange

I - "Se uma função f(x) admite derivada positiva num intervalo, f(x) é crescente nesse intervalo."

Dem.: Suponhamos que a função f(x) é positiva no intervalo [a,b] e sejam x_1, x_2 dois pontos quaisquer do intervalo tais que $x_1 < x_2$; segundo o teorema de Lagrange será:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f'(\xi)$$

sendo ξ um ponto do intervalo $[x_1, x_2]$.

Por hipótese é $x_2 - x_1$ positivo pois $x_1 < x_2$ e $f'(\xi)$ positivo pois f(x) tem derivada positiva no intervalo [a,b]; por consequência a segunda parcela do segundo membro da igualdade anterior é positiva e então :

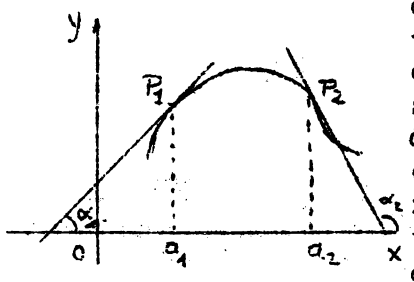
$$f(x_2) > f(x_1) \quad .$$

Concluímos assim que sempre que se tenha $x_1 < x_2$ sendo x_1, x_2 pontos do intervalo $[a,b]$, tem-se necessàriamente $f(x_1) < f(x_2)$; ora isto quere dizer que $f(x)$ é crescente em $[a,b]$. q.e.d.

II - "Se uma função $f(x)$ admite derivada negativa num intervalo, $f(x)$ é decrescente nesse intervalo".

A demonstração é análoga à precedente.

Nota : Estes teoremas tornam-se intuitivos com a representação gráfica. Se a derivada é positiva em todos os pontos dum intervalo, o ângulo da tangente ao gráfico com o semi-eixo OX está no primeiro quádrante e portantò a função cresce (Posição P_1). Se a derivada é negativa, o ângulo da tangente com o semi-eixo OX está no segundò quadrante e portanto a função decresce (posição P_2) .



III - "Se uma função $f(x)$ tem derivada nula num intervalo $[a,b]$, $f(x)$ reduz-se a uma constante nesse intervalo."

Dem.: Sejam x_1, x_2 dois pontos quaisquer de $[a,b]$; pelo teorema de Lagrange temos:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f'(\xi)$$

sendo ξ um ponto interior a $[x_1,x_2]$; como, por hipótese a derivada é nula em todo o intervalo $[a,b]$ é $f'(\xi) = 0$ e portanto :

$$f(x_2) = f(x_1)$$

quaisquer que sejam os pontos x_1, x_2 de $[a,b]$; logo a função é constante em todo o intervalo $[a,b]$.

Esta proposição é a recíproca desta outra que já conheciamos :

"A derivada duma constante é zero".

Daqui resulta ainda o seguinte :

Corolário: "Se duas funções $f(x)$, $g(x)$ têm derivadas finitas e iguais num certo intervalo diferem por uma

constante nesse intervalo."

Seja, por hipótese, $f'(x) = g'(x)$ no intervalo $[a,b]$ e consideremos a função :

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) \ ;$$

será:

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x)$$

desde que as derivadas das funções $f(x)$, $g(x)$ sejam finitas no intervalo $[a,b]$; como estas derivadas coincidem, virá:

$$\varphi'(x) = 0 \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

e, pelo teorema anterior:

$$\varphi(x) = \text{constante} = C, \qquad \ldots$$

isto é:

$$f(x) - g(x) = C \qquad \text{q.e.d.}$$

Conceito de diferencial de ordem n

Já vimos que para a função $y = f(x)$ com derivada finita, se define o diferencial dy pela fórmula :

$$dy = f'(x)\,dx \ ,$$

sendo dx um acréscimo arbitrário de x.

Supondo que $f(x)$ admite segunda derivada finita, o 2º diferencial de $f(x)$ será, por definição, o diferencial do diferencial de $f(x)$, isto é :

$$d^2y = d(dy) = d\left[f'(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\left[f'(x)\,dx\right]dx$$

Ora o acréscimo dx é independente de x e portanto, na derivação em ordem a x comporta-se como uma constante; então

$$\frac{d}{dx}\left[f'(x)\,dx\right] = f''(x)\,dx$$

e portanto:

$$\boxed{d^2y = f''(x)\,dx^2}$$

Dum modo geral, o diferencial de ordem n de $y=f(x)$ será:

$$\boxed{d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n} \ ;$$

o que nos conduz a uma nova maneira de representar a de-

rivada de ordem n de x :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} .$$

(Notemos que os nn não estão colocados da mesma maneira: no numerador o n está como expoente de d ao passo que no denominador está como expoente do dx).

Em face desta conclusão a fórmula de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + \frac{1}{2!} f''(x)\,h^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).h^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) \qquad 0 < \theta < 1$$

pode tomar o seguinte aspecto:

$$f(x+dx) = f(x) + d\,f(x) + \frac{1}{2!} d^2 f(x) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(x) + \frac{1}{n!} d^n f(x+\theta\, dx) . \quad 0<\theta<1$$

Zeros duma função

Entende-se por zero ou raiz duma função f(x) toda a raiz da equação f(x) = 0, isto é, todo o valor de x que anula a função.

Em todas as considerações que vão seguir-se suporemos que f(x) é uma função contínua no seu domínio de existência.

Diz-se que a é um zero simples de f(x) quando a razão $\frac{f(x)}{x-a}$ tende para um limite finito e diferente de zero ao tender de x para a, isto é, quando f(x) e x-a são infinitésimos da mesma ordem (com x-a) .

Anàlogamente diz-se que a é um zero duplo de f(x) quando a razão $\frac{f(x)}{(x-a)^2}$ tende para um limite finito e diferente de zero ao tender de x para a, isto é quando f(x) e $(x-a)^2$ são infinitésimos da mesma ordem (com x-a).

Dum modo geral, sendo n um número inteiro e positivo diz-se que a é um zero de ordem n de f(x) quando a razão $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ tende para um limite finito e diferente de zero

ao tender de x para a, isto é quando f(x) e $(x-a)^n$ são infinitésimos da mesma ordem (com x-a).

Exemplos: 2 é um zero da função $f(x) = x^2 - 7x + 10$, pois $f(2) = 4 - 14 + 10 = 0$; vejamos qual a sua ordem; tem-se:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-5)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x-5) = -3$$

e como êste limite é finito e diferente de zero, 2 é um zero simples da função considerada.

Seja agora a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$; admite ainda 2 como zero, pois que $f(2) = 4 - 8 + 4 = 0$; por outro lado a razão :

$$\frac{f(x)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x-2} = x - 2$$ tende para zero,

ao tender de x para 2 e portanto 2 não é zero simples; mas:

$$\frac{f(x)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2} = 1$$ e portanto o

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2} = 1 \neq 0, \infty,$$ logo 2 é zero duplo.

Seja ainda a função f(x) = sen x que tem como raiz o número 0; por outro lado tem-se, como vimos atrás:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 0, \infty ,$$

e portanto 0 é uma raiz simples da função sen x .

Pode acontecer que sendo f(a) = 0, não exista nenhum número inteiro e positivo n tal que a razão:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}$$

tenda para um limite finito e diferente de zero; diz-se então que a não é zero de ordem inteira de f(x).

Quando o zero fôr de ordem inteira maior do que 1, dir-se-á zero múltiplo.

Teorema -"Condição necessária e suficiente para que a seja zero de ordem n da função f(x) é que esta se possa escrever sob a forma :

$$f(x) = (x-a)^n . \varphi(x) ,$$

sendo $\varphi(x)$ uma função contínua que não se anula no ponto a."

1) A condição é suficiente . Com efeito, se é $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, com $\varphi(x)$ contínua e $\varphi(a) \neq 0$, ter-se-á $\varphi(a) \neq \infty$ (por $\varphi(x)$ ser contínua em a) e por outro lado:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a) \neq 0, \infty .$$

e portanto a é um zero de ordem n de f(x).

2) A condição é necessária Com efeito, suponhamos que a é um zero de ordem n de f(x); ter-se-á:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = K \neq 0, \infty \quad .$$

Então, se definirmos a função $\varphi(x)$ do seguinte modo:

$$(1) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} & \text{se } x \neq a \\ K & \text{se } x = a \end{cases} ,$$

é claro que $\varphi(x)$ será contínua para todos os valores de x, pois que para $x \neq a$ é o cociente de duas funções contínuas, sendo o divisor diferente de zero, e além disso:

$$\varphi(a) = K = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

isto é, $\varphi(x)$ também é contínua no ponto a.

Finalmente de (1) deduz-se :

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$$

e assim fica provado o que pretendíamos.

Convenção - Para comodidade de linguagem, chamaremos vizinhança de a aos intervalos com centro em a. Portanto a expressão "vizinhança de a", será apenas uma abreviatura de "intervalo com centro em a".

Teorema - "Supunhamos que f(x) admite derivadas finitas e contínuas até à ordem n inclusive, numa vizinhança de a. Então, condição necessária e suficiente para que a seja um zero de ordem n de f(x) é que se tenha :

$$f(a)=0, \quad f'(a)=0, \quad f''(a)=0, \quad \ldots , \quad f^{(n-1)}(a)=0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0."$$

isto é, que sejam nulas em a todas as derivadas até à ordem n-1 e que a derivada de ordem n seja diferente de zero no ponto a :

Dem.: Verificada a hipótese podemos aplicar a fórmula de Taylor a f(x) numa vizinhança de a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(\xi)$$

sendo ξ um ponto compreendido entre a e x; então, supondo $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, fica :

$$(1) \qquad f(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(\xi)$$

Mas como ξ está compreendido entre a e x ter-se-á $\lim_{x \to a} \xi = a$; então, sendo a função $f^{(n)}(x)$ contínua em a, virá $\lim_{x \to a} f^{(n)}(\xi) = \lim_{\xi \to a} f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(a) \neq 0$.

Portanto na fórmula (1) o factor $\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\xi)$ é uma função contínua de x que não se anula no ponto a, o que, pelo teorema anterior, significa que a é um zero de ordem n de f(x) . q.e.d.

É fácil ainda estabelecer o seguinte:

Teorema - "Se n é um número inteiro maior que 1, todo o zero de ordem n de f(x) é um zero de ordem n-1 de f'(x)."

Apliquemos os teoremas anteriores a alguns exemplos:

a) Sabemos que π é um zero de sen x; vejamos qual a sua ordem; temos:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f(\pi) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \qquad f'(\pi) = -1 \neq 0$$

logo o zero é simples, pois como vimos a ordem do zero é a ordem da primeira derivada que se não anula nesse ponto (sendo as derivadas contínuas).

b) Seja a função 1 - cos x ; tem-se :

$$f(x) = 1 - \cos x \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = \cos x \qquad f''(0) = 1 \neq 0$$

logo o número 0 é um zero de ordem 2 (zero duplo) da função 1-cos x .

Teorema -"Se a é um zero de ordem impar de f(x), esta função muda de sinal quando x passa por a. Se a é um zero de ordem par de f(x) esta função mantêm sinal fixo numa vizinhança de a (excepto no ponto a onde f(x) se anula)".

Dem.: Suponhamos em primeiro lugar que a é um zero de ordem n impar de f(x); ter-se-á:

(1) $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$

com $\varphi(x)$ contínua e $\varphi(a) \neq 0$ (n impar) .

Seja ε um número positivo menor que $|\varphi(a)|$; dada a continuidade de $\varphi(x)$ no ponto a podemos determinar um número δ positivo, de modo que quando x varie entre $a-\delta$ e $a+\delta$, a função $\varphi(x)$ fique compreendida entre $\varphi(a)-\varepsilon$ e $\varphi(a)+\varepsilon$, isto é, de modo que :

$$a-\delta < x < a+\delta \longrightarrow \varphi(a)-\varepsilon < \varphi(x) < \varphi(a)+\varepsilon ,$$

mas como $\varepsilon < |\varphi(a)|$, os números $\varphi(a)-\varepsilon$ e $\varphi(a)+\varepsilon$ têm ambos o sinal de $\varphi(a)$ e o mesmo acontecerá portanto a $\varphi(x)$, desde que $a-\delta < x < a+\delta$. Suponhamos pois que x se mantem neste intervalo; então:

1) Se $x < a$, tem-se $x-a < 0$ e também $(x-a)^n < 0$ (por ser n impar); então, segundo (1), f(x) terá sinal contrário ao de $\varphi(x)$ e portanto ao de $\varphi(a)$; então com $x < a$ e n impar têm f(x) sinal contrário ao de $\varphi(a)$.

2) Se $x > a$, tem-se $x-a > 0$ e também $(x-a)^n > 0$; então f(x) terá o mesmo sinal que $\varphi(a)$.

Em resumo: f(x) tem antes de a sinal contrário ao de $\varphi(a)$ e depois de a o mesmo sinal que $\varphi(a)$; logo muda de sinal ao passar por a. q.e.d.

Consideremos agora o caso em que n é par. Suponhamos que x varia no intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ atrás indicado. Quer seja $x < a$, quer seja $x > a$, será sempre $(x-a)^n > 0$, por ser n par; logo quer antes, quer depois de a - numa vizinhança deste ponto - f(x) tem sempre o sinal de $\varphi(a)$. Portanto f(x) mantem sinal fixo numa vizinhança de a, para $x \neq a$. q.e.d.

Indeterminações

Vimos atrás que os teoremas sôbre limites nem sempre nos permitem determinar o limite duma dada sucessão: em certos casos, somos conduzidos a expressões tais como:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ 0\times\infty\ ,\ \infty-\infty,\ \ldots$$

que são destituidas de significado numérico e a que chamaremos <u>símbolos de indeterminação</u>.

Pode também suceder que, dada uma expressão analítica $f(x)$, ao substituir x por certo valor a, se chegue a um dêstes resultados; diremos então que a função $f(x)$ é <u>indeterminada no ponto a</u> (não é definida neste ponto).

Se existir o $\lim_{x\to a} f(x)$ e o conseguirmos determinar, diremos que se <u>levantou a indeterminação</u> e a êste limite chamaremos <u>verdadeiro valor</u> ou <u>valor natural</u> da função $f(x)$ no ponto a.

É preciso salientar que, se a expressão analítica dada conduz a uma indeterminação no ponto a, a função não está definida nesse ponto; mas <u>convenciona-se</u> depois atribuir-lhe como valor no ponto a o limite para que tende ao tender de x para a (se êsse limite existe); dêste modo, a função resulta contínua em a, se o limite á finito: $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

<u>Exemplo</u>: Se na expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ atribuirmos a x o valor 0, esta expressão toma a forma $\frac{0}{0}$ que não tem significado numérico; no entanto, como se tem $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ podemos convencionar que a função defenida por aquela expressão toma no ponto 0 o valor 1 e assim a função, além de ficar definida, fica também contínua nesse ponto.

Vejamos agora como levantar as indeterminações dos tipos anteriores.

<u>1º Caso</u> - Forma $\frac{0}{0}$. Consideremos uma função $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ sendo $\varphi(a) = \psi(a) = 0$; para $x=a$, a função $f(x)$ assume a forma $\frac{0}{0}$. Suponhamos que, numa vizinhança de a, as funções $\varphi(x), \psi(x)$ admitem derivadas contínuas até à ordem

que fôr necessário considerar e seja n a ordem das primeiras derivadas daquelas funções que se não anulam simultâneamente em a. Então, como as derivadas de φ e ψ no ponto a são nulas até à ordem n-1, a fórmula de Taylor dá-nos :

$$\varphi(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\,\varphi^{(n)}(\xi) \quad ,$$

$$\psi(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\,\psi^{(n)}(\eta)$$

sendo ξ e η pontos compreendidos entre a e x.

Dividindo ordenadamente as igualdades anteriores vem:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{\psi^{(n)}(\eta)} \quad ;$$

mas, por outro lado, $\lim_{x\to a} \xi = \lim_{x\to a} \eta = a$ e como as derivadas $\varphi^{(n)}(x)$ e $\psi^{(n)}(x)$ são contínuas, virá:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}}$$

Esta igualdade traduz a regra de L'Hôpital: "Derivem-se os dois termos da fracção sucessivamente até encontrar as primeiras derivadas $\varphi^{(n)}(x)$, $\psi^{(n)}(x)$, que se não anulem simultâneamente no ponto a (se tal é possível); o cociente de $\varphi^{(n)}(a)$ por $\psi^{(n)}(a)$ dá-nos o verdadeiro valor da fracção no ponto a."

É claro que êste cociente já não será da forma $\frac{0}{0}$ (porque as funções $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$ não se anulam simultâneamente em a) nem da forma $\frac{\infty}{\infty}$ (porque as funções $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$ se supõem contínuas e portanto finitas em a); mas pode chegar-se ao resultado $\frac{k}{0}$, com $k \neq 0$, e então o limite será ∞ .

Esta regra pode generalizar-se: "Se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ são funções regulares numa vizinhança de a e se $\varphi(a)=\psi(a)=0$ ou $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$, então :

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

mesmo na hipótese de ser a=∞." Não demonstraremos êste resultado. Notemos apenas que êle permite aplicar à regra de L'Hôpital às indeterminações da forma ∞/∞ .

2º caso - Forma 0×∞. Consideremos uma função do tipo $\varphi(x)\cdot\psi(x)$, com $\varphi(a) = 0$ e $\psi(a) = \infty$; podemos então escrever:

$$\varphi(x)\cdot\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$$

e teremos assim uma fracção que para x=a assume a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, o que nos conduz ao primeiro caso.

3º caso - Forma ∞ - ∞. Consideremos uma função do tipo $\varphi(x) - \psi(x)$ com $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$; podemos então escrever

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\cdot\psi(x)}}.$$

e como esta fracção para x=a toma também a forma $\frac{0}{0}$, somos novamente conduzidos ao 1º caso.

Exemplos : a) Seja a função:

$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ que para x=0 assume, como fàcilmente se reconhece, a forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Derivando ambos os termos da fracção (não a fracção!), obtemos esta outra :

$\frac{\operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}$ que para x=0 ainda toma a forma 0/0; tornando a derivar ambos os termos da fracção, obtem-se :

$\frac{\cos x}{2 \cos 2x}$ que para x=0 toma o valor 1/2 .

Então será:

$$\lim_{x\to a}\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos 0}{2 \cos 0} = \frac{1}{2};$$

o verdadeiro valor da função dada, para x=0, é pois 1/2.

b) Seja agora a expressão $\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{1}{x}$ que, para x=0, assume a indeterminação $\infty - \infty$; como :

$$\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x}$$ que toma a forma 0/0, para x=0, derivando ambos os membros desta fracção obtemos esta outra:

$$\frac{1 - \cos x}{\text{sen } x + x \cos x}$$ que para x=0 ainda toma a forma 0/0;

Procedendo do mesmo modo, tem-se a expressão :

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x}$$ que para x=0 toma o valor $\frac{0}{2} = 0$

então é :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{1}{x} \right) = \left(\frac{\text{sen } x}{2 \cos x - x \text{ sen } x} \right)_{x=0} = 0$$

c) Consideremos finalmente a função :

$\frac{\text{tg } 5x}{\text{tg } x}$ que para $x = \frac{\pi}{2}$ assume a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Procedendo como anteriormente, temos a fracção :

$$\frac{5 \sec^2 5x}{\sec^2 x} = \frac{5 \cos^2 x}{\cos^2 5x}$$ que para $x=\pi/2$ toma a forma 0/0.

Derivando novamente ambos os termos da fracção, obtem-se a fracção:

$$\frac{-5 \cdot 2 \cos x \text{ sen } x}{-2 \cos 5x \text{ sen } 5x \cdot 5}$$ que para $x=\pi/2$ toma ainda a forma 0/0.

Derivando outra vez ambos os termos da fracção vem:

$$\frac{-\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{-5 \text{ sen}^2 5x + 5 \cos^2 5x}$$ que para $x=\pi/2$ toma o valor 1/5

É pois $\frac{1}{5}$ o verdadeiro valor da função dada para $x=\pi/2$.

Máximos e mínimos

Recordemos as noções de máximo e de mínimo locais: Diz-se que uma função f(x) tem um máximo local no ponto

a quando existe uma vizinhança de a na qual f(a) é o máximo valor de f(x); anàlogamente a função f(x) tem um mínimo local no ponto a quando existe uma vizinhança de a na qual f(a) é o mínimo de f(x).

Teorema : "Suponhâmos que f(x) admite derivada numa vizinhança do ponto a. Então:

1º) - Se f'(x) passa de positiva a negativa quando x passa por a, a função f(x) tem um máximo local no ponto a

2º) - Se f'(x) passa de negativa a positiva quando x passa por a, a função f(x) tem um mínimo local no ponto a

3º) - Se f'(x) mantem sinal fixo numa vizinhança de a (anulando-se quando muito nêste pontò) a função f(x) não tem máximo nem mínimo local em a.

Dem.: Suponhamos que f'(x) é positiva no intervalo $]a-\delta,a[$ e nagativa no intervalo $]a,a+\delta[$; então a função f(x) é crescente no primeiro intervalo e decrescente no segundo, portanto, passando de crescente a decrescente quando x passa por a, tem um máximo local nesse ponto.

Anàlogamente, se f'(x) é negativa em $]a-\delta,a[$ e positiva em $]a,a+\delta[$ a função f(x) é decrescente no 1º intervalo e crescente no 2º e portanto, como passa de decrescente a crescente quando x passa por a, tem um mínimo local nesse ponto.

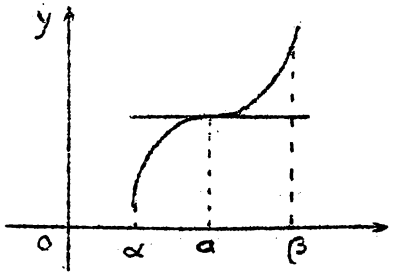
Finalmente se f'(x) tem o mesmo sinal em $]a-\delta,a[$ e $]a,a+\delta[$, ou é positiva em ambos os intervalos e portanto f(x) é crescente em todo o intervalo $]a-\delta,a+\delta[$ ou é negativa em ambos os intervalos e f(x) é decrescente em $]a-\delta,a+\delta[$; em qualquer dos casos, portanto, não tem máximo nem mínimo local em a q.e.d.

Recordemos por outro lado que, se a função f(x) é regular num intervalo $[\alpha,\beta]$ e se tem um máximo ou um mínimo local num ponto a interior a êste intervalo, a sua derivada anula-se nesse ponto. (Tambem vimos que se a função não é regular, pode ter um máximo local, ou um mínimo local num pontó interior sem que a sua derivada se anule nesse ponto).

Por outras palavras:

"Condição necessária para que uma função regular num intervalo tenha um máximo ou um mínimo local num ponto interior dêsse intervalo é que a sua derivada se anule nêsse ponto."

A condição é necessária mas não suficiente; a derivada pode anular-se em a sem que aí haja máximo ou mínimo local (caso da figura, em que a tangente à curva no ponto de abscissa a é paralela ao eixo dos xx, atravessando a curva).



Para determinar os pontos extremantes duma função regular, isto é, os pontos de máximo ou mínimo local, a primeira coisa a fazer é resolver a equação:

$$f'(x) = 0 \ ,$$

cujas raizes se dizem pontos de estacionaridade de f(x).

Em seguida para ver quais destes pontos são efectivamente extremantes podemos servir-nos do seguinte:

Teorema - "São pontos de máximo ou mínimo local de f(x) os zeros de ordem impar da primeira derivada".

(Trata-se duma condição suficiente mas não necessária).

Dem.: Seja a um zero de ordem impar de f'(x) interior a $[\alpha, \beta]$. Já demonstramos que nestas condições f'(x) muda de sinal quando x passa por a e portanto haverá máximo ou mínimo nesse ponto. (Se fôsse um zero de ordem par, f'(x) não mudava de sinal ao passar x por a e portanto o ponto a não era extremante).

Vimos que se a é um zero de ordem n de f'(x) é

$$f'(x) = (x - a)^n \varphi(x) \tag{1}$$

com $\varphi(x)$ continua e diferente de zero para x = a; por ser $\varphi(x)$ continua, tem o sinal de $\varphi(a)$ quando x pertence a uma vizinhança de a; mas :

$$\varphi(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{(x-a)^n}$$

que toma a forma 0/0; recorrendo à regra de L'Hôpital, derivando n vezes o numerador e o denominador, obtemos:

$$\varphi(a) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}$$

é como n! é positivo o sinal de $\varphi(a)$ é o de $f^{(n+1)}(a)$.

Suponhamos em 1º lugar que $f^{(n+1)}(a) > 0$ e portanto $\varphi(x) > 0$ numa vizinhança de a; se n é impar, $(x-a)^n$ é negativo à esquerda e positivo à direita de a e o mesmo sucede a f'(x): portanto há um mínimo em a.

f'(x)	-	a	+
f(x)	↘		↗

mín.

Se $f^{(n+1)}(a) < 0$ conclue-se anàlogamente que existe um máximo em a

f'(x)	+	a	-
f(x)	↗		↘

Máx.

Em conclusão : a será um ponto de máximo ou de mínimo local se a primeira derivada que se não anula em a fôr de ordem par: - máximo se o valor desta derivada fôr negativo, e mínimo se o valor desta derivada fôr positivo."

"Se a primeira derivada que se não anula em a fôr de ordem impar não haverá máximo nem mínimo local em a: a função será crescente se o valor desta derivada é positivo, e decrescente se êste valor é negativo.

Exemplos : Seja a função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$; tem-se: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$. Pondo $f'(x) = 0$, vem:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Os pontos de estacionaridade são 1 e 2; vejamos se serão pontos extremantes.

Como são zeros simples da primeira derivada são de facto pontos extremantes: f'(x) passa de positiva a negativa no ponto 1 → máximo local em 1; f'(x) passa de negativa a positiva em 2 → mínimo local em 2.

Podemos chegar a esta mesma conclusão procurando qual a primeira derivàda da função que se não anula em cada um dêstes pontos. Tem-se $f''(x) = 12x^2 - 18$ e portanto:

$f''(1) = 12 - 18 = -6$; derivada negativa de ordem par → → máximo no ponto 1

$f''(2) = 24 - 18 = 6$; derivada positiva de ordem par → → mínimo no ponto 2 .

2º Exemplo: Seja a função :

$$f(x) = x - \text{sen } x \ ;$$

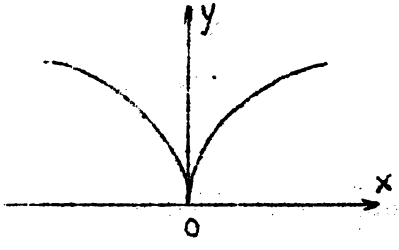
temos $f'(x) = 1 - \cos x = 0$ ou seja $\cos x = 1 \rightarrow x = 2n\pi$; portanto os pontos de estacionaridade são os pontos $2n\pi$ (n inteiro) . Como $f''(x) = \text{sen } x$ e $\text{sen } 2n\pi = 0$ nada podemos concluir por enquanto. Vejamos o que se passa com a terceira derivada:

$$f'''(x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad \cos 2n\pi = 1 \ ;$$

então, a primeira derivada que se não anula nos pontos $2n\pi$ é de ordem impar e portanto não há máximo nem mínimo nêsses pontos (os zeros de $f'(x)$ são zeros de ordem par).

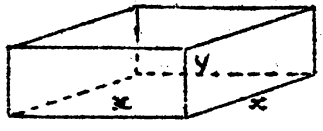
3º Exemplo: Seja a função $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$; tem-se $f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, função esta que se anula apenas para $x=0$, passando de negativa a positiva nesse ponto; logo, há um mínimo de $f(x)$ no ponto 0.

4º Exemplo: Seja a função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Como já se viu atrás, esta função não é regular em nenhuma vizinhança do ponto 0, porque admite a derivada $+\infty$ à direita de zero e a derivada $-\infty$ à esquerda de zero, mas a função $f'(x) = \frac{2}{3}\, x^{-1/3}$ passa de negativa a positiva no ponto 0 (em que se torna infinita); há portanto um mínimo de $f(x)$ no ponto 0.



Exemplos concretos de máximos e mínimos

1º Problema : Pretende-se construir uma caixa de fôlha-de flandres, de base quadrada, sem tampa, com uma dada capacidade v; determinar as dimensões da caixa de modo que a quantidade de material a empregar seja mínima.



Designando por x o lado da base e por y a altura temos:

$$v = x^2 y \quad \text{ou seja} \quad y = v/x^2$$

e como a área total é:

$$S = x^2 + 4\,x\,y, \quad \text{será} \quad \boxed{S = x^2 + \frac{4\,v}{x}}$$

O nosso problema consiste então em determinar x de modo que a função S de x seja mínima.

Apliquemos a teoria dos máximos e mínimos; a 1ª derivada da função é :

$$S' = 2x - \frac{4\,v}{x^2} \;;$$

igualando S' a zero, vem sucessivamente :

$$2x - \frac{4\,v}{x^2} = 0\,, \quad x^3 - 2v = 0\,, \quad x = +\sqrt[3]{2\,v}\,.$$

Por outro lado, tem-se :

$$S'' = 2 + 4\,v\,\frac{2}{x^3} = 2 + \frac{8\,v}{x^3}$$

e como x só pode ter, neste caso, valores positivos, será sempre $S''>0$. Então S' será sempre crescente e, visto que se anula para $x = \sqrt[3]{2v}$, será negativa para $x < \sqrt[3]{2v}$ e positiva para $x > \sqrt[3]{2v}$. Logo a função S tem um <u>mínimo absoluto</u> no ponto $\sqrt[3]{2v}$. Conclusão : as dimensões da caixa devem ser $x = \sqrt[3]{2v}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}$, isto é, a <u>altura deve ser igual a metade do lado da base</u> .

<u>2º Problema</u> : Determinar um ponto duma recta tal que a soma das suas distâncias a dois pontos dados seja mínima.

Suporemos os dois pontos A e B situados do mesmo lado da recta. Tomemos a recta para eixo dos xx e uma perpendicular a esta recta, passando por A, para eixo dos yy. Sejam x a abscissa de P, ℓ a abscissa de B e a,b respectivamente, as ordenadas de A e de B. Pretendemos determinar o ponto P de modo que a soma $\overline{AP} + \overline{BP} = f(x)$ seja mínima. Temos :

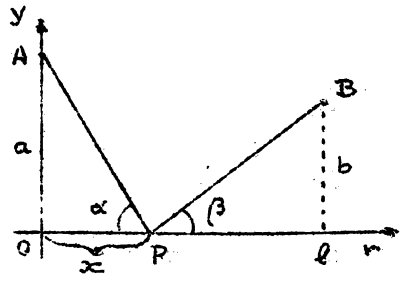
$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x-\ell)^2 + b^2}$$ (tomando as raizes com o sinal +)

$$f'(x) = \frac{\ell\, x}{\ell\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{\ell\,(x-\ell)}{\ell\sqrt{(x-\ell)^2+b^2}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} + \frac{\sqrt{(x-\ell)^2+b^2} - \dfrac{(x-\ell)^2}{\sqrt{(x-\ell)^2+b^2}}}{(x-\ell)^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} + \frac{b^2}{\sqrt{[(x-\ell)^2+b^2]^3}}$$

função esta que é sempre positiva.



Os pontos possíveis de máximo ou de mínimo são os que anulam $f'(x)$. Mas os valores de x que anulam $f''(x)$ são os que fazem:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\ell - x}{\sqrt{(x-\ell)^2+b^2}} \;;$$

por outro lado, sendo α e β os ângulos indicados na figura, tem-se, como é fácil de ver :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \cos\alpha \qquad \frac{\ell - x}{\sqrt{(x-\ell)^2+b^2}} = \cos\beta$$

portanto os valores de x que anulam $f'(x)$ são os que tornam :

$$\cos\alpha = \cos\beta \quad \text{ou seja} \quad \alpha = \beta$$

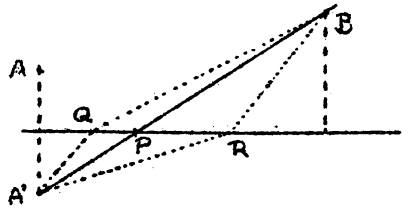
e como se tem $f''(x) > 0$ qualquer que seja x, segue-se que $f'(x)$ é sempre negativa antes de se anular e sempre positiva depois de se anular. Há, portanto, um só zero de $f'(x)$ e aí $f(x)$ tem um mínimo absoluto. Podemos então afirmar que a soma $\overline{AP} + \overline{BP}$ é mínima quando $\alpha = \beta$.

Este resultado relaciona-se com o princípio de Fermat, chamado "princípio do tempo mínimo": O trajecto dum raio luminoso em determinadas circunstâncias é sempre determinado pela condição de que êsse trajecto se efectue num tempo mínimo.

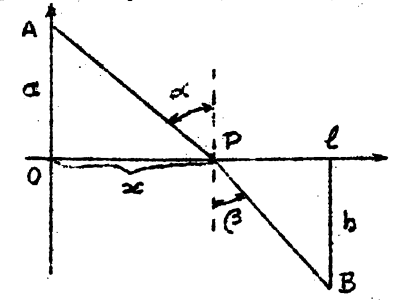
M.G. 2º v. f.17

Suponhamos, por exemplo, que o raio luminoso deve ir do ponto A ao ponto B, tocando na recta r (esquemàticamente é esta a situação que se apresenta no caso da reflexão num espelho plano); ora, se a velocidade da luz é constante, o resultado anterior diz-nos que a duração do trajecto é mínima quando o ângulo de incidência, $90^o-\alpha$, é igual ao ângulo de reflexão, $90^o-\beta$, - exactamente o mesmo que nos diz a lei da reflexão.

Podíamos determinar geomètricamente o ponto P notando que a distância de qualquer ponto da recta ao ponto A e ao simétrico A' dêste em relação à recta, é a mesma; então o ponto procurado é a intersecção da recta dada com a recta A'B pois para qualquer outro ponto o percurso total é maior que $\overline{A'B}$ por ser a soma de dois lados dum triângulo do qual $\overline{A'B}$ é o terceiro lado.



3º Problema: Num plano são dadas uma recta r e dois pontos A, B situados de lados opostos de r. Supõe-se que a velocidade da luz no semi-plano que contem A é igual a v_1 (constante), e que no semiplano que contém B é constante e igual a v_2. Pretende-se determinar sôbre r um ponto P tal que o tempo gasto pela luz para ir de A a B, passando por P, seja mínimo.



Ora os tempos gastos nos trajectos AP e PB são respectivamente :

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} \quad , \quad \frac{\sqrt{(x-\ell)^2+b^2}}{v_2}$$

trata-se portanto de procurar o mínimo da função

$$T(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(x-\ell)^2+b^2} \ .$$

Derivando vem :

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-\ell}{v_2\sqrt{(x-\ell)^2+b^2}},$$

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1\sqrt{(x^2+a^2)^3}} + \frac{b^2}{v_2\sqrt{[(\ell-x)^2+b^2]^3}},$$

função esta que é sempre positiva. A função $T'(x)$ é pois crescente, e como se tem $T'(0)<0$, $T'(\ell)>0$, segue-se que esta função se anula uma vez só num ponto x situado entre 0 e ℓ, tal que :

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\ell-x}{v_2\sqrt{(\ell-x)^2+b^2}}$$

isto é, tal que :

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

portanto o tempo $T(x)$ é mínimo, quando e só quando esta última igualdade se verifica - o que está de acôrdo com a lei de refracção .

Outros exemplos : Propõe-se ao aluno a resolução dos seguintes problemas:

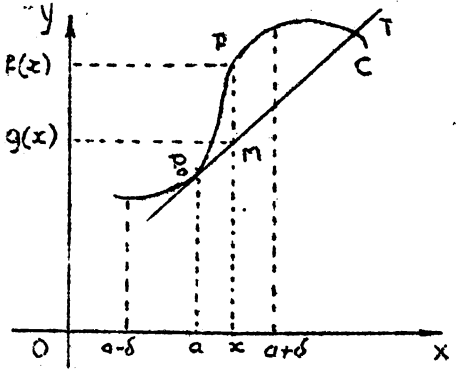
1) Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica com a capacidade de 1000 litros. Os materiais da parede lateral custam 2/3 do que custam os das bases (por unidade de área). Determinar o raio a dar à caldeira para que a despeza seja mínima.

2) A fôrça exercida por uma corrente eléctrica circular de raio a sôbre um pequeno íman cujo eixo coincide com o do círculo é dada pela expressão $x\,(a^2+x^2)^{-5/2}$, sendo x a distância do íman ao plano do círculo. Demonstrar que a fôrça é máxima quando $x=a/2$.

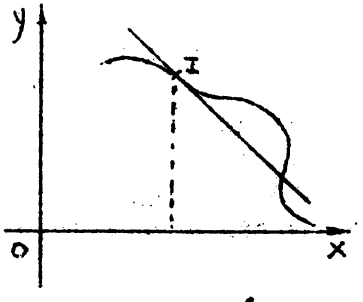
3) O alcance duma arma de fogo é dado pela expressão $v_o^2\, g^{-1} \operatorname{sen} 2\theta$, sendo v_o a velocidade inicial e g a aceleração da gravidade. Determinar o ângulo θ sob o qual o projectil deve ser lançado para que o alcance seja máximo .

Concavidade - Pontos de inflexão

Consideremos uma função f(x) que admita derivada finita num intervalo $]\alpha,\beta[$; já sabemos que a curva C representativa duma tal função admite tangente em todos os seus pontos, sendo o coeficiente angular da tangente o valor da derivada na abscissa do ponto de tangência.



Consideremos um ponto P_0 de abscissa a e a tangente à curva nesse ponto; diz-se que a curva C é concava para cima no ponto P_0 (ou tem a concavidade voltada para cima em P_0), se existe um número $\delta > 0$ tal que, para x situado entre $a-\delta$ e $a+\delta$, a curva fica toda acima da tangente; diz-se que C é concava para baixo em P_0 (ou tem a concavidade voltada para baixo em P_0) se existe um número $\delta>0$ tal que; para $x\in]a-\delta,a+\delta[$, a curva fica toda para baixo da tangente. Finalmente diz-se que a curva C tem em P_0 um ponto de inflexão quando existe um número δ positivo tal que a curva fica para um lado da tangente ou para o outro lado conforme x está situado entre $a-\delta$ e a ou entre a e $a+\delta$. O ponto I da figura é um ponto de inflexão; é claro que a tangente à curva num ponto de inflexão atravessa a curva.



Para o estudo analítico da concavidade e dos pontos de inflexão, comecemos por observar que a imagem geométrica da função:

$$g(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a)$$

é a tangente à curva no ponto P_0 (de abscissa a); com efeito: 1) g(x) é uma função linear; 2) o seu gráfico é uma recta que passa por P_0, pois $g(a)=f(a)$; 3) esta recta é tangente à curva em P_0 pois que o seu coeficien-

te angular [isto é, o coeficiente de x em g(x)] é f'(a) ou seja o valor da derivada da função f(x) no ponto a.

Representando por P e por M, respectivamente, os pontos da curva e da tangente, cuja abscissa é x, será f(x) a ordenada de P, g(x) a ordenada de M e portanto

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

a diferença entre a ordenada de P e a ordenada de M; com esta definição de $\varphi(x)$ temos:

Teorema: "A curva C é concava para cima no ponto P_o de abscissa a, se $\varphi(x)$ tiver um mínimo local em a; é concava para baixo em P_o, se $\varphi(x)$ tiver um máximo local em a; P_o será um pontó de inflexão se $\varphi(x)$ fôr monótona numa vizinhança de a."

Dem.: Se $\varphi(x)$ tiver um mínimo local em a, como $\varphi(a) = 0$, será $\varphi(x)$ sempre poditiva numa vizinhança de a, logo P está acima de M para êsses valores de x, isto é, a curva fica para cima da tangente, sendo portanto côncava para cima em P_o.

Anàlogamente se reconhece que se $\varphi(x)$ tiver um máximo local em a, a curva é côncava para baixo em P_o.

Finalmente, se $\varphi(x)$ fôr monótona numa vizinhança de a, como $\varphi(a) = 0$, será $\varphi(x)$ positiva dum lado de a e negativa do outro lado, logo a curva está para baixo ou para cima da tangente conforme x toma valores dum lado ou do outro de a. Isto quere dizer que P_o é ponto de inflexão.

Reduzimos assim êste problema ao dos máximos e mínimos.

A derivada da função $\varphi(x)$ é :

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - f'(a)$$

(no caso de ser $f'(a) \neq \infty$); portanto, para x=a temos:

$$\varphi'(a) = 0 ,$$

quere dizer : a é um ponto de estacionaridade de $\varphi(x)$.

Supondo agora que f(x) admite derivadas até à ordem que fôr necessário considerar, virá:

$$\varphi''(x) = f''(x)$$

e dum modo geral :

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \quad , \qquad \text{para } n \geq 2$$

Daqui concluímos que :

se $f''(a) > 0$, também $\varphi''(a) > 0$, e portanto $\varphi(x)$ tem um mínimo em a: a curva é concava para cima em P_o,

se $f''(a) < 0$, também $\varphi''(a) < 0$, e portanto $\varphi(x)$ tem um máximo em a: a curva é concava para baixo em P_o,

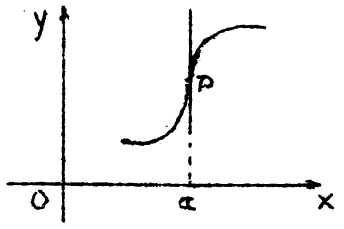
se $f''(a) = 0$, também $\varphi''(a) = 0$, e nada podemos concluir por enquanto, mas a teoria dos máximos e mínimos permite afirmar o seguinte:

"Se a primeira derivada de f(x), que, a partir da segunda, se não anula em a, é de ordem impar, o ponto é de inflexão (pois neste caso $\varphi(x)$ é crescente numa vizinhança de a); se a primeira derivada de f(x) que, a partir da segunda, se não anula em a, é de ordem par a curva tem a concavidade voltada para cima ou para baixo conforme essa derivada é positiva ou negativa em a."

Notemos por último que, se f(x) admite derivada infinita em a, sendo contínua para x=a, o ponto P_o será de inflexão se, e só se, a derivada f'(a) tiver sinal determinado, isto é, se fôr

$f'(a) = +\infty$ (caso da figura)

ou $f'(a) = -\infty$.



Assíntotas

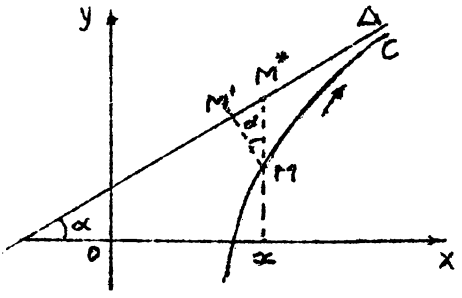
Consideremos uma função f(x) definida num intervalo $[a,+\infty[$ ou num intervalo $]-\infty,a]$ e designemos por C a curva representativa desta função.

Definição: Dada uma recta Δ não paralela ao eixo dos yy, diz-se que Δ é uma assíntota da curva C quando a distância dum ponto M de C à recta Δ tende para zero quando a abscissa de M tende para infinito.

Se a recta Δ fôr paralela a OY não é preciso supor que a função f(x) é definida num intervalo $[a, +\infty[$ ou $]-\infty,a]$; diremos que Δ é uma assíntota da curva C quando

a distância dum ponto M de C à recta Δ tende para zero quando a ordenada de M tende para infinito (supondo, é claro, que f(x) não é limitada).

Consideremos o primeiro caso: Seja M^* o ponto de Δ que tem a mesma abscissa que o ponto M; então :



$M'\hat{M}M^* = \alpha$ sendo α o ângulo que Δ forma com OX; mas

$$\overline{MM'} = \overline{MM^*}\cos\alpha$$

e portanto, quando $\overline{MM'}$ tende para zero, também $\overline{MM^*}$ tende para zero e reciprocamente; podemos pois dizer que Δ é assíntota de C, quando $\overline{MM^*}$ tende para zero ao tender de x para infinito.

Se fôr $y = mx + p$ a equação da recta Δ, as ordenadas dos pontos M e M^* (de abscissa x), são respectivamente f(x) e mx+p; por conseguinte:

$$\overline{MM^*} = |f(x) - mx - p|$$

e então Δ será assíntota de C, se e só se:

$$(1) \qquad \lim_{x \to +\infty} |f(x) - mx - p| = 0$$

Se esta igualdade se verifica, com mais forte razão será:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{MM^*}}{x} = 0 \quad \text{isto é} \quad \lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} - m - \frac{p}{x} \right| = 0 \ ;$$

mas $\lim_{x \to +\infty} \frac{p}{x} = 0$; portanto será necessàriamente:

$$(2) \qquad \boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

Uma vez determinado m, se tal limite existe e é finito, o valor de p poderá ser determinado atendendo a (1). Virá:

$$\boxed{p = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]}$$

Em conclusão :

"Se os limites indicados em (2) e (3) existem e são finitos, existe a assíntota Δ à curva C e a sua equação é:

$$y = m x + p,$$

sendo os valores de m e p dados pelas fórmulas (2) e (3).

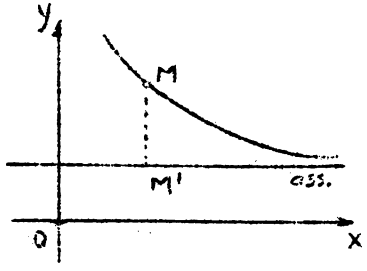
Reciprocamente, se a recta Δ de equação $y = mx + p$ é assíntota da curva C representativa de f(x), os valores de m e p são dados pelas fórmulas (2) e (3).

Chegaríamos a conclusões perfeitamente análogas, supondo que a função f(x) é definida num intervalo $]-\infty, a]$ e que x tende para $-\infty$.

Pode acontecer em particular que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad \text{ou seja} \quad m = 0$$

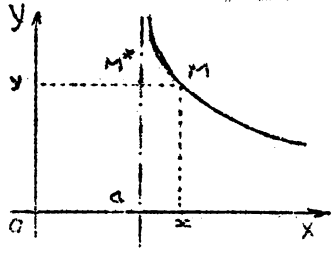
e então a assíntota é uma recta paralela ao eixo dos xx; mas nêste caso virá simplesmente, atendendo a (3) :



$$p = \lim_{x \to +\infty} f(x);$$

isto é, as assíntotas paralelas a OX determinam-se procurando os limites de f(x) quando $x \uparrow +\infty$ ou quando $x \uparrow -\infty$ (se êsses limites existem).

Por outro lado, para que a recta x = a (paralela a OY) seja uma assíntota da curva C é necessário e suficiente que f(x) tenda para $+\infty$ ou para $-\infty$ quando x tende para a à direita ou à esquerda; então as assíntotas verticais determinam-se procurando os pontos a tais que o limite da função à direita ou à esquerda de a seja $+\infty$ ou $-\infty$, se êsses pontos existirem.



Exemplos: a) Seja f(x) uma função inteira de grau superior a 1; ter-se-á :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

pois o grau do numerador é maior do que o grau do denominador e

e portanto f(x) é um infinitamente grande com x de ordem superior à de x. Por conseguinte, não existe assíntota oblíqua ou paralela a OX. Também não existe assíntota paralela a OY, porque uma função inteira não tem polos, isto é, não existem valores finitos de x que tornem a função infinita. Em resumo: os gráficos das funções inteiras (de grau >1) não têm assíntotas.

b) - Seja a curva de equação $y = + \sqrt{x^2-4x}$.

Tem-se:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{+\sqrt{x^2-4x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} +\sqrt{1-\frac{4}{x}} = 1$$

e

$$p = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-4x} - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x} + x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}} + 1} = -2 ;$$

então a assíntota tem por equação:

$$y = x - 2$$

Fazendo agora tender x para -∞ temos:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{-x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(- \sqrt{\frac{x^2+4x}{x^2}} \right) = -1$$

$$p = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+4x} - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}} + 1} = 2$$

e então a assíntota tem por equação :

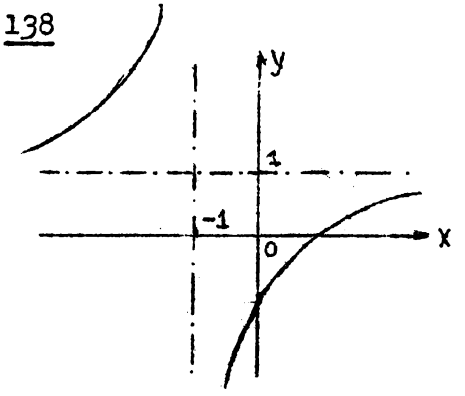
$$y = -x + 2 .$$

Não existem assíntotas verticais.

c) - Seja a curva de equação :

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

. . . .



Tem-se:

$$\lim_{x \to \infty} y = 1, \quad \lim_{x \to -1^+} y = +\infty$$

As assíntotas da curva são pois as rectas :

$$y = 1$$

$$x = -1$$

Representação gráfica de funções

Para traçar a curva representativa duma dada função f(x) convém proceder sistemàticamente às seguintes pesquizas:

I - Domínio de existência, periodicidade e simetrias.

a) A determinação do domínio de existência é fundamental para a representação gráfica de f(x).

b) Recordemos que a função f(x) se diz periódica quando se tem :

$$f(x+k) \equiv f(x),$$

sendo k uma constante; ao menor valor de k que satisfaz a esta condição chama-se período da função. Se a função fôr periódica basta, evidentemente, fazer o séu estudo num intervalo de comprimento igual ao período.

c) A curva representativa da função f(x) será simétrica em relação a OY, quando a função fôr par, isto é, quando se tiver:

$$f(-x) \equiv f(x) \ ;$$

e será simétrica em relação à origem dos eixos, quando a função fôr impar, isto é, quando se tiver :

$$f(-x) \equiv - f(x) \ .$$

Nestes dois casos podemos reduzir o estudo de f(x) apenas à parte do seu domínio de existência situado sôbre o semi-eixo positivo OX.

II - Pontos de encontro com os eixos. Para os determinar será necessário:

a) Resolver a equação f(x) = 0. As raizes desta

equação (se as houver) são as abscissas dos pontos de encontro da curva com o eixo dos xx.

b) Calcular o valor f(0), que é a ordenada do ponto de encontro com o eixo dos yy (se o houver).

III - Polos da função f(x). Chamam-se polos ou infinitos da função f(x) os valores de x que a tornam infinita, isto é, as raizes da equação $\frac{1}{f(x)} = 0$.

Os zeros e polos consecutivos de f(x) determinam intervalos em que a função tem sinal constante, se fôr contínua nesse intervalo.

IV - Zeros e polos da função f'(x) se tal função existe.

Os zeros e polos consecutivos da função f'(x) determinam intervalos em que a função tem sinal constante se nêles fôr contínua. Nos intervalos em que f'(x) fôr positiva, a função f(x) será crescente; naqueles em que f'(x) fôr negativa, a função f(x) será decrescente.

V - Zeros e polos da função f''(x) se tal função existe.

Os zeros e polos consecutivos de f''(x) determinam intervalos em que f''(x) tem sinal constante se nêles fôr contínua. Nos intervalos em que f''(x) fôr positiva, a curva tem a concavidade voltada para cima [f''(x) > 0 → ∪]; naqueles em que fôr negativa, a curva tem a concavidade voltada para baixo [f''(x) < 0 → ∩].

VI - Pontos de máximo ou de mínimo local e pontos de inflexão. (se existirem)

Em geral êstes pontos ficarão determinados pelas pesquizas IV e V .

VII - Assíntotas, se as houver. Limites de f(x) quando x tende para +∞ ou para -∞, se êstes limites existirem.

VIII - Tangentes à curva em pontos notáveis.

IX - Determinação doutros pontos da curva, se fôr necessário, para aperfeiçoar o traçado da mesma.

Exemplos: 1º) Seja a função $f(x) = x^3 - 3x - 2$

I - a) Domínio de existência $-\infty, +\infty$.

b) Periodicidade: não é periódica (nenhuma função inteira de grau superior a 0 é periódica).

c) Simetrias:

$$\text{Como } f(-x) = -x^3 + 3x - 2 \begin{cases} \not\equiv f(x) \\ \not\equiv -f(x) \end{cases}$$

não é par nem impar, logo não há simetria nem em relação a OY, enm em relação à origem.

II - Pontos de encontro com os eixos :

a) Com OX: Como

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2) = (x+1)^2 (x-2) \tag{1}$$

tem 2 como zero simples e -1 como zero duplo.

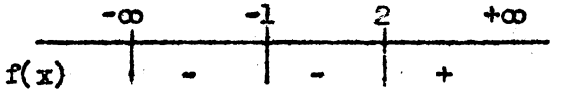
b) Com OY:

$$f(0) = 0 - 0 - 2 = -2 ;$$

encontra pois o eixo dos yy no ponto de ordenada -2.

III - Polos - Não tem polos(a distância finita) pois para valores de x finitos a função toma sempre valores finitos (nenhuma função inteira tem polos).

Os zeros de f(x) determinam intervalos em que os sinais da função se podem deduzir da decomposição (1). Podemos assim organizar o seguinte quadro:



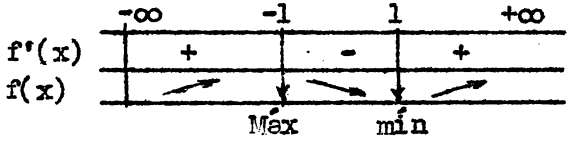
IV - Zeros e polos da 1ª derivada - Máximos e mínimos

Temos $f'(x) = 3x^2 - 3$

logo $f'(x) = 0$ dá $x^2 - 1 = 0$, donde $x = \pm 1$; portanto

$$f'(x) = 3(x-1)(x+1) .$$

Polos não tem. Quanto aos sinais :



Como $f(-1)=0$, o máximo é nulo .

$f(1) = -4$, o mínimo é -4 .

V - Zeros e polos da 2ª derivada. Pontos de inflexão .

Temos $f''(x) = 6x$ portanto a 2ª derivada tem a raiz 0 e não tem polos. Quanto aos sinais :

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	
$f'(x)$	↘	↗	
$f(x)$	⌒	⌣	
		Inf.	

O ponto de abscissa 0 é de inflexão pois que $f''(x)$ se anula nesse ponto mudando de sinal.

VI - Máximos, mínimos e pontos de inflexão: foram todos determinados em IV e V sem ser preciso ir mais longe.

VII - Assíntotas : Não existem (como vimos atrás, a curva representativa duma função inteira não tem assíntotas) . Por outro lado :

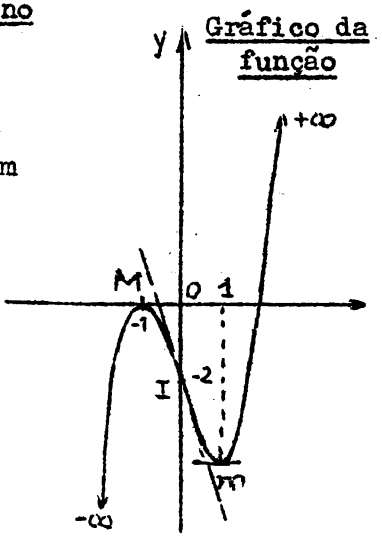
$$f(-\infty) = -\infty \ , \qquad f(+\infty) = +\infty \ .$$

VIII - Tangente à curva no ponto de inflexão:

Como $f(0) = -2$ e $f'(0) = -3$, a tangente à curva no ponto $I(0,2)$ tem por equação:

$$y + 2 = -3x$$

$$\left[y-f(0)=f'(0)(x-0)\right] .$$



2º) Estudar e representar gràficamente a função:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} .$$

I - a) Domínio de existência : o intervalo $]-\infty, +\infty[$, com exclusão dos pontos -1 e +1 .

b) Periodicidade - Não é periódica (nenhuma função racional é periódica, a não ser que se reduza a uma constante).

c) Simetrias - Como $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = - f(x)$, a curva é simétrica em relação à origem dos eixos; podemos, portanto, reduzir o estudo da função ao semi-eixo positivo OX.

II - Pontos de encontro com os eixos :

a) Com OX : o único valor de x que anula a função é x=0 (zero triplo)

b) Com OY :

$$f(0) = \frac{0}{-1} = 0$$

encontra pois o eixo dos yy na própria origem.

III - Polos da função :

O denominador da fracção anula-se para x=1 e para x=-1 portanto a função tem os polos 1 e -1 (que correspondem a assíntotas verticais).

Com os zeros e os polos da função podemos organizar o seguinte quadro:

	0		1		+∞
f(x)	|	-	|	+	

IV - Zeros e polos da 1ª derivada - Máximos e mínimos

Temos:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

logo, igualando f'(x) a zero, tem-se :

$$x^2 (x^2 - 3) = 0 ;$$

e portanto a derivada tem o zero duplo x=0 os zeros

simples $x = +\sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$.

A função torna-se infinita para $(x^2-1)^2 = 0$; logo os polos são ± 1 (duplos) .

Quanto aos sinais da derivada temos :

	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	
$f(x)$	↘	↘	mín. ↗	

Em virtude da simetria, $f(x)$, terá um máximo em $-\sqrt{3}$.

Como $f(\sqrt{3}) \approx 2{,}6$, o mínimo é $\approx 2{,}6$.

$f(-\sqrt{3}) \approx -2{,}6$, o máximo é $\approx -2{,}6$.

V - Zeros e polos da 2ª derivada - Pontos de inflexão

Temos :

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)\,2\,(x^2-1)\,2x}{(x^2-1)^4}$$

que simplificada dá :

$$f''(x) = \frac{x\,(2x^4 + 4x^2 - 6)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x\,(x^2+3)}{(x^2-1)^3} .$$

Tem a raiz real 0 e os polos ± 1 (triplos). Quanto aos sinais:

	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	
$f'(x)$	↘	↗	
$f(x)$	∩	∪	

Em virtude da simetria, a origem é ponto de inflexão.

VI - Máximos e mínimos e pontos de inflexão

Foram todos determinados em IV e V .

VII - Assíntotas:

a) Não paralelas a OY :

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

portanto existe uma assíntota de equação :

$$y = x \ .$$

b) Paralelas a OY :

Como $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+1^+} f(x) = +\infty$

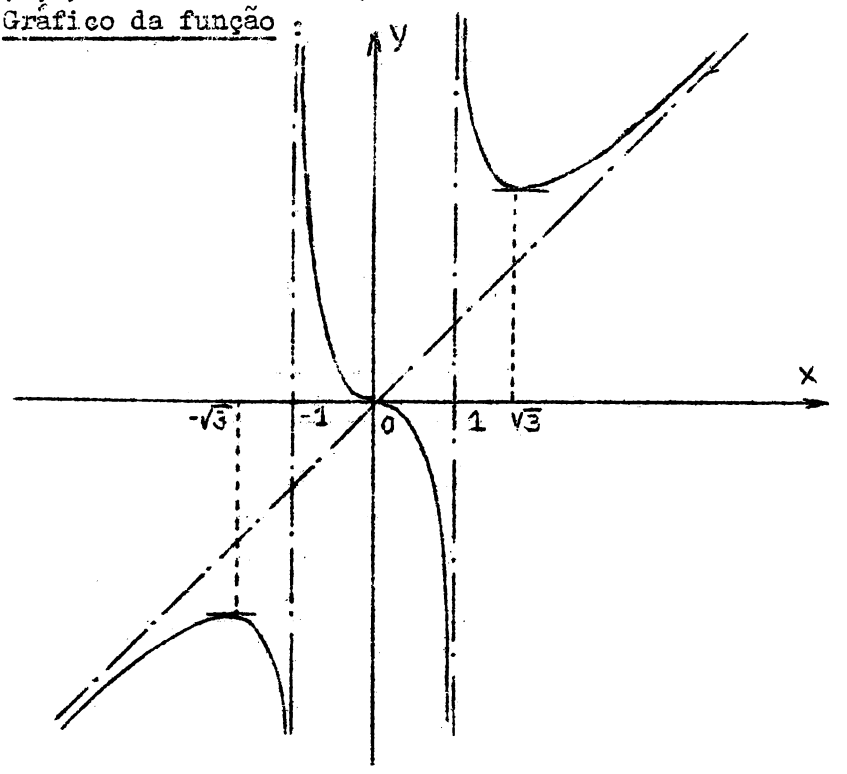
a curva tem as assíntotas de equações :

$$x = -1 \qquad e \qquad x = +1 \ .$$

VIII - Tangente à curva no ponto de inflexão:

Como $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$, a tangente à curva no ponto $I(0,0)$ é o eixo dos xx .

Gráfico da função :



Resolução de equações.

Vamos estudar alguns métodos para o cálculo numérico das raizes duma dada equação $f(x) = 0$.

Se a função $f(x)$ é contínua, desde que se determinem dois pontos a, b nos quais a função tenha sinais contrários, existirá, segundo o teorema de Cauchy, pelo menos um ponto interior a $[a,b]$ onde a função se anula, isto é, uma raiz da equação.

Para calcular a raiz podemos então dividir o intervalo $[a,b]$ em partes iguais,(por exemplo em 10 partes), e determinar os valores que a função toma nos pontos de divisão; dois casos se podem dar: ou a função se anula nalgum desses pontos e fica assim determinada uma raiz, ou há, pelo menos, dois pontos consecutivos a_1, b_1 onde a função tem sinais contrários, nesta última hipótese, procedendo com o intervalo $[a_1,b_1]$, como fizemos para o intervalo $[a,b]$, ou encontramos uma raiz ou determinamos novo intervalo $[a_2,b_2]$ nas condições anteriores. Procedendo assim sucessivamente, é claro que conseguimos calculár uma raiz da equação com a aproximação que quizermos.

Exemplo: Calcular $\sqrt{3}$; trata-se de resolver a equação $x^2 - 3 = 0$; temos $f(x) = x^2 - 3$. Como $f(1) = -2 < 0$ e $f(2) = 1 > 0$, há uma raiz no intervalo $[1,2]$; dividindo êste intervalo em 10 partes iguais observa-se que :

$$f(1,7) < 0 \quad \text{e} \quad f(1,8) > 0 ,$$

portanto 1,7 e 1,8 são os valores da raiz, por defeito e por excesso, a menos de uma décima. Temos depois, procedendo de modo análogo:

$$f(1,73) < 0 \quad \text{e} \quad f(1,74) > 0 ;$$

logo 1,73 e 1,74 são os valores da raiz, por defeito e por excesso, a menos de uma centésima. E assim sucessivamente.

Na prática dispomos de processos menos morosos, mas que exigem, em geral, um trabalho prévio chamado "sepa-

ração das raizes".

Separar as raizes duma equação é determinar para cada raiz um intervalo que contenha essa e só essa raiz. Um dos processos usados para a separação das raizes é o método de Rolle baseado no seguinte teorema:

Teorema: Se a função f(x) admite derivada contínua num dado intervalo, não pode haver mais de um zero da função entre dois zeros consecutivos da derivada. Também não pode haver mais de um zero da função superior (ou inferior) a todos os zeros da derivada".

Dem.: Suponhamos que f'(x) é contínua num intervalo e sejam α, β dois zeros consecutivos de f'(x) situados nesse intervalo; f'(x) terá sinal constante entre α e β porque, sendo contínua, só pode mudar de sinal anulando-se e, por hipótese, α, β são zeros consecutivos de f'(x); logo f(x) é crescente ou decrescente, em $[\alpha,\beta]$ e por conseguinte não pode anular-se mais de uma vez nesse intervalo. Anàlogamente para a direita (ou para a esquerda) de todos os zeros de f'(x), esta função tem sinal constante e por isso não pode f(x) ter mais de um zero superior (ou inferior) a todos os zeros de f'(x). Assim o teorema fica demonstrado.

Nota: a hipótese da continuidade da derivada é dispensável, mas a sua intervenção permite uma demonstração mais simples.

Pregunta-se agora: Como saber se existe ou não um zero de f(x) entre dois zeros consecutivos α, β de f'(x)? A resposta é simples: existirá um zero de f(x) entre α e β se e só se f(x) tomar sinais contrários nestes pontos.

Se um dos valores $f(\alpha)$, $f(\beta)$ fôr nulo, há, no ponto correspondente um zero múltiplo de f(x) pois êsse ponto é zero da função e da derivada, mas é clàro que já não pode haver outro zero no intervalo $[\alpha,\beta]$.

Suponhamos em particular que f(x) é definida em todo o intervalo $]-\infty, +\infty[$ e que tem um número finito de zeros; suponhamos ainda que existem os limites de f(x) quando x tende para $-\infty$ e quando x tende para $+\infty$; então, representando por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, os zeros de f'(x) dispos-

tos por ordem crescente, os valores :

$$f(-\infty),\quad f(\alpha_1),\quad f(\alpha_2),\quad \ldots,\quad f(\alpha_r),\quad f(+\infty)$$

constituem a chamada sucessão de Rolle.

Segundo o teorema anterior, se dois termos consecutivos desta sucessão têm sinais contrários, existe uma e uma só raiz de f(x) entre os pontos correspondentes; caso contrário, não existe nenhuma raiz de f(x) entre êsses pontos, podendo no entanto acontecer que a função se anule num deles o que imediatamente se reconhece.

Exemplos: 1º) Separar os zeros da função :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 .$$

Calculemos os zeros da derivada; como

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \text{ dá } x = \pm 1$$

e portanto temos:

$f(-\infty) = -\infty$
$f(-1) = 3$
$f(+1) = -1$
$f(+\infty) = +\infty$

$f(x)$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
	$-$	$+$	$-$	$+$
	uma raiz	uma raiz	uma raiz	

A função tem, portanto, três zeros reais x_1, x_2 e x_3 tais que:

$$x_1 < -1 \qquad -1 < x_2 < 1 \qquad 1 < x_3 .$$

2º) Separar os zeros da função $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Os zeros da derivada são ainda +1 e -1 e temos :

$f(-\infty) = -\infty$
$f(-1) = 4$
$f(1) = 0$
$f(+\infty) = +\infty$

$f(x)$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
	$-$	$+$	0	$+$
	1 raiz		raiz dupla	

A função tem pois o zero duplo $x_1 = 1$ e um zero simples $x_2 < -1$.

3º) Separar os zeros da função $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Temos anàlogamente :

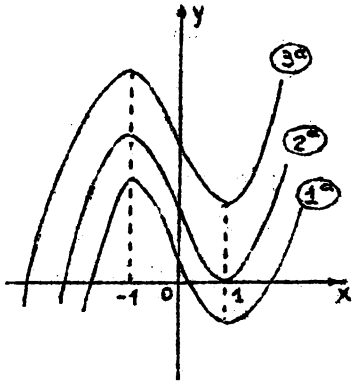
$f(-\infty) = -\infty$
$f(-1) = 6$
$f(+1) = 2$
$f(+\infty) = +\infty$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-$		$+$		$+$		$+$

1 raiz

A função tem uma única raiz real $x_1 < -1$.

Na figura estão esboçados os gráficos das funções dos exemplos anteriores e vemos que, efectivamente, a primeira corta o eixo dos xx em tres pontos, a segunda corta o mesmo eixo num ponto e é-lhe tangente no ponto (1,0) e a terceira só o corta num ponto de abscissa menor que -1.



4º) Separar as raizes da equação:

$$x \cos x - \operatorname{sen} x = 0.$$

Representando o primeiro membro da equação por $f(x)$, tem-se:

$$f'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x = - x \operatorname{sen} x$$

e portanto os zeros da derivada são os de :

$$x \operatorname{sen} x = 0,.$$

ou sejam $x = n\pi$ (com n inteiro). Quanto aos sinais de $f(x)$ nestes pontos, tem-se:

	$\cdots$	-3π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π	$\cdots$
$f(x)$		$+$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	

Concluímos assim que a equação proposta tem uma e uma só raiz em cada intervalo $[k\pi, (k+1)\pi]$, com k inteiro; alem disso tem 0 como raiz tripla, pois que êste valor anula a função, a 1^a e a 2^a derivadas, mas já não anula a terceira derivada, com efeito:

$f''(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = \cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x \quad , \quad f'''(0) = 2$.

Cálculo das raizes

A - Método de Newton - Seja $f(x)$ uma função que admite 1ª e 2ª derivadas com sinal constante no intervalo $[a,b]$ e suponhamos que os valores $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais contrários. Então, segundo o que foi atrás estabelecido, existirá uma e uma só raiz de $f(x)$ entre a e b; designemo-la por r .

A fórmula de Taylor dá-nos :

$$(1) \quad f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(\xi) \text{ com } a < \xi < b.$$

Pondo

$$(2) \qquad g(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a)$$

esta função representa aproximadamente $f(x)$ numa vizinhança de a; se substituirmos $f(x)$ por $g(x)$, teremos em vez da equação $f(x) = 0$, a equação do primeiro grau $g(x) = 0$, ou seja:

$$f(a) + (x-a)\, f'(a) = 0$$

a qual admite a raiz $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ que representaremos por a_1. Vejamos que interesse pode ter o valor a_1 para a determinação da raiz r de $f(x)$. De (1) e (2) deduz-se :

a a_1 r b

$$(3) \qquad g(x) = f(x) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(\xi) \quad .$$

Comecemos por supor $f''(x) > 0$ em $[a,b]$ e $f(a) > 0$.

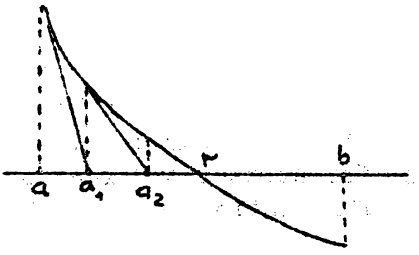
Substituindo em (3) x por a obtemos $g(a) = f(a) > 0$ e substituindo na mesma igualdade x por r virá :

$$g(r) = - \frac{(r-a)^2}{2} f''(\xi) < 0$$

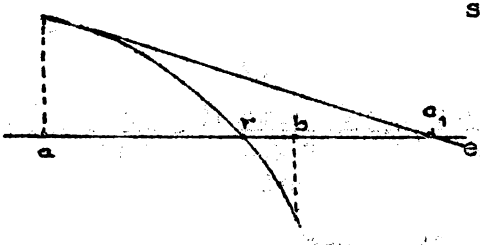
atendendo a que $f(r) = 0$ e $f''(x) > 0$ em $[a,b]$; mas sendo $g(a) > 0$ e $g(r) < 0$, concluímos que a raiz a_1 de $g(x) = 0$ está compreendida entre a e r .

A análoga conclusão chegaríamos supondo $f''(x) < 0$ em $[a,b]$ e $f(a) < 0$.

Interpretação gráfica: Como $f''(x) > 0$ em $[a,b]$ a curva C representativa de $f(x)$ é concava para cima nêste intervalo; por outro lado, o gráfico da função $g(x)$ é a tangente à curva C no ponto de abscissa a; a_1 será pois a abscissa do ponto de encontro desta tangente com OX, o qual está visivelmente entre a e r; o mesmo se dava se $f''(a) < 0$ e $f(a) < 0$.



Se $f(a)$ tiver sinal contrário ao de $f''(x)$ em $[a,b]$ já isto não acontece, como se reconhece na 2ª figura.



Ponhamos então:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

e façamos:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

. . . . . .

$$(4) \qquad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

. . . . . .

Obtemos assim uma sucessão a_n de pontos tais que:

$$a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < r$$

portanto uma sucessão crescente, limitada superiormente pelo número r. Sabemos que uma sucessão nestas condições tem limite; designando por λ êste limite vamos provar que é $\lambda = r$.

Visto que as funções $f(x)$ e $f'(x)$ são contínuas em $[a,b]$ ter-se-á :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(\lambda)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = f'\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f'(\lambda);$$

por outro lado $f'(\lambda) \neq 0$, pois supuzemos que $f'(x)$ tem sinal constante no intervalo $[a,b]$. Posto isto, tomando os limites a ambos os membros da igualdade (4) e atendendo a que $\lim a_{n+1} = \lim a_n$, virá :

$$\lambda = \lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

donde se deduz:

$$f(\lambda) = 0$$

o que mostra ser λ uma raiz de $f(x)$ em $[a,b]$; como nêste intervalo há uma só raiz de $f(x)$ será necessàriamente

$$r = \lambda \qquad \text{q.e.d.}$$

Podemos assim tomar qualquer termo da sucessão a_n como valor aproximado da raiz r - tanto mais aproximado quanto maior fôr n .

Mas estas considerações foram feitas na hipótese de $f(a)$ e $f''(a)$ terem o mesmo sinal.

Se $f(a)$ não tem o sinal de $f''(x)$, como $f(b)$ e $f(a)$ são de sinais contrários, terá $f(b)$ o mesmo sinal que $f''(b)$; então, raciocinando como anteriormente, somos levados a considerar uma sucessão b_n assim definida:

$$\begin{cases} b_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} \\ b_{n+1} = b_n - \dfrac{f(b_n)}{f'(b_n)} \end{cases} \quad \ldots$$

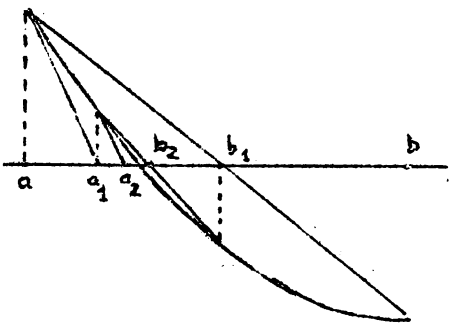
e de modo análogo se concluia que a sucessão $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tem por limite r .

Para poder avaliar o êrro que se comete quando se toma a_n ou b_n (conforme o caso) para valor aproximado da raiz, vamos associar a êste método um outro que é o :

B) - Método da corda ou da falsa posição . Consiste êste método em substituir o arco da curva pela corda cujos extremos são os pontos de abscissas a e b . A equação desta recta é:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

e o ponto em que ela encontra o eixo dos xx obtem-se fazendo na referida equação y = 0; virá assim :



$$x-a = -\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}$$

donde:

$$x = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b)-f(a)}\ ;$$

representando êste valor por b_1 teremos, como é fácil reconhecer:

$a_1 < r < b_1$ na hipótese de f(a) ter o sinal de f"(x) em [a,b] ;

a diferença entre êstes dois valores b_1 e a_1 dá-nos portanto um limite superior do êrro que se comete tomando a_1 como valor aproximado de r .

Na prática pode prescindir-se do cálculo do limite do êrro, aplicando a chamada regra empírica da estabilidade:

"Suponhamos que se calculam os sucessivos valores aproximados com um determinado número de algarismos decimais. Se, a partir de certa ordem se observa estabilidade, isto é, se os algarismos se tornam constantes, há grande probabilidade de que êsses algarismos sejam exactos, podendo assumir-se o valor obtido a partir dessa ordem como exacto até à casa decimal considerada".

Note-se bem: não há então a certeza absoluta de que todos os algarismos sejam exactos, há apenas uma grande probabilidade de que o sejam.

Exemplos: a) Determinar a raiz positiva da equação $x^2 - 5 = 0$; teremos $x = \sqrt{5}$ que como sabemos está entre 2 e 3; pondo

$$f(x) = x^2 - 5 \quad \text{vem } f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2.$$

No intervalo [2,3] temos :

$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$ e como $f(2) < 0$, $f(3) > 0$

é 3 o extremo favorável ao cálculo da raiz (extremo em que f tem o sinal de f" no intervalo).

Temos então sucessivamente:

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 3 - \frac{4}{6} = \frac{7}{3} = 2,(3)$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 2,(3) - \frac{4/9}{14/3} = 2,2381$$

$$b_3 = 2,2381 - \frac{4/441}{94/21} = 2,2381 - 0,0022 = 2,2359$$

. . . .

A regra empírica da estabilidade leva-nos a aceitar 2,23 como valor aproximado a menos de 1/100.

b) Determinar a raiz da equação : $x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$ existante no intervalo $[\pi, 3\pi/2]$.

Pondo $f(x) = x \cos x - \operatorname{sen} x$, vem :

$$f'(x) = -x \operatorname{sen} x$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x - x \cos x$$

Como $f'(x)$ tem sinal constante em $]\pi, 2\pi[$ por serem π, 2π duas raizes consecutivas de $f'(x)$, também terá sinal constante em $]\pi, 3\pi/2]$. Além disso $f(\pi) = -\pi$, $f(3\pi/2) = 1$, sendo $f''(x) > 0$ em todo o intervalo, logo o extremo favorável ao cálculo da raiz é o extremo direito $(3\pi/2)$. Temos então :

$$b_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{f(3\pi/2)}{f'(3\pi/2)} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} = 4,50$$

e anàlogamente para os outros valores aproximados.

Estudo das funções exponencial e logaritmica

O conceito de potência foi definido em primeiro lugar para o caso do expoente inteiro.e.positivo :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{n \text{ vezes}}$$

. . .

Depois estendeu-se este conceito ao caso do expoente fraccionário positivo: sendo p e q números inteiros positivos, tem-se por definição:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \quad .$$

No estudo que vamos fazer supomos que: 1) a base é sempre positiva; 2) são considerados apenas valores positivos dos radicais.

A potência de expoente racional negativo e a de expoente nulo são definidas pondo :

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad , \qquad a^0 = 1 \quad .$$

Desta maneira a função a^x fica definida <u>para todos os valores racionais de x</u>. Demonstrou-se no curso liceal que, para êstes valores do expoente, são verificadas as seguintes propriedades:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

2) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

3) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

Há uma outra propriedade que desempenha um papel fundamental no estudo da função exponencial, e é a seguinte:

4) Se $a > 1$ e $r > 0$ (com r racional) então $a^r > 1$

Com efeito, suponhamos $r = p/q$, sendo p, q dois números inteiros positivos. Se $a > 1$, temos $a^p > 1$. Suponhamos agora que era $a^{p/q} \leq 1$; elevando ambos os membros à potência q, viria $a^p \leq 1$ o que é contrário à conclusão precedente; portanto será :

$$a^{p/q} > 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

Daqui resulta que

5) Se $r < s$ e $a < 1$ (sendo r,s racionais) ter-se-á $a^r < a^s$; por outras palavras: a função a^x é crescente

no conjunto dos números racionais, se $a>1$ (decrescente se $a<1$).

Dem.: Suponhamos $r<s$, com r, s racionais; então $s-r>0$ (sendo $s-r$ racional), o que, atendendo ao teorema anterior, implica:

$$\frac{a^s}{a^r} = a^{s-r} > 1$$

donde

$$a^s > a^r \qquad \text{q.e.d.}$$

Já vimos que sendo $a>1$ é $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

Vamos agora mostrar que

6) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

quer seja $a>1$, quer seja $a<1$ (supomos sempre $a>0$).

Dem.: Suponhamos, em 1º lugar que é $a>1$ e seja δ um número positivo arbitrário; então $(1+\delta)^n$ tende para $+\infty$ (por ser $1+\delta>1$) e portanto haverá uma ordem n' depois da qual se tem $(1+\delta)^n > a$; a partir dessa mesma ordem será:

$$1+\delta > a^{1/n} \qquad \text{ou seja} \qquad 1 < a^{1/n} < 1+\delta$$

donde se conclue que $a^{1/n}$ tende para 1 quando n tende para ∞.

Se fôr $a<1$ a demonstração reduz-se ao caso anterior, tomando o inverso de a.

<u>Definição de a^x em todo o campo real</u> - Com os elementos expostos já podemos fazer o estudo de a^x para x irracional.

Seja μ um número irracional qualquer e suponhamos $a>1$; podemos então definir a^μ como o extremo superior de a^x quando x toma todos os valores racionais menores que μ; em símbolos:

$$a^\mu = \sup a^x, \quad \text{para x racional} < \mu.$$

Anàlogamente, sendo $a<1$, podemos pôr

$$a^\mu = \inf a^x \quad \text{para x racional} < \mu:$$

Desta definição resulta fàcilmente que, se u, v são

números irracionais tais que $u<v$, será no caso de $a>1$:

$$a^u < a^v .$$

Esta desigualdade subsiste manifestamente quando um dos números u,v, ou ambos, são racionais.

Se $a<1$, tem-se $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, sendo $\frac{1}{a}>1$, e imediatamente se reconhece que a desigualdade $u<v$, implica $a^u > a^v$.

Em conclusão : a função a^x fica definida no conjunto de todos os números reais, onde só toma valores positivos, sendo crescente se $a>1$ e decrescente se $a<1$. Chamar-lhe-emos função exponencial. Demonstra-se que esta função é transcendente.

Continuidade - Vejamos em primeiro lugar que a função a^x é contínua para $x=0$. Já demonstrámos que $\lim_{n\to\infty} a^{1/n}=1$ o que quere dizer que dado um número $\delta>0$ haverá uma ordem n' a partir da qual se tem :

$$1 < a^{1/n} < 1+\delta ;$$

mas se fôr $x<\frac{1}{n'}$, como a função a^x é crescente, ter-se-á $a^x < a^{1/n'}$ e por consequência, para todos os valores de x tais que $0<x<\frac{1}{n}$ virá :

$$1 < a^x < 1 + \delta,$$

o que quere dizer que $\lim_{x\to 0^+} a^x = 1$.

Por sua vez, à esquerda de 0, ter-se-á:

$$\lim_{x\to 0^-} a^x = \lim_{x\to 0^+} a^{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} a^x} = \frac{1}{1} = 1$$

Então, como os limites à esquerda e à direita de zero são iguais a 1 e se tem $a^0 = 1$, a função é contínua no ponto 0.

Vejamos agora que é contínua em qualquer ponto x_0. Como:

$$\frac{a^x}{a^{x_0}} = a^{x-x_0}$$

e o segundo membro tende para 1 quando x tende para x_o (conforme o resultado precedente), o mesmo sucede ao primeiro membro, isto é

$$\lim_{x \to x_o} \frac{a^x}{a^{x_o}} = 1 \quad \text{ou seja} \quad \lim_{x \to x_o} a^x = a^{x_o} ,$$

(pois que $a^{x_o} > 0$), o que significa que a função é contínua no ponto x_o .

Fica pois provado que a função a^x é contínua em qualquer ponto do seu domínio de existência.

Propriedades operatórias: As propriedades 1),2) e 3) mantêm-se com a nova definição de potência, isto é:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & a^u \cdot a^v = a^{u+v} \\ 2) & (a^u)^v = a^{uv} \\ 3) & a^u b^u = (ab)^u \end{array}\right\} \text{ sendo u,v, números reais quaisquer .}$$

A demonstração de qualquer destas propriedades pode fazer-se atendendo à continuidade das funções a^x e x^r com r racional (se $r = p/q$, com p, q inteiros, tem-se $x^r = \sqrt[q]{x^p}$, função esta que segundo os teoremas atrás estabelecidos é contínua para $x > 0$).

Vejamos, a título de exemplo, como se demonstra a propriedade 1):

Sejam u_n e v_n duas sucessões de números racionais de limites respectivamente u e v; ter-se-á, atendendo à continuidade de a^x e a que a propriedade 1) é verdadeira para expoentes racionais :

$$a^u \cdot a^v = (\lim a^{u_n}) \cdot (\lim a^{v_n}) = \lim (a^{u_n} a^{v_n})$$

$$= \lim a^{u_n + v_n} = a^{u+v}$$

Anàlogamente se demonstravam as propriedades 2),3).

Uma outra propriedade a assinalar é a seguinte:

1) Se $a > 1$, tem-se $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$,

Dem.: Visto que a função a^x é crescente no intervalo $]-\infty, +\infty[$, existe certamente o limite de a^x quando x

tende para $+\infty$, e como se tem $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ (sendo n a variável natural) êsse limite só pode ser $+\infty$. (Convém observar que só o facto de se ter $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ não habilita a concluir que $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$; poderia acontecer que, tendendo x para $+\infty$ por valores fraccionários, a função não tendesse para $+\infty$).

Por outro lado temos:

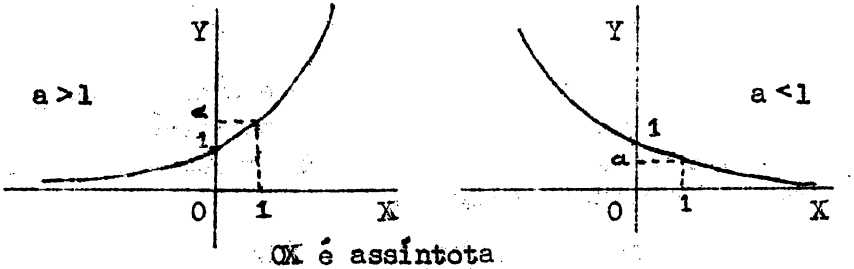
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \ .$$

Sendo $a<1$ concluíamos de forma análoga que :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

Em resumo: A função a^x varia continuamente de 0 a $+\infty$ quando x varia de $-\infty$ à $+\infty$ (se $a>1$) ou quando x varia de $+\infty$ a $-\infty$ (se $a<1$). Então, segundo o teorema de Cauchy, a função a^x toma qualquer valor compreendido entre 0 e $+\infty$.

Gráfico da função :

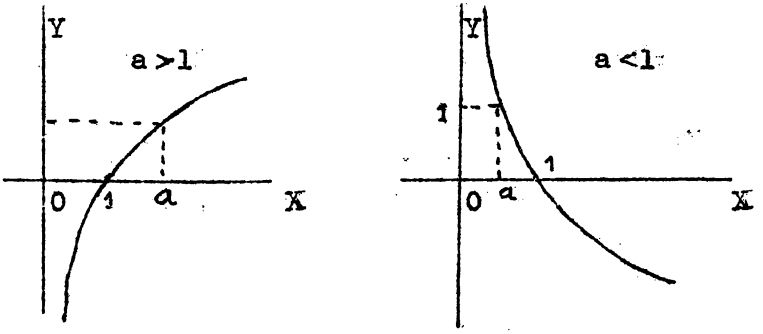


OX é assíntota

Função logarítmica: Pelo que acabámos de ver, dado um número positivo u qualquer, existe sempre um número v tal que $a^v = u$, e não pode haver mais de um número v nestas condições, porque a função a^x, sendo monótona, é univalente. Diz-se então que v é o logaritmo de u na base a e escreve-se :

$$v = \log_a u$$

A função inversa da função exponencial $x = a^y$ é pois a função $y = \log_a x$, chamada <u>função logarítmica</u>, definida no intervalo $[0,+\infty[$. Em virtude dum teorema já demonstrado, esta função é contínua, tal como a sua inversa. O seu gráfico é :



Da definição resulta imediatamente que

$$a^{\log_a x} = x \ , \qquad \log_a a = 1$$

Por outro lado as propriedades 1), 2) da função exponencial dão as seguintes propriedades da função logarítmica:

$$\log_a (u.v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a u^v = v \log_a u \ .$$

<u>Derivada da função exponencial</u>. Comecemos por averiguar se existe a derivada da função a^x no ponto 0. A razão incremental de a^x neste ponto é :

$$\frac{a^x - a^0}{x - 0.} = \frac{a^x - 1}{x} \ ;$$

Representemo-la por $\phi(x)$. <u>Vamos provar que, sendo $a>1$, a função $\phi(x)$ é crescente para $x>0$</u> .

Consideremos em primeiro lugar valores racionais de x. Sejam r,s dois números racionais positivos tais que $r<s$; então, será possível determinar números inteiros positivos p, q, d tais que $r= p/d$, $s= q/d$, $p<q$. Ponhamos $h = 1/d$. É fácil ver que se tem :

$$\frac{a^{nh}-1}{nh} = \frac{a^{h}-1}{h} \cdot \frac{1 + a^{h} + a^{2h} + \ldots + a^{(n-1)h}}{n}$$

Representemos por $\theta(n)$ o segundo factor do segundo membro; $\theta(n)$ será pois a média aritmética dos números $1, a^{h}, \ldots, a^{(n-1)h}$. Então:

$$(2) \qquad \theta(n+1) = \frac{1 + a^{h} + \ldots + a^{(n-1)H} + a^{nh}}{n+1} = \frac{n\,\theta(n) + a^{nh}}{n+1}$$

Mas, sendo $a>1$, tem-se :

$$a^{nh} > a^{ih} \text{ , para } i=0,1,\ldots, n-1$$

e portanto:

$$n\,a^{nh} > 1 + a^{h} + a^{2h} + \ldots + a^{(n-1)h}$$

ou seja:

$$(3) \qquad a^{nh} > \theta(n)$$

De (2) e (3) deduz-se então :

$$\theta(n+1) > \frac{n\,\theta(n) + \theta(n)}{n+1} = \theta(n)$$

isto é $\theta(n+1) > \theta(n)$ e como, segundo (1), se tem $\phi(nh) = h^{-1}\,\theta(n)$, conclue-se que $\phi(nh)$ cresce com n, sendo portanto $\phi(ph) < \phi(qh)$, visto que $p<q$. Como $r=ph$, $s=qh$, virá $\phi(r) < \phi(s)$.

Em resumo : Se $r<s$, então $\phi(r) < \phi(s)$ (sendo r,s racionais).

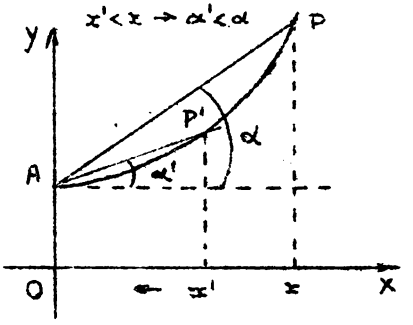
Sejam agora u, v dois números positivos tais que $u<v$. Podem então determinar-se duas sucessões u_n, v_n de números racionais, a primeira decrescente e a segunda crescente, tendo por limites respectivamente u, v. Atendendo ao resultado precedente e à continuidade de $\phi(x)$ para $x>0$, conclue-se que $\phi(u_n)$ decresce, tendendo para $\phi(u)$, enquanto $\phi(v_n)$ cresce tendendo para $\phi(v)$. Como $u<v$, existirá uma ordem a partir da qual se tem $u_n < v_n$ e portanto, a partir dessa ordem, será :

$$\phi(u) < \phi(u_n) < \phi(v_n) < \phi(v) \text{ ,}$$

donde

$$\phi(u) < \phi(v) \qquad \text{q.e.d.}$$

Então, quando x decresce, passando por valores positivos, a razão incremental $\phi(x)$ também decresce, mas como se mantem limitada inferiormente [visto que é $\phi(x) > 0$, para $x > 0$], tenderá para um limite finito ao tender de x para 0^+. Designemos por $\lambda(a)$ êsse limite:



$$\lambda(a) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a^x - 1}{x}$$

Por outro lado :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a^{-x} - 1}{-x} = \lim_{x \to 0^+} \left[a^{-x} \ \frac{a^x - 1}{x} \right];$$

mas $\lim_{x \to 0} a^{-x} = 1$, visto que a função a^x é contínua no ponto 0; então virá :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \lambda(a) \ ;$$

Tem-se pois $\phi(0^-) = \phi(0^+) = \lambda(a)$, o que significa que existe a derivada de a^x no ponto 0, sendo o seu valor $\lambda(a)$.

Procuremos agora a derivada de a^x num ponto x qualquer. A razão incremental neste ponto é:

$$\frac{k}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

e portanto:

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x . \lambda(a) \ .$$

Então, a derivada de a^x em ordem a x é :

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ . \lambda(a) \ .$$

Se no lugar de x se tiver uma função $u = \varphi(x)$, com

derivada finita, será, pelo teorema das funções compostas:

$$(4)\quad \frac{d}{dx}\,a^u = \left(\frac{d}{du}\,a^u\right)\cdot\frac{du}{dx} = a^u\,\lambda(a)\;u'$$

Consideremos agora uma outra base b. Será :

$$b^x = (a^{\log_a b})^x = a^{x\log_a b}$$

donde, atendendo a (4) :

$$\frac{d}{dx}\,b^x = a^{x\log_a b}\,\lambda(a)\;\log_a b\ .$$

Podemos determinar b de modo que seja $\lambda(a)\log_a b = 1$; basta que se tenha:

$$\log_a b = \frac{1}{\lambda(a)}$$

ou seja:

$$(5)\qquad b = a^{1/\lambda(a)}\ .$$

O valor de b assim obtido costuma representar-se pela letra e e designa-se por base dos logaritmos naturais ou neperianos. Demonstra-se que êste número é irracional; veremos mais adiante um modo de calculá-lo; com 4 decimais exactos, tem-se :

$$e = 2{,}7182\ \ldots$$

De (5) vem $b^{\lambda(a)} = a$ e portanto

$$\lambda(a) = \log_e a\ ;$$

quere dizer : $\lambda(a)$ é precisamente o logaritmo neperiano de a; convencionaremos representá-lo simplesmente por:

$$\boxed{\log\ a}$$

omitindo a indicação de base.

A fórmula de derivação da exponencial pode agora escrever-se:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,a^x = a^x \log a}$$

Em particular, se a base fôr precisamente e, virá:

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x} \quad \text{pois que} \quad \log_e e = 1$$

Vemos assim que a função e^x tem a particularidade de se reproduzir por derivação; é portanto indefinidamente derivável, sendo a sua derivada de qualquer ordem sempre igual a e^x.

Derivada da função logarítmica : Se fôr $y = \log_a x$, é $x = a^y$ e como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \text{ virá : } \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a}$$

No caso particular da função $y = \log x$ será simplesmente:

$$\boxed{y' = \frac{1}{x}}$$

Função potência: Chama-se função potência à função $f(x) = x^\alpha$, em que α designa um número real qualquer.

Esta função foi inicialmente definida no caso de α ser um número racional qualquer, mas, depois do estudo que fizemos da função exponencial, a função potência fica definida para qualquer valor real de α ; simplesmente o seu domínio de existência limita-se agora ao intervalo $[0,+\infty[$ e devem apenas considerar-se valores positivos da função.

Nestas condições podemos escrever:

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} ;$$

donde se deduz fàcilmente, utilizando a regra das funções compostas :

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{d}{dx} (\alpha \log x) = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

isto é:

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}} ;$$

a regra de derivação é pois a mesma que no caso do ex-

poente inteiro e positivo.

Se, em lugar de x, tivermos uma função $u = \varphi(x)$, derivável, será, segundo a regra de derivação das funções compostas:

$$\boxed{(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1}\, u'}$$

Mais geralmente consideremos funções do tipo $f(x)=u^v$ (função potência-exponencial) sendo u, v funções de x, deriváveis (é claro que esta função só é definida para os valores de x que tornam $u>0$).

Como se pode pôr:

$$f(x) = e^{\log u^v} = e^{v \log u}$$

virá:

$$f'(x) = e^{v \log u} \frac{d}{dx}(v \log u) = u^v\left(v' \log u + v \frac{u'}{u}\right)$$

ou:

$$\boxed{(u^v)' = u^v\, v' \log u + v\, u^{v-1}\, u'}$$

Teremos pois a seguinte regra para derivar a função potencia-exponencial: deriva-se primeiro como exponencial (supondo u constante), depois como potência (supondo v constante) e finalmente somam-se os dois resultados obtidos.

Indeterminações : As funções dêste tipo permitem-nos estudar novas formas de indeterminação. Pode suceder que, ao substituirmos x por um dado valor a, a expressão u^v conduza a um dos seguintes resultados:

$$1^\infty \ , \ \infty^0 \ , \ 0^0$$

que são símbolos de indeterminação; com efeito, como:

$$u^v = e^{v \log u}$$

se

$\begin{cases} u=1 \\ v=\infty \end{cases}$ o expoente toma a forma $\infty \cdot \log 1 = \infty \cdot 0$

$\begin{cases} u=\infty \\ v=0 \end{cases}$ " " " " " $0 \cdot \log \infty = 0 \cdot \infty$

$\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$ " " " " " $0 \cdot \log 0 = -0 \cdot \infty$;

portanto em qualquer dos casos o expoente assume a indeterminação $0.\infty$, já anteriormente estudada. Bastará então procurar o limite L da função v log u quando x tende para a (se tal limite existe), aplicando os métodos atrás indicados; o verdadeiro valor da função u^v será nesse caso e^L.

Exemplo: A função $f(x) = \sqrt[x]{1+x} = (1+x)^{1/x}$ assume, para x=0, a forma indeterminada 1^∞. Podemos escrever: $f(x) = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}$; para x=0 o expoente toma a forma $\infty.0$; mas :

$$\frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{\log(1+x)}{x}$$

função esta que para x=0 toma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$; aplicando a regra de l'Hopital virá:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

então:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+x)} = e^1 = e$$

Caso em que os limites laterais são diferentes - É preciso cuidado quando se procura o limite duma expressão em que intervenha a função exponencial ou a função logarítmica, porque então pode acontecer que o limite à esquerda seja diferente do limite à direita.

Consideremos, por exemplo, a função:

$$f(x) = x \cdot \log(1 + e^{1/x})$$

e procuremos o seu limite quando x tende para zero.

Tem-se:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty \quad \left| \quad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \right.$$

Portanto:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x \cdot \lim_{x\to 0^-} \log(1 + e^{1/x}) = 0$$

mas ao procurar o limite de f(x) ao tender x para 0^+ surge a forma indeterminada $0.\infty$.

Mas podemos escrever:

$$f(x) = \frac{\log (1 + e^{1/x})}{\frac{1}{x}}$$ e aplicando a regra de L'Hopital obtem-se a fracção:

$$\frac{\frac{1}{1 + e^{1/x}} \cdot e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{e^{-1/x} + 1}$$

que quando x tende para 0^+, toma o valor $\frac{1}{0+1} = 1$.

A função proposta não tem pois limite quando x tende para zero, uma vez que os limites laterais são diferentes.

Série de Taylor

Dada uma função f(x) que admita numa vizinhança de a derivadas finitas até à ordem n, tem-se, como vimos:

$$(1) \quad f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + C_n(x)$$

com

$$C_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

sendo ξ um ponto compreendido entre a e x. A $C_n(x)$ dá-se o nome de termo complementar da fórmula de Taylor.

Suponhamos agora que a função f(x) admite derivadas finitas de todas as ordens numa vizinhança de a e suponhamos além disso que se tem nessa vizinhança:

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} C_n(x) = 0;$$

tomando os limites a ambos os membros de (1) e notando que f(x) não depende de n, vem :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(a)+(x-a)f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right]+$$

$$+\lim_{n\to\infty} C_n(x)$$

e como, por hipótese, o limite de $C_n(x)$ é nulo, será, na vizinhança considerada:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(a)+(x-a)f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right]$$

$$= f(a)+(x-a)\,f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\cdots$$

isto é: a função f(x) passa a ser representada na referida vizinhança de a por uma série de potências de x-a que é a chamada série de Taylor da função f(x) no ponto a. Continuaremos a dar êste nome á série assim obtida mesmo quando não é verificada a condição (2) .

Mas é claro que, dada uma função f(x) com derivadas finitas de todas as ordens numa vizinhança de a, não podemos garantir "à priori" que ela coincida com a soma da sua série de Taylor no intervalo em que esta converge: é preciso averiguar se o termo complementar tende ou não para zero nesse intervalo.

No caso particular de a=0, ter-se-á a série de Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0)+x\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\cdots$$

Exemplos importantes: a) Série exponencial

Para a função e^x, tem-se :

$$f(x)=e^x\ ,\ f'(x)=e^x\ ,\ \ldots\ ,\ f^{(n)}(x)=e^x$$

e portanto:

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1\ .$$

Então, segundo a fórmula de Mac-Laurin, virá:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}\qquad 0<\theta<1$$

(é preciso não perder de vista que êste número θ depen-

de ao mesmo tempo de n e de x).

Afim de averiguar quais os valores de x para os quais o termo complementar tende para zero, comecemos por determinar o raio de convergência da série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

será:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \ ;$$

isto é, a série é convergente qualquer que seja o valor real de x e portanto o seu termo geral $\frac{x^n}{n!}$ tende para zero qualquer que seja x. Por outro lado, sabemos que e^x é uma função crescente; logo, atendendo a que $0 < \theta < 1$, virá:

$$\left| \frac{x^n}{n!} \, e^{\theta x} \right| \leqslant \left| \frac{x^n}{n!} \right| \, e^{|x|} \quad \text{, pois } |\theta x| < |x| \text{ .}$$

Ora $e^{|x|}$ não depende de n; por outro lado, $\frac{x^n}{n!}$ tende para zero quando n tende para infinito; logo o segundo membro tende para zero e portanto o mesmo acontece ao primeiro, isto é :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \, e^{\theta x} \right) = 0 \quad \text{qualquer que seja } x$$

Em resumo: o termo complementar tende para zero no intervalo $]-\infty, +\infty[$, e portanto será :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

para todo o valor de x .

Em particular para x=1, virá:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Se efectuarmos os cálculos com à aproximação de cinco decimais obtemos o valor 2,71828. (Demonstra-se que êste número é irracional).

b) Séries do seno e do coseno . Para a função sen x tem-se

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad f'''(0) = -1$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

e por consequência, segundo a fórmula de Mac-Laurin, virá:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + C_n(x)$$

sendo

$$C_n(x) = \frac{x^n}{n!} \operatorname{sen}\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{com } 0<\theta<1 .$$

Mas

$$|C_n(x)| \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| , \text{ por ser } \left|\operatorname{sen}\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1,$$

e como o 2º membro tende para zero qualquer que seja x (como vimos no exemplo anterior), o 1º membro tambem tende para zero e portanto podemos escrever:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

para qualquer valor de x, série esta que nos permite calcular sen x (com x expresso em radianos) com a aproximação que se pretender. (Como a série é alternada decrescente para valores de x positivos, o êrro que se comete quando se toma S_n para soma da série é, como sabemos, inferior ao módulo do 1º termo desprezado).

Anàlogamente se obtinha :..

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

É interessante verificar por meio destas séries as propriedades das funções e^x, sen x, cos x, tais como:

$$e^{u+v} = e^u \cdot e^v$$

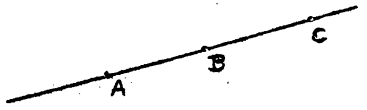
$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$$

GEOMETRIA ANALÍTICA

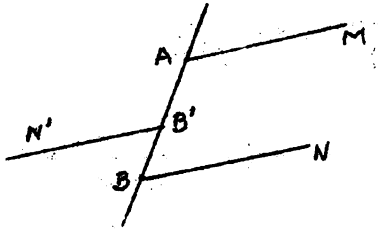
A) Vectores

Direcção e sentido: Diz-se que duas rectas têm a mesma direcção quando são paralelas. Podemos assim dizer que a direcção duma recta é a propriedade comum a essa recta e a todas as que lhe são paralelas (convem não perder de vista que duas rectas coincidentes são consideradas paralelas).

Diz-se que duas semi-rectas, pertencentes a uma mesma recta têm o mesmo sentido quando uma delas contém a outra; caso contrário diremos que têm sentidos opostos; assim as semi-rectas $\hat{AC}$ e $\hat{BC}$ indicadas na figura (de origens A e B) têm o mesmo sentido; mas já as semi-rectas $\hat{AC}$ e $\hat{BA}$ têm sentidos opostos.



Consideremos agora semi-rectas pertencentes à rectas paralelas e distintas. Diz-se que as semi-rectas têm o mesmo sentido quando existem no mesmo semi-plano limitado pela recta que passa pelas suas origens; caso contrário diz-se que têm sentidos opostos (na figura, $\hat{AM}$ e $\hat{AN}$ têm o mesmo sentido, $\hat{BN}$ e $\hat{B'N'}$ têm sentidos opostos).

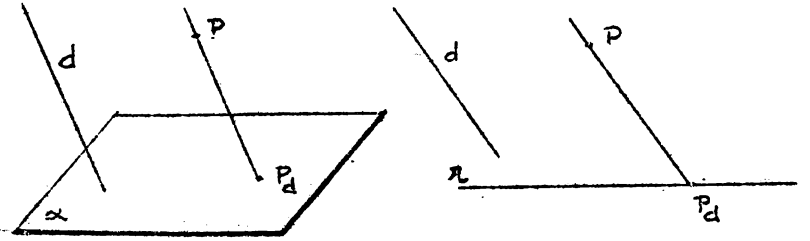


A cada direcção correspondem portanto dois sentidos opostos.

Chama-se eixo ou recta orientada a toda a recta sôbre a qual se tenha escolhido um sentido como positivo (o sentido contrário será portanto chamado negativo).

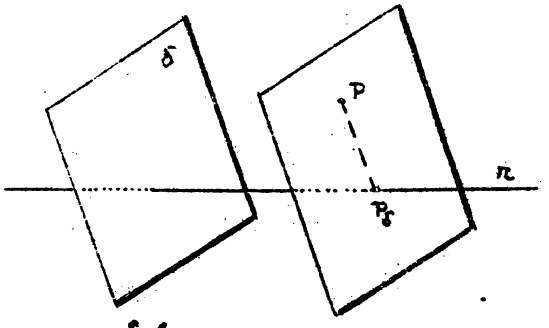
Conceitos de Projecção: Suponhamos fixados um plano α e uma recta d não paralela a α. Dado um ponto P qualquer, se conduzirmos por P uma recta paralela a d, a recta obtida encontra o plano α num ponto P_d que se chama projecção de P sôbre α segundo a direcção d . A projecção

diz-se ortogonal quando d é perpendicular a α.



O conceito de projecção pode apresentar-se também no plano. Suponhamos fixadas num plano duas rectas r,d não paralelas. Dado um ponto P do plano se conduzirmos por P uma recta paralela a d, a recta obtida vai encontrar r num ponto P_d que se chama a projecção de P sôbre r, segundo a direcção d. A projecção d diz-se ortogonal quando d é perpendicular a r.

Consideremos finalmente uma recta r e um plano δ não paralelo a r. Se por um ponto qualquer P conduzirmos um plano paralelo a δ, o plano obtido vai encontrar r num ponto P_δ que se diz projecção de P sôbre r, paralelamente a δ. A projecção diz-se ortogonal quando δ é perpendicular a r.



Conceito de vector : As ciências da natureza apresentam-nos diferentes exemplos de grandezas: comprimentos, áreas, volumes, massas, densidades, quantidades de electricidade, potenciais, etc. Nos casos mais simples (que são os dos exemplos citados), uma vez fixada uma grandeza para unidade, pode atribuir-se a cada grandeza da mesma classe um número real que a distingue de todas as outras e se chama a medida da grandeza. Estas grandezas, que ficam assim perfeitamente caracterizadas por um número real, dizem-se grandezas escalares .

Mas o estudo das ciências experimentais leva-nos a considerar grandezas de novo tipo, chamadas grandezas vectoriais . Uma grandeza vectorial é caracterizada não apenas por um número, mas ainda por uma direcção e um sentido. Tais são, por exemplo, as forças, as velocidades, etc.

A associação destes três dados - valor numérico, direcção e sentido - constitui um ente abstracto, chamado vector livre. Vamos precisar êste conceito começando por definir segmento orientado .

Definição : Dá-se o nome de segmento orientado a todo o segmento ao qual se atribui um determinado sentido, considerando um dos seus extremos como primeiro extremo ou origem e o outro como segundo extremo ou extremidade. Usa-se a notação:

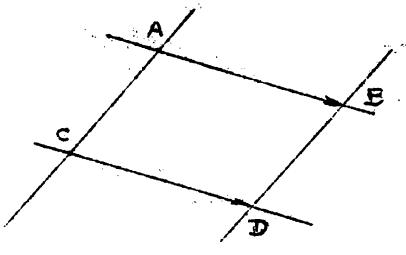
$$\overrightarrow{AB}$$

para designar o segmento orientado de origem A e extremidade B. A direcção do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é a da recta a que êle pertence e o sentido é o da semi-recta $\hat{A}B$ (de origem A e passante por B).

Se os extremos A, B coincidem, o segmento $\overrightarrow{AB}$ diz-se nulo. É claro que a direcção e o sentido de um tal segmento são indeterminados, porque há infinitas rectas que o contêm .

Dois segmentos orientados dizem-se equipolentes, quando têm o mesmo comprimento, a mesma direcção e o mesmo sentido. Em particular, todos os segmentos nulos são considerados equipolentes.

É fácil reconhecer que dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ não pertencentes à mesma recta são equipolentes se e só se :



$$AB \;//\; CD \quad e \quad AC \;//\; BD .$$

Aos segmentos orientados daremos ainda o nome de vectores aplicados .

Definição: Diz-se que dois segmentos orientados representam o mesmo vector livre quando (e só quando)

são equipolentes.

O vector livre representado por um segmento $\overrightarrow{AB}$ é pois um ente abstracto que tem por imagem geométrica não só êsse segmento orientado, mas qualquer outro que lhe seja equipolente.

Ao vector livre definido pelo segmento $\overrightarrow{AB}$ atribuiremos, naturalmente, o comprimento, a direcção e o sentido dêste segmento.

Enquanto um vector aplicado só fica determinado quando dele se conhecem a origem, o comprimento, a direcção e o sentido, o vector livre fica determinado apenas por um comprimento, uma direcção e um sentido.

Usa-se a notação B-A para designar o vector livre representado pelo segmento $\overrightarrow{AB}$. Dêste modo a igualdade

$$B - A = D - C \tag{1}$$

traduz a equipolência dos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

Se A, B, C, D representassem números e não pontos, poderíamos da igualdade (1) deduzir as seguintes:

$$A-B=C-D\ ,\quad B-D=A-C\ ,\quad D-B=C-A$$

as quais no presente caso, continuam a ser verdadeiras, como é fácil verificar.

Muitas vezes representaremos um vector livre por uma letra única, encimada duma seta :..

$$\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \vec{A}\ ,\ \vec{B}\ ,\ \ldots$$

Assim, designado por $\vec{u}$ o vector livre representado pelo segmento $\overrightarrow{AB}$, podemos escrever

$$\vec{u} = B - A\ .$$

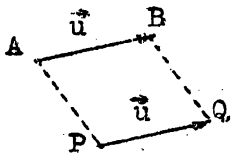
Se A e B fôssem símbolos numéricos, podíamos somar A a ambos os membros e viria :

$$B = A + \vec{u}\ .$$

Pois bem, para que esta operação continue a ser lícita introduz-se a seguinte definição:

Soma dum vector com um ponto - Dados um ponto A e um vector livre $\vec{u}$, chama-se soma de A com $\vec{u}$ ao ponto B tal que

o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ seja uma imagem do vector livre $\vec{u}$.



$B = A + \vec{u}$

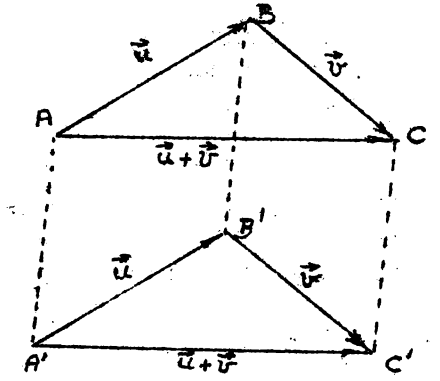
$Q = P + \vec{u}$

Em particular chama-se <u>vector nulo</u> e representa-se por $\vec{0}$ o vector livre representado por qualquer segmento nulo.

É claro que $A + \vec{0} = A$; isto é, a soma dum ponto com o vector nulo é o próprio ponto.

Em geral, quando não há perigo de confusão, omite-se o adjectivo "livre" e diz-se apenas "vector", em vez de "vector livre".

<u>Soma de vectores</u> - Consideremos dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e seja A um ponto arbitrário. Pondo $B = A + \vec{u}$, $C = B + \vec{v}$ vem:



$$C = B + \vec{v} = (A + \vec{u}) + \vec{v}$$

Mas é claro que se pode passar directamente do ponto A para o ponto C somando a A o vector C-A. Pois bem, a êste vector dá-se o nome de <u>soma dos vectores</u> $\vec{u}$, $\vec{v}$ e escreve-se:

$$C - A = \vec{u} + \vec{v}.$$

ou $C = A + (\vec{u} + \vec{v})$ ou ainda $C = A + \vec{u} + \vec{v}$.

A adição de vectores apresenta as seguintes propriedades:

I - <u>É uma operação uniforme</u> : Basta observar que a soma dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ não depende do ponto A escolhido.

Com efeito, tomemos outro ponto A' e seja :

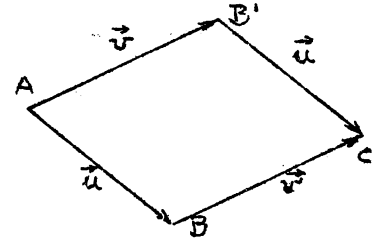
$$B' = A' + \vec{u} \quad , \quad C' = B' + \vec{v} \quad ;$$

como $\overrightarrow{A'B'}$ é equipolente a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{B'C'}$ é equipolente a $\overrightarrow{BC}$, os dois triângulos $[ABC]$, $[A'B'C']$ são iguais e portanto os segmentos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ são equipolentes, representando

por isso o mesmo vector $\vec{u} + \vec{v}$.

Assim a adição faz corresponder a cada par de vectores livres um, e um só, vector livre; soma dos dois primeiros; a operação é, pois, uniforme.

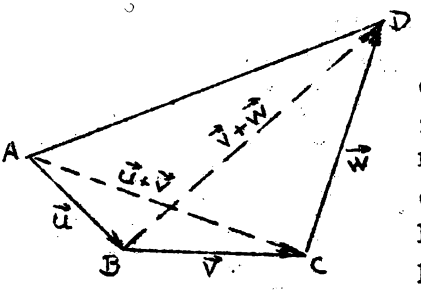
II - É uma operação comutativa , isto é: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, quaisquer que sejam os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Com efeito, se somarmos ao ponto A o vector $\vec{u}$ e ao ponto $B = A + \vec{u}$ o vector $\vec{v}$, obtemos o mesmo ponto C que obteríamos somando primeiro o vector $\vec{v}$ ao ponto A e em seguida o vector $\vec{u}$ ao ponto $B' = A + \vec{v}$, como fàcilmente se reconhece pelas propriedades elementares do paralelogramo (pois que os segmentos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C}$ são equipolentes e o mesmo sucede aos segmentos $\overrightarrow{AB'}$ e $\overrightarrow{BC}$).



III - É uma operação associativa, isto é :

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

quaisquer que sejam os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Com efeito, tomemos um ponto A arbitrário e seja $B = A + \vec{u}$, $C = B + \vec{v}$, $D = C + \vec{w}$. Então, $C-A=\vec{u} + \vec{v}$, $D-A = (\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w}$. Mas, por outro lado, $D-B = \vec{v} + \vec{w}$ e portanto $D-A = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.



Por conseguinte:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad \text{q.e.d.}$$

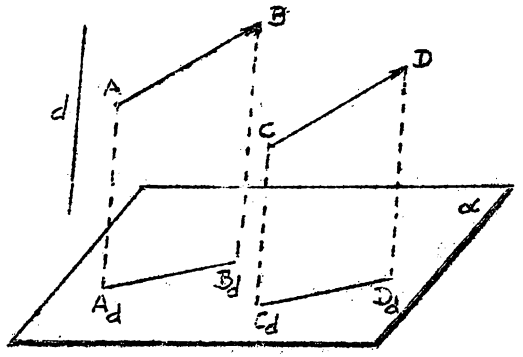
Podemos então escrever simplesmente:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \quad \text{em vez de} \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} .$$

Esta propriedade pode estender-se a uma soma com um número qualquer de parcelas.

Projecção dum vector sôbre um plano segundo uma direcção dada. Consideremos um plano α , uma direcção d não paralela ao plano e um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Sejam A_d e B_d as projecções dos pontos A, B sôbre α segundo a di-

recção d. O segmento orientado $\overrightarrow{A_dB_d}$ chamar-se à projecção do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ sôbre α segundo a direcção d.

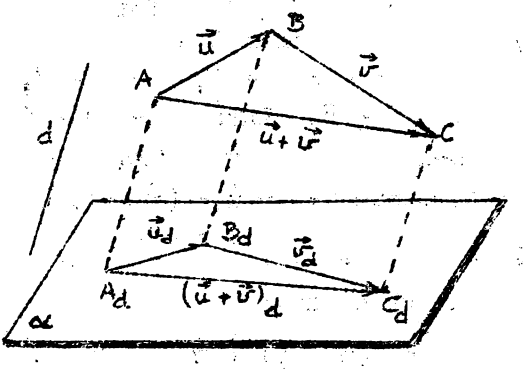


Chamaremos <u>projecção do vector livre</u> B-A sôbre α segundo a direcção d ao vector livre B_d-A_d e escreveremos:

$$(B-A)_d = B_d - A_d$$

É fácil ver que esta operação é uniforme, isto é, que para cada vector livre $\vec{u}$ existe <u>um</u> e <u>um só</u> vector livre $\vec{u}_d$ que é projecção de $\vec{u}$ sôbre α segundo a direcção d. Basta observar que, se tomarmos outro segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ representativo de $\vec{u}$ (isto é, equipolente a $\overrightarrow{AB}$), a sua projecção $\overrightarrow{C_dD_d}$ sôbre α segundo a direcção d é equipolente a $\overrightarrow{A_dB_d}$, representando portanto o mesmo vector livre $\vec{u}_d$.

Se considerarmos dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e os projectarmos sôbre o plano α, segundo a direcção d fàcilmente se reconhece <u>que a projecção da soma dos dois vectores é igual à soma das projecções dos dois vectores</u>, isto é:



$$(\vec{u} + \vec{v})_d = \vec{u}_d + \vec{v}_d .$$

Com efeito, sendo $\vec{u} = B-A$, $\vec{v} = C-B$, tem-se $\vec{u}_d = B_d-A_d$, $\vec{v}_d = C_d-B_d$ e, portanto, $\vec{u}_d + \vec{v}_d = (B_d-A_d) + (C_d-B_d) = C_d-A_d = (\vec{u} + \vec{v})_d$

Podemos então dizer que <u>a operação de projecção é distributiva a respeito da adição de vectores</u>.

Chega-se a conclusões perfeitamente análogas para os

outros conceitos de projecção (sôbre uma recta, segundo a direcção duma recta e sôbre uma recta segundo a orientação dum plano)

Módulo dum vector - Chama-se módulo dum vector $\vec{u}$, e representa-se por $|\vec{u}|$ ou por mod $\vec{u}$, o número que exprime o comprimento do vector, uma vez fixada uma unidade de comprimento. Dados dois pontos A,B, o módulo do vector B-A, será representado por $|B-A|$, por $|\overrightarrow{AB}|$ ou simplesmente por $|AB|$.

Multiplicação dum vector por um escalar - Chama-se produto dum vector $\vec{u}$ por um número real a ao vector cujo comprimento é o produto do módulo de a pelo comprimento de $\vec{u}$, cuja direcção é a de $\vec{u}$ e cujo sentido é o de $\vec{u}$ ou o sentido oposto ao de $\vec{u}$, conforme a é positivo ou negativo. O produto de a por $\vec{u}$ representa-se por $a\vec{u}$.

Por conseguinte o vector $a\vec{u}$ tem :

1) a direcção de $\vec{u}$;
2) o sentido de $\vec{u}$ ou o contrário conforme a é positivo ou negativo;
3) o módulo $|a\,\vec{u}| = |a|.|\vec{u}|$.

(Convém notar que, no estudo dos vectores, os números reais costumam ser chamados escalares).

Em particular, o vector $(-1)\,\vec{u}$ será o vector com a mesma direcção e o mesmo comprimento de $\vec{u}$, mas com sentido contrário ao de $\vec{u}$; chama-se-lhe simétrico de $\vec{u}$ e representa-se por $-\vec{u}$. Imediatamente se reconheçe que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = 0 \quad \text{qualquer que seja } \vec{u} .$$

A multiplicação de vectores por escalares apresenta as seguintes propriedades:

$$\text{I} \qquad a\,(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u} ,$$

$$\text{II} \qquad (a+b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u} ,$$

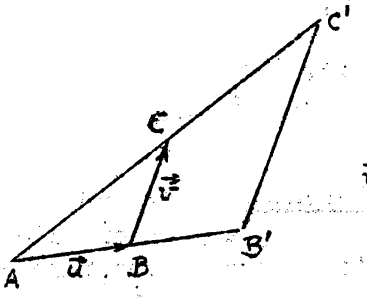
$$\text{III} \qquad a\,(\vec{u}+\vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v} ,$$

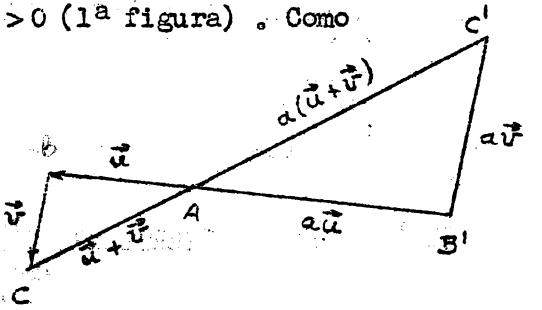
designando por a, b números reais quaisquer e por $\vec{u}$, $\vec{v}$ vectores também arbitrários.

Façamos, por exemplo, a demonstração da última propriedade. Seja:

$$B' = A + a\vec{u} \quad , \quad C' = B' + a\vec{v} \quad .$$

e comecemos por supor $a > 0$ (1ª figura) . Como





$\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$, os pontos A, C e C' têm de estar sôbre a mesma recta (em virtude do recíproco do teorema de Thales), e então :

$$\frac{|AC'|}{|AC|} = \frac{|AB'|}{|AB|} = a$$

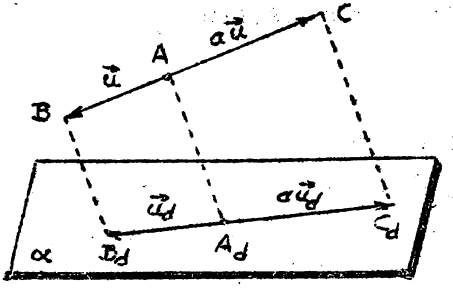
donde $C' - A = a\,(C-A) = a\,(\vec{u} + \vec{v})$

e como $C' - A = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$, vem . . .

$a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$ q.e.d.

Estivemos a supor $a > 0$; no caso de ser $a < 0$, o raciocínio seria análogo, como se reconhece pela segunda figura.

Vejamos agora como se comporta em projecção o produto dum vector por um escalar. Consideremos um plano α, uma recta d não paralela a α, um vector $\vec{u}$ e um escalar a. Comecemos por supor $a < 0$. Imediatamente se reconhece pela figura, utilizando o teorema de Thales, que é :



$$(a\,\vec{u})_d = a\,\vec{u}_d \ .$$

A conclusão será a mesma supondo $a>0$.

Diferença entre dois vectores - Dados dois vectores quaisquer, $\vec{u}$, $\vec{v}$, é sempre possível determinar um e um só vector $\vec{x}$ tal que :

$$\vec{v} + \vec{x} = \vec{u} \ .$$

Com efeito, somando a ambos os membros desta igualdade o vector $-\vec{v}$ virá :

$$\vec{v} + \vec{x} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-\vec{v})$$

ou seja

$$\vec{x} = \vec{u} + (-\vec{v}) \ .$$

A êste vector $\vec{x}$ chama-se diferença entre o vector $\vec{u}$ e o vector $\vec{v}$. Representá-lo-emos simplesmente por $\vec{u}-\vec{v}$.

Divisão de um vector por um escalar - Chama-se cociente dum vector $\vec{u}$ por um número real a, e representa-se por

$$\frac{\vec{u}}{a}, \quad \text{ao vector} \quad \frac{1}{a}\vec{u} \ ,$$

que se obtem do primeiro multiplicando-o pelo inverso de a.

Colinearidade e coplanaridade - Diz-se que dois ou mais vectores são colineares quando têm a mesma direcção, isto é, quando podem ser representados sôbre uma mesma recta. Em particular o vector nulo será colinear com qualquer vector.

Da própria definição de produto dum vector por um escalar resulta que :

"O produto dum vector $\vec{u}$ por um escalar k é sempre um vector colinear com $\vec{u}$."

Por outro lado tem-se o seguinte

Teorema: "Se dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, e o segundo não é nulo, é possível determinar um e um só número real k tal que $\vec{u} = k\,\vec{v}$."

Com efeito, basta tomar $|k| = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$ e atribuir a k o sinal + ou - conforme $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm ou não o mesmo sentido.

A êste número k dá-se o nome de razão entre os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e escreve-se $k = \frac{\vec{u}}{\vec{v}}$. (É preciso não perder de vista que só pode falar-se de razão entre dois vecto-

res $\vec{u}$, $\vec{v}$, quando êstes forem colineares e $\vec{v} \neq \vec{0}$).

Diz-se que um vector $\vec{u}$ é <u>combinação linear</u> dos vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ quando existam n números reais $k_1, k_2, \ldots, k_n$, tais que :

$$\vec{u} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_n\vec{u}_n .$$

Diz-se que três ou mais vectores são <u>coplanares</u> quando são representáveis por segmentos orientados dum mesmo plano. Em particular se dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ são colineares, qualquer outro vector $\vec{w}$ é coplanar com os primeiros.

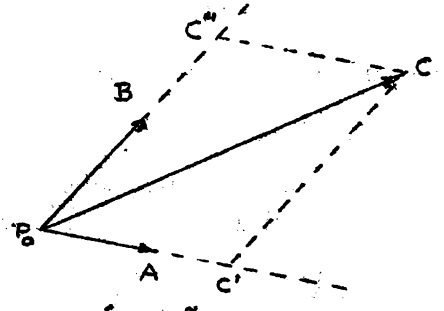
Da definição de soma de vectores e de produto dum vector por um escalar resulta imediatamente que:

"Todo o vector $\vec{w}$ que seja combinação linear de dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ é coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$."

Por outro lado, temese o seguinte :

<u>Teorema</u> : "Se três vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares e os dois primeiros não são colineares, o terceiro é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$."

Dem.: Suponhamos que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são coplanares e que $\vec{u}$, $\vec{v}$ não são colineares. Então, os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ podem ser representados por segmentos orientados do mesmo plano; suponhamo-los representados respectivamente pelos segmentos $\overrightarrow{P_oA}$, $\overrightarrow{P_oB}$, $\overrightarrow{P_oC}$ de origem comum P_o; isto é :



$$\vec{u} = A - P_o \ , \ \vec{v} = B - P_o \ , \ \vec{w} = C - P_o$$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, as rectas P_oB e P_oA não são paralelas. Seja C' a projecção de C sôbre P_oA, paralelamente a P_oB, e seja C" a projecção de C sôbre P_oB, paralelamente a P_oA; ter-se-á então :

$$(1) \qquad C - P_o = (C' - P_o) + (C'' - P_o)$$

Ora $C'-P_o$ é colinear com $A-P_o$ e $C''-P_o$ é colinear com $B-P_o$; além disso, $A-P_o$, $B-P_o$ não são nulos; logo, em vir-

tude do teorema anterior, será possível determinar dois números α e β tais que :

$$C' - P_o = \alpha(A - P_o) \ , \quad C'' - P_o = \beta(B - P_o) \ .$$

Substituindo êstes valores em (1), vem:

$$C - P_o = \alpha(A - P_o) + \beta(B - P_o)$$

isto é:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

o que significa que $\vec{w}$ é uma combinação linear dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, q.e.d.

O teorema anterior pode ser completado com êste outro:

"Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ coplanares e $\vec{u}$, $\vec{v}$ não colineares, existe um <u>único</u> sistema de números reais α, β tais que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \ ."$$

Com efeito, consideremos dois sistemas (α, β), (α', β') em tais condições; ter-se-á :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} \ .$$

donde:

$$(\alpha - \alpha')\vec{u} + (\beta - \beta')\vec{v} = 0 \ .$$ Ora se fôsse $\alpha \neq \alpha'$ viria :

$$\vec{u} = \frac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'}\vec{v}$$

e os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ seriam colineares, contràriamente à hipótese. A conclusão seria análoga supondo $\beta \neq \beta'$. Então deverá ser $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

Aos números α, β dá-se o nome de <u>componentes</u> de $\vec{w}$ segundo $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

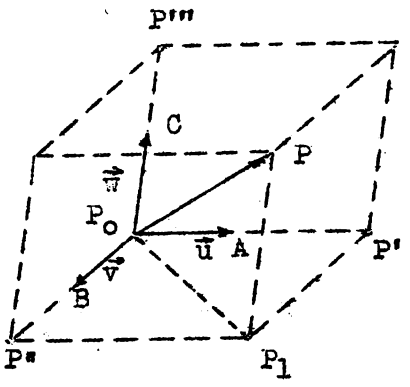
Tem-se ainda o seguinte:

<u>Teorema</u>: Dados três vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, não coplanares, qualquer vector $\vec{m}$ do espaço é combinação linear dos três primeiros".

Com efeito, tomemos um ponto P_o qualquer do espaço para origem comum dos segmentos orientados representativos dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{m}$, e ponhamos :

(2) $\vec{u} = A - P_o$, $\vec{v} = B - P_o$, $\vec{w} = C - P_o$, $\vec{m} = P - P_o$.

Posto isto, sejam P', P'' , P''' as projecções de P,



respectivamente: sôbre P_oA paralelamente ao plano CP_oB, sôbre P_oB paralelamente ao plano CP_oA e sôbre P_oC paralelamente ao plano AP_oB. Seja por outro lado P_1 a projecção de P sôbre o plano AP_oB paralelamente a P_oC .

Então será:

$$P-P_1 = (P'-P_o) + (P''-P_o),$$

$$P-P_1 = P''' - P_o$$

e portanto:

(3) $$P - P_o = (P'-P_o) + (P''-P_o) + (P'''-P_o) \ .$$

Visto que $P'-P_o$, $P''-P_o$, $P'''-P_o$ são colineares respectivamente com $A-P_o$, $B-P_o$, $C-P_o$, vectores êstes não nulos, concluímos que se podem determinar três números α, β, γ tais que:

$$P'-P_o = \alpha(A-P_o), \quad P''-P_o = \beta(B-P_o), \quad P'''-P_o = \gamma(C-P_o)$$

Entrando com êstes valores em (3) e atendendo a (2) virá:

$$\vec{m} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \ ; \qquad \text{q.e.d.}$$

A êste teorema convêm acrescentar o seguinte enunciado:

"Sendo os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, não coplanares, para cada vector m existe um <u>único</u> sistema de números reais α, β, γ, tais que

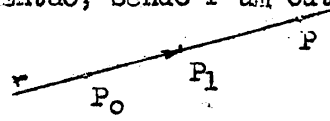
$$\vec{m} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \ ."$$

A demonstração é semelhante à do caso precedente (no plano). Aos números α, β, γ dá-se o nome de <u>componentes de $\vec{m}$ segundo os vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$</u> .

B) <u>Rectas e planos</u>

<u>Equação vectorial da recta</u> - Uma recta r fica definida por quaisquer dois dos seus pontos P_o, P_1 distintos.

Então, sendo P um outro ponto qualquer da recta, os vectores $P-P_0$ e P_1-P_0 são colineares e $P_1-P_0 \neq \vec{0}$; logo, existirá um e um só escalar λ tal que:



$$P-P_0 = \lambda(P_1-P_0)$$

ou seja:

(1) $$\boxed{P = P_0 + \lambda(P_1-P_0)}$$

Reciprocamente, dando a λ um valor real qualquer, o ponto P assim obtido é manifestamente um ponto da recta. Por conseguinte quando λ varia entre $-\infty$ e $+\infty$, o ponto P descreve a recta r. Fica assim estabelecida, por meio da fórmula (1), uma correspondência biunívoca entre os números reais λ e os pontos P de r.

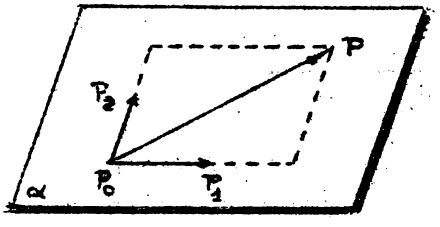
A (1) dá-se o nome de <u>equação vectorial</u> da recta (λ é o <u>parâmetro</u>, P o <u>ponto genérico</u> da recta).

Pondo $\vec{u} = P_1-P_0$, a equação (1) toma o aspecto:

$$P = P_0 + \lambda\,\vec{u}$$

Deste modo, a recta fica definida por um seu ponto P_0 e por um vector $\vec{u}$ <u>não nulo</u> com a direcção da recta.

<u>Equação vectorial do plano</u> - Um plano fica definido por três quaisquer dos seus pontos, distintos e não colineares. Sejam P_0, P_1, P_2 esses pontos; sendo P um outro qualquer ponto do plano, os vectores:



$$P-P_0, \quad P_1-P_0, \quad P_2-P_0$$

são coplanares; além disso os vectores P_1-P_0, P_2-P_0 não são colineares. Então, segundo o que foi atrás estabelecido, será possível determinar um e um só sistema de dois números reais λ, μ, tais que

$$P - P_0 = \lambda(P_1-P_0) + \mu(P_2-P_0)$$

ou seja:

(2) $$\boxed{P = P_0 + \lambda(P_1-P_0) + \mu(P_2-P_0)}$$

Reciprocamente a cada sistema de valores reais atribuidos a λ e μ, corresponde um e um só ponto P do plano. Portanto quando se fazem variar λ e μ entre $-\infty$ e $+\infty$, de todas as maneiras possíveis, obtêm-se deste modo todos os pontos do plano. A igualdade (2) é, por isso, chamada a equação vectorial do plano α (λ , μ- parâmetros; P - ponto genérico de α)

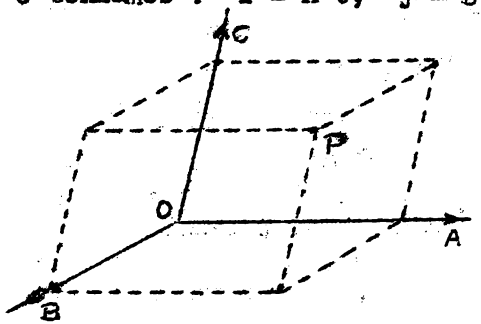
Fica assim estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e todos os pares de números reais.

Pondo $\vec{u} = P_1 - P_0$, $\vec{v} = P_2 - P_0$, a equação (2) toma o aspecto:

$$P = P_0 + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \ .$$

Dêste modo o plano fica definido por um seu ponto P_0 e por dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ não colineares dêsse plano.

Coordenadas dum ponto no espaço - Suponhamos fixados quatro pontos O,A,B,C não existentes num mesmo plano e ponhamos : $\vec{i} = A-O$, $\vec{j} = B-O$, $\vec{k} = C-O$. Os vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ são não coplanares; portanto, segundo o que foi atrás estabelecido, dado um ponto P qualquer do espaço, existirá um(e um só)sistema de números reais x, y, z tais que:



$$P-O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ou seja:

(3) $$\boxed{P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

Reciprocamente dados os números reais x, y, z, a expressão (3) define um potno P do espaço. Fica pois estabelecida uma correspondência biunívoca entre os sistemas de três números reais e os pontos do espaço.

Diz-se que o ponto O e os vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ constituem um triedro de referência ou referencial cartesiano; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ são os chamados vectores de base; os números x, y, z dizem-se as coordenadas cartesianas do ponto P no

referencial considerado: x a abscissa, y a ordenada, z a cota. As rectas OA, OB, OC orientadas, respectivamente segundo os sentidos dos vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ são os eixos coordenados (OA o eixo das abscissas, OB o das ordenadas e OC o das cotas); os planos OAB, OAC, OBC dizem-se planos coordenados (respectivamente o plano xy, o plano xz e o plano yz).

Por outro lado observemos que todo o vector $\vec{u}$ do espaço admite uma (e uma só) decomposição segundo os vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, isto é:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

sendo u_x, u_y, u_z as componentes ou as coordenadas do vector $\vec{u}$ no referencial considerado (u_x a primeira componente, u_y a segunda componente e u_z a terceira componente).

Sendo P um ponto de coordenadas x,y,z num dado referencial, escreve-se abreviadamente P=(x,y,z) para indicar êsse facto; anàlogamente se escreve $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ para indicar que o vector $\vec{u}$ tem por componentes u_x, u_y, u_z (subentendendo-se qual seja o referencial).

Dados dois vectores $\vec{u} = (a,b,c)$ e $\vec{v} = (a',b',c')$, fàcilmente se reconhece que:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (a+a',\ b+b',\ c+c')},$$

isto é: as componentes do vector soma são as somas das componentes homólogas dos vectores parcelas.

Anàlogamente se reconhece que dado um vector $\vec{u} = (a,b,c)$ e sendo λ um escalar qualquer se tem:

$$\boxed{\lambda \vec{u} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)}$$

isto é: as componentes do produto dum vector por um escalar são os produtos de cada componente do vector por êsse escalar.

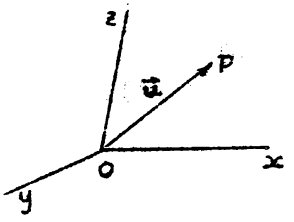
. .(Para verificar êstes dois factos, basta escrever $\vec{u}$

e $\vec{v}$ sob a forma $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$ e aplicar as propriedades da adição de vectores e da multiplicação de um vector por um escalar).

Convém ainda notar que se uma das componentes dum vector é nula, o vector é paralelo ao plano coordenado definido pelos eixos que não correspondem a essa componente(e reciprocamente). Por exemplo, o vector (3,-2,0) é paralelo ao plano xy visto ser nula a componente segundo o eixo dos zz; enquanto o vector (0,0,-5) é paralelo a Oz, por serem nulas as duas primeiras componentes.

Por sua vez o facto de ser nula uma das coordenadas dum ponto significa que êsse ponto está sôbre o plano coordenado definido pelos dois eixos que não correspondem a essa coordenada. Por exemplo, o ponto (3,0,-5) está sôbre o plano xz, o ponto (0,2,0) está sôbre o eixo dos yy, o ponto (0,0,0) é a origem, etc.

Vector de posição - Fixada uma origem O, chama-se vector de posição dum ponto P ao vector $\vec{u} = P-O$ que somado com a origem define P. Fica dêste modo estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos e os vectores do espaço, a qual se reflete na representação analítica de pontos e vectores : as coordenadas dum ponto são as componentes do seu vector de posição.



Condição cartesiana de colinearidade de dois vectores: Sejam os vectores $\vec{u}=(a,b,c)$ e $\vec{v}=(a',b',c')$; a condição de colinearidade, suposto $\vec{v} \neq \vec{0}$, é que exista um escalar k tal que:

$$\vec{u} = k\,\vec{v} \ ;$$

ora esta igualdade traduz-se nas três igualdades escalares:

$$(4) \qquad \begin{cases} a = k\,a' \\ b = k\,b' \\ c = k\,c' \ , \end{cases}$$

isto é, a colinearidade traduz-se na proporcionalidade

das componentes homólogas. Se a', b', c' forem todos diferentes de zero, podemos ainda escrever:

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$$

Para comodidade de exposição, costuma escrever-se estas igualdades mesmo na hipótese de um dos denominadores ser nulo, convencionando-se que, neste caso, o numerador correspondente é também nulo.

Podemos ainda dar outra forma à condição de colinearidade de vectores:

Una vez verificadas as condições (4), os determinantes :

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

são todos nulos (visto que uma das colunas é múltipla da outra). Reciprocamente, se êstes determinantes são todos nulos, as equações (4) são todas verificadas; com efeito, como $\vec{v} \neq \vec{0}$ uma, pelo menos, das componentes de $\vec{v}$ (a', por exemplo) é diferente de zero e sendo os determinantes todos nulos tem-se :

$$a\,b' - a'\,b = 0 \,, \quad a\,c' - a'\,c = 0 \,,$$

donde

$$b = \frac{a}{a'}\,b' \,, \qquad c = \frac{a}{a'}\,c'$$

ou seja, fazendo $k = \frac{a}{a'}$:

$$a = k\,a' \,, \quad b = k\,b' \,, \quad c = k\,c' \,.$$

Então: "Condição necessária e suficiente de colinearidade dos dois vectores u, v é que sejam simultâneamente nulos os três determinantes (5)".

Equações cartesianas da recta - Vimos que a equação vectorial duma recta r definida por um ponto P_o e por um vector $\vec{u}$ não nulo é :

$$P = P_o + \lambda u \,.$$

Se fôr $P=(x,y,z)$, $P_o(x_o,y_o,z_o)$, $\vec{u}=(a,b,c)$, esta equação vectorial traduz-se pelas três equações numéricas seguintes:

$$\begin{cases} x = x_o + a\lambda \\ y = y_o + b\lambda \\ z = z_o + c\lambda \end{cases} .$$

que são as chamadas <u>equações paramétricas da recta</u> (em coordenadas cartesianas).

Como supomos $\vec{u} \neq \vec{0}$, pelo menos uma das componentes de $\vec{u}$ não será nula (seja, por exemplo, $a \neq 0$); então teremos:

$$\begin{cases} y - y_o = \frac{b}{a}(x - x_o) \\ z - z_o = \frac{c}{a}(x - x_o) \end{cases}$$

que são as <u>equações cartesianas</u> da recta (nas quais já não intervem o parâmetro λ) .

Se as três componentes a,b,c, forem diferentes de zero, estas duas equações ainda podem escrever-se:

$$(6) \qquad \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

No entanto, segundo a convenção que introduzimos a propósito da colinearidade de vectores, continuaremos a escrever as equações (6) mesmo na hipótese de um dos números a, b,c ser nulo. É claro que nêste caso o vector $\vec{u}$ (e portanto a recta r) é paralelo a um plano coordenado: ao plano xy se fôr c=0, ao plano xz se fôr b=0, ao plano yz se fôr a=0. Por exemplo, as equações :

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{0} = z$$

representam uma recta paralela ao plano xz e podem escrever-se :

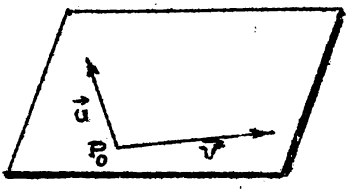
$$\begin{cases} x - 2 = 3z \\ y + 1 = 0 \end{cases} .$$

Suponhamos agora que a recta é definida pelos pontos $P_o=(x_o,y_o,z_o)$, $P_1=(x_1,y_1,z_1)$; podemos pôr $\vec{u} = P_1 - P_o$ e as equações (6) tomam a forma:

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}$$

que são as equações da recta que passa pelos pontos P_o e P_1 . Estas equações traduzem a condição de colinearidade dos pontos P_o, P_1 P.

Equação cartesiana do plano : Já vimos que dado um plano α definido por um seu ponto $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ e dois seus vectores não colineares $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$,



a equação vectorial do plano é:

$$P = P_o + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} .$$

Pondo $P=(x,y,z)$, esta igualdade vectorial será equivalente às três igualdades escalares

$$(7) \qquad \begin{cases} x = x_o + \lambda a + \mu a' \\ y = y_o + \lambda b + \mu b' \\ z = z_o + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

que são as equações paramétricas do plano α em coordenadas cartesianas.

Podemos eliminar λ e μ entre estas três equações. Para isso observemos que o determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

é nulo desde que sejam verificadas as equações (7) porque então a sua primeira linha é combinação linear das outras duas. Portanto, igualando êste determinante a zero, obtem-se a equação em x,y,z que resulta de eliminar λ, μ entre as equações (7). Desenvolvendo o determinante

segundo os elementos da primeira linha e pondo:

$$A = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \qquad B = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

o plano α passará a ser definido pela equação cartesiana:

$$(8) \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \ .$$

Como, por hipótese, os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, um, pelo menos, dos números A, B, C será diferente de zero.

Se o plano estiver definido por três pontos $P_0=(x_0, y_0, z_0)$, $P_1=(x_1, y_1, z_1)$, $P_2=(x_2, y_2, z_2)$, pondo $\vec{u} = P_1 - P_0$, $\vec{v} = P_2 - P_0$, as componentes de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$ serão respectivamente:

$$a = x_1 - x_0 \qquad a' = x_2 - x_0$$
$$b = y_1 - y_0 \qquad \text{e} \qquad b' = y_2 - y_0$$
$$c = z_1 - z_0 \qquad c' = z_2 - z_0$$

e a equação cartesiana do plano que passa pelos três pontos P_0, P_1, P_2, será :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

A equação (8) pode ainda escrever-se sob a forma

$$(9) \qquad A x + B y + C z + D = 0$$

pondo $D = - A x_0 - B y_0 - C z_0$.

Portanto: a equação cartesiana dum plano é da forma (9), com A, B, C não simultâneamente nulos.

Vamos ver que, reciprocamente, dados ao arbítrio A, B, C, D, com A,B,C não simultâneamente nulos, a equação (9) representa um plano .

Designemos por Ω o lugar geométrico dos pontos do

espaço, cujas coordenadas x,y,z verificam a equação (9). Trata-se de provar que Ω é um plano.

Seja, por exemplo $C \neq 0$; a equação (9) pode então escrever-se :

$$(10) \qquad z = m\,x + n\,y + p \quad \text{com} \quad m = \frac{-A}{C}\,, \quad n = \frac{-B}{C}$$

Ora para x=0, y=0, vem z=p; para x=1, y=0, vem $z = m+p$; para x=0, y=1, vem $z = p + n$. Portanto os pontos

$$P_0=(0,0,p), \quad P_1=(1,0,p+m), \quad P_2=(0,1,p+n)$$

pertencem a Ω ; por outro lado é fácil ver que os vectores

$$P_1 - P_0 = (1,0,m) \qquad P_2 - P_0 = (0,1,n)$$

não são colineares. A equação do plano que passa por P_0, P_1, P_2, será então :

$$\begin{vmatrix} x & y & z-p \\ 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \end{vmatrix} = 0$$

ou seja, desenvolvendo segundo os elementos da primeira linha:

$$- mx - ny + z - p = 0$$

ou ainda:

$$z = m\,x + n\,y + p\,,$$

que é a equação de Ω . Fica assim provado, como pretendíamos, que Ω é um plano. À mesma conclusão chegaríamos supondo $A \neq 0$, ou $B \neq 0$.

Suponhamos A=0 e $C \neq 0$. Então a equação (9) torna-se:

$$B\,y + C\,z + D = 0$$

e a equação (10) resulta :

$$z = y + p\,.$$

Neste caso, o vector $P_1 - P_0 = (1,0,m)$, ficará a ter por componentes 1, 0, 0 e será então paralelo ao eixo dos xx: o mesmo acontecerá portanto ao plano .

Dum modo geral: quando falta um dos termos na equa-

ção (9), esta representa um plano paralelo ao eixo correspondente (ao eixo dos xx, se A=0; ao eixo dos yy, se B=0; ao eixo dos zz, se C=0). Quando faltam dois termos o plano é paralelo ao plano coordenado definido pelos eixos correspondentes.

Em particular $x=0$; $y=0$ e $z=0$ são as equações dos planos coordenados.

Intersecção de planos : Consideremos os planos de equações:

$$(11) \qquad \begin{cases} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \ ; \end{cases}$$

os pontos comuns aos dois planos (se existirem) serão os pontos cujas coordenadas x,y,z, satisfazem simultâneamente às duas equações. Trata-se pois de fazer o estudo do sistema (11); para isso consideremos os determinantes :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$$

Se êstes determinantes não fôrem simultâneamente nulos podemos tomar um dêles como principal e visto que não há determinantes característicos (por não haver equações não principais) as equações são compatíveis - o sistema admite uma simples infinidade de soluções - Se, por exemplo, o 3º determinante não fôr nulo, podemos resolver o sistema em ordem a y e z, obtendo :

$$\begin{cases} y = m\,x + p \\ z = n\,x + q \end{cases}$$

que são as equações duma recta intersecção dos dois planos (uma recta no espaço pode ser representada de infinitos modos, dando as equações de dois quaisquer planos que por ela passem).

Se todos os determinantes são nulos, isto é, se :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \ ,$$

para que o sistema seja possível (supondo, por exemplo, $A \neq 0$) terá de ser nulo o característico:

$$\begin{vmatrix} A & D \\ A' & D' \end{vmatrix} \quad \text{isto é :} \quad \frac{A}{A'} = \frac{D}{D'} .$$

Portanto o sistema é possível e tem uma dupla infinidade de soluções, quando :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} ;$$

mas, nestas condições, os coeficientes homólogos das duas equações são proporcionais, as soluções duma são soluções da outra e portanto os planos são coincidentes. Então :

"Condição necessária e suficiente para que dois planos sejam coincidentes é que os coeficientes homólogos das duas equações sejam proporcionais".

Se o característico $\begin{vmatrix} A & D \\ A' & D' \end{vmatrix}$ é diferente de zero, o sistema é impossível, o que significa que não há nenhum ponto comum aos dois planos: êstes são, portanto, paralelos e distintos.

Condição característica de paralelismo dos dois planos (11) é pois :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Daqui se deduz ainda o seguinte: A equação do plano que passa por um dado ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e é paralelo ao plano $A x + B y + C z + D = 0$, será :

$$A (x-x_1) + B (y-y_1) + C (z-z_1) = 0 .$$

Intersecção de três planos - Sejam os planos de equações:

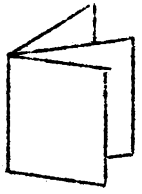
$$\begin{aligned} & A x + B y + C z + D = 0 \\ (12) \qquad & A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \ldots \qquad & A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{aligned}$$

Suponhamos em primeiro lugar que o determinante

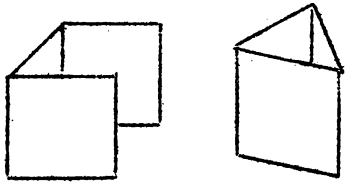
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

é diferente de zero; trata-se neste caso dum sistema de Cramer (possível e determinado), portanto o sistema (12) tem uma só solução: os três planos têm um único ponto comum.

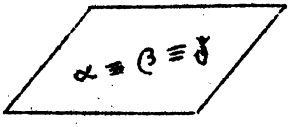
Se fôsse $\Delta = 0$, tinhamos de levar mais longe a análise, fazendo o estudo do sistema (12); podíam então surgir-nos os casos seguintes :



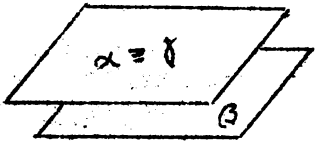
Sistema possível e simplesmente indeterminado: os três planos cortam-se segundo uma recta (determinante principal de segunda ordem, caracte- rístico nulo).



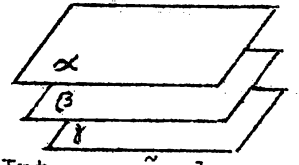
Sistema impossível: três planos paralelos a uma direcção (determinante principal de segunda ordem, característico diferente de zero).



Sistema possível e duplamente indeterminado: três planos coincidentes (determinante principal de primeira ordem e os dois característicos nulos).



Sistema impossível: dois planos coincidentes e o 3º paralelo aos anteriores (determinante principal de 1ª ordem, um característico nulo e o outro diferente de zero).



Sistema impossível: 3 planos paralelos (determinante principal de primeira ordem e os dois característicos diferentes de zero).

Intersecção duma recta com um plano - Como vimos, as equações cartesianas duma recta no espaço são as equações de

dois planos que nela se cruzam. Dêste modo, achar a intersecção duma recta com um plano equivale a achar a intersecção de 3 planos: somos assim conduzidos ao problema anterior.

Contudo, se a recta não é definida pelas equações cartesianas, podemos proceder doutro modo; assim, por exemplo, se o plano é dado pela equação cartesiana :

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

e a recta é dada pelas equações paramétricas :

$$(13) \qquad \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \\ z = z_0 + c\lambda \end{cases}$$

podemos entrar com êstes valores de x, y, z na equação do plano obtendo:

$$A\,(x_0+a\lambda) + B\,(y_0+b\lambda) + C\,(z_0+c\lambda) + D = 0$$

e determinar λ de modo que esta igualdade seja verificada, o que dá :

$$\lambda = -\frac{A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D}{A\,a + B\,b + C\,c}\,;$$

entrando com êste valor de λ em (13), teremos as coordenadas x, y, z do ponto de intersecção da recta com o plano.

Se $Aa + Bb + Cc = 0$ e o numerador da fracção é diferente de zero; não há valor de λ finito: a recta é paralela ao plano. Se $Aa + Bb + Cc = 0$ e o numerador é também igual a zero, qualquer valor de λ satisfaz: a recta existe no plano.

Concluímos assim que a condição de paralelismo entre a recta e o plano é :

$$\boxed{A\,a + B\,b + C\,c = 0}$$

Paralelismo de duas rectas - A condição de paralelismo das rectas :

$$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \\ z = z_0 + c\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = x'_0 + a'\mu \\ y = y'_0 + b'\mu \\ z = z'_0 + c'\mu \end{cases}$$

é a condição de colinearidade dos vectores $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$, a qual, como já vimos é :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Daqui se deduz o seguinte: <u>As equações da recta que passa por um dado ponto</u> (x_1,y_1,z_1) <u>e é paralela à recta r são</u>:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

<u>Nota</u>: Quando uma recta está definida por duas equações cartesianas da forma :

$$\begin{cases} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

sendo, por exemplo

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} \neq 0$$

podem obter-se equações paramétricas da recta começando por resolver o sistema em ordem a y e a z. Sejam

$$y = m\,x + p\,, \qquad z = n\,x + q$$

as equações obtidas. Agora bastará tomar x para parâmetro; as equações paramétricas serão :

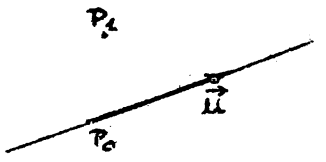
$$x = \lambda\,, \quad y = p + m\lambda\,, \quad z = q + n\lambda\,.$$

A recta passa pois pelo ponto $P_0=(0,p,q)$ e tem a direcção do vector $u=(1,m,n)$.

<u>Equação do plano que passa por uma recta e por um ponto situado fora dela</u> - Seja o ponto $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ e a recta

de equações :

$$\begin{cases} x = x_0 + a\,\lambda \\ y = y_0 + b\,\lambda \\ z = z_0 + c\,\lambda ; \end{cases}$$



O plano que passa por P_1 e por r pode ser definido pelo ponto P_0 e pelos vectores P_1-P_0 e $\vec{u}=(a,b,c)$, visto êstes dois vectores não serem colineares (por hipótese P_1 não pertence a r) . Como as coordenadas do vector P_1-P_0 são x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0, a equação do plano pode ser escrita sob a forma :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \quad ;$$

desenvolvendo o determinante obtinhamos a equação do plano sob a forma habitual.

C) Problemas métricos

Ângulo de dois vectores - Entende-se por ângulo dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, e representa-se por $(\vec{u}, \vec{v})$, o ângulo de duas semi-rectas de origem comum, que tenham a direcção e o sentido dos vectores dados. Se um dos vectores é nulo, o ângulo considera-se indeterminado.

Ângulo dum vector $\vec{u}$ com uma recta orientada r é o ângulo de $\vec{u}$ com um vector não nulo que tenha a direcção e o sentido de r.

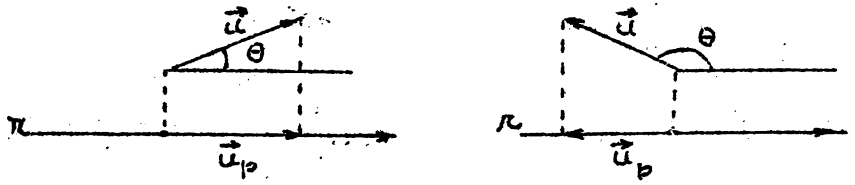
Vector unitário é todo o vector de módulo igual a 1.

Chama-se versor dum vector não nulo e representa-se por vers $\vec{u}$, o vector unitário que tem a direcção e o sentido de $\vec{u}$; isto é :

$$\boxed{\text{vers } \vec{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}$$

Componente ortogonal dum vector segundo um eixo é o mó-

dulo da projecção ortogonal do vector sôbre êsse eixo, com o sinal + ou - consoante a referida projecção e o eixo têm o mesmo sentido ou sentidos opostos.



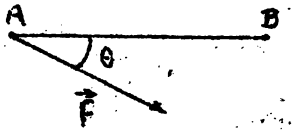
Observando as figuras, vemos que, em qualquer caso, a componente do vector $\vec{u}$ sôbre o eixo r é igual a $|\vec{u}|\cos\theta$, sendo θ o ângulo do vector com o eixo.

Multiplicação interna : Chama-se produto interno ou produto escalar dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ao escalar definido por:

(14) $$|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}),$$

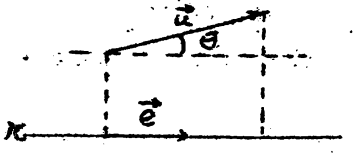
número êste que se representa por $\vec{u}\,|\,\vec{v}$ (ler "$\vec{u}$ interno $\vec{v}$").

O conceito matemático de produto interno provém do conceito físico de trabalho. Consideremos uma fôrça $\vec{f}$ constante em direcção, sentido e intensidade, que desloque a unidade de massa de um ponto A a outro ponto B sôbre a recta AB; então, designando por θ o ângulo de $\vec{f}$ com B-A, o trabalho executado pela fôrça será:



$$W = |\vec{f}|.|B-A|\cos\theta = \vec{f}\,|\,(B-A)\ .$$

Segunda definição de produto interno - Consideremos um eixo r e um vector $\vec{u}$. Designando por $\vec{e}$ o vector unitário com a direcção e sentido de r, é claro que o ângulo θ de $\vec{u}$ com r é igual ao ângulo $(\vec{u},\vec{e})$ e portanto a componente ortogonal de $\vec{u}$ segundo r será :



$$|\vec{u}|.\cos\theta = |\vec{u}|.\cos(\vec{u},\vec{e}) = \vec{u}\,|\,\vec{e}\ .$$

Consideremos agora dois vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ quaisquer e ponhamos $\vec{e}$ = vers $\vec{v}$; ter-se-á :

$$\vec{u} \mid \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{v}| \left\{ |\vec{u}| .\cos(\vec{u},\vec{e}) \right\}$$

isto é: o produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é igual ao produto do módulo de $\vec{v}$ pela componente ortogonal de $\vec{u}$ segundo um eixo com a direcção e o sentido de $\vec{v}$ (ou vice-versa).
Temos assim uma segunda definição de produto interno.

Caso particular importante :

$$\vec{u} \mid \vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}| \cos(\vec{u},\vec{u}) = |\vec{u}|^2 ;$$

por palavras: o produto interno dum vector por si mesmo é igual ao quadrado do módulo do vector. Podemos então escrever:

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \mid \vec{u}}}$$

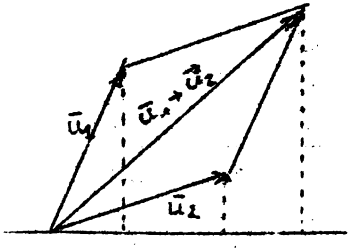
Propriedades do produto interno :

I - Anulamento - Da própria definição se conclue que o produto interno só pode ser nulo quando um dos vectores fôr nulo ou quando os dois vectores forem perpendiculares entre si; portanto:

"Condição de ortogonalidade de dois vectores não nulos é o anulamento do seu produto interno".

II - Comutatividade - Tem-se : $\vec{u} \mid \vec{v} = \vec{v} \mid \vec{u}$, como resulta imediatamente da definição.

III - Distributividade a respeito da adição - Tem-se:



$$(\vec{u}_1+\vec{u}_2) \mid \vec{v} = \vec{u}_1 \mid \vec{v} + \vec{u}_2 \mid \vec{v}$$

Basta atender à segunda definição de produto interno e observar que projectando ortogonalmente os vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sôbre uma recta com a direcção e o sentido de $\vec{v}$, a projecção da soma $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ é igual à soma das projecções de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

IV - "Quando se multiplica um dos factores por um escalar

o produto interno vem multiplicado por êsse escalar", isto é:

$$(k\vec{u})|\vec{v} = k\,(\vec{u}\,|\,\vec{v}) \quad .$$

Expressão cartesiana do produto interno - Suponhamos fixado um referencial cartesiano $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; se fôr $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$ nêste referencial, tem-se:

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$
$$\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$$

e aplicando as propriedades do produto interno virá:

$$\vec{u}|\vec{v} = aa'\,(\vec{i}|\vec{i}) + bb'\,(\vec{j}|\vec{j}) + cc'\,(\vec{k}|\vec{k}) + (ab' + a'b)(\vec{i}|\vec{j})$$
$$+ (ac' + a'c)\,(\vec{i}|\vec{k}) + (bc' + b'c)\,(\vec{j}|\vec{k}) \quad .$$

expressão esta que nos permite calcular o produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, conhecidas as componentes dos vectores $\vec{u},\vec{v}$, os módulos dos vectorès de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ e os ângulos que êstes formam entre si.

Em particular se os três vectores de base forem unitários e perpendiculares entre si o referencial diz-se orto-normal. Nêste caso (que é o mais frequente na prática), tem-se :

$$\vec{i}|\vec{i} = \vec{j}|\vec{j} = \vec{k}|\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}|\vec{j} = \vec{i}|\vec{k} = \vec{j}|\vec{k} = 0$$

e então virá simplesmente :

$$\boxed{\vec{u}|\vec{v} = aa' + bb' + cc'}$$

que é a expressão cartesiana do produto interno em referencial orto-normal, ou, como também se diz, em coordenadas cartesianas rectangulares.

Módulo dum vector em coordenadas cartesianas rectangulares - Seja o vector $\vec{u}=(a,b,c)$; como se tem $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}|\vec{u}}$, virá:

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(Anàlogamente se deduzia a expressão do módulo em coordenadas cartesianas quaisquer, utilizando a expressão que obtivemos para o produto interno).

Distância de dois pontos em coordenadas cartesianas rectangulares : Sejam os pontos $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$; a sua distância será o módulo do vector P_1-P_2 o qual tem por compónentes x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2; por conseguinte a distância será:

$$d = |P_1-P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

(Anàlogamente se deduzia a expressão da distância em coordenadas cartesianas quaisquer).

Ângulo de dois vectores - Sejam os vectores $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$. Da expressão do produto interno vem:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\,|\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|}$$

e portanto, tratando-se dum referencial cartesiano oto-normal;

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Em particular, representando por α, β, γ os ângulos do vector $\vec{u}=(a,b,c)$ com os eixos coordenados, isto é, os ângulos do vector $\vec{u}$ com os vectores de base, $\vec{i}=(1,0,0)$ $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$, virá :

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

A $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ dá-se o nome de cosenos directores da direcção do vector $\vec{u}$.

Quadrando e somando estas igualdades obtem-se:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 ;$$

os cosenos directores são pois as componentes do vector unitário que tem a direcção e o sentido de $\vec{u}$ (o versor de $\vec{u}$); logo:

$$\text{vers}\,\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

(Anàlogamente se deduzia a expressão do ângulo de dois vectores em coordenadas cartesianas quaisquer).

Ângulo de duas rectas - Consideremos as duas rectas de equações :

$$\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c} \quad ,$$

$$\frac{x-x'_o}{a'} = \frac{y-y'_o}{b'} = \frac{z-z'_o}{c'} \quad ,$$

e ponhamos $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$. O ângulo das duas rectas será igual ao ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ (se êste fôr agudo) ou ao seu suplementar (se o ângulo $(\vec{u},\vec{v})$ fôr obtuso); portanto, representando por θ o ângulo das duas rectas ter-se-á em referencial orto-normal:

$$\cos\theta = \left| \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \right|$$

Condição de ortogonalidade (em referencial orto-normal): Como vimos, condição necessária e suficiente para que dois vectores não nulos sejam perpendiculares é que o seu produto interno seja nulo. Portanto, em coordenadas rectangulares, a condição de ortogonalidade dos vectores $\vec{u}=(a,b,c)$ $\vec{v}=(a',b',c')$ é:

$$\boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$$

O mesmo se deduz da expressão que dá o ângulo dos vectores (pondo $\cos\theta = 0$) .

Vector normal a um plano - Seja o plano α de equação $Ax + By + Cz + D = 0$. Considerando um ponto $P_o=(x_o,y_o, z_o)$ pertencente ao plano, a equação pode escrever-se:

(1) $\quad A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0;$

então, pondo $P=(x,y,z)$ e $\vec{U}=(A,B,C)$, a igualdade (1) exprime que o vector $\vec{U}$ é normal ao vector $P-P_o$ e, como P é um ponto arbitrário do plano, segue-se que o vector $\vec{U}$ é normal ao plano (visto ser perpendicular a qualquer vector do plano) . Em conclusão : o vector que tem por componentes, respectivamente, os coeficientes de x; y, z, na equação do plano é um vector normal ao plano.

Ângulo de dois planos - Dados os planos de equações :

$$A x + B y + C z + D = 0$$
$$A'x + B'y + C'z + D'= 0$$

e pondo $\vec{U}=(A,B,C)$, $\vec{V}=(A',B',C')$, o ângulo formado pelos planos é igual ao ângulo dos vectores normais $\vec{U},\vec{V}$ (se êste fôr agudo) ou ao seu suplementar (se êsse angulo fôr obtuso); portanto o ângulo θ dos dois planos é dado por:

$$\cos\theta = \left| \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+ B^2 + C^2}\ \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \right|$$

Daqui se deduz que a condição de ortogonalidade dos dois planos é:

$$AA' + BB' + CC' = 0 \qquad \text{(ref. orto-normal)}$$

Ortogonalidade duma recta e dum plano - Seja a recta de equações :

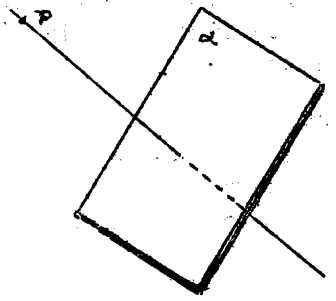
$$\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c} .$$

e o plano de equação $Ax + By + Cz = 0$. A recta será perpendicular ao plano se e só se fôr paralela a um vector perpendicular ao plano; ora o vector $\vec{u}=(a,b,c)$

tem a direcção da recta, enquanto o vector $\vec{U}=(A,B,C)$ é normal ao plano; logo a perpendicularidade entre a recta e o plano equivale ao paralelismo entre os vectores $\vec{u}$, $\vec{U}$, o qual é expresso pelas igualdades:

$$\boxed{\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}}$$

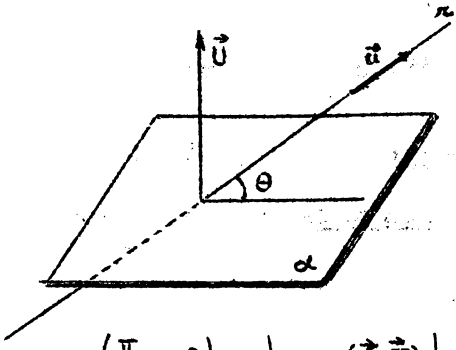
Problema: Conduzir pelo ponto $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ uma recta perpendicular ao plano α de equação $Ax + By + Cz + D = 0$.



A recta ficará definida pelo ponto P_1 e pelo vector $\vec{U}$ normal ao plano; por consequência as suas equações serão:

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C} .$$

Ângulo duma recta com um plano - Seja a recta r de equações $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ e o plano α de equação $Ax + By + Cz + D = 0$; como o vector $\vec{u}=(a,b,c)$ tem a direcção da recta e o vector $\vec{U}=(A,B,C)$ é normal ao plano, o ângulo da recta com o plano é complementar do ângulo dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{U}$ (se êste fôr agudo) ou do seu suplementar (se o ângulo $(\vec{u},\vec{U})$ fôr obtuso); então, designando por θ o ângulo de r com α, será:



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left|\cos(\vec{u},\vec{U})\right| \quad \text{isto é :}$$

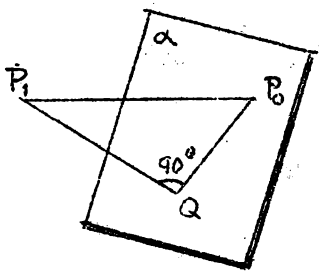
$$\operatorname{sen}\theta = \left| \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| .$$

Distância dum ponto a um plano - Consideremos o ponto $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ e o plano α de equação :

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0 \ .$$

Se fôr $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ um ponto do plano, a equação (1) pode escrever-se :

(2) $$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0 \ .$$



Se projectarmos o vector P_1-P_o sôbre a normal ao plano que passa por P_1, obtemos o vector P_1-Q cujo módulo é precisamente a distância d de P_1 a α ; mas esta projecção é, em valor absoluto, igual ao produto interno de P_1-P_o pelo versor de P_1-Q, isto é:

$$d = \text{mod}\left[(P_1-P_o) \mid \text{vers}\,(P_1-Q)\right]$$

e como P_1-Q tem a direcção do vector $\vec{U}=(A,B,C)$, o versor de P_1-Q ou é igual a vers $\vec{U}$ ou é simétrico dêste. Ora :

$$\text{vers}\,\vec{U} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} , \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} , \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right)$$

portanto, como $P-P_o=(x-x_o,\ y-y_o,\ z-z_o)$, vem:

$$d = \left| \frac{A(x_1-x_o) + B(y_1-y_o) + C(z_1-z_o)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

expressão que, atendendo a (1) e a (2) pode ainda tomar a forma:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \ ,$$

visto que $D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$.

Como se vê para obter a referida distância basta

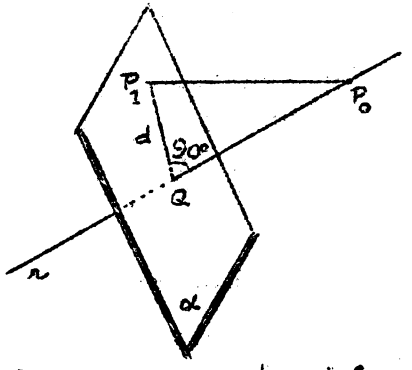
substituir, no primeiro membro da equação do plano, as variáveis x, y, z pelas coordenadas homólogas do ponto P_1, dividir o resultado pela raiz quadrada da soma dos quadrados dos coeficientes de x, y, z e tomar o módulo do valor obtido.

Nota - Convém ter presente que, em referencial cartesiano orto-normal, a abscissa, a ordenada e a cota dum ponto P são, respectivamente, as distâncias de P ao plano yz, ao plano xz e ao plano xz .

Distância dum ponto a uma recta - Seja o ponto $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ e a recta r de equações :

$$\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c}$$

Conduzamos por P_1 um plano α perpendicular à recta r e seja Q a intersecção de α com r; então, a distância d de P_1 a α é o módulo do vector P_1-Q. Como o triângulo $[P_1QP_o]$ é rectângulo em Q temos (aplicando o teorema de Pitágoras):



(1) $$d = \sqrt{\overline{P_1P_o}^2 - \overline{P_oQ}^2} .$$

Por outro lado, $|P_oQ|$ é o módulo da projecção de P_1-P_o sôbre r, portanto :

$$|P_oQ| = \text{mod}\left[(P_1-P_o)\,|\,\text{vers}\,\vec{u}\right] \quad \text{com } \vec{u}=(a,b,c)$$

e então:

$$|P_oQ| = \left| \frac{a(x_1-x_o) + b(y_1-y_o) + c(z_1-z_o)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| ;$$

além disso é :

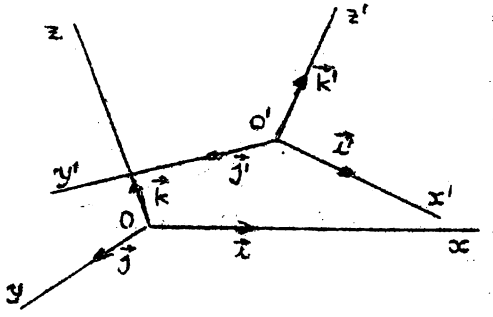
$$|P_1P_o| = \sqrt{(x_1-x_o)^2 + (y_1-y_o)^2 + (z_1-z_o)^2} \; ;$$

entrando com êstes valores em (1), tem-se finalmente:

$$d = + \sqrt{\frac{[b(z_1-z_0)-c(y_1-y_0)]^2+[c(x_1-x_0)-a(z_1-z_0)]^2+[a(y_1-y_0)-b(x_1-x_0)]^2}{a^2+b^2+c^2}}$$

D) Mudança de coordenadas

Suponhamos fixado um referencial cartesiano $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (orto-normal ou não) e um segundo referencial $(0',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$. Pretendemos exprimir as coordenadas dum ponto no primeiro referencial em função das coordenadas do mesmo ponto no segundo referencial (ou vice-versa). Supõem-se dadas as coordenadas da origem e dos vectores de base do segundo referencial a respeito do primeiro;



seja:

$$\begin{cases} 0' = 0 + x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k} \\ \vec{i}' = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k} \\ \vec{j}' = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k} \\ \vec{k}' = a''\vec{i} + b''\vec{j} + c''\vec{k} \end{cases} .$$

Posto isto consideremos um ponto P qualquer do espaço e sejam x',y',z' as suas coordenadas no segundo referencial, isto é :

$$(1) \qquad P = 0' + x'\,\vec{i}' + y'\,\vec{j}' + z'\,\vec{k}' \ ;$$

representando por x, y, z as coordenadas do mesmo ponto P no primeiro referencial e atendendo às coordenadas de $0'$, $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ no primeiro referencial, a igualdade vectorial (1) desdobra-se nas três igualdades escalares :

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + a\,x' + a'\,y' + a''\,z' \\ y = y_0 + b\,x' + b'\,y' + b''\,z' \\ z = z_0 + c\,x' + c'\,y' + c''\,z' \end{cases}$$

São estas as fórmulas de transformação que permitem passar do 2º sistema para o 1º .

As fórmulas da transformação inversa, isto é, as que permitem exprimir x', y', z' em função de x,y,z, obtem-se fàcilmente resolvendo o sistema anterior em ordem a x', y', z' .

Suponhamos agora que os dois referenciais são ortonormais. Então as componentes de $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ no 1º referencial são os cosenos directores dêstes vectores (e vice-versa). Podemos assim organizar o seguinte quadro que nos indica o coseno do ângulo de cada um dos vectores $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, com cada um dos vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	a	b	c
$\vec{j}'$	a'	b'	c'
$\vec{k}'$	a''	b''	c''

Dêste quadro se deduz que as componentes dos vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ no segundo sistema são os elementos das colunas respectivas, isto é :

$$\vec{i}=(a,a',a''),\quad \vec{j}=(b,b',b''),\quad \vec{k}=(c,c',c'')$$

Podemos assim concluir que as fórmulas de transformação inversa são, neste caso:

$$\begin{cases} x' = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) \\ y' = a'(x-x_0) + b'(y-y_0) + c'(z-z_0) \\ z' = a''(x-x_0) + b''(y-y_0) + c''(z-z_0) \end{cases}$$

Convém ainda notar que, neste caso particular, se verificam entre os elementos do quadro anterior as seguintes relações:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{cases}$$

por se tratar das somás dos quadrados das componentes de vectores unitários.

Também:

$$\begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \end{cases}$$

por se tratar de produtos internos de vectores perpendiculares entre si.

Em resumo: A soma dos quadrados dos elementos duma fila (linha ou coluna) é igual à unidade; a soma dos produtos dos elementos homólogos de duas filas paralelas é nula.

Casos particulares: (referenciais orto-normais)

I) Se $\vec{i}' = \vec{i}$, $\vec{j}' = \vec{j}$, $\vec{k}' = \vec{k}$ os novos eixos coordenados são paralelos aos primeiros; diz-se então que se trata duma translacção dos eixos. Ter-se-á neste caso

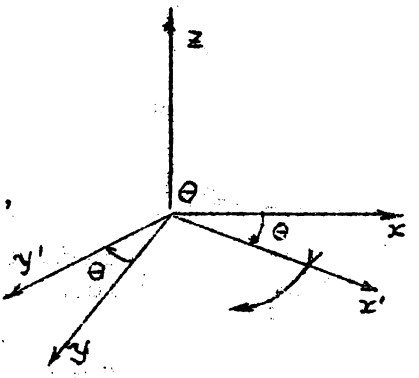
$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}$$

II) Se $O' \equiv O$, diz-se que se trata duma rotação dos eixos em tôrno da origem. Então nas fórmulas (2) será $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Se, além disso, um dos vectores de base se mantiver (por exemplo, se fôr $\vec{k}' = \vec{k}$), diz-se que se trata duma rotação em tôrno do eixo correspondente. Nêste último caso as fórmulas de transformação tomam o aspecto:

$$\begin{cases} x = a\,x' + a'\,y' \\ y = b\,x' + b'\,y' \\ z = z' \end{cases}$$

Se fôr θ o ângulo de que rodaram os eixos (no sentido indicado na figura pela seta), será:



$$(\vec{i}',\vec{i}) = 0\ ,\ (\vec{i}',\vec{j}) = \frac{\pi}{2} - \theta\ ,$$

$$(\vec{j}',\vec{i}) = \frac{\pi}{2} + \theta\ ,\ (\vec{j}',\vec{j}) = \theta\ ,$$

donde: $a = \cos\theta$, $b = \operatorname{sen}\theta$, $a' = -\operatorname{sen}\theta$, $b' = \cos\theta$ e as fórmulas de transformação podem escrever-se:

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \\ z = z' \end{cases}}$$

E) Cónicas

Suponhamos fixado num plano um referencial cartesiano orto-normal. Chama-se <u>linha de 2ª ordem ou cónica</u>*, ao lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas x,y verificam uma equação algébrica do 2º grau em x, y, isto é, uma equação da forma:

$$(1)\quad Ax^2 + 2\,B\,xy + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0\ .$$

sendo os coeficientes A,B,C não simultâneamente nulos.

Notemos de passagem que as rectas são também chamadas <u>linhas de 1ª ordem</u>, por corresponderem às equações do 1º grau em x,y, isto é, às equações do tipo:

$$(2)\qquad a\,x + b\,y + c = 0$$

Dada uma cónica e uma recta definidas pelas equações

* - A justificação do termo "cónica", usado nesta acepção, será dada oportunamente.

(1), (2), respectivamente, o problema da determinação dos pontos comuns às duas linhas equivale a achar os sistemas de valores de x, y que verificam (1) e (2), simultâneamente, isto é, equivale a resolver o sistema constituido pelas duas equações. Ora, para resolver êste sistema, pode por exemplo resolver-se (2) em ordem a y (se $b \neq 0$) e substituir em (1) esta incógnita pela expressão achada; obtem-se dêste modo uma equação do 2º grau (só em x) que admitirá, quando muito duas raizes reais; estas raizes, associadas aos valores correspondentes de y que verificam (2), dão-nos os pontos de intersecção procurados. Podemos assim concluir desde já que:

"Toda a linha de 2ª ordem é encontrada por uma recta, quando muito, em dois pontos".

Para o estudo duma linha de 2ª ordem convém simplificar o mais possível a respectivá equação, mediante oportunas mudanças de coordenadas.

Eliminação dos termos do 1º grau - Começaremos por tentar eliminar os termos em x e em y. Para isso, deve usar-se uma translacção dos eixos. Sendo X , Y as novas coordenadas, a translacção é definida, como vimos, por fórmulas do tipo :

$$(3) \qquad x = x_0 + X \qquad y = y_0 + Y \ ,$$

sendo (x_0, y_0) a nova origem. Procuremos determinar x_0 e y_0 de modo que os termos do primeiro grau resultem nulos. Efectuando em (1) a transformação (3), virá :

$$A(x_0+X)^2 + 2\,B(x_0+X)(y_0+Y) + C(y_0+Y)^2 + 2D(x_0+X)+2E(y_0+Y)+F=0$$

Feito o desenvolvimento, os coeficientes de X e de Y serão respectivamente, como é fácil ver $2(Ax_0+By_0+D)$, $2(Bx_0+Cy_0+E)$. Portanto, para que os termos em X e em Y desapareçam, deve ter-se :

$$\begin{cases} A\,x_0 + B\,y_0 + D = 0 \\ B\,x_0 + C\,y_0 + E = 0 \end{cases}$$

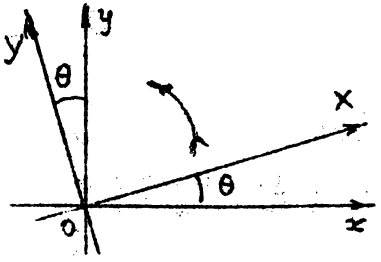
Ora o determinante dêste sistema é :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

a) Se $AC-B^2 \neq 0$, o sistema é possível e determinado. Pode pois escolher-se a nova origem (x_o, y_o) de modo que se eliminem os termos em X e em Y .

b) Se $AC-B^2 = 0$, o sistema ou é impossível ou é indeterminado. Devemos portanto renunciar a resolver o problema no caso da impossibilidade. Veremos mais adiante como proceder neste caso.

<u>Eliminação do termo rectangular</u> - A eliminação do termo em xy é sempre possível mediante uma rotação conveniente do sistema de eixos. Representando por X,Y as novas coordenadas, a rotação é definida por fórmulas do tipo



$$(4)\quad \begin{cases} x = X\cos\theta - Y\,\text{sen}\,\theta \\ y = X\,\text{sen}\,\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

sendo θ o ângulo de que rodam os eixos.

Efectuemos uma tal transformação em (1); é fácil reconhecer que os termos do 2º grau em x e y, fornecerão os termos do 2º grau em X e Y; basta pois que nos ocupemos dêstes termos que darão :

$$A(X\cos\theta - Y\,\text{sen}\,\theta)^2 + 2B(X\cos\theta - Y\,\text{sen}\,\theta)(X\,\text{sen}\,\theta + Y\cos\theta) + C(X\,\text{sen}\,\theta + Y\cos\theta)^2$$

ou, desenvolvendo :

$$A_1 X^2 + 2B_1 XY + C_1 Y^2$$

com:

$$(5)\quad \begin{cases} A_1 = A\cos^2\theta + 2B\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C\,\text{sen}^2\theta \\ B_1 = B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + (C-A)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \\ C_1 = A\,\text{sen}^2\theta - 2B\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \end{cases}$$

Ora, visto que $\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta$, e $2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta$, ter-se-á $B_1 = 0$ se fôr :

(6) $\qquad 2\,B\cos 2\theta + (C-A)\,\operatorname{sen} 2\theta = 0$

isto é, se fôr:

$$\operatorname{tag} 2\theta = \frac{2B}{A-C},$$

o que permite determinar a amplitude da rotação de modo que resulte $B_1 = 0$. Mas não interessa propriamente o ângulo θ : basta notar que, a partir de tg 2θ se determinam os coeficientes da transformação (4) mediante as conhecidas fórmulas trigonométricas:

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

O problema admite 4 soluções; basta evidentemente adoptar uma destas soluções.

Entretanto observemos que o cálculo dos novos coeficientes A_1, C_1 pode fazer-se directamente. Com efeito, de (5) deduz-se, por adição e subtracção:

$$A_1 + C_1 = A + C$$

$$A_1 - C_1 = (A-C)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 4\,B \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

e portanto

$$A_1 - C_1 = (A-C)\cos 2\theta + 2B \operatorname{sen} 2\theta$$

Quadrando ambos os membros desta igualdade, procedendo igualmente para a igualdade (6) com os membros escritos em ordem inversa, e somando ordenadamente, vem:

$$(A_1 - C_1)^2 = (A - C)^2 + 4\,B^2,$$

e como é $(A_1+C_1)^2 = (A+C)^2$ virá, subtraindo ordenadamente desta a anterior $4\,B_1\,C_1 = 4\,A\,C - 4\,B^2$ ou seja

$$A_1\,C_1 = A\,C - B^2 .$$

A_1 e C_1 são pois as raizes da equação do 2º grau :

(7) $$\boxed{\lambda^2 - (A + C)\lambda + A\,C - B^2 = 0}$$

Caso em que $AC - B^2 \neq 0$. Quando esta condição é verificada, o que convém é começar por eliminar os termos do 1º grau e só depois eliminar o termo rectângular(É fácil ver que a rotação não influe no termo independente). A equação acabará por assumir a forma:

(8) $$m\,x^2 + n\,y^2 = p,$$

chamada equação reduzida da cónica. (Para comodidade, passamos a designar as coordenadas por x,y).

Agora duas hipóteses há a distinguir:

1ª - m, n têm o mesmo sinal. Então :

Se p tem o sinal contrário ao de m e n, a equação (8) nunca pode ser verificada: não lhe corresponde portanto nenhuma imagem geométrica.

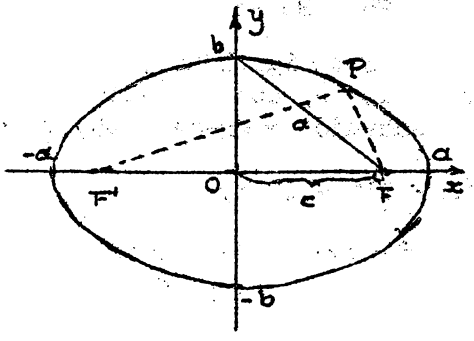
Se p=0, a equação só é verificada para x = y = 0 : a cónica reduz-se a um ponto que é neste caso a origem.

Se p tem o sinal de m e de n, podemos escrever a equação sob a forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}\ , \quad \text{com} \quad a = \sqrt{\frac{p}{m}}\ ,\ b = \sqrt{\frac{p}{n}}$$

ou ainda :

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



É claro que y só toma valores reais quando se tem $-a \leq x \leq a$, sendo y=0 quando $x = \pm a$, e $y = \pm b$ quando x=0. Portanto, trata-se duma curva com todos os pontos a distância finita.

Além disso, observemos que a equação não muda ao substituir x por -x ou y por -y: isto quere dizer que a curva é simétrica em relação

aos eixos coordenados. Dá-se a esta curva o nome de elipse. Supondo $a \geq b$, diz-se que é a o semi-eixo maior e que é b o semi-eixo menor da elipse. Chama-se focos da elipse os pontos :

$$F=(c,0)\ ,\ F'=(-c,0),\ \text{com}\ \ c = \sqrt{a^2-b^2}$$

Ao número $e = c/a$ dá-se o nome de excentricidade da elipse; é claro que se tem sempre $0 \leq e < 1$, sendo $e=0$, se e só se $a=b$ (a elipse reduz-se então a uma circunferência de raio a). Finalmente, é fácil verificar que se tem, para todo o ponto P da curva :

$$|P\,F| + |P\,F'| = 2\,a,$$

isto é, a soma das distâncias de P aos focos é constante; reencontramos assim a propriedade característica da elipse, que se usa no liceu para deduzir a sua equação.

2º m, n têm sinais contrários . Então :

Se $p=0$, a equação (8) escreve-se $m\,x^2 + n\,y^2 = 0$, ou seja, pondo $k = \sqrt{-m/n}$:

$$y = + k\,x\ ,\quad y = - k\,x\ ;$$

a imagem geométrica da equação é pois constituida, neste caso, por duas rectas que passam pela origem.

Se $p \neq 0$, terá p o sinal de m ou o sinal de n, visto que m, n têm por hipótese sinais contrários. Suponhamos que p tem o sinal de m (no caso contrário os raciocínios são inteiramente análogos, mudando os papeis de x e de y). A equação (8) pode então escrever-se :

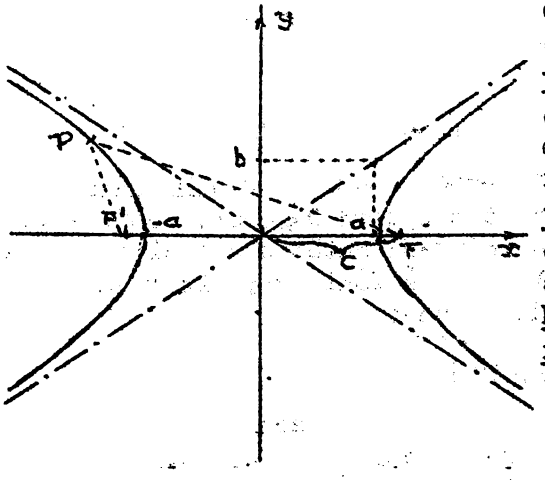
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}\ ,\quad \text{com}\ \ a = \sqrt{\frac{p}{m}}\ ,\quad b = \sqrt{-\frac{p}{n}}$$

ou ainda:

$$y = \pm\ b\ \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

Então, y só toma valores reais para $x \geq a$ ou $x \leq -a$, tendo-se $y=0$, para $x = \pm\ a$. Trata-se portanto duma curva composta de dois ramos infinitos, que corta o eixo dos xx nos pontos de abscissas a, -a, mas que não corta

o eixo dos yy. A curva tem dois eixos de simetria, um



que a corta, por isso chamado <u>eixo transverso</u> (neste caso o eixo dos xx) e o outro que a não corta, por isso chamado <u>eixo não transverso</u> (neste caso o eixo dos yy). Dá-se a esta curva o nome de <u>hipérbole</u>. Chamam-se <u>focos</u> da hipérbole os pontos

$$F=(c,0)\ ,\ F'=(-c,0),$$

com $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Ao número $e=c/a$ dá-se o nome de <u>excentricidade</u> da hipérbole; será sempre $e>1$. Se $a=b$ a hipérbole diz-se <u>equilátera</u>.

A doutrina anteriormente exposta permite reconhecer que esta curva tem duas assíntotas de equações

$$y = \frac{b}{a}\,x \quad , \quad y = -\frac{b}{a}\,x \quad .$$

Finalmente, pode verificar-se que, sendo P um ponto qualquer da curva se tem:

$$\left|P\,F\right| - \left|P\,F'\right| = \pm\ 2\,a$$

e assim se reencontra a propriedade característica da hipérbole.

Caso em que $AC - B^2 = 0$. Quando esta igualdade é verificada, começará por eliminar-se o termo rectangular. A equação (7) terá neste caso uma raiz nula (o caso de ambas as raízes serem nulas é impossível, porque então os coeficientes A,B,C seriam simultâneamente nulos e a equação deixaria de ser do 2º grau). Suponhamos efectuada em (1) a transformação (4), de modo que se anule o termo rectangular; um dos termos quadrados também resultará nulo; seja por exemplo o termo em X^2. Então,

dividindo ambos os membros pelo coeficiente de Y^2, a equação assumirá o aspecto:

$$Y^2 + 2\,E_1\,Y + 2\,D_1\,X + F_1 = 0\ ,$$

Se $D_1=0$, obtem-se uma equação do 2º grau em Y que representará duas paralelas a Ox, uma paralela a Ox ou nenhuma figura, conforme esta equação tem duas raizes reais e distintas, uma raiz dupla, ou raizes imaginárias.

Se $D_1\neq 0$, a equação pode escrever-se ainda:

$$(Y + E_1)^2 + 2\,D_1\left(X + \frac{F_1 - E_1^2}{2D_1}\right) = 0\ .$$

Pondo:

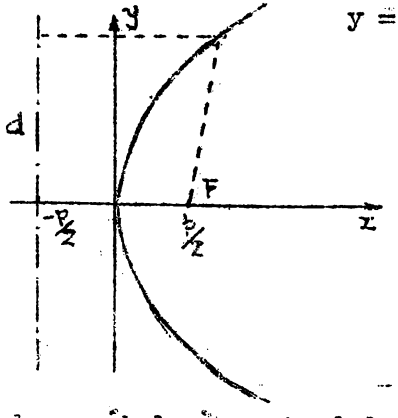
$$y = Y + E_1\ , \qquad x = X + (F_1 - E_1^2)/2D_1$$

ficará definida uma translacção dos eixos que conduz a equação à forma:

$$\boxed{y^2 = 2\,p\,x}\ , \qquad \text{com } p = -\,D_1\ ,$$

chamada <u>equação reduzida</u>. Podemos escrevê-la ainda sob a forma:

$$y = \pm\sqrt{2\,p\,x}$$



Suponhamos, por exemplo, $p>0$; então y só toma valores reais para $x\geqslant 0$, tendo-se $y=0$ para $x=0$. A curva é formada dum ramo infinito, simétrico em relação a Ox e passando pela origem. Dá-se-lhe o nome de <u>parábola</u>.

Chama-se <u>foco</u> da parábola ao ponto $F(p/2, 0)$ e <u>directriz</u> da parábola à recta d de equação $x=-p/2$.

Pode verificar-se que a distância dum ponto qualquer da curva ao foco é igual à distância do mesmo ponto à directriz (propriedade característica da parábola).

Finalmente é fácil ver que tanto a parábola como a elipse não têm nenhuma assíntota.

Exemplos: 1) Seja a cónica :

$$x^2 + 2xy - 3y^2 - 2x + 6y = 0 .$$

Tem-se A=1, B=1, C=-3, D=-1, E=3 (note-se que é 2B=2, 2D=-2, 2E=6). Visto que $AC-B^2 \neq 0$, podemos eliminar os termos do 1º grau. Para isso, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} A x_0 + B y_0 + D = 0 \\ B x_0 + C y_0 + E = 0 \end{cases} \text{ isto é: } \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ x_0 - 3 y_0 + 3 = 0 , \end{cases}$$

e substituir na equação proposta x por x_0+x e y por y_0+y (continuando a designar por x e y as novas coordenadas). Ora $x_0=0$, $y_0=1$; obter-se-á deste modo a nova equação:

$$x^2 + 2xy - 3y^2 + 3 = 0 .$$

Como A+C = -2, $AC-B^2 = -4$, para ter a equação reduzida bastará resolver a equação :

$$\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0 ,$$

que dá $\lambda_1 = -1 + \sqrt{5}$, $\lambda_2 = -1 - \sqrt{5}$. E a equação reduzida será:

$$-(\sqrt{5} + 1) x^2 + (\sqrt{5} - 1) y^2 = -3$$

ou ainda:

$$\frac{x^2}{\frac{3}{4}(\sqrt{5} - 1)} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}(\sqrt{5} + 1)} = 1$$

Trata-se, portanto, duma hipérbole.

2) Seja a cónica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

Tem-se B=-1, A=C=D=E=F=1. Portanto $AC-B^2=0$. Neste caso, para fazer desaparecer o termo rectangular, bastará efectuar uma rotação tal que :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2B}{A-C} = \frac{2}{0} = \infty ,$$

podendo tomar-se $\theta = \pi/4$, $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta = \sqrt{2}/2$.

As fórmulas de transformação serão pois neste caso:

$$x = (X - Y)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad y = (X + Y)\frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Efectuando a transformação na equação proposta e passando a usar x,y em vez de X,Y, virá a equação :

$$2y^2 - 2x\sqrt{2} + 1 = 0$$

ou ainda:

$$y^2 = \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

ou, finalmente, pondo x no lugar de $x - \frac{\sqrt{2}}{4}$:

$$y^2 = \sqrt{2}\,x .$$

Trata-se pois duma parábola.

F) Quádricas

Suponhamos fixado no espaço um referencial cartesiano ortonormal. Chama-se superfície de 2ª ordem ou quádrica ao lugar geométrico dos pontos do espaço cujas coordenadas x, y, z verifiquem uma equação algébrica do 2º grau em x, y, z, isto é, uma equação da forma:

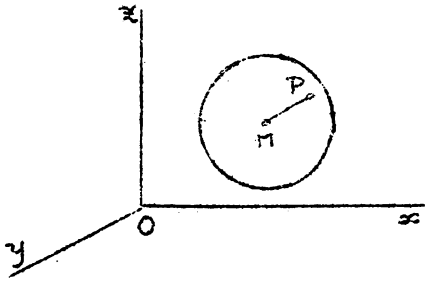
$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1xy + 2B_2xz + 2B_3yz + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0$$

sendo os coeficientes dos termos do 2º grau não simultâneamente nulos.

Começaremos por estudar alguns tipos particulares de quádricas.

1º) - Superfície esférica - Dados um ponto M=(a,b,c) e um número real r, a superfície esférica de centro M e raio r é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja

distância ao ponto M é igual a r.



Sendo P=(x,y,z) um ponto da superfície, a sua distância a M será:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

visto que o referencial é ortonormal; então a equação da superfície será:

(2) $$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Esta equação é do 2º grau em x,y,z; a superfície esférica é, portanto, uma quádrica.

A equação (2) pode ainda escrever-se :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0;$$

comparando com (1), vemos que, para a equação (1) representar uma superfície esférica é condição necessária que os coeficientes dos termos em x^2, y^2, z^2 sejam iguais e que sejam nulos os coeficientes dos termos rectangulares. Mas será esta condição também suficiente ? Suponhamos a condição verificada; dividindo ambos os membros de (1) pelo coeficiente de x^2, obter-se-á uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + m\,x + n\,y + p\,z + q = 0 ,$$

ou, decompondo o 1º membro em quadrados:

$$(x + \tfrac{m}{2})^2 + (y + \tfrac{n}{2})^2 + (z + \tfrac{p}{2})^2 = k ,$$

com $k = \frac{1}{4}(m^2+n^2+p^2) - q$. Se fôr $k>0$, a equação representa uma superfície esférica de raio $\sqrt{k}$ e centro $C=(-m/2, -n/2, -p/2)$.

Se fôr $k=0$, há um único ponto cujas coordenadas verificam a equação : o ponto $(-m/2, -n/2, -p/2)$.

Se fôr $k<0$ não existe nenhum ponto cujas coordenadas verifiquem a equação.

Em resumo : a condição ainda não é suficiente (só quando $k>0$ se trata duma superfície esférica) .

Antes de prosseguir, vejamos como pode ser representada analíticamente uma circunferência no espaço. Dum modo geral uma linha no espaço é representada por um sistema de duas equações: as equações de duas superfícies que tenham por intersecção essa linha.

Consideremos uma circunferência de raio r, com centro no ponto $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ e existente no plano:

$$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0 \ ;$$

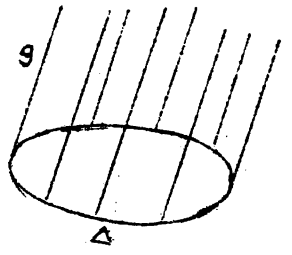
a circunferência ficará definida pela intersecção deste plano com a esfera de centro P_o e raio r; as suas equações serão pois:

$$\begin{cases} A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0 \\ (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = r^2 \end{cases}$$

Suponhamos em particular que o plano da circunferência é paralelo a um dos planos coordenados, por exemplo, ao plano xy; a sua equação será $z=k$ e neste caso as equações da circunferência serão simplesmente:

$$\begin{cases} (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = r^2 \\ z = k \end{cases}$$

2º) - Superfícies cilíndricas - Chama-se superfície cilíndrica ao lugar geométrico das rectas paralelas a uma recta dada (geractrizes) e que se apoiam numa linha dada (directriz). Se a directriz é uma cónica, a superfície cilíndrica é, como vamos ver, uma quádrica. (Supõe-se que a directriz e as geratrizes não existem num mesmo plano).



Seja então Δ a directriz e g uma geractriz duma superfície cilíndrica Σ de 2ª ordem. Sendo $\vec{u}=(a,b,c)$ um vector com a direcção da recta g, a equação geral das rectas paralelas a g será:

$$(3) \qquad \frac{x-\bar{x}}{a} = \frac{y-\bar{y}}{b} = \frac{z-\bar{z}}{c} \ ,$$

sendo $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ um ponto fixado arbitràriamente sôbre a recta; para obter a equação da superfície cilindrica Σ bastará obrigar êste ponto a pertencer à directriz Δ. Para simplicidade vamos supor que Δ existe sôbre um dos planos coordenados, por exemplo, no plano xy; então Δ será representada por um sistema do tipo:

$$(4) \qquad \begin{cases} f(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \\ \overline{z} = 0 \quad , \end{cases}$$

sendo $f(\overline{x},\overline{y})$ um polinómio do 2º grau em $\overline{x}$, $\overline{y}$.

Como a directriz se encontra no plano xy, a direcção das geractrizes não deve ser paralela a êsse plano; então será $c \neq 0$ e das equações (3) virá, fazendo $\overline{z} = 0$:

$$\overline{x} = x - \frac{a}{c} z$$
$$\overline{y} = y - \frac{b}{c} z \quad ,$$

valores que introduzidos na primeira das equações (4) conduzem a :

$$(5) \qquad f(x - \tfrac{a}{c}z,\ y - \tfrac{b}{c} z) = 0$$

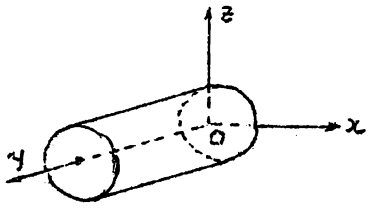
que é a equação da superfície cilindrica Σ visto que é verificada por todos os pontos (x,y,z) de Σ e só por êsses.

Como a equação $f(x,y) = 0$ se supõe do 2º grau em x,y, a equação (5) é do 2º grau em x, y, z . Concluímos assim como tinhamos afirmado, que tôda a superfície cilindrica com directriz de 2^a ordem é uma quádrica.

Em particular, se g é paralela a Oz, tem-se a=0, c=0 e a equação (5) reduz-se a

$$f(x,y) = 0 \ .$$

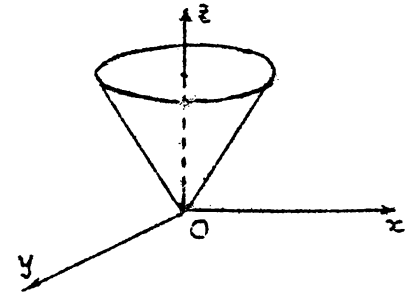
Dum modo geral, uma equação em que falte uma das variáveis representa uma superfície cilindrica de geractrizes paralelas ao eixo da variável que falta; por exemplo, a equação $x^2 + z^2 = 1$ representa uma superfície cilindrica de geractrizes paralelas a Oy e cuja directriz é



é a circunferência do plano xz, de centro na origem e raio 1.

3º) - Superfícies cónicas - Chama-se superfície cónica ao lugar geométrico das rectas que passam por um ponto dado (vértice) e que se apoiam sôbre uma linha dada (directriz). Se a directriz é de 2ª ordem, a superfície cónica é, como vamos ver, uma quádrica

Consideremos uma superfície cónica Σ de 2ª ordem de vértice V e directriz Δ. Para maior simplicidade suponhamos o vértice na origem das coordenadas (se assim não fôsse bastaria efectuar uma translacção dos eixos, transportando a origem para o vértice) e suponhamos ainda que a directriz existe num plano α paralelo a um dos planos coordenados (por exemplo paralelo a x0y).



A directriz Δ terá então por equações :

$$\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \bar{z} = k \end{cases}$$

Por outro lado, a equação geral das rectas que passam pela origem é :

$$(6) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad ,$$

sendo (a,b,c) um vector não nulo com a direcção da recta. Para que esta recta seja uma geractriz da superfície cónica deverá passar pela curva Δ ; então, sendo $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ um ponto da recta e da directriz, virá, supondo $c \neq 0$:

$$\bar{x} = \frac{a}{c}\,\bar{z} \quad , \qquad \bar{y} = \frac{b}{c}\,\bar{z}$$

e como $\bar{z} = k$, entrando com êstes valores na equação (6), obtem-se :

(7) $$f\left(\frac{a}{c}k\ ,\ \frac{b}{c}k\right) = 0\ ,$$

mas sendo (x,y,z) um outro ponto da mesma geractriz, será:

$$\frac{x}{z} = \frac{a}{c}\ ,\quad \frac{y}{z} = \frac{b}{c}$$

e por conseguinte, de (7) virá:

$$f\left(\frac{x}{z}k\ ,\ \frac{y}{z}k\right) = 0$$

equação do 2º grau em x,y,z, que é á equação da superfície cónica que pretendíamos deduzir.

Suponhamos, por exemplo, que se trata da superfície cónica de revolução com o vertice na origem e tendo por eixo Oz; podemos tomar para directriz uma circunferência situada num plano paralelo a xOy ou seja uma circunferência de equações :

$$\begin{cases} \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2 \\ \bar{z} = k \end{cases}$$

Atendendo ao resultado anterior, teremos para equação da superfície :

$$\frac{x^2}{z^2}k^2 + \frac{y^2}{z^2}k^2 = r^2$$

ou seja:

$$k^2\,(x^2 + y^2) = r^2\,z^2$$

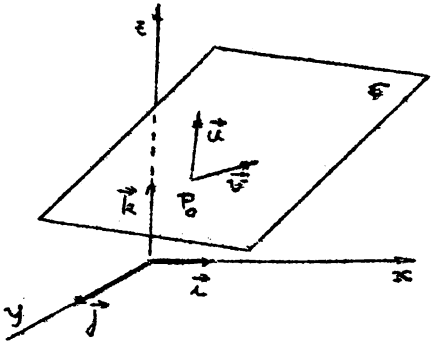
Teorema : "Toda á secção plana duma quádrica é uma cónica".

Consideremos a quádrica de equação (1) e o plano σ definido pela equação vectorial :

$$P = P_o + \xi\,\vec{u} + \eta\,\vec{v}$$

sendo $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ um ponto de σ e $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(a',b',c')$ dois vectores não colineares de σ; ξ,η, serão as coordenadas do ponto P a respeito do referencial $(P_o,\vec{u},\vec{v})$ no plano σ (É claro que podemos escolher os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ de modo que sejam unitários e perpendiculares entre si).

Sejam agora x,y,z as coordenadas do ponto P no referencial $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixado no espaço; a equação vectorial do plano traduz-se pelas equações escalares:



$$x = x_0 + \xi\, a + \eta\, a'$$

$$y = y_0 + \xi\, b + \eta\, b'$$

$$z = z_0 + \xi\, c + \eta\, c'$$

Para determinar a intersecção do plano σ com a quádrica considerada, basta substituir êstes valores de x, y, z na equação da quádrica; obtem-se dêste modo uma relação entre as variáveis ξ, η:

$$f(\xi, \eta) = 0,$$

que é a equação da secção a respeito do referencial $(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ fixado em σ; como esta equação é do 2º grau em ξ, η segue-se que a secção é uma cónica, q.e.d.

Em particular fica provado que tôda a secção plana duma superfície cónica de revolução é uma linha de 2ª ordem; prova-se que a recíproca também é verdadeira, isto é, que toda a linha de 2ª ordem pode obter-se por secção plana duma superfície cónica de revolução. Daqui o nome de <u>cónicas</u> dado às linhas de segunda ordem.

<u>Nota</u>: Quando o plano secante σ é paralelo a um dos planos coordenados, a equação da secção determina-se imediatamente. Suponhamos, por exemplo $\sigma // xOy$; a sua equação será da forma $z = k$, com k constante; tomando x, y como parâmetros, as equações paramétricas de σ serão

$$x = \xi\ , \quad y = \eta\ , \quad z = k\ .$$

Tudo se resume portanto em substituir z por k na equação (1); a substituição de x por ξ e y por η é dispensável.

<u>Paraboloides</u> - Dá-se o nome de <u>paraboloide</u> a toda a superfície que se pode representar por uma equação da forma:

$$z = a\, x^2 + b\, y^2$$

com a, b, não nulos (a respeito dum referencial conveniente).

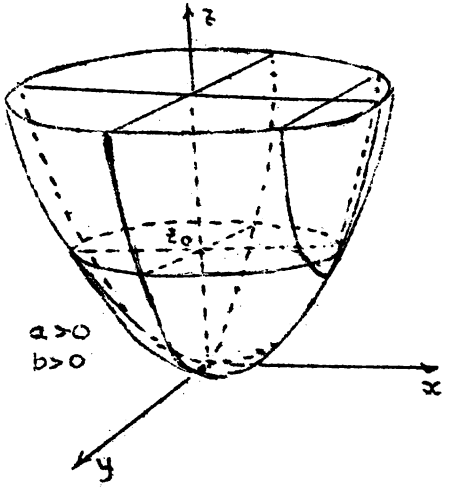
Para fazer uma ideia duma tal superfície estudemos a forma das secções produzidas por planos paralelos aos planos coordenados.

Um plano de equação $x=x_0$ (paralelo a y0z) cortará a superfície segundo uma linha de equação:

$$z = b\,y^2 + a\,x_0^2 \quad ;$$

trata-se, como é fácil de ver, duma parábola - com a concavidade voltada para cima ou para baixo conforme $b>0$ ou $b<0$.

Anàlogamente se reconhece que as secções feitas por planos paralelos a x0z são parábolas com a concavidade voltada para cima ou para baixo, conforme $a>0$ ou $a<0$.



Se $a>0$, $b>0$, um plano $z=z_0$ cortará a superfície segundo a linha :

$$z_0 = a\,x^2 + b\,y^2,$$

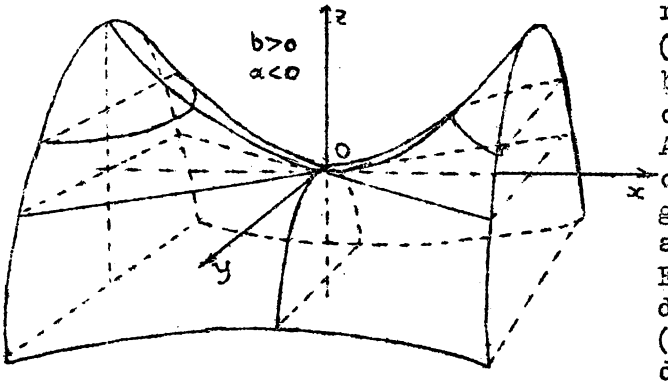
que é uma elipse se $z_0>0$. Se $z_0<0$, o plano não corta a superfície; se $z_0=0$ o plano é tangente à superfície. A análoga conclusão se chega supondo $a<0, b<0$.

Em qualquer dêstes casos, (isto é, quando a e b têm o mesmo sinal) a superfície é chamada <u>paraboloide elíptico</u>; em particular, se a=b, o paraboloide diz-se <u>de revolução</u> (em tôrno de 0z).

Suponhamos agora $b>0$, $a<0$. Os planos paralelos ao plano xz cortarão a superfície segundo parábolas com a concavidade voltada para cima; os planos paralelos ao plano yz cortam a superfície segundo parábolas com a concavidade voltada para baixo; um plano $z=z_0$ (paralelo a x0y) corta a superfície segundo a linha :

$$a\,x^2 + b\,y^2 = z_o^2\ ;$$

esta equação representa uma hipérbole se $z_o \neq 0$ e duas rectas se $z_o = 0$ (visto que a, b têm sinais contrários). A análoga conclusão se chega supondo $a > 0$, $b < 0$. Em qualquer destes casos (isto é, quando a, b têm sinais contrários), a superfície é chamada <u>parabolóide hiperbólica</u>.



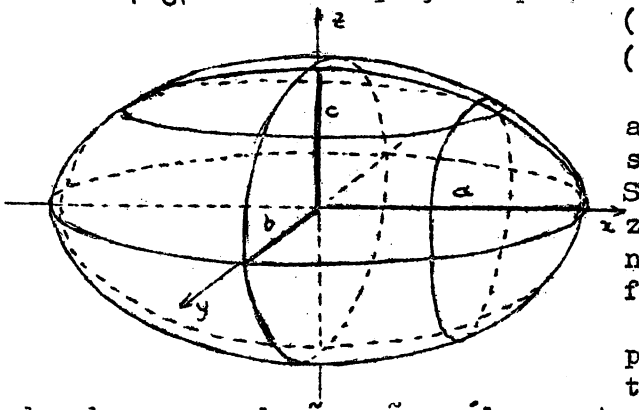
<u>Elipsoide</u> - Chama-se elipsoide toda a superfície que pode ser representada por uma equação da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Um plano $z = z_o$ (paralelo ao plano xy) corta a superfície segundo a linha de equação :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_o^2}{c^2}\ ;$$

Se $|z_o| = c$ esta equação representa um dos pontos $(0,0,z_o)$ ou $(0,0,-z_o)$.



Se $-c < z_o < c$ a equação representa uma elipse. Se $z_o < -c$ ou $z_o > c$, o plano não corta a superfície.

Para os planos paralelos aos outros planos coordenados as conclusões são análogas. As coordenadas

x,y,z de qualquer ponto do elipsoide verificam portanto as condições :

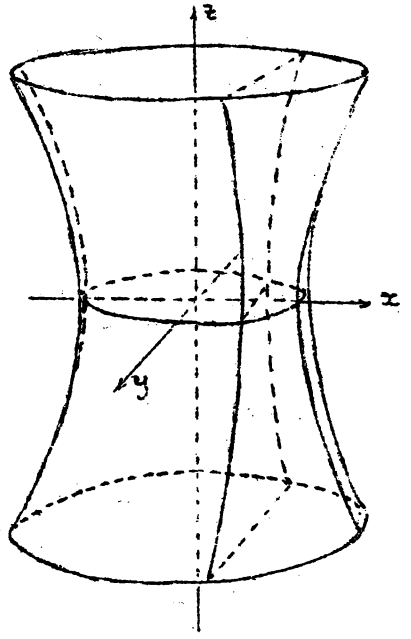
$$|x| \leq a \ , \quad |y| \leq b \ , \quad |z| \leq c \ .$$

Aos três números a,b,c dá-se o nome de semi-eixos do elipsoide; se dois deles são iguais, o elipsoide diz-se de revolução em tôrno do eixo correspondente ao outro. Se fôr a=b=c, trata-se duma esfera.

Hiperbolóide de uma folha - É toda a superfície que pode representar-se por uma equação da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Um plano $z=z_0$ corta a superfície segundo a linha de equação :



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}$$

equação esta que representa sempre uma elipse.

Um plano $y=y_0$ produz a secção:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2} \ ;$$

trata-se duma hipérbole (com os eixos paralelos a Ox e Oz) ou de duas rectas concorrentes (quando $y_0=b$).

Anàlogamente se reconhece que um plano $x=x_0$ corta a superfície segundo uma hipérbole ou segundo duas rectas concorrentes.

Em particular se a=b as secções paralelas a xOy reduzem-se a circunferências e o hiperbolóide diz-se de revolução em tôrno do eixo Oz.

Hiperbolóide de duas fôlhas - É toda a superfície que

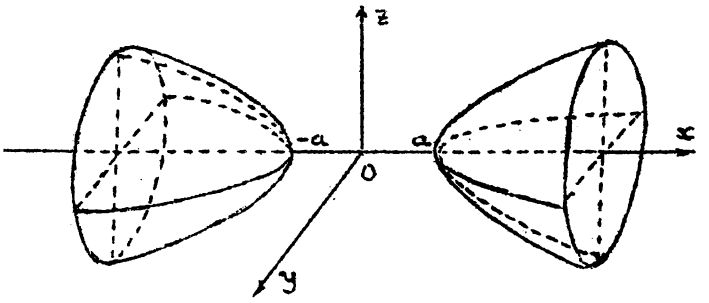
pode ser representada por uma equação da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad .$$

Um plano $z=z_0$ corta a superfície segundo a linha de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}$$

que é uma hipérbole que tem como eixo transverso o eixo Ox; anàlogamente para os planos paralelos a xOz .



Para um plano $x=x_0$ obtemos:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - 1,$$

equação esta que representa uma elipse se o 2º membro fôr positivo, isto é, se $x_0^2 > a^2$, ou ainda $x_0 < -a$ ou $x_0 > a$. Se $|x_0| = a$ a secção reduz-se a um ponto e se $|x_0| < a$ não há secção. A superfície é portanto formada de duas partes separadas - as duas folhas do hiperboloide.

Em particular, se b=c, as secções elípticas passam a circulares e o hiperboloide é de revolução em tôrno do eixo Ox .

Prova-se que tôda a superfície de 2ª ordem pertence a um dos tipos anteriormente estudados : cones ou cilindros de 2ª ordem, paraboloides(elípticos ou hiperbólicos), elipsoides e hiperboloides (duma folha

ou de duas folhas).

Em particular, um cone ou cilindro de 2^a ordem pode degenerar num sistema de dois planos distintos ou coincidentes, ou numa recta. Uma equação do 2º grau em x,y,z pode ainda representar um único ponto ou não ter imagem geométrica, como se viu a propósito da esfera.

Quádricas regradas - O paraboloide hipérbólico e o hiperboloide de uma folha apresentam a particularidade notável de poderem ser gerados por uma recta: dá-se-lhes por isso o nome de superfícies regradas. Prova-se que são as únicas quádricas em tais condições.

Consideremos em primeiro lugar o paraboloide hipperbólico:

$$z = a\,x^2 + b\,y^2 , \qquad (ab < 0) ,$$

Escrevendo esta equação sob a forma :

$$z = b\,(y-mx)\,(y+mx) , \qquad m = \sqrt{-\frac{a}{b}} ,$$

vê-se que o plano :

$$y = m\,x + \lambda , \tag{1}$$

em que λ é um parâmetro arbitrário, corta a superfície em pontos tais que

$$z = b\,\lambda\,(y + mx) \tag{2}$$

Êstes pontos são pois os da recta definida por (1) e (2). A superfície é gerada por esta recta, quando λ toma todos os valores possíveis.

Anàlogamente, cortando pelos planos $y = -mx + \mu$, obtem-se um segundo sistema de geractrizes rectilíneas.

Passemos ao hiperboloide duma folha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Escrita a equação sob a forma :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

ou

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

vê-se que todo o plano :

$$(3) \qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

corta a superfície segundo uma recta situada no plano:

$$(4) \qquad \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}$$

A superfície pode ser gerada por esta recta. Obtem-se anàlogamente um segundo sistema de geractrizes rectilíneas :

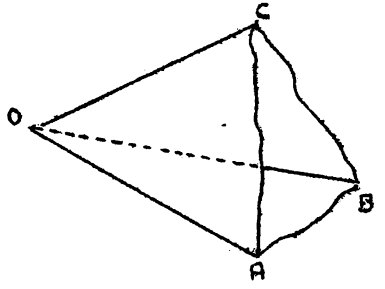
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\mu = 1 - \frac{y}{b} \cdot$$

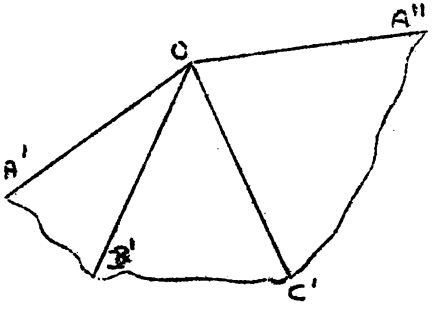
Trigonometria esférica

Comecemos por recordar algumas noções estudadas no curso liceal.

Triedros - Três semi-rectas OA, OB, OC com origem comum, não complanas, definem três ângulos planos AÔB, AÔC, BÔC menores que 180º; chama-se triedro ÔABC à região convexa do espaço limitada por êstes três ângulos planos, os quais passam a chamar-se faces do triedro. Às semi-rectas OA, OB, OC dá-se o nome de arestas do triedro e a O o nome de vértice. Os ângulos diedros COAB, AOBC, BOCA são chamados ângulos do triedro.



Se num plano representarmos três ângulos A'ÔB, B'ÔC', C'ÔA", respectivamente iguais a AÔB, BÔC, CÔA, obteremos a planificação da superfície do triedro. Podemos assim reconhecer intuitivamente os seguintes factos:



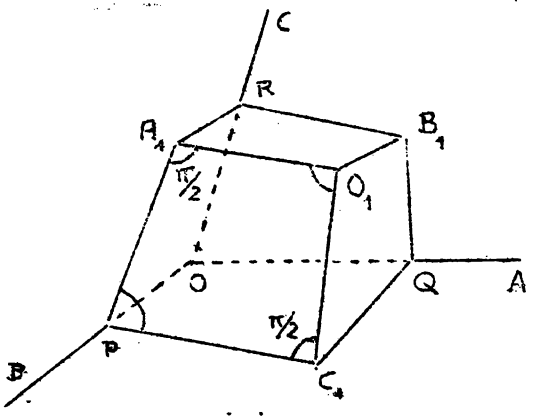
I - Num triedro, qualquer face é menor que a soma das outras duas e maior que a sua diferença.

II - A soma das faces dum triedro é sempre inferior a 4 rectos.

Consideremos um triedro ÔABC, tomemos um ponto O_1 interior ao triedro e conduzamos por O_1 as rectas: O_1A_1 perpendicular ao plano BOC e encontrando-o em A_1; O_1B_1 perpendicular ao plano AOC e encontrando-o em B_1; O_1C_1 perpendicular ao plano AOB e encontrando-o em C_1.

Sejam P, Q, R, respectivamente, os pontos em que :

$A_1O_1C_1$ encontra a aresta OB, $B_1O_1C_1$ encontra a aresta OA e $A_1O_1B_1$ encontra a aresta OC.



Nestas condições o plano $A_1C_1C_1$ é perpendicular a OB, cortando por isso o diedro COBA segundo um rectilíneo $A_1\hat{P}C_1$, cuja medida é, como se sabe, igual à medida do diedro; por outro lado, $A_1\hat{O}_1C_1$ é suplementar de $A_1\hat{P}C_1$. Reconhecemos assim que as faces do triedro de vértice O_1 são suplementares dos ângulos do triedro de vértice O.

Pela mesma razão, as faces do triedro de vértice O são suplementares dos ângulos do triedro de vértice O_1.

Dois triedros nestas condições, isto é, tais que as faces de um deles são suplementares dos ângulos diedros do outro dizem-se suplementares.

Representando por α, β, γ as medidas dos ângulos dum triedro, as medidas das faces do triedro suplementar serão, portanto :

$$\pi - \alpha,\ \pi - \beta,\ \pi - \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ expressos em radianos})$$

e como a soma das faces dum triedro é sempre inferior a 4 rectos, virá:

$$2\pi > (\pi-\alpha) + (\pi-\beta) + (\pi-\gamma) > 0$$

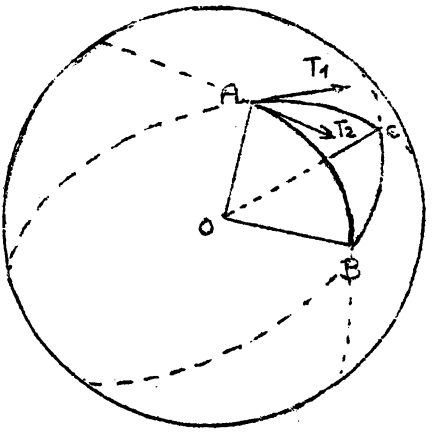
ou, somando -3π aos 3 membros e multiplicando depois por -1 :

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi .$$

Em conclusão:

III - A soma dos diedros dum triedro está sempre compreendida entre 2 e 6 rectos .

Triângulos esféricos - Consideremos uma superfície esférica de centro O e um triedro com vértice em O; as arestas dêste triedro irão cortar a superfície esférica em três pontos A,B,C; como os planos das faces do triedro passam pelo centro da esfera, cortarão a superfície esférica segundo círculos máximos e portanto as faces do triedro cortarão a superfície esférica segundo os arcos de círculo máximo $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, extremos comuns dois a dois e de amplitude inferior a 180°.



À figura assim formada por arcos de círculo máximo com extremos comuns dois a dois (e com medida inferior a 180°) dá-se o nome de triângulo esférico; os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ são os lados do triângulo e os pontos A, B, C os vértices. O triedro ÔABC diz-se o triedro ao centro correspondente ou, simplesmente, o triedro correspondente ao triângulo esférico [ABC].

Chamaremos ângulo de dois lados $\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{AC}$, ao ângulo formado pelas semi-tangentes AT_1 e AT_2 a êsses lados no vértice comum. Como AT_1 e AT_2 são perpendiculares ao raio OA e existem nos planos OAB e OAC, o ângulo $T_1\hat{A}T_2$ é um rectilíneo do diedro $C\hat{A}OB$ e terá portanto a mesma medida que êste diedro; então:

"A cada diedro do triedro corresponde um ângulo do triângulo esférico com a mesma medida"

Por outro lado é fácil ver que:

"A cada face do triedro corresponde um lado do triângulo esférico com a mesma medida",(porque o admite como ângulo ao centro).

Portanto, atendendo a esta correspondência face-lado,

diedro-ângulo, tem-se que, a cada propriedade dos triedros, corresponde uma propriedade dos triângulos esféricos; assim :

I - Qualquer lado dum triângulo esférico é menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença.

II - A soma dos ladós dum triângulo esférico é sempre inferior a 4 rectos.

III - A soma dos ângulos dum triângulo esférico está compreendida entre 2 e 6 rectos.

À diferença entre a soma dos ângulos do triângulo e dois rectos dá-se o nome de excesso esférico:

$$\varepsilon = A + B + C - \pi .$$

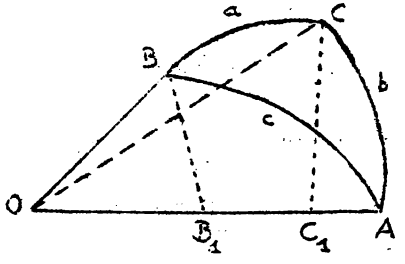
(Para simplicidade de notação, representamos por A,B,C os ângulos do triângulo de vértices A,B,C):

Dois triângulos esféricos dizem-se suplementares quando correspondem a triedros ao centro suplementares; portanto:

"Os lados e os ângulos dum triângulo esférico são respectivamente suplementares dos ângulos e dos lados do triângulo esférico suplementar"

Pode acontecer que um triângulo esférico tenha um, dois, ou até os três ângulos rectos e então dir-se-á respectivamente: rectângulo, birectângulo ou trirectângulo.

Fórmulas para a resolução de triângulos esféricos - 1º grupo de fórmulas. Consideremos um triângulo esférico [ABC] (Convencionaremos representar os vértices do triângulo por letras maiúsculas e os lados pelas letras minúsculas correspondentes). Sejam B_1, C_1 as projecções ortogonais de B, C sôbre OA (isto é os pontos de intersecção da recta OA com os planos que passam por B C e são perpendiculares a OA);



$$B - O = (B_1 - O) + (B - B_1)$$

$$C - O = (C_1 - O) + (C - C_1)$$

Multipliquemos internamente, membro a membro, estas igualdades, observando que, sendo $B_1-O \perp C-C_1$ e $B-B_1 \perp C_1-O$, os produtos internos de B_1-O por $C-C_1$ e de $B-B_1$ por C_1-O são nulos; aplicando a propriedade distributiva, virá:

(1) $(B-O)|(C-O) = (B_1-O)|(C_1-O) + (B-B_1)|(C-C_1)$.

Tomemos para unidade o raio da esfera; será :

$$|B-O| = |C-O| = 1$$

e como $B\hat{O}C = a$, vem :

(2) $$(B-O)|(C-O) = |B-O|\,|C-O| \cos a = \cos a$$

Além disso, por ser B_1-O a projecção ortogonal de $B-O$ sôbre $A-O$, tem-se:

$$B_1-O = \cos B\hat{O}A \cdot (A-O) = \cos c\ (A-O)$$

Anàlogamente:

$$C_1-O = \cos b\ (A-O) .$$

Portanto, visto ser $|A-O| = 1$:

(3) $(B_1-O)|(C_1-O) = \cos b \cos c$.

Temos ainda $|B-B_1| = \text{sen } c$, $|C-C_1| = \text{sen } b$ e o ângulo dêstes vectores é A, por ser igual ao rectilíneo do diedro de aresta OA; então:

(4) $(B-B_1)|(C-C_1) = \text{sen } b \text{ sen } c \cos A$.

Entrando com os valores dados por (2), (3), (4) em (1), vem finalmente:

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos A}$$

que é a chamada <u>fórmula fundamental da trigonometria esférica</u>. Podemos então enunciar a seguinte regra:

"Num triângulo esférico o coseno de qualquer lado é igual ao produto dos cosenos dos outros dois lados mais o produto dos senos dos mesmos lados multiplicado pelo coseno do ângulo oposto ao 1º lado".

Aplicando esta regra aos três lados a,b,c obtemos o primeiro grupo de fórmulas :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C \end{aligned}} \quad \text{I}$$

2º grupo de fórmulas - Consideremos o triângulo esférico [A'B'C'] suplementar do anterior; os elementos dêste triângulo são :

$$A' = \pi - a, \quad B' = \pi - b, \quad C' = \pi - c$$

$$a' = \pi - A, \quad b' = \pi - B, \quad c' = \pi - C$$

e entrando com êstes valores na 1ª fórmula do grupo I vem :

$$-\cos A' = \cos B' \cos C' - \operatorname{sen} B' \operatorname{sen} C' \cos a'$$

Como se trata dum triângulo arbitrário, podemos omitir as plicas. Procedendo anàlogamente para as outras duas fórmulas do grupo I, obtem-se :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c \end{aligned}} \quad \text{II}$$

3º grupo de fórmulas - Da 1ª fórmula do 1º grupo deduz-se :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} ;$$

como $\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A$, teremos :

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \right)^2$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

donde, atendendo a que $\operatorname{sen}^2 b . \operatorname{sen}^2 c = (1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)$ e dividindo por $\operatorname{sen}^2 a$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

Ora, observa-se que, permutando as letras a,b,c, o 2º membro desta expressão não muda (é simétrico em a,b, c); isto leva-nos a concluir que:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b} = \frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 c} ,$$

Como se trata dum triângulo esférico, as medidas das faces e dos ângulos são sempre inferiores a dois rectos, e por conseguinte os respectivos senos são sempre positivos; podemos então escrever:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}} \qquad \text{III}$$

fórmulas estas chamadas analogias dos senos e que exprimem o seguinte facto: "Os senos dos lados dum triângulo esférico são proporcionais aos senos dos ângulos opostos".

4º grupo de fórmulas - Substituindo na 1ª fórmula do grupo I o valor de cos c dado pela 3ª fórmula do mesmo grupo obtem-se :

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

donde:

$$\cos a (1-\cos^2 b) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

ou, substituindo $1-\cos^2 b$ por $\operatorname{sen}^2 b$ e dividindo ambos os membros por sen a sen b :

$$\frac{\cos a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} = \cos b \cos C + \frac{\operatorname{sen} c \cos A}{\operatorname{sen} a}$$

Mas tem-se (analogias dos senos) :

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} ;$$

o último termo do segundo membro torna-se então sen C cot A e assim poderemos escrever finalmente:

$$\cos b \cos C = \operatorname{sen} b \cot a - \operatorname{sen} C \cot A ,$$

fórmula esta que relaciona quatro elementos contíguos. Obtemos assim o seguinte grupo de seis fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} \cos b \cos C = \operatorname{sen} b \cot a - \operatorname{sen} C \cot A \\ \cos a \cos C = \operatorname{sen} a \cot b - \operatorname{sen} C \cot B \\ \cos c \cos B = \operatorname{sen} c \cot a - \operatorname{sen} B \cot A \\ \cos a \cos B = \operatorname{sen} a \cot c - \operatorname{sen} B \cot C \\ \cos c \cos A = \operatorname{sen} c \cot b - \operatorname{sen} A \cot B \\ \cos b \cos A = \operatorname{sen} b \cot c - \operatorname{sen} A \cot C \end{array}\right\} \quad \text{IV}$$

Triângulos rectângulos - Estas fórmulas simplificam-se consideràvelmente quando o triângulo esférico é rectângulo. Se fôr, por exemplo, $A = \pi/2$, vem $\cos A = 0$, $\operatorname{sen} A = 1$; então as fórmulas anteriores fornecem-nos as seguintes:

$$\text{I} \quad \cos a = \cos b \cos c$$

$$\text{II} \begin{cases} \cos a = \cot B \cot C \\ \cos B = \operatorname{sen} C \cos b \\ \cos C = \operatorname{sen} B \cos c \end{cases}$$

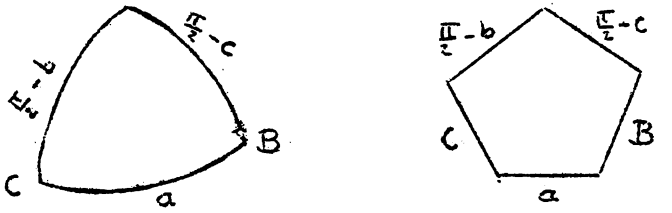
$$\text{III} \begin{cases} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{cases}$$

$$\text{IV} \begin{cases} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B \\ \operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C \end{cases}$$

Podemos reproduzir fàcilmente estas fórmulas recorrendo a um processo mnemónico chamado a Regra de Neper: Consideremos um triângulo esférico [ABC] rectângulo em

A e imaginemos os elementos dêste triângulo dispostos pela ordem em que seguem, abstraindo do ângulo recto e tendo,o cuidado de substituir os catetos b e c pelos seus complementos; então a regra de Neper enuncia-se :

"<u>O coseno de qualquer elemento é igual ao produto das cotangentes dos elementos conjuntos (adjacentes) ou ao produto dos senos dos elementos separados (não adjacentes)</u> .



Para aplicar esta regra, é mais cómodo na prática desenhar, em vez do triângulo, um pentágono cujos lados sejam os elementos do triângulo na ordem pela qual se sucedem, suprimindo o ângulo recto e substituindo os catetos b e c pelos respectivos complementos.

Suponhamos, por exemplo, que se trata de resolver o triângulo rectângulo em A conhecidos a hipotenusa a e o cateto b; para calcular o outro cateto c, observemos que, dos três elementos a,b,c, é a o elemento médio, isto é, o que está disposto simétricamente em relação aos outros dois; como êstes não são adjacentes a a, virá, pela segunda parte da regra de Neper:

$$\cos a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos b \cos c$$

donde

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} .$$

Para calcular o ângulo B, notemos que o elemento médio é $\frac{\pi}{2} - b$; então virá:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B ,$$

donde :

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} .$$

Finalmente para o ângulo C, o elemento médio é C, logo:

$$\cos C = \cot a \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

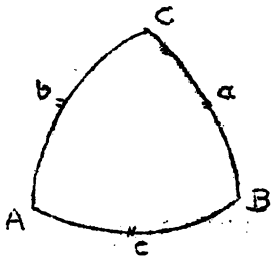
$$= \cot a \operatorname{tg} b \ .$$

Anàlogamente se resolvem os outros casos dos triângulos rectângulos.

Triângulos obliquângulos

1º e 2º casos - Conhecidos os três lados, ou conhecidos os três ângulos, determinar os elementos desconhecidos.

1º caso - Suponhamos dados os três lados; para determinar o ângulo A, podemos utilizar a fórmula fundamental, que dá:



$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \ .$$

Mas esta fórmula não se presta ao cálculo logarítmico; vamos por isso transformá-la.

Comecemos por recordar como se torna logarítmica a expressão $\cos x - \cos y$. Pondo :

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad u = \frac{x+y}{2} \ , \quad v = \frac{y-x}{2} \ ,$$

vem:

$$\cos x - \cos y = \cos (u - v) - \cos (u + v) =$$

$$= \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v - \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$= 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2}$$

e a expressão obtida já é adequada ao cálculo logarítmico.

Precisamos ainda de utilizar uma outra fórmula que vamos deduzir. Tem-se :

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

donde, atendendo a que $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$,

$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{x}{2}$:

$$\cos x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} , \quad \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

e portanto:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

igualdades estas que permitem escrever:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad .$$

Voltando ao caso de que estávamos a tratar, temos:

$$1 - \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos a + \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$1 + \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

e por conseguinte:

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\cos a - \cos (b+c)} ;$$

aplicando a anterior fórmula de transformação logarítmica virá :

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{\cancel{2} \operatorname{sen} \frac{a+b-c}{2} \operatorname{sen} \frac{a-b+c}{2}}{\cancel{2} \operatorname{sen} \frac{a+b+c}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c-a}{2}}$$

Convencionando pôr $a + b + c = 2p$, ter-se-á:

$a + c - b = 2(p - b)$, $a + b - c = 2(p-c)$, $b + c - a = 2(p-a)$

e finalmente :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\ \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p\ \operatorname{sen}(p-a)}}\ .$$

Para os ângulos B e C, será anàlogamente :

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\ \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p\ \operatorname{sen}(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\ \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p\ \operatorname{sen}(p-c)}}\ .$$

fórmulas estas que já são logarítmicas.

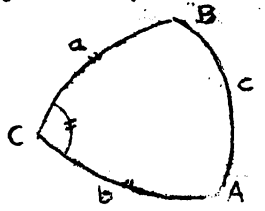
No 2º caso são dados os três ângulos A,B,C e pretende-se determinar os três lados a, b, c. Podemos recorrer ao triângulo esférico suplementar; fàcilmente se reconhece que, pondo $A + B + C - 180^\circ = 2\Delta$, resulta :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\Delta\ \operatorname{sen}(A-\Delta)}{\operatorname{sen}(B-\Delta)\ \operatorname{sen}(C-\Delta)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\Delta\ \operatorname{sen}(B-\Delta)}{\operatorname{sen}(A-\Delta)\ \operatorname{sen}(C-\Delta)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\Delta\ \operatorname{sen}(C-\Delta)}{\operatorname{sen}(A-\Delta)\ \operatorname{sen}(B-\Delta)}}\ .$$

3º e 4º casos - Conhecidos dois lados e o ângulo por êles formado ou conhecidos um lado e os dois ângulos adjacentes, determinar os elementos desconhecidos.



Por exemplo, suponhamos conhecidos a,b,C e propúnhamo-nos determinar A,B,c.

a) Comecemos por calcular c. Segundo a terceira fórmula do grupo I, tem-se :

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C.$$

Para adaptar esta fórmula ao cálculo logarítmico seguiremos o chamado "método do ângulo auxiliar".

Pondo cos a em evidência no segundo membro, vem:

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \operatorname{tg} a \operatorname{sen} b \cos C)\ ;$$

determinando um ângulo auxiliar φ tal que:

(1) $$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} a \cos C}$$

(o que é sempre possível visto que a tangente varia de $-\infty$ a $+\infty$), podemos escrever :

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \operatorname{sen} b)$$

$$= \frac{\cos a}{\cos\varphi}\,(\cos b \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} b)$$

ou, finalmente :

(2) $$\boxed{\cos c = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}}$$

Determina-se primeiro o ângulo auxiliar φ por intermédio de (1) e depois c por intermédio de (2) .

b) Para calcular A, podemos recorrer à primeira das fórmulas do grupo IV . Tem-se:

$$\operatorname{sen} C \cot A = \operatorname{sen} b \cot a - \cos b \cos C$$

donde

$$\operatorname{sen} C \cot A = \cos C\,(\operatorname{sen} b \frac{\cot a}{\cos C} - \cos b) .$$

Determinando agora um ângulo auxiliar φ tal que :

(3) $$\frac{\cot a}{\cos C} = \cot\varphi ,$$

vem:

$$\operatorname{sen} C \cot A = \cos C\,(\operatorname{sen} b \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} - \cos b) =$$

$$= \cos C \ \frac{\operatorname{sen}(b-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$$

e finalmente :

$$(4) \qquad \cot A = \cot C \ \frac{\operatorname{sen}(b-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$$

As fórmulas (3), (4) resolvem pois o problema

c) Para calcular B, teremos teremos anàlogamente as fórmulas:

$$\cot\psi = \frac{\cot b}{\cos C}, \qquad \cot B = \cot C \ \frac{\operatorname{sen}(a-\psi)}{\operatorname{sen}\psi}.$$

Quanto ao 4º caso, podemos reduzi-lo ao 3º por passagem ao triângulo suplementar.

5º e 6º casos - Dados dois lados e o ângulo oposto a um deles, ou dados dois ângulos e o lado oposto a um deles, determinar os elementos desconhecidos.

Estes dois casos, que não estudaremos em detalhe, são chamados "casos duvidosos"; o problema pode ter duas soluções, uma ou nenhuma.

F I M

ÍNDICE

Sucessões - Limites de sucessões - - - - - - - - - - 3
Álgebra dos limites - - - - - - - - - - - - - - - 7
Classificação de sucessões - - - - - - - - - - - 14
Séries - 19
Critérios de convergência - - - - - - - - - - - - 22
Cálculo da soma - - - - - - - - - - - - - - - - - 31
Séries de potências - - - - - - - - - - - - - - - 33
Funções reais de variável real - - - - - - - - - - 39
Funções racionais - - - - - - - - - - - - - - - 43
Funções de mais de uma variável - - - - - - - - - 49
Função implícita - - - - - - - - - - - - - - - - 51
Extremos - 54
Crescimento - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 55
Funções trigonométricas - - - - - - - - - - - - - 57
Limites de funções - - - - - - - - - - - - - - - 59
Conceito de limite duma função segundo Cauchy - 70
Continuidade - - - - - - - - - - - - - - - - - - 74
Teoremas sôbre funções contínuas - - - - - - - - 77
Derivadas - 81
Máximos e mínimos - - - - - - - - - - - - - - - - 103
Teorema de Rolle - - - - - - - - - - - - - - - - 106
Fórmula de Taylor - - - - - - - - - - - - - - - - 107
Teorema de Lagrange - - - - - - - - - - - - - - - 111
Zeros duma função - - - - - - - - - - - - - - - - 115
Indeterminações - - - - - - - - - - - - - - - - - 120
Máximos e mínimos - - - - - - - - - - - - - - - - 123
Concavidade - Pontos de inflexão - - - - - - - - 132
Assíntotas - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 134
Representação gráfica de funções - - - - - - - - 138
Resolução de equações - - - - - - - - - - - - - - 145
Estudo das funções exponencial e logarítmica - - - 153
Indeterminações - - - - - - - - - - - - - - - - - 164
Série de Taylor - - - - - - - - - - - - - - - - - 166
Geometria Analítica - A) Vectores - - - - - - - - 170
B) - Rectas e planos - - - - - - - - - - - - - - 182
C) - Problemas métricos - - - - - - - - - - - - 197
D) - Mudança de coordenadas - - - - - - - - - - 207
E) - Cónicas - - - - - - - - - - - - - - - - - - 210
F) - Quádricas - - - - - - - - - - - - - - - - - 219
Trigonometria esférica - - - - - - - - - - - - - - 232