INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

A NOÇÃO DE LIMITE PARA SUCESSÕES DE DISTRIBUIÇÕES

10ª lição

Vimos já como no conjunto $C_\pi(I)$ das distribuições de domínio I se define uma adição, um operador de derivação, e o produto de uma função por uma distribuição, em determinadas condições. E também vimos a vantagem que se pode tirar dessa estrutura algébrica em várias aplicações concretas.

No entanto, para poder aprofundar a teoria das distribuições, e poder aplicá-la a outras questões, -em especial, para tratar convenientemente funções não racionais do operador D de derivação e a transformação de Fourier, bem como aplicações dêstes instrumentos analíticos ao estudo das equações de derivadas parciais, íntegro-diferenciais, e outros tipos de equações funcionais, -torna-se indispensável introduzir no conjunto das distribuições em I, $C_\pi(I)$, além da estrutura algébrica já considerada, uma estrutura topológica, isto é, certas noções chamadas "topológicas" tais como a noção de limite de uma sucessão, ponto de acumulação de um conjunto, conjunto aberto, etc.

No entanto, de todas essas noções "topológicas", só necessitaremos - para os fins em vista neste curso - da noção de limite de uma sucessão (de distribuições). Antes de introduzir êsse conceito, convém fazer algumas observações de ordem geral sôbre convergência de sucessões em espaços vectoriais.

Chama-se espaço normado todo o espaço vectorial E sôbre o corpo real ou sôbre o corpo complexo, no qual, a cada vector $x \in E$ se associa um número real $q(x)$, habitualmente chamado norma de x, de modo que sejam verificadas as seguintes condições:

I) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$

II) $q(\alpha x) = |\alpha| . q(x)$

quaisquer que sejam os vectores $x, y \in E$ e o escalar α (número real ou complexo, conforme E é real ou complexo)

III) Se $q(x) = o$, então $x = o$ (vector nulo)

Reparemos agora em que da condição II), quando $\alpha = o$, resulta $q(o) = o$, - isto é, a norma do vector nulo é, necessàriamente, <u>zero</u>.

Por sua vez, da condição I) decorre [tomando $y = -x$ e notando que $q(-x) = |-1|\ q(x) = q(x)$]

$$o \leqslant 2q(x) \text{ ,donde } \quad q(x) \geqslant o$$

Quer dizer: a norma de um vector qualquer é sempre um número não-negativo.

Observações:

1) Quando a cada vector $x \in E$ se associa um número real $q(x)$, de modo que as condições I) e II) se verifiquem, diz-se que $q(x)$ é uma <u>semi-norma</u> sôbre o espaço vectorial E. Este é, também um conceito fundamental. É claro que tôda a norma é uma semi-norma, mas a recíproca não é verdadeira.

2) Muitas vezes, a norma ou semi-norma de um vector x é representada ainda pela notação $\| x \|$

Exemplos:

a) Consideremos o espaço C^n a n dimensões complexas: todo o elemento $z \in C^n$ é da forma $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, sendo $z_1, z_2, \ldots z_n$ números complexos quaisquer (designemos por C o corpo complexo).

Pode definir-se em C^n uma <u>norma</u>, escrevendo

$$\| z \| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots\ldots + |z_n|^2}$$

Demonstra-se que a função $\|x\|$ de x é de facto uma norma. Pode ainda, neste caso, sem inconveniente algum, designar-se a norma de z por $|z|$, e chamar-lhe então <u>módulo</u> ou <u>comprimento</u> do vector z

b) Um critério perfeitamente análogo se adopta no espaço de Hilbert, considerado como conjunto de tôdas as sucessões z de números reais ou complexos

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad)$$

tais que é convergente a série

$$\sum_1^{\infty} |z_n|^2$$

Então a fórmula

$$\|z\| = \sqrt{\sum_1^{\infty} |z_n|^2}$$

define uma norma no referido conjunto (espaço de Hilbert).

c) Consideremos uma vez mais o conjunto C(I) das funções numéricas complexas definidas e contínuas num intervalo I (que suporemos compacto) da recta. Já sabemos que C(I) é um espaço vectorial, real ou complexo.

Costuma definir-se em C(I) uma norma da maneira seguinte:

chama-se norma duma função f contínua em I e designa-se por $\|f\|$ o máximo valor do módulo de f(t) naquele intervalo, isto é,

$$\|f\| = \max_{t \in I} |f(t)|$$

Segundo o teorema de Weierstrass, como I é compacto e $|f(t)|$(1) aquele máximo existe, e é finito.

Demonstra-se fàcilmente que $\|f\|$ é de facto uma norma.

....

Outro conceito que interessa ter em conta é o de espaço (L).

Diz-se que um conjunto E, qualquer, é um espaço (L), quando a cada uma de certas sucessões

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

de elementos de E, se associa um determinado elemento a de E, que se chama limite desta sucessão, e se representa pelo símbolo

$$\lim x_n ,$$

....

(1) é uma função contínua (porque o é f(t))

de acôrdo com as condições seguintes:

1) uma sucessão não pode ter dois limites diferentes.
(condição da <u>unicidade</u> do limite).

2) se todos os elementos x_n da sucessão coincidirem com um mesmo elemento <u>a</u> de E, isto é, se $x_n=a$ para qualquer n, então $\lim x_n = a$
("limite de uma constante é a própria constante)

3) Se $\lim x_n = a$, então toda a sub-sucessão[1] da inicial terá o mesmo limite, <u>a</u>.

A noção de <u>espaço (L)</u> é devida a Fréchet. É um conceito muito geral, de pouco alcance, mas suficiente para os objectivos que temos em vista.

As sucessões de elementos de E que têm limite dizem-se <u>convergentes</u>. Quando a sucessão

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad \text{(de elementos de E)}$$

tem o vector $a \in E$ como limite, também se diz que aquela sucessão <u>converge</u> para <u>a</u> (ou tende para <u>a</u>) e também se adopta a notação

$$x_n \longrightarrow a,$$

para indicar este facto.

Outra noção de análise geral que nos interessa mais ainda é a que combina os conceitos de espaço (L) e espaço vectorial: diz-se que um conjunto E é <u>um espaço (L) vectorial</u>, quando é um espaço vectorial real ~~ou~~ complexo, e simultaneamente é um espaço (L), sendo válidas as duas seguintes condições:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \lim(x_n+y_n) = \lim x_n + \lim y_n \\ \lim(\alpha_n x_n) = (\lim \alpha_n) \cdot (\lim x_n) \end{array},$$

se forem

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$
$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

sucessões convergentes quaisquer de vectores de E, e

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

uma sucessão convergente qualquer de números reais ou complexos.

....

(1) Isto é, toda a sucessão que resulta daquela suprimindo um número qualquer de termos, e conservando os restantes na mesma ordem.

Também se exprimem as duas precedentes condições (1), dizendo que a estrutura de espaço (L) de E é compatível com a respectiva estrutura algébrica de espaço vectorial.

Ora, num espaço normado E, munido de uma norma $q(x)$, é costume introduzir a noção de limite do seguinte modo:

Diz-se que uma sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de vectores de E tende para um vector $a \in E$, quando a norma de $x_n - a$ é um infinitésimo, isto é, quando

$$\lim_{n \to \infty} q(x_n - a) = 0$$

(Repare-se em que as normas são números reais, e que já está definida a noção de limite para sucessões de números).

Não oferece dificuldade alguma reconhecer que se trata de um espaço (L), vectorial. Em especial, as condições (1) da página anterior demonstram-se exactamente como no caso dos números: com efeito substituindo a noção de "módulo" pela noção mais geral de "norma", basta decalcar os conhecidos raciocínios relativos a sucessões numéricas.

Assim, no espaço C(I) das funções complexas contínuas num intervalo compacto I, diremos que uma sucessão de funções

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

tende para uma função f, quando a norma $\|f_n - f\|$ tende para o, isto é, quando o máximo valor absoluto da função $f_n - f$ no intervalo I tende para o. Por outras palavras, dado um número positivo qualquer, ε, existe sempre um número natural ν, tal que $n > \nu$ implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo o ponto x do intervalo I. Este pormenor é fundamental: a ordem ν depende apenas de ε, e não dos valores de x. Sabe-se já como se exprime êste facto: diz-se então que a sucessão de funções

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

converge uniformemente para a função $f(x)$, no intervalo I.

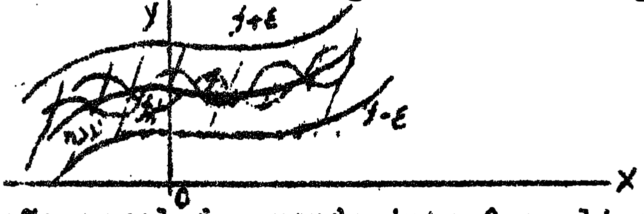
Se se tratasse de funções reais, podíamos fazer uma interpretação geométrica simples do que acaba de constatar-se.

Considerando os gráficos das funções $f(x) - \varepsilon$ e $f(x) + \varepsilon$ (obtidos por translacção vertical do gráfico de f), a condição

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$$

significa que, a partir da ordem ν, todas as funções $f_n(x)$ tem os seus gráficos encerrados na faixa limitada pelos gráficos de $f+\varepsilon$ e $f-\varepsilon$, -faixa essa que pode aliás estreitar-se tanto quanto se queira, mediante adequada alteração da ordem ν.

Mas não esqueçamos que nos colocamos numa hipótese mais geral: C(I) representa todas as funções <u>complexas</u> da variável <u>real</u>, definidas e contínuas no intervalo I os valores das funções podem pois ser imaginários, e a precedente interpretação gráfica não abarca o caso geral da convergência no espaço normado C(I)



Outra noção geral de grande interêsse, ligada à de espaço (L), é a de <u>aplicação contínua</u>.

Dados dois espaços (L) quaisquer, E e F, diz-se que uma aplicação Φ de E em F é <u>contínua</u> quando se tem

$$\lim \Phi(x_n) = \Phi(\lim x_n)$$

para tôda a sucessão convergente

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

de vetores de E. (Esta é pois uma definição de continuidade que respeita apenas aos espaços (L), mas que é suficiente para o fim em vista).

<u>Exemplo</u>: consideremos em C(I) o operador de integração, $\mathcal{J}$, já considerado:

$$\mathcal{J}f = \int_c^x f(t)\, dt \qquad (c \in I)$$

Sabe-se que, quando a função integranda, $f_n(t)$ converge uniformemente para uma função dada, $g(t)$, então o integral de f_n converge uniformemente para o integral de g: isto é, $\mathcal{J}f_n$ converge uniformemente para $\mathcal{J}g$, se $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ convergir uniformemente para g.

Por outras palavras, o operador $\mathcal{J}$, além de aplicação linear do espaço (L) vectorial C(I) em si mesmo, é também uma aplicação <u>contínua</u>.

Consideremos agora o caso do operador D da derivação: vamos ver que não se trata já de uma aplicação <u>contínua</u> nas condições até aqui admitidas. Representamos já por $C^1(I)$ o espaço das funções continuamente deriváveis, valendo manifestamente a inclusão

$$C^1(I) \subset C(I)$$

O operador D de derivação é certamente uma aplicação linear do 1º daqueles espaços vectoriais no 2º. Ora, se adoptarmos em $C^1(I)$ a mesma definição de norma que em $C(I)$, e tornarmos $C^1(I)$ um espaço (L) com a definição de limite decorrente de tal norma, - é fácil reconhecer que o operador D não é uma aplicação contínua.

Um exemplo basta para provar êsse facto. Consideremos as funções [indefinidamente deriváveis e portanto pertencentes a $C^1(I)$]:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \text{ sen } nx$$

definidas, por exemplo, no intervalo fechado $I = [o, 2\pi]$.
O máximo valor absoluto da função f_n em I é certamente $\frac{1}{n}$ portanto,

$$\|f_n\| = \frac{1}{n}$$

E é evidente que $\lim \|f_n\| = o$

Quer isto dizer que a sucessão de funções [de $C(I)$]

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

converge uniformemente para o, isto é, para a função (identicamente) nula, $f \equiv o$.

Consideremos agora a sucessão das derivadas,

$$(2) \qquad Df_1, Df_2, \dots, Df_n, \dots$$

Visto que $Df_n = \cos nx$, temos manifestamente

$$\|Df_n\| = 1,$$

-quer dizer: uma vez que esta norma não tende para o, a sucessão (2) das derivadas não tende para a derivada da função nula, que é $D.o = o$. Tem-se pois neste caso

$$D(\lim f_n) \neq \lim (Df_n),$$

e portanto a aplicação D de $C^1(I)$ em $C(I)$ não é contínua, se mantivermos em $C^1(I)$ a definição de norma que tínhamos adoptado em $C(I)$.

Ora, vamos ver que se pode adoptar no espaço vectorial $C^1(I)$ uma definição de limite, menos restritiva que a anterior, de modo que o operador D passe a ser contínuo. Isto é, vamos mostrar que se pode "reforçar" aquela noção inicial de limite de modo tal que a aplicação D se torne contínua.

Basta, evidentemente, convencionar o seguinte: diremos que uma sucessão $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ de funções continuamente deriváveis tende para uma função continuamente derivável, g, quando não só a sucessão $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ converge uniformemente para g, mas também a sucessão das derivadas,

$$f'_1, f'_2, \ldots, f'_n, \ldots$$

converge uniformemente para g'.

Tendo adoptado em $C^1(I)$ esta definição de convergência, automàticamente a aplicação D ficará a ser contínua, como é óbvio.

Diz-se que uma tal noção é <u>mais forte</u> (ou ainda, <u>mais fina</u>) do que a noção de limite inicialmente definida em C(I), neste sentido: se uma sucessão de funcões converge, de acordo com a 2ª definição, converge também segundo a 1ª; mas é claro que não se dá aqui a recíproca! Note-se ainda que a noção de limite introduzida em $C^1(I)$ é o reforço <u>estritamente necessário</u> da noção inicial para garantir a continuidade de D - quer dizer, é a <u>mais fraca</u> (isto é, menos forte) noção de limite que satisfaz a tal requisito.

E agora, podemos proceder de maneira análoga para um qualquer dos espaços $C^p(I)$, constituidos (como se sabe) pelas funções que admitem derivadas sucessivas contínuas até à ordem p, inclusivè. Diremos que uma sucessão de funções

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

de $C^p(I)$ converge para uma função g do mesmo espaço, quando as p+1 sucessões

$$f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), \ldots, f_n^{(k)}(x), \ldots,$$

convergem uniformemente para $g^{(k)}(x)$, com $k=0,1,2,\ldots,p$

Deste modo estendemos a condição de convergência uniforme a todas as sucessões de derivadas sucessivas, até à ordem p inclusivè. E assim conseguimos definir em $C^p(I)$ a <u>mais fraca noção de limite que torna contínuas os operadores</u>

$$D^0 = I, D, D^2, \ldots, D^p$$

A noção de limite agora introduzida no espaço $C^p(I)$ torna êste um espaço (L) vectorial, como fàcilmente se reconhece. É também fácil verificar que aquele conceito de limite em $C^p(I)$ pode ser deduzido directamente de uma noção de norma convenientemente escolhida: basta que se tome, para cada função f $C^p(I)$:

$$\|f\|_p = \max_{x\in I} \left[f(x), f'(x), \ldots, f^{(p)}(x) \right] ,$$

isto é, basta adoptar como norma de uma função o maior dos máximos dessa função e de todas as suas derivadas até à ordem p, no intervalo I. É claro que, desta norma, deriva a noção de limite que definimos em $C^p(I)$.

Passemos agora ao espaço das funções indefinidamente deriváveis,

$$C^\omega(I) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C^n(I)$$

Em que circunstancias é natural dizer agora que uma sucessão de funções:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

converge para uma função g ?

Certamente, quando não só a própria sucessão converge uniformemente para g no intervalo I, como também todas as sucessões de derivadas de qualquer ordem,

$$f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}, \ldots$$

convergem uniformemente em I para as correspondentes derivadas $g^{(k)}$ de g.

Com esta definição de convergência, consegue-se que tôdas as potências

$$D^p \qquad (p=o,1,2\ldots)$$

do operador D de derivação sejam aplicações contínuas do espaço $C^\omega(I)$ em $C(I)$. Trata-se mesmo da menos forte noção de limite que permite obter este resultado, isto é, a que menos se afasta da noção de limite inicialmente introduzida em $C(I)$.

Mais ainda: o operador D é uma aplicação de $C^\omega(I)$ em si mesmo, como já se sabe, e com aquela noção de limite hà pouco lá definida, a aplicação D assim considerada é também contínua, como logo se reconhece.

Tudo que se disse refere-se exclusivamente a espaços de funções. Conceitos análogos podem agora estabelecer-se no espaço das distribuições.

Começaremos por supôr o intervalo I <u>compacto</u>, isto é, fechado e limitado.

Consideremos, em primeiro lugar o espaço $C_1(I)$ das distribuições de ordem não superior a 1, isto é, derivadas de 1ª ordem de funções contínuas no intervalo I; sabe-se que

$$C(I) \subset C_1(I)$$

Já se verificou que D é uma aplicação linear do 1º espaço no 2º; pois bem, somos agora induzidos, naturalmente, a definir em $C_1(I)$ uma noção de limite que satisfaça às duas condições seguintes:

1ª-a aplicação D do espaço C(I) (com a noção inicial de limite) no espaço $C_1(I)$ (com a nova noção de limite) seja contínua;

2ª-a noção inicial de limite em C(I) seja mais forte que a nova noção de limite quando aplicada a C(I), como sub-espaço de $C_1(I)$. Convém, é claro, que nos <u>afastemos o menos possível</u> de noção inicial. A questão resolve-se com a seguinte definição:

Dada uma sucessão de distribuições

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots \qquad [\text{de } C_1(I)]$$

diremos que esta sucessão converge para uma distribuição U daquele mesmo espaço, quando existir uma sucessão de funções contínuas em I, $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ <u>uniformemente convegergente</u> para uma função g contínua em I, de modo que se tenha

$$T_n = Df_n \ , \ U = Dg \ .$$

O que se fez portanto foi recuar, indo buscar ao espaço C(I) a noção de limite pretendida. Fàcilmente se vê que esta é a mais forte noção de limite que satisfaz às duas referidas condições. Não quisemos afastar-nos senão o mínimo, o estritamente necessário do conceito usual de limite (da convergência uniforme em I). É óbvio que esta noção de limite, uma vez restringida a C(I), é de facto mais fraca do que a inicialmente definida em C(I), porque agora (segundo o novo critério) diremos que uma sucessão de funções contínuas, f_n, converge para uma função contínua, g quando existir uma sucessão de primitivas das funções f_n que convirja uniformemente para uma primitiva de g, no intervalo I. Ora, isto não quer dizer, segundo vimos já (com um exemplo: pág. 144), que a sucessão

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

convirja uniformemente em I para a função g: efectuámos portanto, com a noção de limite introduzida em $C_1(I)$, um alargamento do conceito inicial de limite em $C(I)$, "enfraquecemos", de facto, êsse conceito.

Podemos agora generalizar aquele procedimento a um qualquer dos espaços $C_p(I)$, das distribuições de ordem não superior a p, no intervalo compacto I, os quais se exprimem como derivadas de ordem p de funções contínuas em I. Diremos que uma sucessão

$$T_1, T_2, \dots, T_n, \dots \quad (T_n \in C_p(I))$$

converge para uma distribuição U do mesmo espaço quando se puder escrever

$$T_n = D^p f_n \quad , \quad U = D^p g,$$

sendo $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ uma sucessão de funções contínuas em I, uniformemente convergente para g.

E assim conseguimos caracterizar a mais forte noção de limite que torna contínuos todos os operadores

$$D^o, D, D^2, \dots, D^n, \dots$$

considerados como aplicações de $C(I)$ em $C_p(I)$.

Pouco falta agora para podermos definir uma noção de limite no espaço de <u>todas</u> as distribuições em I. Mas antes de lá chegar, observemos ainda o seguinte: as noções de limite, sucessivamente mais fracas, que introduzimos nos espaços $C_p(I)$, podem ser ainda definidas a partir de uma noção de <u>norma</u>. Isto é, em cada um daqueles espaços, podemos definir um conceito de norma, do qual decorre a noção de limite lá introduzida. Portanto, cada espaço $C_p(I)$ será ainda um espaço (L) vectorial.

....

Consideremos agora o espaço $C_\omega(I)$ de todas as distribuições definidas em I. (Como se sabe, sendo I <u>compacto</u>, não hà senão distribuições de ordem finita em I).

Diremos que uma sucessão

$$T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$$

de tais distribuições converge para uma distribuição $U \in C_\omega(I)$, quando existir pelo menos um número natural, p, uma sucessão

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

de funções contínuas em I, e uma função g contínua em I, de tal modo que se verifiquem as condições seguintes:

1) $T = D^p f_n$; $U = D^p g$

2) a sucessão (f_n) convirja uniformemente no intervalo I para g.

Por outras palavras, diz-se que uma sucessão de distribuições

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$$

converge em $C_\omega(I)$ para uma distribuição U, quando todas essas distribuições pertencerem a um mesmo espaço $C_p(I)$, e a sucessão convergir nesse espaço para U.

Como logo se vê, esta é a menos fraca das noções de limite que tornam contínuas tôdas as potências do operador D, como aplicação de C(I) em $C_\omega(I)$. E ocorre aqui uma circunstância semelhante ao que se passava com o espaço $C^\omega(I)$ das funções indefinidamente deriváveis em I: o operador D fica a ser também uma aplicação contínua de $C_\omega(I)$ em si mesmo.

Na verdade, se, em $C_\omega(I)$, a sucessão

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$$

converge para uma distribuição U, existem um número natural p, uma sucessão de funções contínuas em I,

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

e uma outra função $g \in C(I)$, tais que

a) $T_n = D^p f_n$, $U = D^p g$

b) a sucessão (f_n) converge uniformemente para g em I.

Ora, se isto acontece, a derivada de T_n, ou seja $DT_n = D^{p+1} f_n$, é termo geral de uma sucessão que tende para $DU = D^{p+1} g$; mas esta circunstancia equivale (bastará mudar p em p+1 na definição hà pouco recordada) à convergência, em $C_\omega(I)$, da sucessão de distribuições

$$DT_1,\ DT_2\ ,\ldots,\ DT_n\ ,\ldots$$

para a distribuição DU.

O operador D (aplicação de $C_\omega(I)$ em si mesmo) é portanto contínuo:

$$\boxed{\lim(DT_n) = D(\lim T_n)}$$

Mais ainda: <u>a noção de limite introduzida em $C_\omega(I)$ é a mais forte noção de limite neste espaço,que,determinando em $C(I)$ uma noção de limite mais fraca do que a inicial torna contínuo o operador D,encarado como aplicação do espaço $C_\omega(I)$ em em si mesmo</u>.

Faltaria provar ainda que o espaço $C_\omega(I)$ se torna,com aquela definição de limite,um espaço (L) vectorial. Trata-se de verificação extremamente simples,que pode efectuar-se como exercício.

A pregunta que pode surgir agora é a seguinte: poderemos nós definir aquela noção de limite em $C_\omega(I)$,a partir de uma noção de norma ? Prova-se que isso <u>não</u> é possível. Aliás, já o mesmo acontecia com o espaço $C^\omega(I)$ das funções indefinidamente deriváveis. Neste espaço,é possível definir a noção de limite,não por meio de uma norma única,mas sim por meio de uma infinidade numerável de normas - todas aquelas que designamos pelos símbolos

$$\|f\|_p \qquad (p=0,1,2,\ldots).$$

Na verdade,dizer que,em $C^\omega(I)$,uma dada sucessão de funções converge para uma dada função,significa dizer que a convergência se dá a respeito de todas aquelas normas,em número infinito. Neste sentido,pode afirmar-se que a noção de limite em $C^\omega(I)$ pode ser definida mediante uma infinidade numerável de normas (mas prova-se que o não pode ser por meio de uma norma única)

Pois bem também se demonstra (mas isso ultrapassa já o âmbito do presente curso) que aquela noção de limite que se introduziu em $C_\omega(I)$ pode ser definida,não já por uma infinidade numerável,mas por uma <u>infinidade contínua</u> de normas. A demonstração deste facto insere-se na teoria geral dos Espaços Vectoriais Topológicos,e em especial,na teoria dos Espaços Localmente Convexos,teoria que é hoje de importância decisiva para a Análise Funcional,e em particular,para a Teoria das Distribuições. Todavia,essa teoria não chega a ser necessária para os objectivos que temos em vista: limitar-nos-emos a trabalhar com a noção de limite de uma sucessão.

Antes de fazer o estudo de alguns exemplos, convém estabelecer um importante teorema, que fornece um processo muito cómodo para manejar pràticamente a noção de convergência que introduzimos no espaço $C_\omega(I)$.

Sabemos já que as funções localmente somáveis se identificam a certas distribuições. Pois bem, tem lugar o se guinte

TEOREMA: "Seja

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

uma sucessão de funções somáveis num intervalo compacto, $[a,b]$ e globalmente limitadas por um número $L > 0$, isto é, tais que $|f_n(x)| < L$, qualquer que seja x em $[a,b]$ e qualquer que seja o número natural n. Se a sucessão (f_n) convergir quási em todos os pontos do intervalo $[a,b]$ para uma determinada função g, então é somável e a sucessão $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ converge para g no sentido da noção de limite definida em $C_\omega(I)$ ".

Este teorema é consequência, por um lado, da própria definição de convergência que se introduziu em $C_\omega(I)$, e, por outro lado, da seguinte proposição, conhecida pela designação de

Teorema da convergência limitada de Lebesgue

"Quando as funções $f_n(x)$, supostas somáveis num intervalo compacto $[a,b]$, constituem uma sucessão que converge quási em todos os pontos daquele intervalo para uma função $g(x)$, e além disso existe uma função $\lambda(x)$ somável em $[a,b]$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant \lambda(x)$$

para todo o n e todo o ponto x em $[a,b]$, então $g(x)$ é também somável, e a sucessão dos integrais,

$$\int_a^b f_1(x)dx \ , \ \int_a^b f_2(x)dx, \ldots, \int_a^b f_n(x)dx$$

converge para

$$\int_a^b g(x)dx$$

Supondo conhecido este teorema de Lebesgue, vamos demonstrar o anteriormente enunciado. Comecemos por observar que, designando por L um número, a função constante $\lambda(x) \equiv L$ é certamente somável em qualquer intervalo compacto, $[a,b]$.

Por outro lado tem-se, em virtude da hipótese do teorema a demonstrar

$$|f_n(x) - g(x)| < 2L$$

e como $|f_n(x) - g(x)|$ converge para zero "presque partout" quando $n \to \infty$, segue-se, pelo referido teorema de Lebesgue, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - g(x)|\, dx = o$$

É agora fácil ver que, sendo $\mathfrak{J} f = \int_a^x f(t)dt$, a sucessão de funções

$$\mathfrak{J} f_1, \mathfrak{J} f_2, \ldots, \mathfrak{J} f_n, \ldots$$

converge uniformemente em $[a,b]$ para $\mathfrak{J} g$.

Na verdade escrevendo $F_n = \mathfrak{J} f_n$ e $G = \mathfrak{J} g$, temos

$$|F_n(x)-G(x)| = \left|\int_a^x [f_n(t)-g(t)]\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t)-g(t)|\,dt \leq \int_a^b |f_n(x)-g(x)|\,dx$$

sendo esta última desigualdade consequência do facto de a função integranda ser não-negativa. Como o último integral escrito tende para zero, resulta que

$$\max_{x\in I} |F_n(x) - G(x)|$$

tende também para zero. Está assim provado o que se pretendia: F_n converge uniformemente para $G(x)$, em $[a,b]$, isto é, a sucessão

$$\mathfrak{J} f_1, \mathfrak{J} f_2, \ldots, \mathfrak{J} f_n, \ldots$$

converge uniformemente em $[a,b]$ para $\mathfrak{J} g$. Ora, as funções $F_1(x) = \mathfrak{J} f_1$, $F_2(x) = \mathfrak{J} f_2$, etc. são contínuas, em $[a,b]$ como se sabe (pág. 48), e temos evidentemente, $f_n = DF_n(x)$, para $n=1,2,\ldots$

O resultado a que ùltimamente se chegou equivale pois à convergência da sucessão

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

para g, no espaço $C_1(I)$. Ou ainda, à convergência da mesma sucessão para g, no espaço $C_\omega(I)$. O teorema está pois demonstrado.

É claro que o teorema podia ser generalizado, considerando uma função somável $\lambda(x)$ no lugar de L, de acordo com o referido teorema de Lebesgue. Mas, na prática, teremos de o utilizar apenas sob a forma simples indicada.

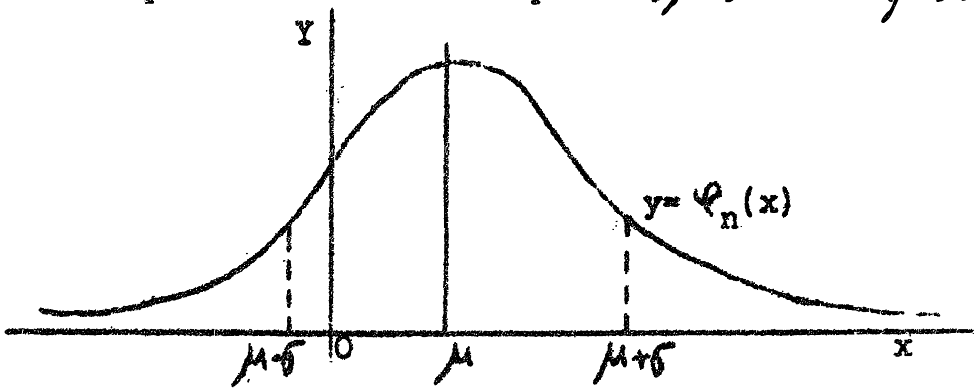
Passemos agora ao estudo de alguns exemplos.

Exemplo 1 - Consideremos a densidade de probabilidade numa distribuição normal. Como se sabe, é dada pela função

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

sendo μ o valor médio da distribuição de probabilidade (também chamado centro) e σ o desvio-padrão (também chamado êrro quadrático médio, quando se trata da teoria dos êrros).

O traçado do gráfico da curva ("curva em sino" de Gauss) não oferece dificuldades: a curva é simétrica em relação à recta $x = \mu$, tem um máximo no ponto de abscissa μ, admite como assíntota o eixo Ox, tem dois pontos de inflexão, de abcissas $\mu-\sigma$ e $\mu+\sigma$, coincide pràticamente com Ox para $x>\mu+3\sigma$ e $x<\mu-3\sigma$, etc.



Por outro lado, recordemos que a cumulante desta distribuição de probabilidade,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

tende para 1 quando $x \longrightarrow +\infty$

Vamos provar que, quando o desvio-padrão σ tende para zero, mantendo-se μ constante, a cumulante Φ tende para a distribuição de Heaviside correspondente ao ponto μ Isto é, vamos provar que, se considerarmos uma sucessão qualquer de valores de σ que tenda para zero, a sucessão correspondente de funções e como êste último integral tende para zero,(pela mesma razão que apontámos no caso do integral

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi_n(x)dx \text{),concluimos}$$

que $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x) = 1$, para $x > \mu$.

Em conclusão:

$$\lim \Phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \mu \\ 1/2 & \text{se } x = \mu \\ 1 & \text{se } x > \mu \end{cases}$$

Isto é, $\Phi_n(x)$ converge para a funçāo $H(x-\mu)$, excepto no ponto μ como se trata de um único ponto, podemos dizer que a sucessão de funções

$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x),$$

converge quási em todos os pontos para a função $H(x-\mu)$.

Por outro lado, tem-se, evidentemente

$$|\Phi_n(x)| < 1$$

quaisquer que sejam n e x.

Logo, aplicando o anterior teorema, podemos afirmar que

$$\Phi_n(x) \longrightarrow H(x-\mu)$$

no sentido de noção de limite do espaço $C_\omega(I)$ - sendo I qualquer intervalo compacto que contenha μ.

Então, $\varphi_n(x)$, que é a derivada de $\Phi_n(x)$, converge (no mesmo sentido) para $DH(x-\mu)$, que é a distribuição $\delta_{(\mu)}$ de Dirac relativa ao ponto μ -como queriamos provar.

Exemplo 2 consideremos a sucessão de funções

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

Os respectivos gráficos são simétricos em relação a Oy, admitem o eixo Ox como assíntota; apresentam um máximo na origem, e dois pontos de inflexão, -enfim, assemelham-se muito às "curvas em sino" de Gauss, anteriormente estudadas.

Quando $n\to\infty$, o máximo de cada função tende também para ∞, e em todos os pontos o valor da função tende para zero.

As primitivas são, por exemplo,

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \text{ arctg } nx.$$

Portanto,

$$E_n \text{ tende para } \begin{cases} 1/2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1/2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quer dizer, $E_n(x)$ converge para $H(x) - 1/2$, excepto na origem e tem-se sempre

$$|E_n(x)| < 1/2 .$$

A sucessão

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

converge portanto para $H(x)$, no sentido da convergência no espaço de todas as distribuições em qualquer intervalo compacto I que contenha a origem. A continuidade da aplicação D dêsse espaço em si mesmo, permite pois concluir que a sucessão das derivadas das $E_n(x)$,

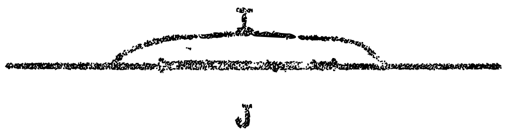
$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

tende para a distribuição δ de Dirac.

. . . .

Por fim, vamos resolver a questão seguinte: como definir o limite de uma sucessão de distribuições no espaço $C_\pi(I)$, sendo I um intervalo qualquer da recta, limitado ou não, fechado ou não ?

Já sabemos que, dada uma distribuição $T \in C_\pi(I)$, o símbolo $R_J T$ designa a restrição de T a um intervalo compacto J qualquer contido em I, e sabemos também que essa restrição é uma distribuição de ordem finita, -quer dizer, um elemento de $C_\omega(J)$, derivada de uma função contínua em J



Pois bem: diremos que uma sucessão

(1) $\quad T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$

de distribuições em I converge para uma distribuição $U \in C_\pi(I)$, quando a sucessão das restrições das distribuições (1) a qualquer intervalo compacto $J \subset I$,

$$R_J T_1, R_J T_2, \ldots, R_J T_n, \ldots$$

converge para a distribuição $R_J U$, no sentido da convergência no espaço $C_\omega(J)$.

Assim, voltando ao 1º exemplo de há pouco, nós provámos que a sucessão de funções

(2) $\quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_i(x), \ldots$

converge para a distribuição de Dirac relativa ao ponto μ, $\delta_{(\mu)}$, em qualquer intervalo compacto que contenha o ponto μ (e analogamente para o 2ª exemplo). Daqui resulta agora que aquela mesma sucessão converge em toda a recta para a distribuição $\delta_{(\mu)}$, -uma vez que a convergência da sucessão (2) para ( ) está evidentemente assegurada também em qualquer intervalo compacto que não contenha o ponto μ.