INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO COM RESPEITO A UMA DISTRIBUIÇÃO

Definição de distribuição segundo SCHWARTZ

11ª lição

Vimos na última lição que a distribuição δ de Dirac se pode exprimir como limite de uma sucessão (φ_n) de funções indefinidamente deriváveis,-relativamente à noção de convergência introduzida no espaço das distribuições.

E como o operador de derivação é contínuo para essa noção de limite,-é claro que podemos derivar um número qualquer de vezes ambos os membros da igualdade

$$\delta = \lim_n \varphi_n$$

permutando a derivação com a operação de passagem ao limite. Teremos pois

$$\delta^{(k)} = \lim_n \varphi_n^{(k)} \quad ,\text{para } k=1,2,\ldots$$

Quer dizer: $\delta^{(k)}$ é ainda limite no setido da convergência em $C_{\gamma}(I)$ de uma sucessão de funções indefinidamente deriváveis.

Trata-se aqui de um facto absolutamente geral,pois é válido o seguinte

TEOREMA "Tôda a distribuição T se pode exprimir como limite de uma sucessão de funções indefinidamente deriváveis,-até mesmo como limite de uma sucessão de polinómios".

Limitar-nos-emos a fazer a demonstração no caso em que o domínio da distribuição T é um intervalo compacto. Então,já sabemos que T é a derivada de certa ordem de uma função f que é contínua em I,isto é,

$$T = D^p f \qquad \left[f \in C(I)\right]$$

Por outro lado,é conhecido um teorema de Weiertrass segundo o qual,para tôda a função contínua é possível determinar uma sucessão de polinómios,que converge uniformemente para aquela função. Isto é,para tôda a função $f \in C(I)$,é possível construir uma sucessão (Q_n) de polinómios tal que

$$(1) \qquad f = \lim_{n\to\infty} Q_n \quad ,$$

sendo esta convergência uniforme no intervalo I,

Ora, nesse caso, a convergência também se dá a respeito da noção (mais fraca) de limite do espaço $C_\omega(I)$, e podemos aplicar o operador de derivação p vezes, a ambos os membros da precedente igualdade (1), permutando com a operação de passagem ao limite. Virá então

$$D^p f = \lim_n Q_n^{(p)}$$

isto é, a distribuição $T = D^p f$ é o limite [no sentido da convergência em $C_\omega(I)$] de uma sucessão de polinómios.

É claro que os gráus destes polinómios ultrapassam em geral qualquer número de modo que as derivadas $Q_n^{(p)}$ serão, a partir de certa ordem, não identicamente nulas.

O teorema está assim demonstrado para o caso em que I é compacto; no caso geral, a demonstração é um pouco mais delicada.

É o precedente resultado que vai permitir introduzir o conceito muito importante de

integral de uma função a respeito de uma distribuição,

-noção esta que generaliza a noção de integral de uma função a respeito de uma medida, que logo na primeira lição foi referida.

Consideremos uma distribuição T num intervalo I qualquer (não necessáriamente compacto !) e uma função φ (complexa) contínua neste intervalo.

Segundo o teorema anterior, a distribuição T pode ser expressa como limite de uma sucessão de funções γ_n (indefinidamente deriváveis),

$$T = \lim_n \gamma_n$$

Pois bem: escreveremos, por definição,

$$\int_I \varphi(x) T_x dx = \lim_n \int_I \varphi(x)\, \gamma_n(x) dx$$

se os integrais do 2º membro existirem (pelo menos para alguma sucessão γ_n tendente para T) e se existir também o seu limite, independentemente da sucessão γ_n de funções indefinidamente deriváveis escolhida para representar T.

Quando as referidas condições relativas ao 2º membro se verificam, diz-se que a função φ é integrável a respeito da distribuição I.

Note-se que esta definição se aplica ainda, sem qualquer modificação, ao caso em que $\varphi(x)$ é mais geralmente uma função de x com os valores num qualquer espaço (L) vectorial.

Mas, para fixar ideias, limitar-nos-emos agora ao caso em que $\varphi(x)$ é uma função numérica (complexa) contínua.

É claro que se o intervalo I é compacto, os integrais do 2º membro existem sempre porque a função integranda é sempre contínua (será, portanto, uma função integrável segundo Riemann no intervalo compacto). Sejam a e b os extremos de I naquela hipótese: $I = [a,b]$. Podemos então usar a habitual notação em que figuram os limites a e b de integração, e escrever T(x) em vez de T_x, caso não haja perigo de confusão. O integral de φ com respeito a T no intervalo I escrever-se-á então

$$\int_a^b \varphi(x)T(x)dx$$

TEOREMA "Se o intervalo I, é compacto e se φ é uma função (complexa) indefinidamente derivável em I que se anula - bem como tôdas as suas derivadas - nos extremos de I, existe sempre o integral de φ a respeito de qualquer distribuição T em I, e é dado pela fórmula

$$(2)\qquad \int_a^b \varphi(x)T_x dx = (-1)^p \int_a^b \varphi^{(p)}(x)f(x)dx,$$

se fôr $T = D^p f$, com $f \in C(I)$ ".

Na verdade, segundo o que se disse anteriormente, a função f é limite de uma sucessão de polinómios que convergem uniformemente no intervalo I:

$$f = \lim_n Q_n$$

Vimos que então

$$T = D^p f = \lim_n Q_n^{(p)}$$

Vamos agora averiguar se o integral

$$\int_a^b \varphi\, Q_n^{(p)} dx$$

tende para algum limite, de acôrdo com a definição que demos de integral. (As funções $Q_n^{(p)}$ constituem uma sucessão de funções indefinidamente deriváveis que tende para T).

Ora, por sucessivas integrações por partes, é fácil reconhecer que

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi\, Q_n^{(p)} dx = (-1)^p \int_a^b \varphi^{(p)} Q_n^{(p)} dx$$

Com efeito, uma 1ª integração por partes dá:

$$\int_a^b \varphi\, Q_n^{(p)} dx = \left[\varphi\, Q_n^{(p-1)}\right]_a^b - \int_a^b \varphi'\, Q_n^{(p-1)} dx =$$

$$= (-1)^1 \int_a^b \varphi'\, Q_n^{(p-1)} dx\,,$$

uma vez que $\varphi(a) = \varphi(b) = o$, por hipótese.

Aplicando p vezes o mesmo proeesso, chega-se, como é manifesto, à fórmula (2).

Mas, por construcção, $Q_n(x)$ converge uniformemente para f em I. Logo, também a função integranda $\varphi^{(p)} Q_n(x)$ converge para $\varphi^{(p)}(x) f(x)$, <u>uniformemente em I</u>.

Mas então, segundo um teorema clássico do Cálculo Integral, já sabemos que, nestas condições, o valor de

$$\int_a^b \varphi^{(p)}(x) Q_n(x) dx$$

convergirá para o integral do limite,

$$\int_a^b \varphi^{(p)}(x) f(x) dx$$

Isto é,

$$\lim_n \int_a^b \varphi(x) Q_n^{(p)}(x) dx = (-1)^p \int_a^b \varphi^{(p)}(x) f(x) dx$$

Falta ainda provar que a função φ é integrável a respeito de T; não se verificou ainda que o integral não depende da representação que adoptámos para T.

Suponhamos que outra representação era adoptada para distribuição T

$$T = D^q g \qquad \left[\text{com } g \in C(I)\right]$$

Já vimos que se pode representar T sob a forma de derivadas da <u>mesma ordem</u>:

$$T = D^{p+q}F = D^{p+q}G ,$$

Com $F - G = P_{p+q}$ (polinómios de grau inferior a p+q) .

Basta tomar F e G tais que $g = D^pG$, $f = D^qF$.

Vamos ver que a fórmula que dá o integral de φ com respeito a T conduz ao mesmo resultado,-isto é,mantém-se <u>invariante</u> - ao passar para a nova representação de T. Atendendo que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$,o mesmo sucedendo às derivadas de φ, sucessivas integrações por partes permitem escrever

$$(-1)^p \int_a^b \varphi^{(p)}(x)f(x)dx = (-1)^{p+q}\int_a^b \varphi^{(p+q)}(x)F(x)dx =$$

$$(-1)^{p+q}\int_a^b \varphi^{(p+q)}(G+P_{p+q})dx = (-1)^{p+q}\int_a^b \varphi^{(p+q)}(x)G(x)dx +$$

$$+ (-1)^{p+q}\int_a^b \varphi^{(p+q)}(x)P_{p+q}(x)dx .$$

Ora,retrocedendo no caminho seguido para transformar primeiros integrais,encontramos

$$\int_a^b \varphi^{(p+q)}(x)P_{p+q}(x)dx = (-1)^{p+q}\int_a^b \varphi(x)P_{p+q}^{p+q}(x)dx$$

E como a derivada de ordem p+q de um polinómio de grau inferior a p+q é <u>nula</u>,aquele último integral é nulo.

Por outro lado,atendendo a que $g = D^pG$,é fácil (procedendo como anteriormente) concluir que

$$(-1)^{p+q}\int_a^b \varphi^{(p+q)}(x)G(x)dx = (-1)^q \int_a^b \varphi^{(q)}g dx$$

Como resulta então

$$(-1)^p\int_a^b \varphi^{(p)}(x)f(x)dx = (-1)^q\int_a^b \varphi^{(p)}(x)g(x)dx$$

está provada a invariância do integral, ao mudar a representação da distribuição T.

Fica assim provado o teorema, de grande importancia no que se segue.

....

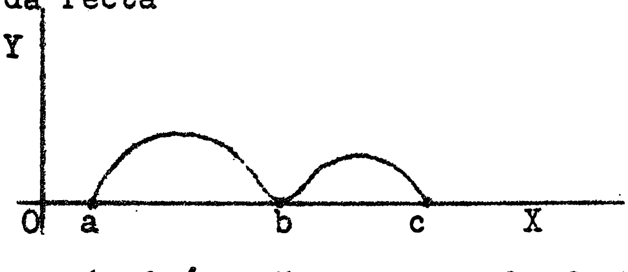
Resta agora generalizar este teorema ao caso em que o intervalo é qualquer, -não já compacto.

Para isso, convém recordar algumas noções topológicas. Chama-se aderência de um conjunto, a êsse mesmo conjunto ampliado com a sua fronteira. Conjunto fechado é um conjunto que contém a sua fronteira, -isto é, um conjunto que coincide com a sua aderência. Diz-se aberto um conjunto que não contém nenhum dos seus eventuais pontos de fronteira. Por exemplo, um intervalo aberto é um conjunto aberto, porque não contém a fronteira, que é constituida pelos dois extremos. Um intervalo fechado é um conjunto fechado. Um intervalo semi-aberto não é um conjunto fechado nem um conjunto aberto.

Imediatamente se reconhece que o complementar de um conjunto fechado é um aberto, e vice-versa.

Pois bem: chama-se suporte de uma função contínua à aderência do conjunto dos pontos em que a função é diferente de zero. Não se pode dizer, é claro, que a função seja diferente de zero em todos os pontos do seu suporte: é certamente nula nos respectivos pontos-fronteira !

Exemplo: suponhamos que uma função f é diferente de zero em dois intervalos abertos, $]a,b[$ e $]b,c[$,e nula nos restantes pontos da recta



O suporte de f é então o intervalo fechado $[a,c]$

A função é nula no complementar do suporte: êsse complementar é o maior conjunto aberto em que a função é nula, e esta circunstancia permite-nos generalizar o conceito de suporte ao caso de uma distribuição qualquer.

Definição: suporte de uma distribuição é o complementar do maior conjunto aberto em que a distribuição é nula.

Prova-se fàcilmente que existe sempre um tal conjunto.

Por exemplo: qual é o suporte da distribuição δ de Dirac? Será o complementar do maior conjunto aberto em que a <u>distribuição é nula</u>,-aberto êsse que é constituido por todos os pontos distintos da origem.

Portanto, o suporte de δ é a origem.

De um modo mais geral, uma derivada da distribuição de Dirac relativa ao ponto c, $\delta^{(k)}_{(c)}$, tem como suporte o ponto c. E até se prova que toda a distribuição de suporte pontual é uma <u>combinação linear de derivadas de distribuições de Dirac</u>.

....

Posto isto, podemos generalizar o último teorema, (pg.160), estabelecido apenas para intervalos <u>compactos</u>.

Seja agora I um intervalo qualquer da recta, <u>compacto</u> ou <u>não</u>. Podemos então afirmar:

"<u>Se φ é uma função indefinidamente derivável de suporte compacto, contido em I, então existe o integral de φ a respeito de qualquer distribuição T em I</u> ".

Trata-se agora de um intervalo I que não é necessàriamente compacto; é todavia sempre possível determinar um intervalo compacto J, contido em I, e contendo o suporte da função φ . (Bastará considerar o intervalo cujos extremos são o extremo inferior e o extremo superior do <u>suporte</u> da função φ). Mas, no intervalo J, sabemos já que a distribuição T é a derivada de certa ordem de uma função contínua, isto é,

$$T = D^p f \ , \text{ com } f \in C(J)$$

E agora é bem fácil reconhecer que se tem ainda

$$\int_I \varphi(x) T_x dx = (-1)^p \int_I \varphi^{(p)}(x) f(x) dx$$

Repare-se porém que aquela função f e o número p dependem não apenas de T, mas do intervalo J que se considerou, compacto e contido em I, e, em última análise, de φ

É fácil reconhecer que daí não resulta ambiguidade para o integral de φ com respeito a T em I.

Schwartz costuma designar pela notação $\mathcal{D}$ (I) o conjunto das funções indefinidamente deriváveis de suporte <u>compacto</u> contido em I, qualquer que seja o intervalo I.

Então, sendo $\varphi \in D(I)$, e T uma distribuição qualquer [1] pertencente a $C_{\pi}(I)$, convencionemos representar por $\Phi(T)$ o integral de φ com respeito a T:

$$\Phi(T) = \int_I \varphi(x) T_x dx .$$

Manifestamente, o valor de $\Phi(T)$ é um número complexo, - um escalar: trata-se pois de uma função escalar de variável vectorial.

Por outras palavras, Φ será uma aplicação do espaço vectorial $C_{\pi}(I)$ no conjunto $\mathbb{C}$ dos escalares (números complexos). Uma tal aplicação chama-se por vezes <u>funcional</u> sôbre $C_{\pi}(I)$.

O que vamos provar agora é que este funcional é <u>linear</u> e <u>contínuo</u> como sabemos:

1) "<u>Linear</u>" significa que se verificam as seguintes condições:

$$(1) \quad \begin{cases} \Phi(U+V) = \Phi(U) + \Phi(V) \\ \Phi(\alpha U) = \alpha \Phi(U) , \end{cases}$$

qualquer que sejam as distribuições U e V em I, e o escalar α ;

2) "<u>Contínuo</u>" significa que

$$(2) \qquad \lim_n \Phi(T_n) = \Phi(\lim_n T_n)$$

sendo (T_n) uma qualquer sucessão convergente de distribuições em I.

A <u>linearidade</u> de $\Phi(T)$ é fácil de estabelecer.

Consideremos um intervalo compacto J, contido em I e contendo o suporte de φ. Nesse intervalo U e V poderão representar-se como derivadas da <u>mesma ordem</u> de funções f e g, contínuas em J

$$U = D^p f$$
$$V = D^p g, \text{com } f, g \in C(J)$$

Temos então, sucessivamente,

$$\Phi(U+V) = \int_I \varphi(U+V)dx = (-1)^p \int_I \varphi^{(p)}(f+g)dx =$$

$$= (-1)^p \int_J \varphi^{(p)} f dx + (-1)^p \int_I \varphi^{(p)} g dx = \Phi(U) + \Phi(V)$$

....

(1) Não esquecer que, se I é compacto, é $C_{\omega}(I) = C_{*}(I)$ - de maneira que este caso contém o anterior como caso particular.

A 2ª condição de linearidade é também imediata: fàcilmente se conclui que

$$\Phi(\alpha U) = \int_I \varphi(\alpha U)dx = \alpha \int_I \varphi U dx = \alpha.\Phi(U)$$

E a condição de contimuidade é tambem fácil de estabelecer. Na verdade,- segundo a definição de limite que introduzimos em $C_{\pi}(I)$ - o facto de a sucessão (T_n) convergir para uma determinada distribuição U significa que,em todo o intervalo compacto $J \subset I$,(T_n) converge para U a respeito da convergência no espaço $C_{\omega}(J)$. Por sua vez,isto quer dizer que existe uma sucessão (f_n) de funções contínuas que converge uniformemente para a função contínua g no intervalo J,e de tal modo que

$$T_n = D^p f_n$$
$$U = D^p g ,$$

sendo p um conveniente número natural.

Teremos então, sucessivamente,

$$\lim_n \Phi(T_n) = \lim_n \int_I \varphi T_n dx = (-1)^p.\lim_n \int_J \varphi^{(p)} f_n dx ,$$

atendendo ao que se viu atrás e ao facto de φ se anular fora de J

Ora,por hipótese, f_n converge para g uniformemente em J; portanto,- e isto é decisivo na demonstração,- a função integranda, $\varphi^{(p)} f_n$ converge uniformemente em J para $\varphi^{(p)} g$. Podemos então escrever

$$(-1)^p \lim_n \int_J \varphi^{(p)} f_n dx = (-1)^p \int_J \varphi^{(p)} g dx = \Phi(U) = \Phi(\lim_n T_n)$$

Vimos assim que,os funcionais do tipo $\Phi(T)$ são de facto funcionais lineares contínuos.

Poderia agora preguntar-se:
haverá outros funcionais lineares contínuos ? Prova-se que não:

"todos os funcionais lineares contínuos sôbre o espaço das distribuições são daquela forma"

Para conseguir justificar este resultado fundamental, temos de fazer algumas considerações preliminares de ordem geral.

Já no Cálculo Vectorial, relativo ao espaço ordinário R^3, se viu que se podem apresentar funções de três tipos:

a) vector função de escalar;

b) escalar função de vector;

c) vector função de vector

Exemplo: o movimento de um ponto no espaço R^3 é sempre definido por uma função vectorial da variável (tempo) t

$\overline{P-O} = \vec{f}(t)$ em que P é o ponto móvel e O a origem.

Ainda há pouco vimos um exemplo de função do tipo "escalar função de vector", a que chamamos funcional.

Consideremos em geral um espaço vectorial E, real ou complexo, e um vector $u \in E$, função da variável real t $\vec{u} = f(t)$.

Trata-se de um vector função de um escalar.

Para definir as noções de limite, continuidade, derivada, integral, para funções dêste tipo, - é antes de tudo indispensável possuir uma noção de limite em E.

Então, suponhamos que E é um espaço (L) vectorial. Já é possível em tal caso definir limite da função $u = f(t)$ num ponto diz-se que f(t) tende para um determinado vector u_o, ao tender t para t_o, quando a tôda a sucessão de valores de números reais, $t_n \neq t_o$, que convirja para t_o, corresponde uma sucessão de "valores" $f(t_n)$, de f(t) que converge para u_o.

Assim, a noção de limite que foi dada em E converte-se na noção de limite de função vectorial de variável real.

Por sua vez, a continuidade de f(t) num ponto, t_o, definir-se-á agora da maneira habitual: diz-se que f(t) é contínua no ponto t_o, quando existe, em E, o limite $\lim\limits_{t \to t_o} f(t)$, e é igual a $f(t_o)$

$$\lim_{t \to t_o} f(t) = f(t_o)$$

Suponhamos que f(t) é contínua num intervalo da recta (isto é, em qualquer ponto dêsse intervalo) ; então, quando t percorre êsse intervalo, o vector $u = f(t)$ descreve em E uma linha contínua, - designação que generaliza de forma natural o que ocorre no espaço ordinário.

A noção de derivada da função $u = f(t)$ resulta agora das noções anteriores.

Diz-se que f(t) tem derivada no ponto t_o, se existe o limite da razão incremental

$$\frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}\text{, e escreve-se:}$$

$$f'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(t_n) - f(t_o)}{t_n - t} ,$$

sendo (t_n) uma sucessão qualquer de números reais $(\neq t_o)$ que tenda para t_o.

É também fácil caracterizar a noção de integral de Riemann da função vectorial $f(t)$, num intervalo compacto $[a,b]$.

Consideremos uma partição dêsse intervalo mediante um número finito de pontos:

$$a_o = t_o < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b .$$

Chamaremos, como habitualmente, diâmetro desta partição à maior das diferenças $t_i - t_{i-1}$

Chama-se soma de Riemann relativa àquela partição, toda a soma do tipo

$$S = \sum_{i=o}^{n} f(\bar{t}_i)(x_i - x_{i-1})$$

em que $\bar{t}_i$ é um ponto qualquer do intervalo (t_{i-1}, t_i)

Seja (S_n) uma sucessão de somas de Riemann correspondentes a partições cujo diâmetro tenda para zero. Poremos por definição

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_n S_n$$

se este limite existir em E, e não depender da sucessão (S_n), isto é, se tiver sempre o mesmo valor seja qual fôr a escôlha da sucessão de somas de Riemann naquelas condições.

Consideremos agora dois espaços (L) vectoriais, E e F, ambos reais ou ambos complexos. Designemos por ψ uma aplicação linear contínua de E em F. Seja dado um vector u de E, função da variável real t: $u = f(t)$

Certamente, a cada valor de t, a aplicação ψ associa um vector de F, mediante a igualdade

$$\psi(u) = \psi\left[f(t)\right] \left[\equiv g(t)\right]$$

a função vectorial $g(t)$ assim definida é a função transformada de $f(t)$ por meio de ψ (com o mesmo domínio de existência).

Pois bem vamos provar que, se $f(t)$ tiver derivada no ponto t_o, também $g(t)$ tem derivada em t_o, sendo precisamente

$$\psi\left[f'(t_o)\right] = g'(t_o)$$

Para demonstrar tal facto, convém observar o seguinte: dados dois vectores u e v, e um escalar α, tem-se:

$$\frac{u - v}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(u - v)$$, e portanto, sendo Φ uma transformação linear,

$$(\beta) \qquad \Phi\left(\frac{u - v}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\,\Phi(u) + \Phi(-v) = \frac{\Phi(u) - \Phi(v)}{\alpha}$$

Então, como é, por definição,

$$f'(t_o) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n) - f(t_o)}{t_n - t_o}$$

(sendo (t_n) uma sucessão qualquer de números reais $\neq t_o$ que tenda para t_o), será

$$\psi(f'(t_o)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(f(t_n)) - \psi(f(t_o))}{t_n - t_o},$$

visto que ψ é (por hipótese) <u>contínua</u>, e portanto permutável com a operação de passagem ao limite; e também <u>linear</u>, e portanto satisfaz à precedente condição (β)

Dali resulta

$$\psi(f'(t_o)) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(t_n) - g(t_o)}{t_n - t_o} = g'(t_o),$$

sendo este limite independente da sucessão de números reais $t_n \neq t_o$, que tenda para t_o. Ficou assim provado o asserto em causa. De um modo geral, podemos escrever

$$\psi\left(\frac{d}{dt} f(t)\right) = \frac{d}{dt}\,\psi(f(t)),$$

isto é, "<u>toda a aplicação linear contínua é permutável</u> com a operação de <u>passagem ao limite</u>".

Esta conclusão nada encerra de surpreendente, visto que a operação de <u>derivação</u> é constituida lògicamente por meio das noções de:

a) <u>adição de vectores</u>;

b) <u>produto por escalares</u>;

c) <u>passagem ao limite</u> . Como todas estas noções são respeitadas pelas aplicações lineares contínuas, era natural esperar que tal acontecesse.

Quanto ao integral, algo de análogo irá acontecer:

tem-se

$$\psi\left[\int_a^b f(t)dt\right] = \int_a^b \psi\left[f(t)\right]dt ,$$

isto é,hà permutabilidade do símbolo de aplicação linear contínua com o símbolo de integração.

Observe-se ainda que a definição de integral de uma função numérica indefinidamente derivável, φ ,com respeito a uma distribuição T,

$$\int_I \varphi \, T_x dx ,$$

pode estender-se,mutatis mutandis,ao caso de uma função,indefinidamente derivável,vectorial,f(t),dando-se deste modo sentido ao símbolo

$$\int f T_t dt$$

....

Todas estas noções intervirão na justificação do enunciado fundamental da pág. 166 que dá uma caracterização dos funcionais lineares contínuos,e que constitui um ponto culminante da Teoria das Distribuições.

Vamos agora estudar uma função vectorial particularmente importante. Consideremos a distribuição de Dirac relativa ao ponto t,

$$\delta_{(t)} = \delta(x-t)$$

A cada número real t fica a corresponder uma distribuição, δ (x-t),definida em qualquer intervalo que se queira considerar,- por exemplo,um intervalo compacto I. Em tal caso, ficará definida uma aplicação

$$t \longrightarrow \delta(x-t)$$

do conjunto R dos números reais no espaço das distribuições em I,$C_\omega(I)$.

Quer dizer,temos um vector,- a distribuição δ (x-t), - função da variável real t. Vamos ver que esta função vectorial de t é indefinidamente derivável. Para isso,vamos começar por supôr t interior a I .

Note-se que a função vectorial em causa não é uma distribuição,- é uma função autêntica da variável real t,função essa cujos valores são distribuições [i.e. vetores de $C_\omega(I)$]

Ainda se poderia representar esta função pelo símbolo $\vec{\delta}(t)$, ou pela notação $\delta(\hat{x} - t)$, em que o acento circunflexo sôbre o x assinala que $\underline{x}$ é apenas uma variável muda, sendo $\underline{t}$ a única variável independente:

$$\vec{\delta}(t) = \delta(\hat{x} - t) \ .$$

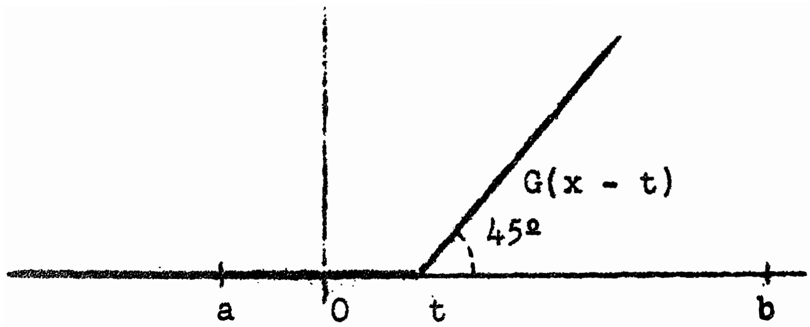
Ora, segundo o que se viu, em lições anteriores,

$$\delta(\hat{x} - t) = D_x^2 G(x - t).$$

sendo

$$G(x - t) = \begin{cases} x-t, & \text{para } x > t \\ o, & \text{para } x \leq t. \end{cases}$$

A cada valor de t, corresponde uma função, G(x - t), de x, cujo gráfico é constituido por duas semi-rectas:



(Supõe-se $I = [a,b]$)

E também sabemos que a derivada parcial em ordem a t da função G(x - t), é

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x - t) = - H(x - t) \ , \underline{\text{para}} \ t \neq x$$

Trata-se da derivada parcial no sentido clássico; qual o seu significado ?

Pelo que se disse, a precedente igualdade condensa a seguinte:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{G(x-t_n)-G(x-t_o)}{t_n-t_o} = - H(x-t_o) \ ,$$

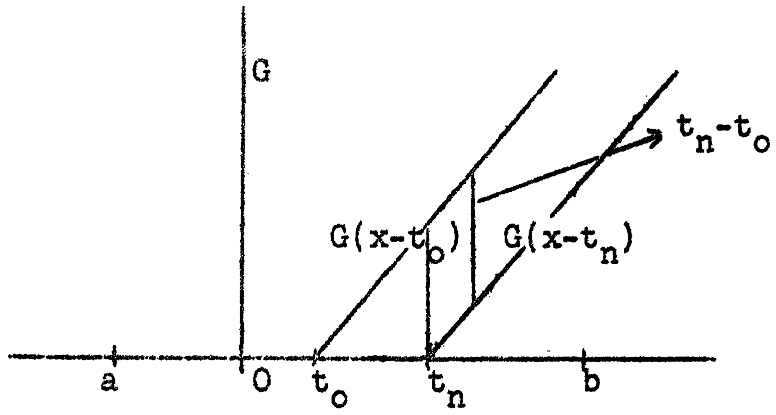
Válida qualquer que seja a sucessão de números reais $t_n \neq t_o$, convergente para t_o (valor arbitrário de t <u>interior</u> a I).

Note-se que aquela igualdade subsiste para todo o valor de x, -<u>excepto para um</u> $x = t_o$; em tal ponto, nenhuma derivada existe.

Quer dizer: trata-se duma sucessão de <u>funções contínuas de x</u>, que converge "<u>presque partout</u>" para $-H(x-t_o)$

Para que possamos a firmar que tal convergência se dá no espaço das distribuições,resta apenas provar que tal sucessão de funções é limitada globalmente. A verificação dêste é fácil,se atendermos ao significado geométrico da diferença

$$G(x-t_n)-G(x-t_o)$$



Para a direita de t_n,o módulo da diferença

$$G(x-t_n)-G(x-t_o)$$

é igual a $|t_n-t_o|$,por ser 45º a inclinação das semi-rectas representativas de $G(x-t_n)$ e $G(x-t_o)$. E êsse é o valor máximo, em módulo,que pode assumir a diferença $G(x-t_n)-G(x-t_o)$: a simples inspecção da figura patenteia que,para a esquerda de t_n, aquela diferença é em módulo menor que $|t_n-t_o|$,anulando-se mesmo para a esquerda de t_o As conclusões são análogas supondo $t_n < t_o$. Então será

$$\left|\frac{G(x-t_n)-G(x-t_o)}{t_n-t_o}\right| \leq 1$$

qualquer que seja $x \in I$ e $n = 1,2,\ldots.$

A limitação global da sucessão

$$\frac{G(x-t_n)-G(x-t_o)}{t_n-t_o}$$

está assim assegurada; e,com isso,demonstrámos que a convergência

$$\frac{G(x-t_n)-G(x-t_o)}{t_n-t_o} \longrightarrow -H(x-t_o)$$

tem lugar no sentido da noção de limite introduzida no espaço das distribuições de domínio I. Portanto,afunção $\vec{G}(t)$ tem derivada no ponto t_o; e essa derivada (em geral,num ponto arbitrário t) é

$$(\alpha) \qquad \frac{d}{dt} \vec{G}(t) = \frac{d}{dt} G(\hat{x}-t) = - H(\hat{x}-t) .$$

Não esqueçamos que está em causa uma função vectorial de t,que a cada valor de t associa uma distribuição,$G(x-t)$,à qual podemos aplicar o operador de derivação D_x (em ordem a x).

Ora D_x é uma aplicação <u>linear contínua</u> de $C_\omega(I)$ em $C_\omega(I)$

Vamos agora enquadrar o caso concreto que vimos considerando no "esquema abstrato" apresentado nas pág. 168/169 aqui,E e F coincidem com $C_\omega(I)$,e a aplicação φ é agora D_x ou qualquer potência deste operador,D_x^2. Então,a aplicação linear contínua D_x^2 permutará com a derivação em ordem a t,o que permite escrever,aplicando este operador a ambos os membros de (α)

$$(\alpha) \qquad \frac{d}{dt} D_x^2 G(\hat{x}-t) = - D_x^2 H(\hat{x}-t)$$

Mas,para cada valor de t interior a I,é

$$D_x^2 G(\hat{x}-t) = \delta(\hat{x}-t)$$

$$D_x^2 H(\hat{x}-t) = \delta'(\hat{x}-t) ;$$

a igualdade (α) pode escrever-se pois

$$(\gamma) \qquad \frac{d}{dt} \delta(\hat{x}-t) = - \delta'(\hat{x}-t)$$

Certamente,podemos continuar,porque o operador de derivação d/dt é sempre permutável com o operador D_x.

Virá então

$$\frac{d}{dt} \delta'(\hat{x}-t) = - \delta''(\hat{x}-t)$$

Portanto,atendendo a (γ)

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta(\hat{x}-t) = \delta''(\hat{x}-t)$$

E,por recorrência,é fácil ver que a derivada de ordem p é dada pela fórmula

$$\frac{d^p}{dt^p} \delta(\hat{x}-t) = (-1)^p \delta^{(p)}(\hat{x}-t)$$

Está provado o que se pretendia: a função vectorial $\vec{\delta}(t)$ admite derivadas de todas as ordens, isto é, é <u>indefinidamente derivável</u>. Observe-se que a derivação $\frac{d^p}{dt^p}$ da função vectorial $\vec{\delta}(t)$ define uma nova função vectorial de t,- a que associa, a cada valor de t, a derivada de ordem p da distribuição de Dirac relativa ao ponto t (restringida ao intervalo I).

Resta um pormenor importante a esclarecer:

Temos estado a supôr que os valores de t são interiores a I. O que sucede porém quando t não é interior a I ? Neste caso, para cada valor de t considerado, a função H(x-t) <u>de</u> x, reduz-se a uma constante (o ou 1) <u>no intervalo</u> I, <u>exceptuado quando muito um extremo</u>. E como, por definição,

$$\delta(x-t) = D_x H(x-t)\text{, segue-se que:}$$

<u>para todo o valor de t não interior a I, a restrição de $\delta(x-t)$ a I é nula, o mesmo acontecendo portanto com todas as derivadas da função $\delta(x-t)$ de t</u> ".

<u>vd. apêndice</u>

Portanto, $\int_a^b H(x-t)f(t)dt$ reduz-se a

$$\int_a^x f(t)dt \text{ .}$$

Por outro lado, já sabemos que o integral de Riemann é dado como limite de uma sucessão de somas de Riemann,- da função integranda. Isto quer dizer que, para <u>cada valor</u> de x, ocorre a convergência daquela sucessão de somas de Riemann para o integral. É uma convergência em <u>todos os pontos</u>,- caso particular da convergência "presque partout" .

Para que essa convergência tenha lugar no sentido da teoria das distribuições,- o que basta provar agora ? Que qualquer sucessão de somas de Riemann é <u>globalmente limitada</u> no intervalo $[a,b]$.

Mas isso é fácil de reconhecer, porque nenhuma soma de Riemann poderá exceder em módulo o produto do comprimento do intervalo de integração <u>máximo</u> de $|f(t)|$ em $[a,b]$,-máximo êsse que decerto existe, por ser f uma função contínua no inter-

No local assinalado por

vd. apêndice

deve intercalar-se o seguinte:

" Passemos agora a justificar a célebre fórmula de Dirac.

Começaremos por considerar uma função f, contínua no intervalo compacto $I = [a,b]$.

Temos, evidentemente,

$$\int_a^b H(x-t)f(t)dt = \int_a^x H(x-t)f(t)dt + \int_x^b H(x-t)f(t)dt$$

Ora, no primeiro integral, presente no 2º membro, tem de ser $a < t \leq x$ mas quando $x > t$, a função $H(x-t)$ vale 1. No 2º daqueles integrais, deve ser $x < t$, e então $H = o$ "

valo compacto $[a,b]$

Portanto, a convergência de qualquer sucessão de somas de Riemann para o integral

$$\int_a^x f(t)dt$$

tem lugar efectivamente no espaço das distribuições, $C_\omega(I)$, sendo $I = [a,b]$ Então, como D é uma aplicação <u>linear contínua</u> de $C_\omega(I)$ em si mesmo, pode permutar com o símbolo de integração.

Aplicando pois o operador D_x a ambos os membros da igualdade

$$\int_a^b H(x-t)f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

vem

$$\int_a^b \delta(\hat{x}-t)f(t)dt = f(x) \ ,$$

que é um dos aspectos da fórmula de Dirac.

Não chegamos ainda, no entanto, ao caso geral; supusémos que f era simplesmente uma função contínua em I. Ora, a fórmula de Dirac é válida, sendo f, mais geralmente, uma distribuição qualquer T em I.

É fácil deduzir aquela fórmula neste caso mais geral. Sabemos já que toda a distribuição T em I pode ser dada como limite de uma sucessão (γ_n) de funções indefinidamente deriváveis em I

$$T = \lim_n \gamma_n$$

Note-se que γ_n são funções <u>contínuas</u> em I. Será portanto, segundo o resultado anterior:

$$\gamma_n(x) = \int_a^b \delta(\hat{x}-t) \ \gamma_n(t)dt$$

O segundo membro é um integral que tende (quando $n \to \infty$) para

$$\int_a^b \delta(\hat{x}-t)T_t dt.$$

Como $\gamma_n(x) \longrightarrow T$, podemos escrever

$$T = \int_a^b \delta(\hat{x}-t)T_t dt,$$

- quer dizer, a fórmula de Dirac é válida para o caso de uma distribuição T qualquer.

(Observe-se que o 2ª membro da precedente fórmula é o integral de uma função indefinidamente derivável vectorial, $\vec{\delta}(t)$, a respeito de uma distribuição. cf. pág. 170).

Mas esta é apenas uma das interpretações da fórmula de Dirac. Mais precisamente: <u>há duas fórmulas de Dirac</u>: <u>a anterior e aquela que já tínhamos apresentado no início destas lições, justificada por meio do integral de Stieltjes</u>

$$f(x) = \int_I f(u)\delta(u-x)du,$$

sendo $f(x)$ uma função de x e sendo $\delta(u-x)$, não uma função de x com os valores em $C_\omega(I)$, mas sim uma função de u com os valores em $C_\omega(I)$ (confrontar com a definição de integral duma função a respeito duma distribuição).

Provaremos agora que a expressão indicada na pág. 166 é a <u>expressão geral dos funcionais lineares contínuos</u> sôbre $C_\omega(I)$. Este resultado capital vai-nos permitir reencontrar a definição das distribuições segundo Schwartz. Seja então Φ um qualquer funcional linear contínuo sôbre $C_\omega(I)$, isto é, uma aplicação linear contínua de $C_\omega(I)$ no corpo C dos números complexos (escalares). Tendo em vista a permutabilidade de Φ com o símbolo de integração (decorrente da continuidade de Φ), e a fórmula de Dirac já estabelecida, podemos escrever

$$\Phi(T) = \Phi\left(\int_a^b \delta(\hat{x}-t)T_t dt\right) = \int_a^b \Phi\left[\delta(\hat{x}-t)\right] T_t dt$$

(Não se deve esquecer que Φ, funcional sôbre $C_\omega(I)$, incide sôbre <u>distribuições</u>, -portanto, sôbre o "valor" da função $\delta(\hat{x}-t)$ de t) . Recordemos agora que, sendo dada uma função vectorial $u = f(t)$ de variável real t, com valores num espaço vectorial E, (isto é, $u \in E$), e sendo ψ uma aplicação de E num outro espaço vectorial F, o vector variável u é transformado por ψ num vetor de F função de t. Desgnando por $g(t)$, essa função, temos: $g(t) = \psi(u) = \psi(f(t))$.

Aplicando êste esquema abstracto ao caso presente, [bastará tomar Φ em lugar de ψ, o corpo C dos escalares em lugar de F, a função $\vec{\delta}(t)$ em lugar de $f(t)$] , teremos uma função complexa de variável real, $\Phi(\vec{\delta}(t)) = \Phi(\delta(\hat{x}-t))$

Seja $\varphi(t)$ essa função: $\varphi(t) = \Phi(\delta(\hat{x}-t))$

Será então

$$\Phi(T) = \int_a^b \varphi(t)T_t dt$$

Não chegamos ainda ao resultado pretendido, embora $\Phi(T)$ surja desde já com a expressão indicada para os funcionais lineares contínuos: falta ainda provar primeiro que $\varphi(t)$ é uma <u>função indefinidamente derivável</u>. Ora isto nada custa, recordando que $\vec{\delta}(\hat{x}-t)$ é uma função de t indefinidamente derivável, e que Φ permuta com a derivação em ordem a t; na verdade, podemos escrever então

$$\frac{d^p}{dt^p}\,\Phi\left[\vec{\delta}(\hat{x}-t)\right] = \Phi\left[(-1)^p\,\vec{\delta}^{(p)}(\hat{x}-t)\right]$$

Falta finalmente esclarecer um pormenor: provar que $\varphi(t)$ se anula fora de I e nos extremos de I, juntamente com as suas derivadas. Ora, isso acontece efectivamente com $\vec{\delta}(t)$, e com qualquer das suas derivadas, como vimos atrás

E como Φ é linear, $\varphi = \Phi\left[\vec{\delta}(t)\right]$ anula-se certamente, com todas as suas derivadas, fora de I, e nos extremos de I, tendo em vista o anulamento acima referido de $\vec{\delta}(t)$ e das suas derivadas nos mesmos pontos.

Temos assim completamente justificado o resultado pretendido, relativo à caracterização de todos os funcionais lineares contínuos sôbre $C_\omega(I)$, com I compacto. Podemos levar um pouco mais longe a nossa análise. Provámos inicialmente que, sendo $\varphi(t)$ uma função complexa da variável real, indefinidamente derivável na recta, e de suporte contido em I (portanto, nula com todas as suas derivadas nos extremos de I), a fórmula

$$\Phi(T) = \int_I \varphi(t)T_t\,dt$$

define um funcional linear contínuo, Φ, sôbre $C_\omega(I)$. Pois bem: podíamos provar que, se formos aplicar êste funcional Φ, deduzido de $\varphi(t)$, à distribuição $\vec{\delta}(\hat{x}-t)$, reencontramos precisamente $\varphi(t)$; em símbolos,

$$\Phi\left[\vec{\delta}(\hat{x}-t)\right] = \varphi(t).$$

Basta para isso aplicar a <u>segunda fórmula</u> de Dirac. (pág.93).

Somos assim conduzidos, finalmente, ao seguinte resultado fundamental:

Teorema:

"Existe uma correspondência biunívoca $\Phi \leftrightarrow \varphi$ entre os funcionais lineares contínuos Φ definidos em $C_\omega(I)$ e as funções indefinidamente deriváveis φ de suporte compacto contido em I. Essa correspondência é estabelecida, num e noutro sentido, mediante as fórmulas

$$\Phi(T) = \int_I \varphi(u)T(u)du$$

$$\varphi(u) = \Phi\left[\delta(x-u)\right] \quad .$$

O teorema foi por nós demonstrado apenas na hipótese de I ser compacto,-mas prova-se que subsiste ainda no caso geral.

À função φ, que determina o funcional Φ, chamaremos função indicatriz deste funcional

Prova-se mesmo,- sem qualquer dificuldade,-que a referida correspondência é um isomorfismo: à soma de dois funcionais lineares contínuos, $\Phi_1+\Phi_2$, corresponde a soma das respectivas funções indicatrizes, $\varphi_1+\varphi_2$; e ao produto de Φ por um escalar, $\alpha\Phi$, corresponde o produto, $\alpha\varphi$, do escalar α pela indicatriz φ de Φ .

Convém traduzir agora estas circunstâncias numa linguagem adequada.

Dado um espaço (L) vectorial E, chama-se dual de E ao espaço E', totalidade dos funcionais lineares contínuos sôbre E. Evidendemente, E' é também um espaço vectorial sôbre o mesmo corpo de escalares.

Nestas condições, o que hà pouco se estabeleceu pode traduzir-se, dizendo:

"O dual de $C_\omega(I)$ é isomorfo a $\mathcal{D}(I)$"

Vimos atrás que, segundo Schwartz, se representa por $\mathcal{D}(I)$ o espaço das funções indefinidamente deriváveis de suporte compacto contido em I. Este espaço é munido da seguinte noção de limite: diz-se que uma sucessão de funções $\varphi_n \in \mathcal{D}(I)$ converge para uma função $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, quando existe pelo menos um intervalo compacto $J \subset I$, onde estão contidos os suportes de todas as funções φ_n e φ, e no qual φ_n converge uniformemente para φ

Poderia agora preguntar-se:

qual será o dual de $\mathfrak{D}(I)$?

Prova-se que o dual de $\mathfrak{D}(I)$ é isomorfo a $C_\omega(I)$.

E agora terminaremos com uma observação fundamental: Laurent Schwartz definiu as distribuições num intervalo I (qualquer) precisamente como os funcionais lineares contínuos sôbre o espaço $\mathfrak{D}(I)$ das funções indefinidamente deriváveis de suporte compacto contido em I. Por isso mesmo,Schwartz representa o espaço das distribuições em I, não pelo símbolo $C_\omega(I)$, que foi adoptado nestas lições,mas sim por $\mathfrak{D}'(I)$,notação do dual de $\mathfrak{D}(I)$. Essa definição das distribuições constitui uma das várias realizações da axiomática das distribuições,como já se tinha referido: sem dúvida,de mais penoso acesso se a compararmos com a que apresentámos neste curso.