

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO
E SILVA**, PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS
MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COM-
PILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

Consideremos um espaço vectorial complexo, E , e seja Θ uma aplicação linear de E em si mesmo. Representamos já pela notação $\wedge(E)$ a álgebra, constituída pela totalidade das aplicações lineares do espaço E em si mesmo.

Por outro lado, designemos por $R(x)$ uma função racional de x ,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

sendo $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios em x , primos entre si.

Vimos que se define o operador $R(\Theta)$ se, e só se, os zeros do denominador, $Q(x)$ não pertencem ao espectro de Θ , - quer dizer, se existem os operadores $(\Theta - \alpha_1)^{-1}$, onde α_1 são os zeros do polinómio $Q(x)$.

Vimos até que, se o grau de $P(x)$ for inferior ao grau de $Q(x)$, é válida a fórmula

$$R(\Theta) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{i,j}}{(\Theta - \alpha_i)^j},$$

designando α_i ($i=1, \dots, p$) os zeros (distintos) de $Q(x)$, e r_i o grau de multiplicidade de α_i .

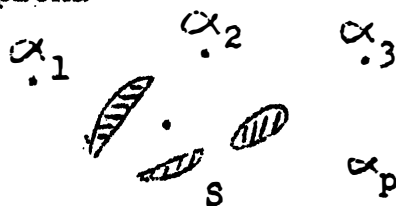
Quanto ao espectro de Θ , também vimos que, no caso de E ter um número finito de dimensões (e ser portanto isomorfo a C^n), o espectro de Θ é constituído por um número finito de pontos, que são os valores próprios. Mas se o espaço tiver um número infinito de dimensões, já isso pode não acontecer.

Todavia, se E é um espaço normado, e a aplicação Θ for contínua, prova-se que o espectro de Θ é limitado e fechado.

Uma vez cumpridas essas condições, o espectro de Θ pode aliás ser de certo modo arbitrário: pode ter (ou não) pontos singulares, pode ser conexo ou desconexo, etc. E se o espaço E não é normado, pode ser ainda mais irregular o espectro de Θ .

No que vai seguir-se, consideraremos sempre o caso em que Θ apresenta um espectro limitado e fechado, - espectro que representaremos pelo símbolo S .

Para que exista então o operador $R(\theta)$, é necessário e suficiente que os zeros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de $Q(x)$ não pertençam a S , tal como se figura no seguinte diagrama relativo ao plano da variável complexa



Por outro lado, recordemos que os zeros de $Q(x)$ são os polos de $R(x)$, -os pontos onde se torna infinita esta função racional.

Pois bem: designemos então por $\mathcal{R}(S)$ o conjunto de todas as funções racionais da variável complexa cujos polos não pertencem a S . É fácil ver que este conjunto constitui um anel a respeito das noções usuais de soma e produto. É até mesmo uma álgebra, como facilmente se reconhece.

Vimos, por outro lado, o seguinte:

podemos fazer corresponder a cada função racional $R \in \mathcal{R}(S)$ um determinado operador $R(\theta) \in \Lambda(E)$, e essa correspondência verifica as seguintes condições:

- I) Se $R(x) = R_1(x) + R_2(x)$, então $R(\theta) = R_1(\theta) + R_2(\theta)$.
- II) Se $R(x) = R_1(x) \cdot R_2(x)$, então $R(\theta) = R_1(\theta) \cdot R_2(\theta)$.

Exprimem-se estas circunstâncias, dizendo que a referida correspondência é um homomorfismo do anel $\mathcal{R}(S)$ sobre uma parte do anel $\Lambda(E)$.

Mais ainda: naquele homomorfismo, têm lugar as seguintes condições:

III) à função $R(x) \equiv x$ corresponde precisamente o operador $R(\theta) \equiv \theta$;

IV) se $R(x) \equiv k$ (se a função R se reduz a uma constante), então $R(\theta)$ reduz-se a essa constante, isto é, ao número complexo k , que identificamos ao operador $k \cdot I$, designando I o operador idêntico.

O homomorfismo

$$R(x) \longrightarrow R(\theta) \in \Lambda(E)$$

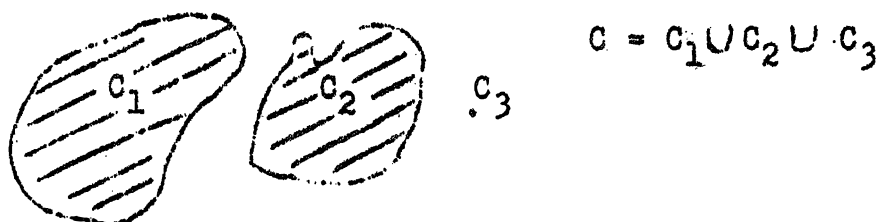
verifica pois todas aquelas condições.

Por outro lado, tínhamos visto já que, em certas questões concretas, surgia a necessidade de considerar funções analíticas (não racionais) de operadores lineares. Como atribuir significado a essa entidade, - "função analítica de um operador

Consegue-se isso recorrendo à teoria dos funcionais analíticos, que foi criada há cerca de 30 anos pelo matemático italiano Luigi Fantappiè, recentemente falecido (Junho de 1956). Hoje, a teoria dos funcionais analíticos está completamente incorporada na teoria dos Espaços Vectoriais Topológicos Localmente Convexos, graças a uma série de trabalhos de G. Köthe, A. Grothendieck e C. da Silva Dias, elaborados na sequência de certos trabalhos de J. Sebastião e Silva.⁽¹⁾

Vamos aqui esboçar muito rapidamente uma parte da teoria dos funcionais analíticos na sua forma actual.

Consideremos um conjunto C de pontos do plano da variável complexa, - portanto, afinal, um conjunto de números complexos. Para o fim que temos em vista, basta que nos coloquemos na hipótese particular seguinte: C é fechado e limitado. Dentro destas condições, C pode apresentar aspectos muito variados: ser convexo ou não, etc. Por exemplo,



Chama-se vizinhança de um conjunto fechado todo o conjunto aberto que o contém. Consideremos então uma vizinhança D do conjunto C : D pode, por sua vez, ser conexo ou não; no caso anterior, podia ter duas componentes, por exemplo.

Representemos por $f(z)$ uma função complexa, definida e analítica no conjunto D .

Já sabemos o que isso quer dizer: $f(z)$ admite derivada

.....
(1) " Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche" Rend. Ac. Lincei, 1(1946).

"As funções analíticas e a análise funcional"
Tese (1948), Port. Math. 1950

em todos os pontos de D , - e daí resulta que a função se poderá representar por uma série de Taylor numa vizinhança de cada ponto de D . Convém salientar que se trata de uma função uniforme; como se sabe, na teoria das funções analíticas apresentam-se também funções pluriformes.

Pode acontecer que a função $f(z)$ se possa prolongar, como função analítica uniforme, a um conjunto aberto $D^* \supset D$. Quer dizer, - pode existir uma função $f^*(z)$, definida e analítica em D^* , que coincida com $f(z)$ em D , isto é, tal que para todo o ponto $z \in D$, seja

$$f^*(z) = f(z)$$

Será natural identificar então duas tais funções.

De resto, também se sabe que, quando existe uma tal função $f^*(z)$, prolongamento de $f(z)$ a D^* , só essa pode existir; nisto consiste o chamado teorema da unicidade do prolongamento analítico.

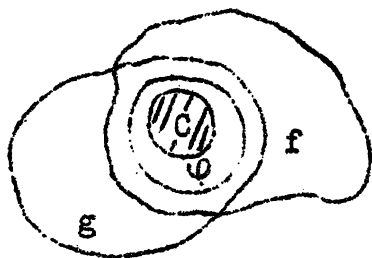
Ora, se considerarmos a reunião de todos os abertos D^* naquelas condições, a função f ficará prolongada o mais possível. Mas nessa reunião a que se dá o nome de domínio de analiticidade de $f(z)$, a função pode já não ser propriamente definida: pode tornar-se pluriforme. É essencial, para o estudo que estamos a fazer, considerar apenas aqueles domínios em que a função se mantém uniforme. Este é um dos pontos essenciais da teoria.

Consideremos pois duas tais funções, $f(z)$ e $g(z)$: para os fins em vista, poderemos identificá-las. Mais geralmente, representemos por $\mathcal{A}(C)$ o conjunto de todas as funções, definidas e analíticas em vizinhanças de C . Convencionaremos dizer que duas tais funções, f e g , são equivalentes a respeito de C , e escrever

$$f \sim g \quad (C),$$

quando existe uma vizinhança de C , contida nos domínios de f e g , e sobre a qual estas duas funções coincidem. Por outras palavras: diremos que f e g são equivalentes a respeito de C , quando f e g forem prolongamentos analíticos de uma mesma função, φ , definida e analítica numa vizinhança de C , contida nos domínios de f e g .

É fácil reconhecer que se trata efectivamente de uma relação de equivalência, sobre o conjunto $\mathcal{A}(C)$, - no qual determina, como se sabe, uma partição em classes de equivalência.



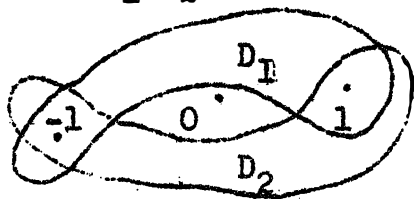
Representaremos pelo símbolo $[f]$ a classe de todas as funções equivalentes à função f a respeito de C ; e designaremos pela notação $\mathcal{A}[C]$ o conjunto daquelas classes de equivalência, isto é, o conjunto quociente de $\mathcal{A}(C)$ pela relação de equivalência aí definida.

Evidentemente que duas funções, f e g , com domínios distintos, são funções distintas também, segundo o conceito geral de função. Em todo o caso, para os fins que temos em vista, duas funções equivalentes a respeito de C comportam-se como se fossem a mesma função. É de resto uma convenção análoga à que se fez a respeito das funções localmente somáveis: consideramos duas tais funções como equivalentes se diferissem quando muito sobre um conjunto de medida nula, e em tal caso, as duas funções eram "identificadas", sendo encaradas como representantes da mesma classe (de equivalência).

O que se passa agora com as funções analíticas em vizinhanças de um conjunto C é perfeitamente análogo. Mais ainda, - daqui em diante, para comodidade de linguagem, a estas classes de equivalência chamaremos funções localmente analíticas sobre o conjunto C . É uma convenção de linguagem, que evita repetir a locução "classes de equivalência de funções" etc. Convém simplificar também a notação: usando símbolos $f, g, \psi \dots$ de funções para designar tais classes. E chamaremos domínios de uma função localmente analítica f sobre C aos domínios de todas as funções, que constituem a classe f .

Por outro lado, chama-se valor da função localmente analítica f num ponto z , relativamente a um seu domínio D , ao valor que a representante de f em D assume nesse ponto $z \in D$. Este conceito é um pouco delicado, porque - ao mudar de domínio, pode acontecer que no mesmo ponto, a função assumia outro valor, em virtude da pluriformidade eventual das funções em causa.

Por exemplo, seja C o conjunto que se reduz ao ponto 1 e $f(z)$ o ramo de $\sqrt{z}$ que toma o valor 1 em 1. Considerando os domínios D_1, D_2 figurados no esquema, é fácil ver que



$$f(-1) = i \text{ sobre } D_1$$

$$f(-1) = -i \text{ sobre } D_2$$

Posto isto, podemos definir, de maneira perfeitamente natural, soma e produto de dois elementos de $\mathcal{A}[C]$

Dadas duas funções f e g , localmente analíticas sobre C , chamaremos soma de f com g , e representaremos por $f+g$, a função assim definida:

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z), \text{ sobre } D,$$

sendo D um qualquer domínio comum às duas funções. É claro que duas funções localmente analíticas sobre C terão sempre um domínio comum: existe sempre uma vizinhança de C que seja domínio de ambas as funções.

E de modo análogo se define o produto:

$$(fg)(z) = f(z).g(z), \text{ com } z \in D.$$

Não oferece dificuldades verificar que, a respeito destas noções de soma e produto, o conjunto $\mathcal{A}[C]$ constitui um anel comutativo, que é mesmo uma álgebra.

De resto, o anel, há pouco considerado, das funções racionais, $\mathcal{R}(C)$, - substituindo agora por C o conjunto S então considerado, - pode considerar-se como uma parte do anel $\mathcal{A}[C]$

$$\mathcal{R}(C) \subset \mathcal{A}[C]$$

Na verdade, $\mathcal{R}(C)$ é o conjunto das funções racionais cujos polos não estão sobre C : essas funções são, certamente, analíticas (e uniformes) nalguma vizinhança de C . Aquela inclusão é portanto válida.

.....

Para o que segue, tem importância decisiva definir a noção de limite no espaço $\mathcal{A}[C]$, das funções localmente analíticas sobre C .

Essa noção será definida nos termos seguintes:

Diremos que uma sucessão de funções localmente analíticas sobre C ,

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

tende para uma função $g \in \mathcal{A}[C]$, quando tiverem lugar as duas condições seguintes:

1ª) as funções (f_n) e g admitem um domínio comum ⁽¹⁾

(1) Como são em número infinito, podia esse facto não acontecer: poderia suceder que os domínios possíveis dessas funções se restringindo, aproximando indefinidamente do conjunto C . Por isso mesmo se exige explicitamente, para a convergência $(f_n) \rightarrow g$ ter lugar, que todas essas funções possuam um domínio comum, isto é, sejam representáveis (como classes que são) por funções analíticas numa mesma vizinhança de C .

2ª) a sucessão de funções $(f_n)(z)$ deve convergir uniformemente para $g(z)$, sobre essa vizinhança D de C .

Já sabemos que essa convergência uniforme significa que

$$\sup_{z \in D} |f_n(z) - g(z)|$$

tende para zero quando n tende para ∞ .

Víamos já que $\mathcal{A}[C]$ era um anel comutativo, e mesmo, uma álgebra. E, portanto, um espaço vectorial (sobre o corpo C dos números complexos) porque se define o produto

$$kf,$$

de um número complexo qualquer k por função f , localmente analítica sobre C , e todas as condições de espaço vectorial complexo são então verificadas.

Também não oferece dificuldade reconhecer que esta noção de limite é compatível com a estrutura de espaço vectorial de $\mathcal{A}[C]$, e também com a sua estrutura de anel.

Na verdade, facilmente se prova que

$$(1) \quad \begin{cases} \lim (f_n + g_n) = \lim f_n + \lim g_n \\ \lim (k_n f_n) = \lim k_n \cdot \lim f_n \end{cases}$$

sendo (f_n) e (g_n) duas sucessões convergentes em $\mathcal{A}[C]$, e (k_n) uma sucessão convergente de escalares. Ora, as precedentes igualdades (1) traduzem precisamente a compatibilidade da noção de limite introduzida em $\mathcal{A}[C]$ com a respectiva estrutura de espaço vectorial. O conjunto $\mathcal{A}[C]$ das funções localmente analíticas sobre C fica assim um espaço (L) vectorial.

Por outro lado, a igualdade

$$\lim (k_n f_n) = \lim k_n \cdot \lim f_n$$

subsiste ainda, quando (k_n) não é já uma sucessão convergente de escalares, mas sim uma sucessão convergente de funções localmente analíticas sobre C .

A noção de limite definida em $\mathcal{A}[C]$ é pois compatível com a respectiva estrutura de anel.

Posto isto, e recorrendo ao Lema da cobertura de Heine-Borel, é fácil reconhecer que, dada uma função

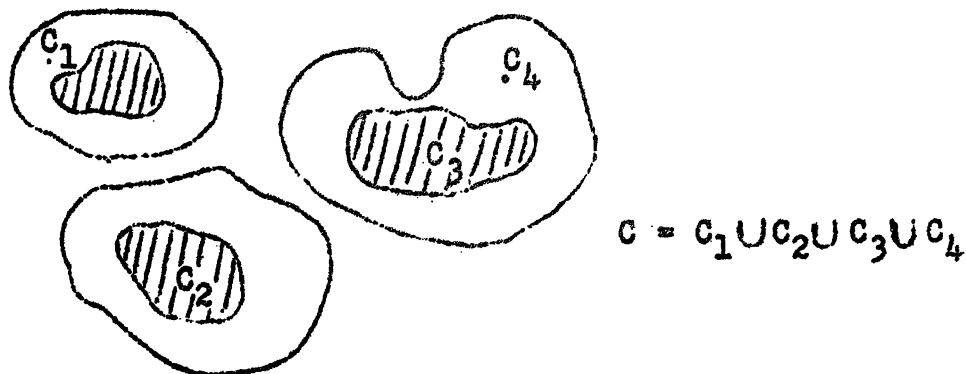
$$f \in \mathcal{A}[C]$$

é sempre possível determinar um domínio de f cuja fronteira seja constituída por um número finito de curvas fechadas, simples,

e rectificáveis.

Entende-se por curva fechada simples toda a curva homeomorfa à circunferência. Rectificável é (como se sabe) toda a curva de comprimento finito

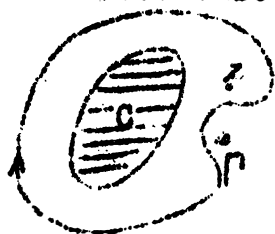
É claro que cada uma destas curvas ficará a conter uma (ou mais) componentes do conjunto C , como se figura, por exemplo, no diagrama:



(Em particular, se C é conexo, nós poderemos sempre considerar uma só curva fechada simples rectificável).

Seja Γ a fronteira de um domínio de f nessas condições - isto é, formado por um número finito de curvas fechadas simples rectificáveis.

Já se sabe, da teoria das funções analíticas, que é válida neste caso a fórmula de Cauchy:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda,$$

sendo o contorno Γ percorrido de modo a deixar à direita os pontos de C .

Esta é a fórmula de Cauchy, que dá o valor de f em cada ponto $z \in D$. O integral ali presente é dado como limite de uma sucessão de somas de Riemann, que são funções de z , evidentemente: note-se que, no entanto, é λ a variável de integração. Para cada valor de z , aquela sucessão de somas de Riemann converge para $f(z)$. A convergência é, pelo menos, pontual. Mas um célebre teorema de Runge assegura que a referida convergência é uniforme em qualquer domínio fechado interior a D .

Daqui resulta, de maneira quasi evidente, que se poderá sempre determinar uma vizinhança de C , contida em D , na qual

aquela convergência é uniforme. Teremos pois uma sucessão de somas de Riemann, $S_n(z)$, constituída por funções racionais ⁽¹⁾ de z , tais que a sucessão

$$\left(\frac{1}{2\pi i} S_n(z) \right)$$

converge uniformemente para $f(z)$ numa vizinhança de C contida em D :

$$f(z) = \lim_n \frac{1}{2\pi i} S_n(z) .$$

Quer dizer: a convergência

$$\left(\frac{1}{2\pi i} S_n(z) \right) \longrightarrow f(z)$$

tem lugar, no sentido da noção de limite estabelecida no espaço (L) vectorial $\mathcal{A}[C]$.

Deve notar-se que há uma analogia profunda entre esta fórmula,

$$(2)' \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda$$

e a fórmula integral de Dirac, que permite representar qualquer distribuição T num intervalo I

$$(3) \quad T = \int_I \delta(x-u) T_u du .$$

Na verdade, a fórmula (2) permite representar qualquer função localmente analítica sobre C , a partir da função

$$\frac{1}{z - \lambda} = (z - \lambda)^{-1}$$

A fórmula (2) pode aliás escrever-se com a forma

$$(2'') \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - \lambda)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$

Quer dizer: o papel que na fórmula de Dirac desempenha $\delta(x-u)$, é aqui desempenhado por $(z - \lambda)^{-1}$.

Tinhamos visto que $\delta(x-u)$ era uma função vectorial da variável escalar u , - neste sentido: a cada valor de u , corresponde uma distribuição, $\delta(x-u)$ [elemento do espaço vectorial $C_w(I)$], que é a distribuição de Dirac no ponto u .

(1) Somas de funções do tipo $\frac{f(\lambda)}{z - \lambda}$ são evidentemente funções racionais de z . São pois funções pertencentes a $\mathcal{A}[C]$.

No caso actual, ocorre alguma coisa de análogo: porque, para cada valor de $\lambda \notin C$, $(z-\lambda)^{-1}$ é uma função racional com um único polo, λ , não pertencente a C , - quer dizer, $(z-\lambda)^{-1}$ representa uma função localmente analítica sobre C , isto é, um elemento do espaço vectorial complexo $\mathcal{A}[C]$

Por outras palavras: a correspondência

$$\lambda \longmapsto (z-\lambda)^{-1} \quad (\lambda \notin C)$$

é uma função de λ cujos valores estão em $\mathcal{A}[C]$, - é uma função vectorial da variável escalar λ , definida no complementar do conjunto C . [Pará assinalar que se trata duma função de λ e não de z , pode-se escrever um acento circunflexo sobre z em $(z-\lambda)^{-1}$ tal como convenciamos fazer a respeito de x em $\mathcal{S}(x-u)$]. É curioso que esta função vectorial de λ admite derivada em todos os pontos do complementar de C ; é mesmo representável, numa vizinhança de cada um desses pontos, por uma série de Taylor.

É portanto uma função vectorial analítica (ou holomorfa) no complementar de C . Tínhamos visto, a propósito de $\mathcal{S}(x-u)$, qualquer coisa de análogo: tínhamos visto que $\mathcal{S}(x-u)$ - como função de u , - é uma função indefinidamente derivável da variável escalar u , mas função vectorial, cujos valores são distribuições.

Convém analisar ainda a situação de um ponto de vista mais intuitivo. Para cada $\lambda \notin C$, temos, em $(z-\lambda)^{-1}$, um vector do espaço vectorial $\mathcal{A}[C]$. Para os diferentes valores de $\lambda \notin C$, temos assim infinitos vectores do espaço $\mathcal{A}[C]$. A fórmula

$$f(z) = \int_{\Gamma} (z-\lambda)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$

permite pois exprimir $f(z)$ a partir daquela infinidade de vectores, que constituem por assim dizer, uma base do espaço vectorial $\mathcal{A}[C]$.

É alguma coisa de análogo ao que acontece nos espaços vectoriais de dimensões finitas, - por exemplo, em R^n .

Sabe-se que cada vector $u \in R^n$ se pode representar como combinação linear de n vectores linearmente independentes, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$

$$u = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n,$$

ou seja

$$u = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

Os vectores linearmente independentes,

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n,$$

constituem o que se chama uma base de R^n . Podem ser, por exemplo, os vetores

$$(1, 0, \dots, 0)$$

$$(0, 1, \dots, 0)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(0, 0, \dots, 1)$$

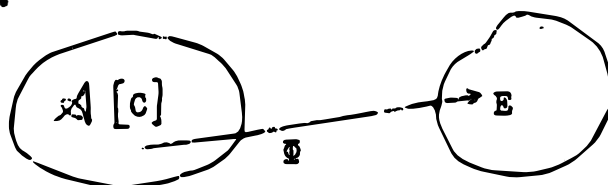
Pois bem: de certo modo, o papel da base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, é desempenhado, na fórmula

$$(2') \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z-\lambda)^{-1} f(\lambda) d\lambda$$

pela infinidade de vectores $(z-\lambda)^{-1}$, quando λ varia no complementar de C e o papel do índice i é agora desempenhado pela variável λ ; em lugar do somatório, temos o integral ao longo de Γ ; os coeficientes são os valores de $f(\lambda)$. Trata-se pois de uma fórmula que, por assim dizer, "generaliza", a que permite exprimir um vector $u \in R^n$ nos n vectores de base, $(\vec{e}_i)$. Mas enquanto na fórmula relativa ao espaço R^n , intervêm apenas as operações de multiplicação por um escalar, e adição, - na fórmula (2') intervêm, além dessas duas, uma nova operação de passagem ao limite por se tratar de um espaço com uma infinidade de dimensões. O recurso à Topologia é imprescindível, se queremos obter resultados utilizáveis na prática.

Assim, já sabemos como resolver o problema seguinte:

Determinar a expressão geral das aplicações lineares contínuas do espaço (L) vectorial $[C]$ num outro espaço (L) vectorial, E .



Trata-se pois de achar a expressão geral das aplicações $\mathfrak{D}$ de $\mathcal{A}[C]$ em E que verificam as condições seguintes:

$$\mathfrak{D}(f+g) = \mathfrak{D}(f) + \mathfrak{D}(g)$$

$$\mathfrak{D}(k.f) = k\mathfrak{D}(f)$$

$$\lim_n \mathfrak{D}(f_n) = \mathfrak{D}(\lim_n f_n)$$

Como o integral presente na fórmula (2') se exprime com a noção de limite do espaço $\mathcal{A}[C]$, acontece que todo o operador linear contínuo definido em $\mathcal{A}[C]$ será permutável com o símbolo daquele integral (ver 11ª lição). (É preciso não perder de vista que neste caso $\mathfrak{D}$ se aplica às funções⁽¹⁾ de z).

Portanto, poderemos escrever:

$$\mathfrak{D}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathfrak{D}[(z-\lambda)^{-1}] f(\lambda) d\lambda$$

Ora, aplicando $\mathfrak{D}$ ao vector $(z-\lambda)^{-1} \in \mathcal{A}[C]$ obtemos evidentemente um vector de E , que é função de λ ; seja então:

$$\varphi(\lambda) = \mathfrak{D}[(z-\lambda)^{-1}]$$

É claro que esta função $\varphi(\lambda)$ será definida no complementar de C , e tomará valores em E . Tínhamos por outro lado referido (sem demonstração) que a função $(z-\lambda)^{-1}$ de λ é holomorfa ou analítica no complementar de C . Essa propriedade é necessariamente respeitada por todo o operador contínuo definido em $\mathcal{A}[C]$, -e portanto, $\varphi(\lambda)$ é ainda analítica no complementar de C .

Mais ainda: prova-se que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{z-\lambda} = 1$$

segundo a noção de limite, introduzida em $\mathcal{A}[C]$ (o que signifi-

.....

(1) Para cada valor do escalar λ , temos uma função de z , $(z-\lambda)^{-1}$. Para evitar confusões, poderíamos até escrever um ponto sobre o z , para lembrar que z só aparentemente é variável naquele integral. Os valores da função $(z-\lambda)^{-1}$ de λ são vectores de $\mathcal{A}[C]$: sobre esses vectores é que incide $\mathfrak{D}$.

ca que a convergência de $\lambda(2-\lambda)^{-1}$ para 1, quando $\lambda \rightarrow \infty$ é uniforme em alguma vizinhança de C). Como $\varphi(\lambda)$ é imagem de $(2-\lambda)^{-1}$ pelo operador contínuo $\mathfrak{U}$, podemos afirmar que existe em E

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\lambda \varphi(\lambda)]$$

Daqui resulta em particular que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = 0$$

Traduzem-se estes dois factos, dizendo que $\varphi(\lambda)$ se anula no infinito e admite a derivada.

Chegamos pois à conclusão de que, se $\mathfrak{U}$ é uma aplicação linear contínua de $\mathcal{A}[C]$ em E, é necessariamente dada pela fórmula

$$\mathfrak{U}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

O operador $\mathfrak{U}$ fica assim perfeitamente determinado pela função $\varphi(\lambda)$ (que é holomorfa no complementar de C, nula e derivável no ponto impróprio). É pois natural chamar a esta função $\varphi(\lambda)$ função indicatriz do operador $\mathfrak{U}$.

Pode agora perguntar-se se a recíproca é verdadeira, isto é, se conseguimos, com aquela fórmula, abarcar a totalidade das aplicações lineares contínuas do espaço $\mathcal{A}[C]$ em E.

Pois bem: a resposta é afirmativa, desde que se imponham a E certas condições. Por exemplo, sendo E um espaço normado completo, ou seja, como também se diz, um espaço de Banach. Mais geralmente ainda, aquela fórmula dá a totalidade das aplicações $\mathfrak{U}$ nas condições exigidas, quando E é um espaço localmente convexo, completo (a respeito das sucessões) ⁽¹⁾. É verdade então que, dada arbitrariamente uma função $\varphi(\lambda)$ de valores em E, que seja holomorfa no complementar de C e seja nula e derivável no ponto impróprio, a fórmula

$$\mathfrak{U}(f) = \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

.....

(1) Não curaremos agora de definir estas noções. Limitamo-nos a apontar o resultado.

representa de facto uma aplicação linear contínua de $\mathcal{A}[C]$ em E , tendo então lugar a fórmula recíproca,

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{E}[(z - \lambda)^{-1}]$$

A primeira fórmula permite passar de φ para $\mathbb{E}$, e esta última estabelece a correspondência inversa: no seu conjunto, essas duas fórmulas estabelecem pois uma correspondência bi-unívoca entre as aplicações lineares contínuas de $\mathcal{A}[C]$ em E , e as respectivas funções indicatrizes.

Estes resultados subsistem, conforme se disse, desde que E seja um espaço localmente convexo, completo a respeito das sucessões. Isto dá uma enorme generalidade ao resultado; em particular, prova-se que o espaço $\mathcal{A}[C]$ que estivemos a considerar é um espaço localmente convexo, completo a respeito das sucessões. Não é um espaço normável: a noção de limite introduzida em $\mathcal{A}[C]$ não pode ser obtida a partir de uma norma sobre aquele espaço. Mas pode ser obtida a partir de uma infinitude contínua de semi-normas: o espaço $\mathcal{A}[C]$ é, por isso mesmo, o que se chama um espaço localmente convexo.

Em particular ainda, E pode ser o corpo dos escalares (números complexos). Neste caso, as funções indicatrizes $\varphi(\lambda)$ serão funções numéricas (complexas), as aplicações $\mathbb{E}$ funcionais (numéricos) e o conjunto de tais aplicações o espaço $\mathcal{A}'[C]$, dual de $\mathcal{A}[C]$ (ver lição anterior). Chega-se deste modo ao seguinte resultado, análogo ao que tínhamos estabelecido para as distribuições:

"Existe um isomorfismo $\mathbb{E} \longleftrightarrow \varphi$ entre o espaço $\mathcal{A}'[C]$, dual de $\mathcal{A}[C]$ e o espaço das funções complexas $\varphi(\lambda)$ que são holomorfas no complementar de C e nulas, bem como deriváveis no ponto impróprio".

.....

Seja E ainda um espaço (L) vectorial. Representemos agora por $\bigwedge_c(E)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de E em si mesmo. Trata-se, como facilmente se reconhece, de uma álgebra sobre o corpo complexo.

Diz-se que uma sucessão de operadores $\left[\text{pertencentes a } \bigwedge_c(E) \right]$,

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$$

converge pontualmente (ou simplesmente) para um dado operador

Θ do mesmo conjunto, quando se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(u) = \Theta(u)$$

para todo o vector $u \in E$.

(Trata-se afinal da noção de convergência pontual para as funções. Não se deve perder de vista que $\Theta_n(u)$ são funções de uma variável u , que percorre E ; os valores dessas funções são por sua vez também vectores de E).

Pôsto isto, podemos enunciar o problema do Cálculo Operacional da seguinte maneira precisa:

Dado um operador $\Theta \in \bigwedge_c(E)$, pretendemos associar a cada função $f \in \mathcal{A}[C]$, um determinado operador pertencente a $\bigwedge_c(E)$, que representaremos pela notação $f(\Theta)$, de modo que se verifiquem as seguintes condições:

- I) Se $f = f_1 + f_2$, então $f(\Theta) = f_1(\Theta) + f_2(\Theta)$
- II) Se $f = f_1 \cdot f_2$, então $f(\Theta) = f_1(\Theta) \cdot f_2(\Theta)$
- III) Se $f = \lim_n f_n$, então $f(\Theta) = \lim_n f_n(\Theta)$
- IV) Se $f(z) = z$, então $f(\Theta) = \Theta$
- V) Se $f(z) = k \in C$, então $f(\Theta) = k$, (constante identificada ao operador k, I).

Já anteriormente nos tinha aparecido um esquema em que eram válidas todas estas condições, excepto a III): tratava-se de um homomorfismo. Agora, visivelmente, trata-se de mais alguma coisa do que um homomorfismo do anel $\mathcal{A}[C]$ sobre uma parte do anel $\bigwedge_c(E)$: é um homomorfismo contínuo de $\mathcal{A}[C]$ em $\bigwedge_c(E)$.

De resto, para tornar mais evidente este facto, podemos representar a aplicação

$$f \longrightarrow f(\Theta)$$

por $\mathbb{U}$, e escrever

$$\mathbb{U}(f) = f(\Theta).$$

$\mathbb{U}$ designará então uma aplicação do anel $\mathcal{A}[C]$ no anel $\bigwedge_c(E)$, que verifica as condições seguintes:

- I') $\mathbb{U}(f_1 + f_2) = f_1(\Theta) + f_2(\Theta) = \mathbb{U}(f_1) + \mathbb{U}(f_2)$
- II') $\mathbb{U}(f_1 \cdot f_2) = \mathbb{U}(f_1) \cdot \mathbb{U}(f_2)$
- III') $\lim \mathbb{U}(f_n) = \mathbb{U}(\lim f_n)$
(condição de continuidade)

$$\text{IV')} \quad \mathfrak{T}(z) = \theta \quad (z \text{ é a função } f \text{ reduzida a } z)$$

$$\text{V')} \quad \mathfrak{T}(k) = k$$

As duas primeiras propriedades dizem simplesmente que $\mathfrak{T}$ é um homomorfismo do anel $\mathcal{A}[C]$ no anel $\Lambda_C(E)$.

A 3ª condição traduz que esse homomorfismo é contínuo. A 5ª condição, associada à 2ª, permite concluir que $\mathfrak{T}$ é uma aplicação linear: temos na verdade

$$\mathfrak{T}(kf) = k\mathfrak{T}(f),$$

designando k um escalar, uma vez que $\mathfrak{T}(k) = k$. O operador $\mathfrak{T}$ é pois uma aplicação linear contínua de $\mathcal{A}[C]$ em $\Lambda_C(E)$, que respeita o produto.

Então, segundo um resultado anteriormente assinalado, desde que E seja um espaço nas condições referidas, a aplicação $\mathfrak{T}$ é dada pela expressão

$$\mathfrak{T}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

designando Γ a fronteira, convenientemente escolhida e orientada, de um domínio da função f , (a qual dependerá de f , evidentemente).

Vejamos o significado de $\varphi(\lambda)$.

Temos

$$\varphi(\lambda) = \mathfrak{T}[(z-\lambda)^{-1}]$$

Mas sabemos que neste caso especial é

$$(z-\lambda)^{-1}(z-\lambda) = (z-\lambda)(z-\lambda)^{-1} = 1$$

Como o operador $\mathfrak{T}$ respeita o produto, e também a soma, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}[(z-\lambda)^{-1}] [\mathfrak{T}(z) - \mathfrak{T}(\lambda)] &= \\ = \mathfrak{T}[(z-\lambda)^{-1}] [\theta - \lambda] &= 1, \text{ ou ainda} \end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda) (\theta - \lambda) = (\theta - \lambda) \varphi(\lambda) = 1.$$

(Não esquecer que os valores de $\varphi(\lambda)$ são operadores).

Mas, estas últimas igualdades significam que, para cada valor de λ , $\varphi(\lambda)$ é o inverso de $\theta - \lambda$, isto é,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\theta - \lambda} = (\theta - \lambda)^{-1}$$

Em conclusão: a função indicatriz é necessariamente $(\theta - \lambda)^{-1}$. Esta função há-de ser definida e analítica no complementar de C: isto já obriga a que o espectro de θ deve estar contido em C. (Porque, se houvesse um ponto dêsse espectro fóra de C, então a função $(\theta - \lambda)^{-1}$ não era definida para algum valor de λ fóra de C. Ora ela é definida, isto é, existe o operador $(\theta - \lambda)^{-1}$, para todo o valor de λ pertencente ao complementar de C). Portanto, o espectro de θ tem de ser um subconjunto de C. É uma primeira condição necessária a que chegámos. (1)

Por outro lado, a fórmula anterior pode revestir o seguinte aspecto: $E(f)$ é o que se representou por $f(\theta)$; $\varphi(\lambda)$ é $(\theta - \lambda)^{-1}$; portanto,

$$(4) \quad f(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\theta - \lambda} d\lambda$$

Quer dizer: se existir $f(\theta)$ de modo que se verifiquem tais condições, é-nos necessariamente dado por uma fórmula, (4), que é muito semelhante à fórmula integral de Cauchy. A diferença é, na verdade, apenas de notações.

É dever referir que esta possibilidade de representar as funções analíticas de operadores foi encarada, talvez pela primeira vez, por Henri Poincaré, numa memória sobre grupos contínuos, no fim do século XIX. Mais tarde, na 3ª década deste século, Élie Cartan, em carta a Giorgi, sugeriu de novo a possibilidade de fundar o Cálculo Operacional sobre aquela fórmula. Ora, o Cálculo Operacional de L. Fantappiè é baseado numa fórmula que no fundo é aquela: mas Fantappiè não chegou a apresentá-la com o mesmo aspecto talvez porque não dispunha de todos os elementos da Análise funcional moderna, - o que não é muito de surpreender, uma vez que por essa altura estava êsse ramo da Matemática em período de formação.

.....

- (1) Prova-se mesmo que, se E é normado basta que o espectro de θ esteja contido em C, para que $(\theta - \lambda)^{-1}$ seja uma função analítica de λ no complementar de C e nula, bem como derivável, no ponto impróprio. Quando se trata de um espaço localmente convexo, completo a respeito das sucessões, o problema está ainda pendente: não se sabe se a analiticidade de $(\theta - \lambda)^{-1}$ no complementar de C, é ou não implicada pelo facto de o espectro de θ estar contido em C. É esta uma questão em aberto, que poderá vir a ser resolvida ou pela afirmativa, ou pela negativa, com um contra-exemplo.

De resto, tal fórmula não é destituída de certa analogia com a que usamos para as funções racionais de um operador (pág. 93): esta última utilizava um somatório, em que aparecia a função $\frac{1}{\theta - \lambda}$, mas apenas para os valores do escalar λ que eram zeros do denominador. Agora, em vez de somatório, temos um integral, no qual são interessados infinitos valores de λ .

É conveniente ver como se utilizará efectivamente a fórmula que dá $f(\theta)$. Para isso, vamos aplicar $f(\theta)$ a um elemento qualquer de E ; vem

$$f(\theta)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) [(\theta - \lambda)^{-1}u] d\lambda$$

Representemos $(\theta - \lambda)^{-1}u$ por v ; é o mesmo que escrever

$$\theta v - \lambda v = u$$

Quer dizer, somos conduzidos primeiro que tudo, a resolver esta última equação, onde u é um elemento conhecido de E , e v um elemento incógnito do mesmo espaço.

Já vimos o que sucede no caso em que o operador θ é o operador de derivação D : trata-se então de uma equação diferencial linear de 1ª ordem; o espectro (segundo vimos) reduz-se ao conjunto vazio, no caso em que nos restringimos (por exemplo) às restrições nulas à esquerda da origem.

Deve observar-se que se trata agora de um Cálculo Operacional de muito maior amplitude, do que o simples cálculo operacional com o operador D . Este cálculo é aplicável a operadores variadíssimos, - começando já pelas matrizes quadradas de ordem finita: com efeito a fórmula a que chegamos permite atribuir um sentido à expressão "função analítica de uma matriz quadrada de ordem finita", desde que os valores próprios da matriz estejam no conjunto C .

Há, de resto, um aspecto da questão que é indispensável considerar e a que só agora vamos aludir.

Vimos que, se é possível estabelecer uma correspondência

$$f \longrightarrow f(\theta)$$

que verifique as condições enunciadas, então $f(\theta)$ é dado pela fórmula

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\theta - \lambda} d\lambda$$

Resta saber se a recíproca é verdadeira: suponhamos

que $f(\theta)$ é dada por aquela fórmula, e que as condições oportunamente apontadas são válidas; ζ tratar-se-á de um homomorfismo contínuo que transforme z em θ , e uma constante em si mesma? Demonstra-se que sim, desde que $(\theta - \lambda)^{-1}$ seja uma função analítica de λ no complementar de C e seja nula, bem como derivável no ponto impróprio (sendo E um espaço localmente convexo, completo a respeito das sucessões).

.....

Ora, com a fórmula precedente, e outra, que é a respectiva generalização a n variáveis, Fantappiè conseguiu resolver tipos variados de equações de derivadas parciais, que de facto não tinham sido ainda integrados. Mas acontecia também que certos tipos de equações de derivadas parciais que se resolviam muito simplesmente com o método de Heaviside, ou com o método, mais rigoroso, da transformação de Laplace, eram excluídas com o método de Fantappiè. Muito mais geral por um lado, - falhava, - por outro, em numerosas questões concretas de grande interesse, porque - exigindo condições não verificadas, - era inaplicável em tais casos. Esse insucesso resultava afinal da inexistência da teoria das distribuições. Uma vez construída essa teoria, foi possível ⁽¹⁾ alargar o método de Fantappiè, de maneira a conter, como caso particularíssimo, o método baseado na transformação de Laplace.

A primeira deficiência que foi preciso superar consistia na exclusão de muitas funções analíticas que era inevitável considerar.

As funções analíticas que intervêm no cálculo do operador D e de outros operadores análogos são de um tipo que procuraremos caracterizar a seguir.

Começaremos por algumas convenções: sendo z um número complexo, costuma representar-se pelo símbolo $\Re z$ a parte real de z :

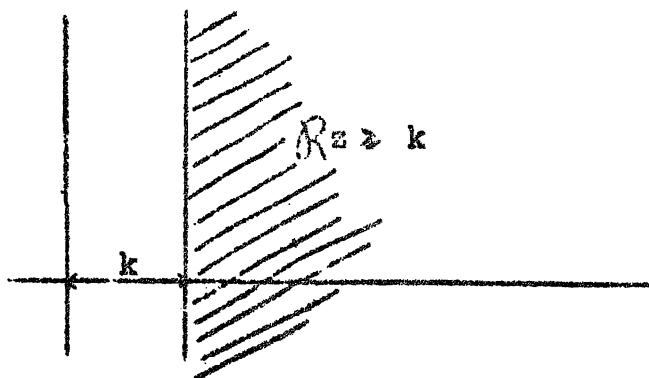
$$z = x + iy \longrightarrow \Re z = x$$

Assim, o lugar geométrico dos afixos dos complexos tais que $\Re z = k$ (sendo k um número real dado), é uma recta paralela ao eixo imaginário; o lugar dos afixos dos complexos z tais que $\Re z \geq k$

.....

(1) J. Sebastião e Silva, "Le Calcul Operationnel au point de vue des distributions"
Port. Math. vol. 14 (1955)

é um semi-plano, situado à direita daquela recta.



Chamaremos semi-planos direitos aos semi-planos daquele tipo; também lhes poderemos chamar vizinhanças do ponto $+\infty$.

Pois bem: as funções que interyêm no Cálculo Operacional do operador D são, primeiro que tudo, funções analíticas numa vizinhança do ponto $+\infty$.

Mas nem todas essas funções podem ser consideradas: temos de impor-lhes ainda uma condição simples, relativa ao comportamento no infinito.

Chamaremos funções analíticas de crescimento lento à direita todas as funções $f(z)$ para as quais existe um número k tal que

$$\frac{f(z)}{z^k}$$

seja uma função holomorfa e limitada sobre todo o semi-plano direito $\text{Re } z \geq k$.

Isto alarga já consideravelmente o campo das funções que se costumava usar com a transformação de Laplace, a qual exigia, pelo menos, que a função em jogo fôsse limitada. Agora, nada disso é necessário: basta que o quociente de $f(z)$ por uma conveniente potência de z seja uma função limitada num semi-plano direito. Por outras palavras, - exige-se apenas que a função $f(z)$ seja de crescimento lento à direita.

Representaremos por $\mathcal{A}_\omega$ o conjunto de todas essas funções. (É este conjunto que vai substituir o $\mathcal{A}[C]$, há pouco considerado).

Temos agora que definir em $\mathcal{A}_\omega$ noções de adição e de multiplicação por um escalar: é possível fazê-lo de modo perfeitamente análogo ao que se tinha feito para $\mathcal{A}[C]$. E é também preciso introduzir em $\mathcal{A}_\omega$ uma noção de limite, - o que se pode fazer nos seguintes termos:

Diz-se que uma sucessão de funções

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

do conjunto $\mathcal{A}_\omega$ tende para uma função $g \in \mathcal{A}_\omega$, quando existe pelo menos um número natural k , tal que todas estas funções sejam definidas e analíticas no semi-plano

$$\operatorname{Re} z \geq k$$

e a sucessão de funções

$$\left(\frac{f_n(z)}{z^k} \right)$$

convirja uniformemente para

$$\frac{g(z)}{z^k}$$

sobre aquele mesmo semi-plano.

(Não é preciso que $f_n(z)$ convirja uniformemente para $g(z)$: basta que o quociente de $f_n(z)$ por z^k convirja para

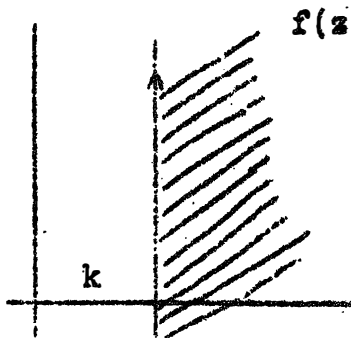
$$\frac{g(z)}{z^k}$$

uniformemente, o que é bastante mais geral).

Com estas noções, $\mathcal{A}_\omega$ fica a ser um espaço (L) vectorial, e podemos estabelecer uma teoria análoga à anterior, elaborada para os espaços $\mathcal{A}[C]$.

Primeiro que tudo, há que ter em vista a fórmula integral de Cauchy. Somos tentados a estabelecer uma fórmula que generalize a fórmula integral de Cauchy para as funções do tipo agora considerado. Representemos por Γ_k a recta

$\operatorname{Re} z = k$. Seremos levados a escrever



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda$$

sendo a recta Γ_k percorrida de modo a deixar à direita o ponto $+\infty$ isto é, de baixo para cima.

Mas esta fórmula, segundo a definição usual do integral, só é válida para funções muito particulares daque-

le espaço, por exemplo para as funções que verifiquem esta condição; $zf(z)$ ser limitada nalguma vizinhança de $+\infty$. Quer dizer, - para que tal fórmula seja válida segundo a definição usual de integral, é suficiente que o produto $zf(z)$ seja uma

função limitada numa vizinhança de $+\infty$. (Note-se que a função f é neste caso mesmo infinitésima, quando $\Re z \rightarrow +\infty$).

Representaremos por $\mathcal{A}_\omega^*$ o sub-conjunto de $\mathcal{A}_\omega$ constituído pelas funções deste tipo que verificam aquela condição.

Demonstra-se então o seguinte facto importante: toda a função $f \in \mathcal{A}_\omega$ pode ser dada como limite de uma sucessão de funções pertencentes a $\mathcal{A}_\omega^*$

$$f = \lim_n f_n \quad (5)$$

Exprime-se este facto dizendo que o conjunto $\mathcal{A}_\omega^*$ é denso em $\mathcal{A}_\omega$. E essa circunstancia permite-nos estender a noção de integral por um processo hoje muito frequente, - o de prolongamento por continuidade.

A fórmula anteriormente obtida é válida para cada função de $\mathcal{A}_\omega^*$; portanto, para funções f_n (das que intervêm em (5)), podemos escrever

$$(6) \quad f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f_n(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda$$

Pois bem, continuaremos a escrever a fórmula para qualquer outra função $f \in \mathcal{A}_\omega$, neste sentido: a fórmula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda$$

nada mais quer dizer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_k} \frac{f_n(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda$$

E agora, tudo o mais segue de modo quasi análogo ao que vimos para os espaços $\mathcal{A}[C]$, - havendo no entanto algumas diferenças.

Assim, o que nos interessa é estabelecer um homomorfismo contínuo de $\mathcal{A}_\omega$ sobre uma parte de $\wedge_c(E)$, - que permita, dado um operador $\theta \in \wedge_c(E)$, definir $f(\theta)$.

Seremos conduzidos ainda à fórmula

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(\lambda)}{\theta-\lambda} d\lambda$$

Mas em que condições é válida esta fórmula? Primeiro que tudo, deve acontecer que $\frac{1}{\theta - \lambda}$ seja, uma função de λ , definida e analítica em todo o plano, isto é, uma função inteira de λ . Mas devem verificar-se ainda mais duas condições, que não interessa agora especificar.

Desde que o operador θ satisfaça tais condições, a fórmula

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(\lambda)}{\theta - \lambda} d\lambda$$

é aplicável, e garante um homomorfismo nas condições referidas, que permite estabelecer um Cálculo Simbólico do operador θ , para funções do espaço vectorial $\mathcal{A}_\omega$. Em particular permite fundamentar o Cálculo Simbólico do operador D . Vamos ver

que neste último caso recaímos numa fórmula muito conhecida, que é a fórmula da inversão da transformação de Laplace, por meio do integral de Fourier.

Entretanto, convém observar desde já o seguinte facto: sendo Γ_k uma recta, o integral presente na última fórmula escrita já não será um integral de Riemann, mas sim um integral impróprio, de $-\infty$ a $+\infty$.

Na verdade, escrevendo $\lambda = u + iv$, se λ percorre a recta $\Re z = k$, será

$$\lambda = k + iv,$$

e a variável é simplesmente v . Será, por sua vez, $d\lambda = i \cdot dv$; portanto, poderemos escrever

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(k+iv)}{\theta - k - iv} dv$$