INTRODUÇÃO À TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

SEGUNDO AS LIÇÕES DO PROF. **J. SEBASTIÃO E SILVA,** PROFERIDAS NO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO, EM 1956-57, E COMPILADAS POR ANTÓNIO ANDRADE GUIMARÃES.

PUBLICAÇÃO SUBSIDIADA PELO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

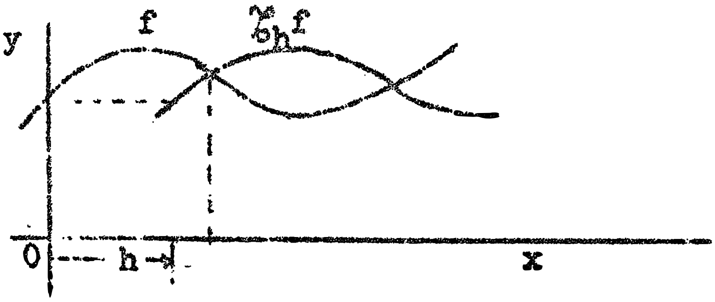
13ª lição

No Cálculo Operacional desempenha um papel muito importante a noção de convolução, ou produto de composição, que foi generalizada na teoria das distribuições. Para definir este conceito, convém primeiramente definir translatada de uma distribuição, e antes disso ainda, translatada de uma função

Dada uma função $f(x)$, diz-se translatada (h) de $f(x)$, e representa-se pela notação $\tau_h f$, a função $f(x-h)$; tem-se pois, por definição,

$$\tau_h f(x) = f(x-h)$$

A razão da designação "translatada" está em que o gráfico de $f(x-h)$ pode obter-se do gráfico de $f(x)$ mediante uma translação de amplitude h.



Quanto ás distribuições, define-se translatada de uma distribuição, de modo a tornar essa operação permutável com a derivação e com as operações de restrição. Se se trata de uma distribuição T de ordem finita, $T = D^p f$, a translatada (h) de T será definida do modo seguinte:

$$\tau_h T = D^p \tau_h f = D^p f(x-h)$$

Repare-se em que, se fôr I o domínio de T, o domínio de $\tau_h T$ será $I^* = I+h$, isto é, o domínio recebe uma translação de igual amplitude. Em particular, se o domínio de T fôr toda a recta evidentemente que o translatado correspondente será o mesmo Tratando-se agora de uma distribuição de ordem infinita, bastará, para definir $\tau_h T$, considerar a restrição de T a cada intervalo compacto J contido no seu domínio: então $\tau_h T$ é a distribuição tal que

$$R_J(\mathcal{T}_h T) = \mathcal{T}_h R_{J-h} T$$

<u>É fácil reconhecer que os operadores de translação assim definidos são unívocos, lineares e permutam efectivamente com as operações de derivação e de restrição, como se pretendia.</u>

Muitas vezes, quando não há perigo de confusão, é cómodo representar a translatada $\mathcal{T}_h T$ por $T(x-h)$, como fizémos com as funções. De resto, já por várias vezes fizémos uso desta convenção, a propósito da distribuição de Dirac; na verdade, representámos já a distribuição de Dirac relativa ao ponto h pelo símbolo $\delta(x-h)$, sendo fácil ver agora que

$$\delta(x-h) = \mathcal{T}_h \delta = D_x H(x-h)$$

Por outro lado, tinhamos visto que, - considerando, por exemplo, $\delta(x-h)$ como uma distribuição de x que tem por domínio toda a recta, - a expressão $\delta(x-h)$ representa uma função de h cujos valores pertencem ao espaço das distribuições, - uma <u>função vectorial</u> da variável escalar h. Demonstramos até que esta função vectorial de h, $\delta(\hat{x}-h)$, é <u>indefinidamente derivável</u>, e que se tem precisamente:

$$\frac{d^p}{dh^p}\delta(\hat{x}-h) = (-1)^p \delta^{(p)}(x-h)$$

Pois bem: tal circunstância generaliza-se a qualquer distribuição T, - quer dizer, se a cada valor de h associarmos a translatada $T(x-h)$, fica definida uma função vectorial de h (cujos valores são distribuições). Para maior simplicidade, suponhamos que o domínio de T é a recta inteira: a cada valor de h corresponde uma distribuição sôbre a recta, $T(x-h)$, e prova-se (por uma técnica perfeitamente análoga) que esta função vectorial de h, é <u>indefinidamente derivável</u>, tendo-se precisamente:

$$\frac{d^p}{dh^p} T(\hat{x}-h) = (-1)^p (D^p T)(x-h) = (-1)^p D_x^p T(x-h)$$

(Observe-se que esta fórmula seria trivialmente verdadeira se T fôsse já por si uma função indefinidamente derivável. É a noção de limite definida no espaço das distribuições que permite agora estender a validade desta fórmula a toda a distribuição T).

Podemos agora definir produto de composição.

Chama-se produto de composição de duas distribuições, S e T, sôbre a recta, e representa-se pela notação $S * T$, o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\check{x}-u)\, T(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau_u S)\, T_u\, du$$

quando êste integral existir, (no sentido da definição que foi dada na 11ª lição). Pode acontecer que não exista aquele integral, e então não existirá o produto de composição $S * T$.

Vejamos concretamente como se define aquele integral.

Consideremos o caso particular em que T e S são de ordem finita:

$$T = D^p g$$

$$S = D^m f \text{ ,com } f \text{ e } g \text{ contínuas em } R.$$

Já sabemos que a função contínua g pode ser dada como limite de uma sucessão (γ_n) de funções indefinidamente derivaveis, - a respeito da noção de limite introduzida no espaço das distribuições:

$$g = \lim \gamma_n$$

Portanto, o integral(1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S\,(\check{x}-u)\; T(u)\; du$$

se existir, é

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S\,(\check{x}-u)\; \gamma_n^{(p)}(u)\; du$$

Mais precisamente: o integral existirá, se os integrais do 2º membro existirem, para alguma sucessão (γ_n) e se o limite respectivo fôr independente da sucessão (γ_n) escolhida para representar a função contínua g.

Por outro lado, $S = D^m f$, e portanto $S(\check{x}-u) = D^m f(x-u)$. Como D^m é uma aplicação linear contínua de $C_{\mathcal{T}}(R)$ em si mesmo,

(1) Escreveremos $S(\check{x}-u)$, com o acento sôbre o x, para salientar que a variável efectiva é apenas u, sendo x variável aparente.

permuta com a integração de funções com os valores em $C_\pi(R)$; podemos pois escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\hat{x}-u)\ \gamma_n^{(p)}(u)\ du = D^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(\hat{x}-u)\ \gamma_n^{(p)}(u)\ du$$

Evidentemente, os integrais presentes no 2º membro são integrais impróprios de funções, - que podem ou não existir. De resto, $f(\hat{x}-u)$ é, como dissemos, uma função vectorial de u, com os valores no espaço das distribuições, - função essa que é <u>indefinidamente derivável</u>, mesmo que f(x) não o seja. Bem entendido, - trata-se agora da derivação no espaço das distribuições, definida a partir da noção d<u>e limite</u> lá introduzida, tendo-se precisamente

$$D_u^p f(x-u) = (-1)^p D_x^p f(x-u) \text{ ,para } p = 1,2,\ldots$$

Portanto, efectuando sucessivas <u>integrações por partes</u>, conclue-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\hat{x}-u)\ \gamma_n^{(p)}(u)\ du = (-1)^p D^m \int_{-\infty}^{+\infty} D_u^p f(x-u)\ \gamma_n(u)\ du =$$

$$= (-1)^{p+p} D^m \int_{-\infty}^{+\infty} D_x^p\ f(x-u)\ \gamma_n(u)\ du,$$

no espaço das distribuições, em que as derivações indicadas têm lugar. Ora, D_x^p é uma aplicação linear <u>contínua</u> de $C_\pi(R)$ em si mesmo, - logo, permuta com o símbolo de integral.

Portanto, em última análise, teremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\hat{x}-u)\ \gamma_n^{(p)}(u)\ du = D^{m+p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\ \gamma_n(u)\ du$$

Suponhamos que estes integrais existem; como $g(x) = \lim_n \gamma_n(x)$, se existir

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} S(\hat{x}-u)\ \gamma_n^{(p)}(u)\ du$$

só poderá ser

$$D^{m+p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\ g(u)\ du$$

Em conclusão: quando existe o produto de composição $S * T$, e as distribuições S e T são de ordem finita, (mais precisamente: $S = D^m f$, $T = D^p g$), temos:

$$S * T = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-u)\; T(u)\; du = D^{p+m} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\; g(u)\; du$$

Há casos em que o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} S(x-u)\; T(u)\; du$ existe, e outros em que não existe. Um caso em que se demonstra que certamente existe, é o caso em que, pelo menos uma das distribuições tem suporte compacto, isto é, se anula fóra de um intervalo compacto.

Em particular, existirá o produto de composição $\delta * T$, uma vez que a distribuição δ tem suporte pontual (reduzido à origem) e, portanto, compacto

Ora,

$$\delta * T = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-u)\; T(u)\; du$$

Mas, pela fórmula de Dirac, o 2ª membro é a distribuição T; logo:

$$\delta * T = T$$

Mais geralmente, é fácil reconhecer que

$$\delta^{(n)} * T = D^n T\;,$$

uma vez que, da análise da fórmula hà pouco deduzida para o produto de composição $S * T$, decorre imediatamente

$$D(S * T) = (DS) * T = S * (DT)$$

Estas igualdades podem traduzir-se no enunciado seguinte:

> "Para derivar um produto de composição, basta derivar um dos factores."

Observação. Não se deve perder de vista que a fórmula hà pouco deduzida para o produto $S * T$ foi obtida na hipótese de S e T serem ambas distribuições de ordem finita. Se pelo menos uma daquelas distribuições não fôr de ordem finita, pode recorrer-se a uma fórmula perfeitamente análoga, fazendo as restrições a convenientes intervalos compactos: já sabemos que as restrições a tais intervalos são distribuições de ordem finita.

Para dar agora uma primeira idea do alcance do conceito de produto de composição, ou convolução, (a que os alemãis chamam também Faltung), consideremos o exemplo simples da equação diferencial linear de ordem n

$$a_0 D^n S + a_1 D^{n-1} S + \dots + a_{n-1} DS + a_n S = T$$

Esta equação pode escrever-se (como se viu) sob a forma

$$a_0 \delta^{(n)} * S + a_1 \delta^{(n-1)} * S + \dots + a_{n-1} \delta' * S + a_n \delta * S = T$$

ou ainda, mais simplesmente,

$$H * S = T ,$$

sendo H a distribuição

$$H = a_0 \delta^{(n)} + \dots + a_{n-1} \delta' + a_n$$

Quer dizer: a equação diferencial linear de ordem n pode escrever-se sob a forma de equação de composição, dando-se este nome a toda a equação do tipo

$$U * S = T$$

~~em~~ que U e T são distribuições conhecidas e S é distribuição incógnita.

Prova-se, mais geralmente, que há muitas equações integrais que se podem representar sob a forma de equações de composição; o mesmo acontece com equações de diferenças finitas, e até com equações de tipo mixto, - equações integro-diferenciais, equações que são ao mesmo tempo diferenciais e de diferenças finitas etc, etc. Assim se antevê a possibilidade de elaborar uma teoria unificada de todas estas equações, por meio do conceito de produto de composição.

....

Posto isto, passemos ao espaço das distribuições sôbre a recta, que são nulas à esquerda da origem: trata-se do espaço que designámos por C_π^+. É fácil estabelecer que existe sempre o produto de composição $S * T$ de duas distribuições quaisquer pertencentes a C_π^+

Se, em particular, S e T são de ordem finita, $S = D^m f$ e $T = D^p g$, teremos, segundo a fórmula hà pouco deduzida,

$$S * T = D^{m+p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, g(u)\, du$$

Ora, se T e S são <u>nulas à esquerda da origem</u>, podemos sempre escolher as funções contínuas f e g de modo que sejam ambas <u>nulas à esquerda da origem</u>.

Por, exemplo, se f não fôr nula à esquerda da origem, visto que no intervalo $]-\infty, 0]$, a distribuição S é nula, nesse mesmo intervalo f reduz-se necessàriamente a um polinómio de gráu inferior a m, porque só um polinómio de grau inferior a m pode apresentar derivada (mesmo formal) igual a 0.

Seja P_m êsse polinómio, e designemos por $\bar{f}$ a função contínua $\bar{f} = f - P_m$.

É claro que $\bar{f} = 0$ à esquerda da origem, e tem-se

$$S = D^m f = D^m(\bar{f} + P_m) = D^m \bar{f} + D^m P_m,$$

donde $\qquad S = D^m \bar{f}$

Procedendo anàlogamente com g, concluiríamos que se pode exprimir S e T como derivadas de funções contínuas nulas à esquerda da origem.

Supondo que as funções f e g presentes no integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, g(u)\, du$$

foram já escolhidas daquela maneira, será

$$\begin{aligned} g(u) &= 0 \quad \text{para} \quad u < 0 \\ f(x-u) &= 0 \quad \text{para} \quad u > x\,. \end{aligned}$$

Então, aquele integral impróprio <u>existe</u> com certeza, porque é igual a

$$\int_{0}^{x} f(x-u)\, g(u)\, du \quad ,$$

em virtude de a função integranda se anular (de acôrdo com o que vimos) quer no intervalo $]-\infty, 0[$, quer no intervalo $]x, +\infty[$

Temos assim

$$S * T = D^{m+p} \int_0^x f(x-u)\ g(u)\ du$$

Esta expressão de $S * T$ pode ser já de certo modo familiar. Em muitos livros de Cálculo Simbólico, costuma-se chamar produto de composição de duas funções, f e g, precisamente ao valor do integral

$$\int_0^x f(x-u)\ g(u)\ du$$

mesmo que f e g não sejam nulas à esquerda da origem. Deve porém observar-se que êste conceito não reentra no conceito anterior. Para evitar confusões, diremos neste caso que se trata do produto de composição de f e g no intervalo $[0,+\infty[$.

Vimos que o produto de composição de duas distribuições, nulas à esquerda da origem e de ordem finita, existe sempre e é dado pela fórmula anteriormente deduzida: uma fórmula análoga permite calcular $S * T$ no caso em que as distribuições S e T, nulas à esquerda da origem não são ambas de ordem finita, - fórmula essa que, no novo caso, se referirá naturalmente a restrições de S e T a intervalos compactos.

....

Não seria agora difícil demonstrar que o produto de composição assim definido em C_π^+ não só é sempre possível e uniforme, como também é associativo, comutativo, e distributivo. Por outras palavras, o espaço C_π^+ é um anel a respeito da adição (que já tinhamos referido) e do produto de composição. Mas podemos acrescentar que é uma álgebra comutativa sôbre o corpo dos números complexos, porque se prova o seguinte: sendo α um escalar qualquer é sempre

$$\alpha(S * T) = (\alpha S) * T = S * (\alpha T)$$

C_π^+ é pois uma álgebra, sôbre o corpo complexo, porque era já um espaço vectorial (complexo). Podemos mesmo dizer que C_π^+ é uma álgebra com elemento unidade, que vem a ser, afinal, a distribuição δ de Dirac; com efeito

$$\delta * T = T\ .$$

Podemos ainda ir mais longe nesta análise.

Consideremos a correspondência

$$T \longrightarrow S * T$$

Esta correspondência, que representaremos por $\tilde{S}$, é uma aplicação da álgebra C_{π}^{+} em si mesma. Atendendo às propriedades dos integrais de distribuições, é fácil reconhecer que tal aplicação é <u>contínua</u>, isto é, permuta com a passagem ao limite. O mesmo se passa com a aplicação $\tilde{T}$ de C_{π}^{+} em si mesma, definida pela igualdade

$$\tilde{T}(S) = S * T,$$

visto que o produto de composição é comutativo.

Além disso, atendendo às propriedades da estrutura de álgebra de C_{π}^{+}, é imediato que as aplicações contínuas, $\tilde{S}$ e $\tilde{T}$, são <u>lineares</u>. Podemos abreviadamente traduzir estas circunstancias dizendo que o produto $S * T$ é uma <u>forma bilinear separadamente contínua</u>: bilinear, porque é linear, tanto a respeito de S como a respeito de T; <u>separadamente contínua</u>, porque é contínua em relação a S e em relação a T. Estas conclusões são muito importantes para o Cálculo Simbólico do operador D, que vamos estudar mais cuidadosamente.

. . . .

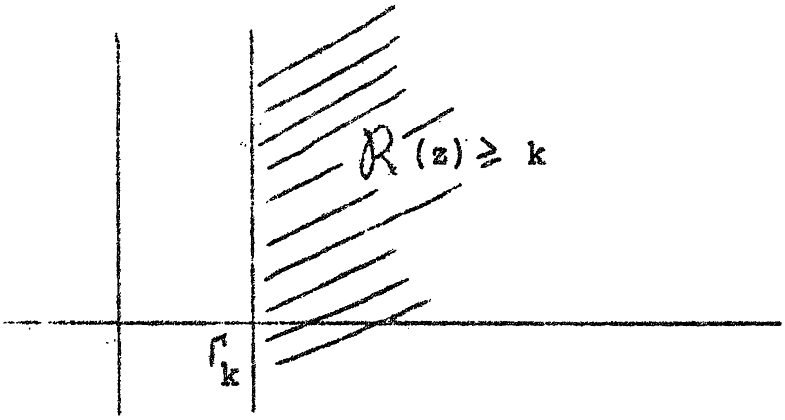
Na lição precedente, tínhamos estabelecido o Cálculo Operacional para as <u>funções analíticas de crescimento lento à direita</u> e representámos o conjunto dessas funções por $\mathcal{A}_{\omega}$. Sendo E um espaço (L) vectorial complexo qualquer, e Θ uma aplicação linear contínua de E em si mesmo, isto é, $\Theta \in \Lambda_c(E)$, sendo $f \in \mathcal{A}_{\omega}$, vimos como se define o símbolo $f(\Theta)$, "valor" da função analítica $f(z)$ para $z = \Theta$, desde que se verifiquem certas condições. Concluíramos que $f(\Theta)$ é então o operador dado pela fórmula

$$f(\Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(\lambda)}{\Theta - \lambda}\, d\lambda$$

se (para um conveniente número natural k) a função $\frac{f(z)}{z^k}$ fôr <u>analítica e limitada</u>, no semi-plano

$$\mathcal{R}\, z \geq k,$$

(portanto, $f \in \mathcal{A}_{\omega}$) e sendo Γ_k a recta imagem dos números complexos cuja parte real é k.



Suponhamos agora, em particular, que o espaço vectorial E é precisamente o espaço $C^+_{\pi}(R)$, das distribuições sôbre R, <u>nulas à esquerda da origem</u>. Suponhamos que o operador Θ é o operador de derivação.

A fórmula há pouco recordada permite neste caso definir uma função analítica f (pertencente a $\mathcal{A}_\omega$) do operador D. Aplicado a uma distribuição T nula à esquerda da origem, o operador f(D) dará pois

$$f(D)\,T = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\left(\frac{1}{D-\lambda}\,T\right) f(\lambda)\,d\lambda$$

se a função $(D-\lambda)^{-1}$ de λ verificar as devidas condições.

Precisamos pois saber o que representa

$$\frac{1}{D-\lambda}\,T\,,$$

supondo $T\in C^+_{\pi}$. Ora, a incidência do operador $\frac{1}{D-\lambda}$ sôbre uma distribuição $T \in C^+_{\pi}$ já foi estudada anteriormente, a propósito do Cálculo Simbólico. Vimos então que

$$\frac{1}{D-\lambda}\,T = \int_0^t e^{\lambda(t-u)}\,T(u)\,du$$

adoptando t como variável independente, em vez de x. E esta fórmula permite efectivamente demonstrar que a função $(D-\lambda)^{-1}$ de λ verifica as condições exigidas.

Mas repare-se agora que o integral escrito é um <u>produto de composição</u>: o da função

$$e^{\lambda t}H(t) \quad \text{por } T\text{, isto é:}$$

$$\frac{1}{D-\lambda}\, T = (e^{\lambda t}\, H) * T$$

(Há que truncar a função $e^{\lambda t}$ multiplicando-a por $H(t)$, para obter uma função nula à esquerda da origem; mas, na prática, pode omitir-se depois o factor H, adoptando o conceito, atrás referido, de <u>produto de composição relativo ao intervalo</u> $[0, +\infty[$).

Segundo notação anteriormente utilizada, podemos ainda escrever

$$\frac{1}{D-\lambda}\, T = \tilde{T}\,(e^{\lambda t}.H)$$

Será então

$$f(D)\, T = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \tilde{T}(e^{\lambda t}\, H)\, f(\lambda)\, d\lambda$$

Tínhamos visto que $\tilde{T}$ é uma aplicação <u>linear contínua</u> do espaço C_{Ψ}^{+} em si mesmo, - portanto, $\tilde{T}$ é permutável com a integração de funções de λ com os valores em C_{Ψ}^{+}, o que permite escrever ainda

$$f(D)\, T = \tilde{T}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{\lambda t}\, H.f(\lambda)\, d\lambda\right]$$

(Note-se que $\tilde{T}$ é uma aplicação que apenas actua sôbre distribuições da variável t, enquanto λ é ali a variável de integração).

Como, por outro lado, $\tilde{T}\,(S) = S * T$, teremos

$$f(D).T = \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{\lambda t}\, H.f(\lambda)\, d\lambda\right] * T$$

Então se pusermos

$$\boxed{F = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{\lambda t}\, H(t).f(\lambda)\, d\lambda \quad ,}$$

a fórmula anterior assume finalmente o aspecto sugestivo

$$\boxed{f(D)\; T = F * T}$$

Em resumo: com esta fórmula estamos habilitados a calcular <u>qualquer função analítica do operador</u> D, desde que essa função pertença ao espaço $\mathcal{A}_{\omega}$.

Note-se que, em geral, F é uma distribuição nula à esquerda da origem, que se chama anti-transformada de Laplace da função analítica f, e que representaremos por $\mathcal{K}[f]$, isto é:

$$F = \mathcal{K}[f] \quad ,$$

onde $\mathcal{K}$ designa a ànti-transformação de Laplace. Esta transformação $\mathcal{K}$ muda pois as funções analíticas pertencentes a $\mathcal{A}_{\omega}$ em determinadas distribuições, nulas à esquerda da origem. Uma vez determinada a anti-transformada da função analítica f, a "função analítica", f(D), do operador D, aplicada a uma distribuição $T \in C_{\pi}^{+}$, conduz a um resultado que é precisamente o produto de composição

$$F * T \quad .$$

Surgem agora várias propriedades da anti-transformação $\mathcal{K}$ de Laplace, muito interessantes e importantes.

Segundo o Cálculo Operacional, que tínhamos estabelecido para um qualquer operador θ, já sabemos que, se fôr

$$f = f_1 . f_2, \text{com } f_1 \in \mathcal{A}_{\omega}, \ f_2 \in \mathcal{A}_{\omega}$$

será

$$f(D) = f_1(D) . f_2(D).$$

No caso actual teremos pois

$$f_1(D) . f_2(D) . T = f_1(D) \left[f_2(D) . T \right] =$$

$$= F_1 * \left[F_2 * T \right] = (F_1 * F_2) * T$$

onde, F_1 e F_2 representam as anti-transformadas de Laplace das funções f_1 e f_2, e tendo em vista a propriedade associativa do produto de composição. Com base neste resultado, podemos pois escrever:

$$\boxed{\mathcal{K}\left[f_1 . f_2\right] = \mathcal{K}\left[f_1\right] * \mathcal{K}\left[f_2\right] \ ,}$$

isto é:

"A anti-transformação de Laplace transforma o produto usual de funções analíticas no produto de composição".

Outro resultado ainda: tínhamos visto que, sendo T uma qualquer distribuição, se tem

$$D^n \, T = \delta^{(n)} * T$$

Ora, D^n é uma função analítica muito simples de D obtem-se substituindo z por D na função z^n, que pertence manifestamente a $\mathcal{A}_\omega$. Como $D^n T = \delta^{(n)} * T$, concluimos que $\delta^{(n)}$ é a <u>anti-transformada</u> de z^n. Em símbolos:

$$\boxed{K\left[z^n\right] = \delta^{(n)}}\ ,\text{para } n = 0,1,2,\ldots$$

É claro que esta igualdade carecia inteiramente de sentido antes da teoria das distribuições.

Em particular, teremos:

para $n = 0$, $K\left[1\right] = \delta$;

para $n = 1$, $K\left[z\right] = \delta'$

Podemos agora calcular a anti-transformada do produto $z.f(z)$, de z por uma função analítica $f \in \mathcal{A}_\omega$; tendo em vista as propriedades da anti-transformação K já estabelecidas, teremos sucessivamente:

$$K\left[z.f(z)\right] = K(z) * K\left[f(z)\right] = \delta' * K\left[f\right].$$

Ora, $\delta' * T = DT$; podemos pois escrever:

$$\boxed{K\left[z.f(z)\right] = D\,K\left[f\right]}.$$

que é talvez a mais notável das fórmulas relativas à anti-transformação de Laplace. Pode traduzir-se o seu significado, dizendo que

"<u>a anti-transformação de Laplace transforma a multiplicação por z numa derivação</u>".

Mais geralmente ainda:

<u>transforma a multiplicação por z^n na derivação de ordem n</u>. Por aqui se vê imediatamente que a intervenção da teoria das distribuições é inevitável, - porque pode acontecer (e há disso exemplos bem conhecidos) que a anti-transformada de uma função analítica, f, no sentido clássico seja uma função contínua sem derivada em ponto algum: a anti-transformada do produto $z.f(z)$ será então (segundo a fórmula anterior) a derivada de uma função contínua sem derivada em ponto algum, isto é, uma distribuição.

Isto mostra bem que a teoria das distribuições é indispensável para uma teoria completa da <u>transformação de Laplace</u>, (como o é para uma teoria satisfatória da <u>transformação de Fourier</u>)

Vamos agora caracterizar as distribuições que são <u>anti-transformadas de Laplace</u> de funções analíticas.

Vimos que, sendo $f \in \mathcal{A}_\omega$, se tem

$$K[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{\lambda t} H\, f(\lambda)\, d\lambda$$

A anti-transformada de Laplace de uma função analítica é assim uma distribuição nula à esquerda da origem.

<u>Mas a recíproca não é verdadeira</u> : nem sempre uma distribuição nula à esquerda da origem é anti-transformada de uma função f. Vejamos então como caracterizar as distribuições- ás quais chamaremos <u>laplacisáveis</u>- que são anti-transformadas de funções $f \in \mathcal{A}_\omega$. Dizer que $f \in \mathcal{A}_\omega$ equivale a afirmar a existenc'a de um número natural k tal que

$$\frac{f(z)}{z^k}$$

é uma função (de z) <u>analítica e limitada</u> no semi-plano direito $\mathcal{R}\, z \geq k$.

Representemos por g(z) a função $\frac{f(z)}{k^{k+2}}$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^{k+2}}$$

Por comodidade de notação, representaremos ainda k+r por r, isto é, poremos: $r = k+2$.

É então fácil reconhecer que a função $z^2 g(z)$ é uma <u>função analítica</u> e limitada no semi-plano $\mathcal{R}\, z \geq k$ e que

$$f(z) = z^r g(z).$$

Teremos então

$$K[f] = K[z^r g(z)] = D^r K[g] \quad .$$

Já sabemos que

$$K[g] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} e^{\lambda t} H\, g(\lambda)\, d\lambda$$

Portanto,

$$K[f] = \frac{1}{2\pi i} D^r \int_{\Gamma_r} e^{\lambda t} H\, g(\lambda)\, d\lambda$$

Ora, fazendo $\lambda = u+iv$, é certo que sôbre a recta Γ_r

se tem $u = r$, e, por outro lado, $d\lambda = i dv$. Como é, por sua vez,

$e^{\lambda t} = e^{(r+iv)t} = e^{rt} \cdot e^{ivt}$, podemos escrever:

$$K[f] = \frac{1}{2\pi} D^r \left[e^{rt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivt} H.g(r+iv)\, dv \right],$$

visto que não sendo t variável de integração, se pode passar e^{rt} "para fóra" do símbolo de integral. Somos assim levados a considerar o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivt} H.g(r+iv)\, dv ,$$

integral este que se pode estudar, por exemplo, pelo conhecido método dos resíduos (da teoria das funções analíticas). É fácil ver, antes de mais, que para todo o valor real de t êste integral impróprio existe, porque é, por um lado $|e^{ivt}| = 1$, se v e t forem reais, e que, por outro lado, $z^2 g(z)$ é uma função analítica limitada no semi-plano $\Re z \geq k$. As mesmas razões nos habilitam a afirmar que o referido integral impróprio é uma função contínua da variável real, t, que se anula à esquerda da origem, e é limitada.

Podemos portanto escrever

$$K[f] = D^r \left[e^{rt} G(t) \right],$$

sendo $G(t)$ uma função contínua e limitada (sôbre a recta), que se anula à esquerda da origem. (Supomos, é claro, englobado em $G(t)$ o factor $\frac{1}{2\pi}$)

Somos assim levados a considerar o conjunto de todas as distribuições, nulas à esquerda da origem, exprimiveis sob a forma

$$F = D^k \left[e^{kt} G(t) \right],$$

sendo k um número natural qualquer e $G(t)$ uma função contínua e limitada na recta, e nula à esquerda da origem. Tudo isto se pode deduzir do estudo do integral impróprio hà pouco escrito.

É aquela a expressão geral das distribuições laplacisáveis. Portanto, uma função laplacisável será da forma

$$e^{kt}\, G(t)$$

$G(t)$ é uma função contínua e limitada sôbre a recta, e nula à esquerda da origem. Multiplicando-a por e^{kt}, obtemos uma função que em geral cresce muito ràpidamente em módulo supondo $t \longrightarrow +\infty$; trata-se de funções que se dizem de tipo exponencial à direita.

O mesmo se poderá dizer, mais geralmente quanto ás funções laplacisáveis: são distribuições de tipo exponencial à direita, ou- como também se diz distribuições que crescem mais lentamente que as exponenciais, quando $t \longrightarrow +\infty$.

Representemos por $\mathcal{F}_k$ o espaço de todas as distribuições laplacisáveis, isto é, daquela forma. Fàcilmente se reconhece que se trata de um sub-espaço vectorial do espaço C_π^+:

$$\mathcal{F}_k \subset C_\pi^+ ,$$

sub-espaço êste onde convém introduzir uma noção adequada de limite: a $\mathcal{F}_k$ atribui-se a mais forte noção de limite que torna contínua a anti-transformação de Laplace. Essa noção pode explicitar-se do modo seguinte:

Diz-se que uma sucessão de distribuições $F_1, F_2, \ldots, F_n \ldots$ laplacisáveis ($\in \mathcal{F}_k$) tende para uma determinada distribuição laplacisável F ($\mathcal{F}_k$), e escreve-se

$$\lim F_n = F,$$

quando existe uma sucessão

$$G_1, G_2, \ldots\ldots, G_n, \ldots\ldots$$

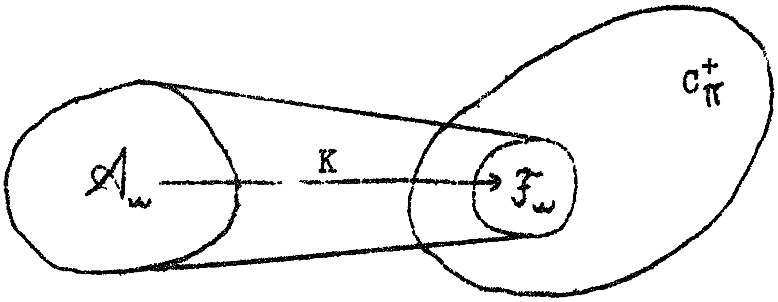
constituída por funções contínuas e limitadas sobre a recta, nulas à esquerda da origem, sendo essa sucessão uniformemente convergente na recta para uma função G nas mesmas condições e sendo além disso

$$F_n = D^r \left[e^{rt}\, G_n \right] ,$$
$$F = D^r \left[e^{rt}\, G \right]$$

Apresenta-se-nos por último a seguinte questão: estabelecemos, por meio da fórmula

$$F = K\,[f]$$

uma aplicação do espaço $\mathcal{A}_\omega$ no espaço $\mathcal{F}_\omega$ de todas as distribuições laplacisáveis, o qual é um sub-espaço de C_{π}^{+}.



O espaço $\mathcal{F}_\omega$ das distribuições laplacisáveis é pois a imagem do espaço $\mathcal{A}_\omega$ mediante K:

$$\mathcal{F}_\omega = K\left[\mathcal{A}_\omega\right].$$

É natural agora preguntar: será <u>reversível</u> a transformação K ? A resposta é afirmativa: a anti-transformação de Laplace admite <u>inversa</u>; esta é a transformação de Laplace, que se representa por $\mathcal{L}$. Tal facto pode provar-se muito fàcilmente com as noções até agora expostas. Tem-se concretamente:

$$\mathcal{L}\left[F\right] = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\, F(t)\, dt$$

É fácil reconhecer que esta transformação $\mathcal{L}$ satisfaz efectivamente ás condições seguintes:

$$\mathcal{L}K\left[f\right] = f$$
$$K\mathcal{L}\left[F\right] = F \qquad \text{Isto é,}$$

$\mathcal{L}K = K\mathcal{L} = I$ (operador idêntico); por outras palavras, $\mathcal{L}$ e K são aplicações <u>inversas</u> uma da outra.

Prova-se ainda que a transformação $\mathcal{L}$ (de Laplace) é, tal como K, uma aplicação <u>contínua</u>. Este facto não acontecia, era impossível mesmo, antes da intervenção da teoria das distribuições na formulação da teoria da <u>transformação de Laplace</u>. Na teoria clássica, a transformação $\mathcal{L}$ de Laplace não <u>era contínua</u>, a respeito das noções de limite que se usavam. E daí resultavam sérias dificuldades no domínio das aplicações da transformação de Laplace, - em particular, no estudo de equações em derivadas parciais.

Pode agora observar-se que, das propriedades que estudámos para a anti-transformação, $\mathcal{K}$, de Laplace, resultam propriedades homólogas para a transformação $\mathcal{L}$.

Assim, vimos que $\mathcal{K}$ transforma o produto vulgar de funções analítias no produto de composição das respectivas anti-transformadas. Então, $\mathcal{L}$ transformará o produto de composição de distribuições no produto usual de funções:

$$\boxed{\mathcal{L}[S * T] = \mathcal{L}[S] \cdot \mathcal{L}[T] \quad ,}$$

supondo, evidentemente, S e T distribuições ambas laplacisáveis.

Tendo em vista outra propriedade da anti-transformação de Laplace, podemos escrever

$$\mathcal{L}\left[\delta^{(n)}\right] = z^n$$

E, finalmente, de outra propriedade notável da aplicação $\mathcal{K}$, inferimos que

$$\mathcal{L}[D\,T] = z.\mathcal{L}[T]$$

Esta é uma das mais conhecidas propriedades da transformação de Laplace. Se recordarmos, no entanto, a fórmula equivalente deduzida na teoria clássica, apercebemo-nos de que "falta" um termo, na igualdade precedente, - o termo subtractivo que contém o valor da função na origem. A razão da citada diferença decorre de que, na teoria clássica, se aplica a transformação de Laplace a funções não condicionadas pela imposição de serem nulas à esquerda da origem: ora, no caso actual, trabalhando com distribuições nulas à esquerda da origem, a fórmula é, simplesmente, a que acima ficou escrita. É mais uma vantagem de nos circunscrevermos ao espaço C_{π}^{+}, o que, como vimos em lições anteriores, é possível mediante a operação da truncatura.

Tem sido várias vezes postas em paralelo as propriedades da transformação $\mathcal{L}$ de Laplace e as propridades dos logaritmos, - que transformam (por exemplo), a multiplicação em adição, a radiciação em divisão, etc.

Há tabelas já extensas (e que estão constantemente a ser ampliadas) de transformadas de Laplace, nas quais figuram, de um lado, funções ou mesmo distribuições, e do outro, as respectivas transformadas de Laplace. Nessas tabelas intervêm funções transcendentes mais ou menos conhecidas- como as funções de Bessel, funções elípticas, função Θ dos erros, etc.

Assim, muitas vezes, para calcular um produto de composição $S * T$, se S e T forem laplacisáveis, pode supor-se o problema resolvido,- pelo menos teòricamente: começamos por procurar na tabela as transformadas de Laplace $\mathcal{L}[S]$ e $\mathcal{L}[T]$; multiplicamos estas funções analíticas à maneira usual, e procuramos depois definir a anti-transformada da função obtida. Teremos assim calculado $S * T$

Em todo o caso, é fácil reconhecer que <u>o que essencialmente interessa na resolução de equações em derivadas parciais, não é a transformação de Laplace, mas sim a anti-transformação $\mathcal{K}$ de Laplace, que permite dar sentido a determinadas funções analíticas do operador D</u> .

....

<u>Exemplo</u>

Vamos apresentar um só, e aliás muito simples exemplo de aplicação do novo método da transformação de Laplace à resolução de equações em derividas parciais.(1)

Consideremos a já referida <u>equação de propagação do calor</u>, no caso siples em que esta é <u>homogénea</u>,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = o \qquad (k \text{ real}), \tag{1}$$

sendo impostas a condição inicial

$$\lim_{t \to o^-} \varphi(x,t) = o, \quad \text{com } x \geqslant o \ ,$$

e as condições nos limites

$$\lim_{x \to o^+} \varphi(x,t) = u(t) \ , \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x,t) = o \ ,$$

sendo $u(t)$ uma distribuição nula para $t < o$

Como o 2º membro da equação dada é nulo e o valor inicial é nulo também $[\varphi(x,o) = o]$, podemos desde já concluir que a incógnita é identicamente nula para $t < o$.

(1) São já numerosos os artigos e memórias em que se faz a resolução de equações em derivadas parciais mediante a transformação de Laplace de Distribuições.

É este pois um caso particularmente simples: se a condição inicial não fosse nula, teríamos de recorrer ao processo de truncatura.

Vamos pois encarar $\varphi(x,t)$ como uma função de x cujos valores são distribuições de t:

a cada x corresponde uma determinada função (ou distribuição) de t.

Vamos representar por D o operador da derivação em ordem a t. Encararemos pois a equação dada como uma equação diferencial ordinária.

$$(2) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} - k^2 D\varphi = o ,$$

onde a incógnita é agora uma função vectorial de x, cujos valores são distribuições de t.

O Cálculo Operacional estabelecido habilita-nos a tratar o símbolo D como se fôsse um símbolo numérico.

Mais precisamente, suponhamos, que se tratava de integrar a equação

$$(3) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} - k^2 z\,\varphi = o,$$

onde z designa um parâmetro complexo. Trata-se, evidentemente, de uma equação diferencial linear de 2ª ordem, cujo integral geral é

$$\varphi = c_1\, e^{-kx\sqrt{z}} + c_2\, e^{kx\sqrt{z}},$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias. (Basta lembrar que a equação diferencial proposta tem por equação característica $x^2-k^2z = o$, cujas raízes são $x = \pm k\sqrt{z}$)

Suponhamos que são impostas as seguintes condições nos limites:

$$\lim_{x\to o^+} \varphi(x) = C$$

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = o \qquad ,$$

Fàcilmente se reconhece que, neste caso, vem necessàriamente $c_1=C$, $c_2 = o$.

Portanto, a solução será

$$\varphi = e^{-kx\sqrt{z}} . C$$

Mais geralmente, podemos supôr que C é uma função (ou distribuição) de t, C = U(t), nula à esquerda da origem; então φ passa a ser uma função de x cujos valores são distribuições de t, função essa que verifica certamente a equação diferencial (3), bem como as condições nos limites impostas. Mais ainda: é fácil ver que a expressão

$e^{-kx\sqrt{z}}$ representa uma função de x, cujos valores são funções de z pertencentes a $\mathcal{A}_\omega$, função essa que é derivável a respeito da noção de limite de $\mathcal{A}_\omega$, etc. Então, nesta ordem de ideias, atendendo ao homomorfismo contínuo $f \longrightarrow f(D)$, que, pelo Cálculo Operacional de D, se estabeleceu entre o anel $\mathcal{A}_\omega$ e o anel dos operadores f(D), chega-se à conclusão de que a função de x

$$(4) \qquad = e^{-kx\sqrt{D}} . U(t)$$

verifica a equação (2) e as respectivas condições impostas nos limites. Pode mesmo reconhecer-se que é essa a única solução que satisfaz às referidas condições.

Resta ver como se pode "calcular" a solução indicada em (4).

(Não esqueçamos que o operador D actua sôbre distribuições de t, figurando agora x como parâmetro).

Segundo a fórmula em que se baseia o Cálculo Operacional de D, para "realizar" o operador

$$e^{-kx\sqrt{D}}$$

há que, primeiramente calcular a anti-transformada da função

$$e^{-kx\sqrt{z}}$$

de z. Seja

$$\mathcal{K}_z \left[e^{-kx\sqrt{z}} \right] = \psi(x,t)$$

essa anti-transformada, que dependerá, evidentemente, do parâmetro x. (Recordemos que funções de z pertencentes a $\mathcal{A}_\omega$ são transformadas em distribuições de t, pertencentes a $\mathcal{F}_\omega$).

Então será, segundo a referida fórmula do Cálculo Operacional:

$$\varphi(x,t) = \psi(x,t) * U(t),$$

sendo esta, portanto, a solução (única) da equação (1) proposta, que verifica a condição inicial e as condições nos limites que foram indicadas.

E aqui ressalta uma entre as várias vantagens do novo método directo, sôbre o método clássico: o método directo não exige que a $U(t)$ seja laplacisável: é qualquer distribuição nula à esquerda da origem.

Em particular, se $U(t)$ fôr laplacisável, então poderemos, se tal fôr mais cómodo, calcular aquele produto de composição, por meio da transformação de Laplace:

$$\mathcal{L}_t\left[\psi(x,t) * U(t)\right] = e^{-kx\sqrt{z}}\,\mathcal{L}[U]$$

Tendo determinado (eventualmente, por meio das tabelas) a função $\mathcal{L}[U]$ bastará achar a anti-transformada da função

$e^{-kx\ z}\,\mathcal{L}[U]$ de z, para ter automàticamente a solução $\varphi(x,t)$ da equação da propagação do calor, com as condições iniciais e nos limites, que indicamos.

É claro, que neste caso, não é necessário achar a anti-transformada $\psi(x,t)$ de $e^{-kx\sqrt{z}}$, mas sim a da função de acima indicada.